T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK ÇOKLU KÜMELER VE TOPOLOJİK UZAYLAR

Tezi Hazırlayan
İsmail OSMANOĞLU

Tezi Yöneten
Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2013
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK ÇOKLU KÜMELER VE TOPOLOJİK UZAYLAR

Tezi Hazırlayan
İsmail OSMANOĞLU

Tezi Yöneten
Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2013
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Hacı AKTAŞ danışmanlığında **İsmail OSMANOĞU** tarafından hazırlanan **"Esnek Çoklu Kümeler ve Topolojik Uzaylar"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

17.06.2013

JÜRİ :

Başkan : Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye : Doç. Dr. Murat ATİŞ

Üye : Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

ONAY :

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 21../06/ 2013 tarih ve 2013/17-02 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

21../06/ 2013

Doç.Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Müdür

TEŞEKKÜR

Desteklerini ve bilgilerini esirgemeyen saygı değer danışmalarım Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT ve Doç. Dr. Hacı AKTAŞ başta olmak üzere Nevşehir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine, hayat boyu üzerime titreyen ve beni bugünlere getiren ailem ve ağabeyim Mehmet OSMANOĞLU başta olmak üzere üstümde emeği olan tüm sevdiklerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ESNEK ÇOKLU KÜMELER VE TOPOLOJİK UZAYLAR

İsmail OSMANOĞLU

Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2013
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

ÖZET

Esnek küme teorisi bazı belirsizliklerle başa çıkmak için matematiksel bir araç olarak Molodtsov tarafından ortaya atıldı. Ayrıca, çoklu küme teorisi klasik küme teorisine yeni bir yaklaşım getirmiştir.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak esnek küme ve çoklu küme kavramları tanıtıldı. Bu kavramların bir çok matematiksel yapısı hatırlatıldı.

Daha sonra esnek kümeler ile çoklu kümelerin birleşimi olan esnek çoklu küme kavramı tanımlandı. Bu kavramın bir çok matematiksel yapısı incelendi. Sonrasında iki esnek çoklu küme arasında esnek çoklu fonksiyon yapısı tanımlandı.

Son olarak esnek çoklu kümeler üzerine esnek çoklu topoloji yapısı kuruldu. Esnek çoklu topoloji üzerinde bir çok topolojik yapı tanımlandıktan sonra bu yapıların temel tanım ve teoremleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Esnek çoklu küme; esnek çoklu fonksiyon; esnek çoklu topoloji; esnek çoklu açık küme; esnek çoklu sürekli fonksiyon; esnek çoklu ayırma aksiyomları; esnek çoklu kompakt uzay; esnek çoklu bağlantılı uzay.

SOFT MULTISETS AND TOPOLOGICAL SPACES

İsmail OSMANOĞLU
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, June 2013
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hacı AKTAŞ

ABSTRACT

The soft set theory was introduced by Molodtsov as a mathematical tool for dealing with some uncertainties. In addition to multiset theory introduced a new approach to the classical set theory.

In this work of thesis, firstly concept of soft set and concept of multiset was introduced. Then, various mathematical structure of this concepts was recalled.

Later, the concept of soft multisets which is combining soft sets and multisets was defined. Many mathematical structure of this concept was examined. Then, structure of soft multi function in between two soft multiset was defined.

Finally, soft multi topology on soft multisets was defined. After many topological structure on soft multi topology was defined, basic definition and theorems of these structures was examined.

Keywords: Soft multiset; soft multi function; soft multi topology; soft multi open set; soft multi continuous function; soft multi Separation axioms; soft multi compact space; soft multi connected space.

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Mühendislik, sağlık bilimleri, ekonomi, çevresel problemlerin çoğunda çeşitli belirsizlikler mevcuttur. Molodtsov tarafından ortaya atılan esnek küme teorisi belirsizliklerden bazılarının üstesinden gelebileceğimiz matematiksel bir araçtır.

Molodtsov [1] ilk çalışmasında esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzsüzlüğü, oyun teorisi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçü teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır.

Molodtsov'un [1-2] çalışmalarından sonra esnek kümeler teorisinin diğer alanlara ve gerçek hayatta karşılaştığımız problemlere uygulamaları olmuştur. Maji, Roy, ve Biswas [3] esnek kümelere ilk uygulama olarak karar verme problemlerine en iyi nesne seçimi için parametre düşürme yöntemini temel alan bir yöntemle uygulamışlardır. Ayrıca bu yazarlar [4] esnek kümelerin teorik çalışmalarını genişletmişlerdir. Chen [5] kaba kümelerle (rough sets) karşılaştırılmasını kullanarak parametre düşürme yöntemine yeni bir yaklaşım vermiştir. Pei ve Miao [6] esnek kümelerin bilgi sistemlerinin (information systems) özel bir sınıfı olduğunu göstermiştir. Esnek kümelerin cebirsel yapılara ilk uygulaması esnek grupları içeren çalışmalarıyla Aktaş ve Çağman [7] tarafından verilmiştir. Shabir ve Naz [8] esnek kümelerin topolojik yapılarını ve bu uzaylardaki ayırma aksiyomlarını çalıştılar. Esnek kümeler üzerindeki topolojik yapıların süreklilik, taban ve kompaktlık gibi temel kavramları Aygünoğlu ve Aygün [9] tarafından incelenmiştir. Daha sonra Varol ve Aygün [10] esnek kümeler üzerinde Hausdorff uzayını tanımlamışlardır.

Klasik küme teorisinde kümenin elemanlarının tekrarına izin verilmez. Ancak bazı durumlarda elemanların tekrarı kullanışlı olabilmektedir. Eğer bir kümenin elemanlarının tekrarına izin verilirse bu küme çoklu küme olarak bilinir. Çoklu kümeler güncel hayatta bilgisayar bilimleri, tıp, bakancılık, mühendislik, bilgi depolama ve bilgi analizi gibi bir çok alanda kullanılabilmektedir.

Çoklu küme teorisi, Cerf, Fernandez, Gostelow ve Volausky [11] tarafından ortaya konulmuştur. Peterson [12] ve Yager [13] çoklu küme teorisinin ilerlemesinde katkı sağlamışlardır. Bu yazarlar, seçme operatörü ve bulanık çoklu kümeler gibi bir çok sonuç ortaya koymuşlardır. Bu ilerleme Jena, Ghosh ve Tripathy [14] tarafından sürdürülmüştür. Manjunath ve John [15] çoklu küme bağıntısında ilk çalışma yapanlardır. Girish ve John [16] çoklu küme bağıntısı ve çoklu küme fonksiyonunu tanımlamışlardır. Bu yazarlar [17] çoklu küme bağıntılarını kullanarak çoklu kümeler üzerinde topoloji ve bazı topolojik yapıların tanımlarını vermişlerdir.

Esnek küme ve çoklu küme kavramlarını birleştirerek esnek çoklu küme kavramı ilk olarak Babitha ve John [18] tarafından tanımlanmıştır.

Biz bu çalışmada Babitha ve John nun verdiği esnek çoklu küme tanımından daha genel bir tanım verdik. Esnek çoklu kümelerde bir çok sonucu ortaya koyduk. Ayrıca elde ettiğimiz esnek çoklu küme üzerinde topoloji yapısını inşa ettik. Bu topolojiye esnek çoklu topoloji adını verdik. Elde edilen bu topolojide esnek çoklu açık küme, esnek çoklu alt uzay, esnek çoklu baz, esnek çoklu ayırma aksiyomları, esnek çoklu kompakt uzay ve esnek çoklu bağlantılı uzay yapılarını ve özelliklerini inceledik.

2.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, esnek kümeler ve çoklu kümeler tanıtılmıştır. Esnek ve çoklu kümelerin en temel matematiksel yapısı, esnek bağıntı, esnek fonksiyon, çoklu bağıntı ve çoklu fonksiyon kavramları verilmiştir.

2.1. Esnek Kümeler

Bu bölümde Molodtsov [1] tarafından tanımlanan esnek kümeler ve esnek kümeler üzerinde tanımlanan birleşme, kesişim, alt küme bir çok yapıyı hatırlattık.

Tanım 2.1.1 [1] U evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(U)$, U nin kuvvet kümesini ve A, E nin boştan farklı bir alt kümesini göstersin. (F, A) sıralı ikilisi U üzerinde bir *esnek küme* olarak adlandırılır. Burada F, $F: A \rightarrow P(U)$ şeklinde bir dönüşümdür.

Bir başka deyişle, U üzerinde bir esnek küme, U evrensel kümesinin alt kümelerini parametrize edilmiş bir ailesidir. $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$, (F, A) esnek kümesinin ε-yaklaşık elemanlarının kümesi olarak düşünülebilir. Açıkça, esnek bir küme, küme değildir.

Örnek 2.1.2 Kabul edelim ki, U, göz önüne alınan şartlar altındaki evlerin kümesi ve
E, parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime ya da cümledir.
$E = \{pahalı,\ güzel,\ ahşap,\ ucuz,\ bahçeli,\ modern,\ iyi\ durumda,$
$kötü\ durumda\}$
Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, pahalı evler, güzel evler ve diğerlerini belirtmek anlamına gelir.
(F, E) esnek kümesi Mr. X in satın alacağı "evlerin çekiciliği" ni belirtiyor.

Kabul edelim ki, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ ile verilen U evreninde 6 ev olsun ve e_1 '$pahalı$' parametresini, e_2 '$güzel$' parametresini, e_3 '$ahşap$' parametresini, e_4 '$ucuz$' parametresini, e_5 '$bahçeli$' parametresini göstermek üzere, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde verilsin. Kabul edelim ki, $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ olsun. (F, E) esnek kümesi U kümesinin alt kümelerinin $\{F(e_i),\ i = 1, 2, 3, \ldots, 8\}$ parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının bir koleksiyonunu verir.

Bu nedenle, biz (F, E) esnek kümesini aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz:

$(F, E) = \{$ $pahalı\ evler = \{h_2, h_4\},\ güzel\ evler = \{h_1, h_3\},\ ahşap\ evler = \{h_3, h_4, h_5\},\ ucuz\ evler = \{h_1, h_3, h_5\},\ bahçeli\ evler = \{h_1\}\}$.

Tanım 2.1.3 [4] U evrensel kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) iki esnek kümesi için

(1) $A \subseteq B$ ve

(2) $\forall e \in A$ için $F(e)$ ve $G(e)$ özdeş yaklaşımlar

ise (F, A) esnek kümesine (G, B) nin *esnek alt kümesi* denir ve $(F, A) \subset (G, B)$ şeklinde gösterilir. Eğer (G, B), (F, A) nın esnek alt kümesi ise (F, A) kümesine (G, B) nin *esnek üst kümesi* denir ve $(F, A) \supseteq (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 [4] Eğer (F, A), (G, B) nin esnek alt kümesi ve (G, B) de (F, A) nın esnek alt kümesi ise (F, A) ve (G, B) esnek kümelerine U üzerinde *esnek eşittir* denir.

Tanım 2.1.5 [4] $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olsun. $\rceil E$ ile gösterilen DEĞİL küme $\rceil E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \ldots, \neg e_n\}$ ile tanımlanır. Burada, $\neg e_i = değil\ e_i, \forall i$. Burada $\neg$ ile $\rceil$ farklı operatörlerdir.

Önerme 2.1.6 [4] A ve B parametre kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

(1) $\rceil(\rceil A) = A$,

(2) $\rceil(A \cup B) = \rceil A \cup \rceil B$,

(3) $\rceil(A \cap B) = \rceil A \cap \rceil B$.

Tanım 2.1.7 [4] Bir (F, A) esnek kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ şeklinde gösterilir ve $(F, A)^c = (F^c, \rceil A)$ şeklinde ifade edilir. Burada, $F^c\!: \rceil A \to P(U), F^c(\alpha) = U - F(\neg\alpha)$, $\forall \alpha \in \rceil A$ ile verilen dönüşümdür.

F^c yi F nin esnek tümleyen fonksiyonu olarak isimlendirelim. Açıkça, $(F^c)^c$, F ile aynıdır ve $((F,A)^c)^c = (F,A)$ şeklindedir.

Örnek 2.1.8 Örnek 2.1.2 göz önüne alınırsa, $(F,E)^c = \{\, pahalı\ olmayan\ evler = \{h_1, h_3, h_5, h_6\},\ güzel\ olmayan\ evler = \{h_2, h_4, h_5, h_6\},\ ahşap\ olmayan\ evler = \{h_1, h_2, h_6\},\ ucuz\ olmayan\ evler\ \{h_2, h_4, h_6\},\ bahçeli\ olmayan\ evler = \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}\}$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.9 [4] Eğer $\forall \varepsilon \in A,\ F(\varepsilon) = \emptyset$ (boş küme) ise U üzerinde bir (F,A) esnek kümesi *boş esnek küme* olarak isimlendirilir ve Φ ile gösterilir

Tanım 2.1.10 [4] Eğer $\forall \varepsilon \in A,\ F(\varepsilon) = U$ ise U üzerinde bir (F,A) esnek kümesi *mutlak esnek küme* olarak isimlendirilir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. Açıkça, $\tilde{A}^c = \Phi$ ve $\Phi^c = \tilde{A}$ dır.

Tanım 2.1.11 [4] Eğer (F,A) ve (G,B) iki esnek küme ise, $(F,A) \wedge (G,B)$ ile gösterilen "$(F,A)\ VE\ (G,B)$" işlemi $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta),\ \forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ şeklindedir.

Tanım 2.1.12 [4] Eğer (F,A) ve (G,B) iki esnek küme ise, $(F,A) \vee (G,B)$ ile gösterilen "$(F,A)\ VEYA\ (G,B)$" işlemi $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada $O(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cup G(\beta),\ \forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ şeklindedir.

Önerme 2.1.13 [22] (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

(1) $((F,A) \vee (G,B))^c = (F,A)^c \wedge (G,B)^c$,

(2) $((F,A) \wedge (G,B))^c = (F,A)^c \vee (G,B)^c$.

Tanım 2.1.14 [4] U üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi, (H,C) dir. Burada, $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$

$$H(e) = \begin{cases} \mathrm{F(e)}, & \text{eğer } e \in A - B \\ \mathrm{G(e)}, & \text{eğer } e \in B - A \\ \mathrm{F(e)} \cup \mathrm{G(e)}, & \text{eğer } \mathrm{e} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \end{cases}$$

ile tanımlanır. Bunu $(F,A)\ \tilde{\cup}\ (G,B) = (H,C)$ şeklinde yazarız.

Tanım 2.1.15 [21] U üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kesişimi, (H,C) dir. Burada, $C = A \cap B$ ve $\forall e \in C$ için, $H(e) = F(e)$ veya $G(e)$ (her ikisi de aynı küme olduğunda) ile tanımlanır. Bunu $(F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B) = (H,C)$ şeklinde yazarız.

2.2. Esnek Kümelerde Bağıntı

Bu bölümde esnek kümeler üzerinde Babitha ve Sunil [19] tarafından tanımlanan esnek kümelerin kartezyen çarpımı ve esnek bağıntı hatırlatıldı.

Tanım 2.2.1 [19] U üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun. O zaman (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $(F,A)\times(G,B)=(H,A\times B)$ şeklinde tanımlanır. Burada $H\colon A\times B\to P(U\times U)$ ve $(a,b)\in A\times B, H(a,b)=F(a)\times F(b)$ dır. Yani, $H(a,b)=\{(h_i,h_j)\mid h_i\in F(a),h_j\in G(b)\}$ dır.

Ayrıca, (F,A) esnek kümesi üzerinde R bağıntısını $(F,A)=\{F(a),F(b),\ldots\}$ için $F(a)RF(b)\ \Leftrightarrow F(a)\times F(b)$ şeklinde tanımlayabiliriz**.**

Tanım 2.2.2 [19] U üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun. O zaman $(F,A)\times(G,B)$ nın bir esnek alt kümesi (F,A) dan (G,B) ye bir bağıntıdır. $(F,A)\times(F,A)$ nın herhangi bir alt kümesine (F,A) da bir *bağıntı* denir.

Tanım 2.2.3 [19] $R,(F,A)$ üzerinde bir bağıntı olsun. O zaman,

(1) Eğer $\forall a\in A, H(a,a)\in R$ ise R yansımalıdır.

(2) Eğer $\forall(a,b)\in A\times A, H(a,b)\in R\Rightarrow H(b,a)\in R$ ise R simetriktir.

(3) Eğer $\forall a,b,c\in A, H(a,b)\in R, H(b,c)\in R\Rightarrow H(a,c)\in R$ ise R geçişlidir.

Tanım 2.2.4 [19] (F,A) esnek kümesi üzerinde R esnek küme bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişli ise bu bağıntıya bir *denklik bağıntısı* denir.

Tanım 2.2.5 [19] (F,A) bir esnek küme olsun. $[F(a)]$ şeklinde gösterilen $F(a)$ nın denklik sınıfı $[F(a)]=\{F(b)\mid F(b)RF(a)\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.6 [19] R^{-1} şeklinde gösterilen R esnek küme bağıntısının tersi $R^{-1}=\{(F(b)\times F(a))\mid F(b)RF(a)\}$ olarak tanımlanır.

2.3. Esnek Kümelerde Fonksiyon

Bu bölümde esnek kümeler üzerinde Babitha ve Sunil [19] tarafından tanımlanan esnek fonksiyon hatırlatıldı.

Tanım 2.3.1 [19] (F, A) ve (G, B) boş olmayan iki esnek küme olsun. Tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir tek eleman ile eşleyen (F, A) dan (G, B) ye "f" esnek küme bağıntısına bir *esnek küme fonksiyonu* denir. $F(a)fF(b)$, $f(F(a)) = G(b)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.3.2 [19] $F(a) \neq F(b)$ iken $f(F(a)) \neq f(F(b))$ ise (F, A) dan (G, B) ye f fonksiyonuna *bire bir fonksiyon* denir.

Tanım 2.3.3 [19] $ranf = (G, B)$ ise (F, A) dan (G, B) ye f fonksiyonuna *örten fonksiyon* denir.

Tanım 2.3.4 [19] Tanım kümesindeki her bir değeri değer kümesinde aynı değer ile eşleştiren fonksiyona *esnek sabit fonksiyon* denir.

Tanım 2.3.5 [19] (F, A) üzerinde bir birim fonksiyon $\forall F(a) \in (F, A)$, $I: (F, A) \rightarrow (F, A)$, $I(F(a)) = F(a)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.6 [19] $f: (F, A) \rightarrow (G, B)$ ve $g: (G, B) \rightarrow (H, C)$ iki esnek küme fonksiyonu olsun. f ve g fonksiyonlarının bileşkesi $g \circ f: (F, A) \rightarrow (H, C), (g \circ f)(F(a)) = g(f(F(a)))$ şeklinde tanımlı bir esnek küme fonksiyonudur.

Tanım 2.3.7 [19] f bire bir bir fonksiyon olsun. f^{-1} ifadesine f fonksiyonunun *tersi* denir.

Tanım 2.3.8 [19] $f: (F, A) \rightarrow (G, B)$ bire bir ve örten bir fonksiyon ise $f^{-1}: (G, B) \rightarrow (F, A)$ fonksiyonu da bire bir ve örtendir.

Tanım 2.3.9 [19] $f: (F, A) \rightarrow (G, B), g: (G, B) \rightarrow (H, C)$ bire bir ve örten olan iki esnek fonksiyon ise $g \circ f: (F, A) \rightarrow (H, C)$ fonksiyonu da bire bir ve örtendir ve $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ dir.

2.4. Çoklu Kümeler

Bu bölümde çoklu kümeler ve esnek kümelerin bir çok matematiksel yapısı hatırlatıldı.

Tanım 2.4.1 [14] X kümesinden alınan bir M *çoklu kümesi* (multiset) $C_M: X \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu ile temsil edilir.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinde bir M çoklu kümesi $M = \{k_1/x_1, k_2/x_2, \dots, k_n/x_n\}$ şeklinde gösterilir. Burada k_i, x_i in tekrar sayısıdır $(1 \leq i \leq n)$. Bu $x_i \in^{k_i} M$ şeklinde gösterilir.

$C_M(x)$, M çoklu kümesindeki x in tekrar sayısını gösterir. Ancak M çoklu kümesinin elemanı olmayan elemanlar için sıfır olarak yazılır. Yani, $x \notin X$ için $C_M(x) = 0$ dır.

Tanım 2.4.2 [14] Her $x \in X$ için $C_M(x) = 0$ ya da 1 ise M çoklu kümesi bir kümedir.

Örnek 2.4.3 $X = \{a, b, c\}$ kümesinden alınan bir M çoklu kümesi $M = \{3/a, 2/b, 5/c\} = \{a, a, a, b, b, c, c, c, c, c\}$ şeklinde verilsin. Burada $C_M\,(a) = 3$, $C_M(b) = 2$, $C_M(c) = 5$ dir.

Tanım 2.4.4 [14] M ve N, X kümesinden alınan iki çoklu küme olsun. O halde aşağıdakiler tanımlanır. Her $x \in X$ için

$i)$ $C_M\,(x) = C_N(x)$ ise $M = N$ dir.

$ii)$ $C_M\,(x) \leq C_N(x)$ ise $M \subseteq N$ dir.

$iii)$ $C_P(x) = \max\{C_M\,(x), C_N(x)\}$ ise $P = M \cup N$ dir.

$iv)$ $C_P(x) = \min\{C_M\,(x), C_N(x)\}$ ise $P = M \cap N$ dir.

$v)$ $C_P(x) = C_M(x) + C_N(x)$ ise $P = M \oplus N$ dir. Burada $M \oplus N, M$ ile N çoklu kümelerinin toplamıdır.

$vi)$ $C_P(x) = max\{C_M\,(x) - C_N(x), 0\}$ ise $P = M \ominus N$ dir. Burada $M \ominus N$, M ile N çoklu kümelerinin farkıdır.

Tanım 2.4.5 [17] $M^* = \{x \in X : C_M(x) > 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye M çoklu kümesinin *destek kümesi* denir. Burada M^* alışılmış kümedir ve X in bir alt kümesidir.

Tanım 2.4.6 [14] Her $x \in X$ için $C_M(x) = 0$ ise M çoklu kümesine *boş çoklu küme* denir.

Tanım 2.4.7 [14] M çoklu kümesinin eleman sayısı $Card(M)$ ya da $|M|$ ile gösterilir. Burada $Card(M) = \sum_{x \in X} C_M(x)$ dir.

Örnek 2.4.8 $X = \{a, b, c, d\}$ kümesinden alınan bir M çoklu kümesi $M = \{3/a, 5/c, 2/d, 0/b\}$ olsun. Burada $M^* = \{a, c, d\}$ ve $|M| = \sum_{x \in X} C_M\,(x) = C_M\,(a) + C_M\,(b) + C_M\,(c) + C_M(d) = 3 + 0 + 5 + 2 = 10$ olur.

Tanım 2.4.9 [17] X tanım kümesi, çoklu kümenin inşa edildiği elemanların kümesi olarak tanımlanır.

Tanım 2.4.10 [14] $[X]^m$ çoklu küme uzayı, elemanlarının hiç biri m den daha fazla tekrar etmeyen X çoklu kümelerinin kümesidir. $[X]^\infty$, X üzerinde tanımlı bütün çoklu kümelerin uzayıdır ve bu çoklu kümelerin elemanlarının tekrar sayısı sınırsızdır.

$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ ise $[X]^m = \{\{m_1/x_1, m_2/x_2, \dots, m_k/x_k\} \mid i = 1,2, \dots, k\ için\ m_i \in \{0,1,2, \dots, m\}\}$ dir.

Örnek 2.4.11 $X = \{a, b\}$ ise $[X]^2 = \{\{1/a, 1/b\}, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/b\}, \{2/a, 2/b\}, \{1/a\}, \{2/a\}, \{1/b\}, \{2/b\}, \emptyset\}$ dir.

Tanım 2.4.12 [14] X bir destek küme ve $[X]^m$, X üzerinde tanımlı bir çoklu küme uzayı olsun. Herhangi bir $M \in [X]^m$ çoklu kümesinin tümleyeni M^c, $[X]^m$uzayının elemanıdır öyle ki her $x \in X$ için $C_{M^c}(x) = m - C_M(x)$ dir.

Örnek 2.4.13 $[X]^2$ için $A = \{2/a, 1/b\}$ olsun. $A^c = \{1/b\}$ olur.

Tanım 2.4.14 [17] N, M nin bir çoklu alt kümesi olsun. Her $x \in N$ için $C_N(x) = C_M(x)$ ise N ye M nin *çoklu tam alt kümesi* denir.

Tanım 2.4.15 [17] N, M nin bir çoklu alt kümesi olsun. Bazı $x \in N$ için $C_N(x) = C_M(x)$ ise N ye M nin *çoklu kısmi tam alt kümesi* denir.

Tanım 2.4.16 [17] N, M nin bir çoklu alt kümesi olsun. $M^* = N^*$ ve her $x \in N^*$ için $C_N(x) \leq C_M(x)$ ise N ye M nin *çoklu dolgun alt kümesi* denir.

Örnek 2.4.17 $M = \{2/x, 3/y, 5/z\}$ bir çoklu küme olsun.

a) $\{2/x, 3/y\}$ çoklu alt kümesi M nin çoklu tam ve çoklu kısmi tam alt kümesidir. Fakat çoklu dolgun alt kümesi değildir.

b) $\{1/x, 3/y, 2/z\}$ çoklu alt kümesi M nin çoklu kısmi tam ve çoklu dolgun alt kümesidir. Fakat çoklu tam alt kümesi değildir.

c) $\{1/x, 3/y\}$ çoklu alt kümesi M nin çoklu kısmi tam alt kümesidir. Fakat ne çoklu tam ne de çoklu dolgun alt kümesidir.

Tanım 2.4.18 [17] $M \in [X]^m$ olsun. M nin çoklu tam kuvvet kümesi $PW(M)$ şeklinde gösterilir ve M nin bütün çoklu tam alt kümelerinin kümesidir.

$PW(M)$ nin eleman sayısı 2^n dir. Burada n, M^* nin eleman sayısıdır.

Tanım 2.4.19 [17] $M \in [X]^m$ olsun. M nin çoklu dolgun kuvvet kümesi $PF(M)$ şeklinde gösterilir ve M nin bütün çoklu dolgun alt kümelerinin kümesidir.

Tanım 2.4.20 [17] $M \in [X]^m$ olsun. M nin çoklu kuvvet kümesi $P(M)$ şeklinde gösterilir ve M nin bütün çoklu alt kümelerinin kümesidir.

Teorem 2.4.21 [17] $M = \{m_1/x_1, m_2/x_2, \ldots, m_n/x_n\}$ çoklu kümesinin $P(M)$ çoklu kuvvet kümesi ve $P(M)$ nin çoklu destek kümesi $P^*(M)$ olsun. O zaman $Card(P^*(M)) = \prod_{i=1}^{n}(1 + m_i)$ dir.

Örnek 2.4.22 $M = \{2/x, 3/y\}$ bir çoklu küme olsun.

M nin çoklu tam kuvvet kümesi $PW(M) = \{\{2/x\}, \{3/y\}, M, \emptyset\}$ dır.

M nin çoklu dolgun kuvvet kümesi $PF(M) = \{\{2/x, 1/y\}, \{2/x, 2/y\}, \{2/x, 3/y\}, \{1/x, 1/y\}, \{1/x, 2/y\}, \{1/x, 3/y\}\}$ dır.

M nin çoklu kuvvet kümesi $P(M) = 3/\{2/x, 1/y\}, 3/\{2/x, 2/y\}, 6/\{1/x, 1/y\}, 6/\{1/x, 2/y\}, 2/\{1/x, 3/y\}, 1/\{2/x\}, 1/\{3/y\}, 2/\{1/x\}, 3/\{1/y\}, 3/\{2/y\}, M, \emptyset\}$ dır.

P(M)'nin çoklu destek kümesi $P^*(M) = \{2/x, 1/y\}, \{2/x, 2/y\}, \{1/x, 1/y\}, \{1/x, 2/y\}, \{1/x, 3/y\}, \{2/x\}, \{3/y\}, \{1/x\}, \{1/y\}, \{2/y\}, M, \emptyset\}$ dır.

2.5. Çoklu Kümelerde Bağıntı

Bu bölümde çoklu kümeler üzerinde Girish ve John [16] tarafından tanımlanan çoklu bağıntı hatırlatıldı.

Tanım 2.5.1 [16] M_1 ve M_2, X kümesinden alınan çoklu kümeler olsun. M_1 ve M_2 çoklu kümelerinin kartezyen çarpımı $M_1 \times M_2 = \{(m/x, n/y)/mn : x \in^m M_1, y \in^n M_2\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.5.2 $M_1 = \{1/x, 2/y\}$ ve $M_2 = \{4/z\}$ iki çoklu küme olsun. O zaman

$M_1 \times M_2 = \{(1/x, 4/z)/4, (2/y, 4/z)/8\}$ dir.

Teorem 2.5.3 [16] Boş olmayan M_1 ve M_2 çoklu kümeleri için $C_{M_1 \times M_2}[(x, y)] = C_{M_1}(x). C_{M_2}(y)$ ve $|M_1 \times M_2| = |M_1|.|M_2|$ dır.

Tanım 2.5.4 [16] $M \times M$ nin bir çoklu alt kümesi R olsun. Eğer R nin her $(m/x, n/y)$ elemanı $C_1(x, y). C_2(x, y)$ tekrara sahip ise R ye M üzerinde bir *çoklu küme bağıntısı* denir. m/x ile n/y arasındaki bağıntı $m/xR\, n/y$ ile gösterilir.

Burada $C_1(x, y)$ ve $C_2(x, y)$ sırasıyla $(m/x, n/y)$ elemanındaki x ve y nin tekrar sayısını gösterir. Yani $C_1(x, y) = m$ ve $C_2(x, y) = n$ dir.

Tanım 2.5.5 [16] M üzerinde bir R çoklu küme bağıntısının tanım ve değer kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır;

$$DomR = \{x \in^r M : \exists\, y \in^s M \, öyle\, ki\, r/xRs/y\}$$

Burada $C_{DomR}(x) = sup\{C_1(x, y): x \in^r M\}$

$$RanR = \{y \in^s M: \exists\, x \in^r M \, öyle\, ki\, r/xRs/y\}$$

Burada $C_{RanR}(x) = sup\{C_2(x, y): y \in^s M\}$

Örnek 2.5.6 $M = \{8/x, 11/y, 15/z\}$ bir çoklu küme olsun. $R = \{(2/x, 4/y)/8, (5/x, 3/x)/15, (7/x, 11/z)/77, (8/y, 6/x)/48, (11/y, 13/z)/143, (7/z, 7/z)/49, (12/z, 10/y)/120, (14/z, 5/x)/70\}$ M üzerinde bir çoklu küme bağıntısıdır. Burada $DomR = \{7/x, 11/y, 14/z\}$ ve $RanR = \{6/x, 10/y, 13/z\}$ dır.

Tanım 2.5.7 [16] R çoklu küme bağıntısının tersi $R^{-1} = \{(n/y, m/x)/mn: (m/x, n/y) \in^{mn} R\}$ şeklinde tanımlanır.

2.6. Çoklu Kümelerde Fonksiyon

Bu bölümde çoklu kümeler üzerinde Girish ve John [16] tarafından tanımlanan çoklu fonksiyon hatırlatıldı.

Tanım 2.6.1 [16] Her $m/x \in Domf$ için bir $n/y \in Ranf$ elemanı vardır öyle ki $C_1(x,y)$ defa tekrarlanan $(m/x, n/y)$ elemanı f de ise f çoklu küme bağıntısına *çoklu küme fonksiyonu* denir.

Örnek 2.6.2 $M_1 = \{8/x, 6/y\}$ ve $M_2 = \{3/a, 7/b\}$ iki çoklu küme olsun. M_1 den M_2 ye bir çoklu küme fonksiyonu $f = \{(8/x, 3/a)/8, (6/y, 7/b)/6\}$ şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 2.6.3 [16] $Dom\, f$ kümesindeki farklı iki elemanın f altındaki görüntüsünün yine farklı olması ve her $(x,y) \in f$ için $C_1(x,y) \leq C_2(x,y)$ şartını sağlaması durumunda f çoklu küme fonksiyonuna *bire bir* denir.

Tanım 2.6.4 [16] $Ran\, f$ kümesi $co - domf$ kümesine eşit ve her $(x,y) \in f$ için $C_1(x,y) \geq C_2(x,y)$ şartını sağlaması durumunda f çoklu küme fonksiyonuna *örten* denir.

Tanım 2.6.5 [16] f çoklu küme fonksiyonu hem bire bir hem de örten ve her $(x,y) \in f$ için $C_1(x,y) = C_2(x,y)$ şartını sağlaması durumunda f çoklu küme fonksiyonuna *birebir ve örten* denir.

Örnek 2.6.6 $f = \{(4/x, 10/y)/4\}$ şeklinde tanımlanan $f: \{4/x\} \to \{10/y\}$ çoklu küme fonksiyonu bire bir dir.

$f = \{(10/x, 6/y)/10\}$ şeklinde tanımlanan $f: \{10/x\} \to \{6/y\}$ çoklu küme fonksiyonu örten dir.

$f = \{(4/x, 4/b)/4, (5/y, 5/a)/5\}$ şeklinde tanımlanan $f: \{4/x, 5/y\} \to \{5/a, 4/b\}$ çoklu küme fonksiyonu bire bir ve örten dir.

Hem $\{2/x, 3/y\}$ hem de $\{4/a, 1/b\}$ çoklu kümesi beş eleman içerir. Ancak tanım kümesindeki elemanların tekrarı görüntü kümesindeki elemanların tekrarına eşit olmadığından bu çoklu kümeler arasında bire bir ve örten bir fonksiyon kurulamaz.

Teorem 2.6.7 [16] $f: M \to N$ bir çoklu küme fonksiyonu, M_1 ve M_2, M nin boştan farklı iki çoklu alt kümesi olsun.

$a)$ $M_1 \subseteq M_2$ ise $f(M_1) \subseteq f(M_2)$ dir.

$b)\ f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$ dir.

$c)\ f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$ dir.

$d)\ f(M_1 \oplus M_2) = f(M_1) \oplus f(M_2)$ dir.

$e)\ f(M_1 \ominus M_2) \subseteq f(M_1) \ominus f(M_2)$ dir.

Tanım 2.6.8 [16] $Domf$ kümesinin her elemanının görüntüsü $Ranf$ kümesinde tek bir elemana eşit ve $C_{Ranf}(x) = 1$ ise f çoklu küme fonksiyonuna *sabit çoklu küme fonksiyonu* denir.

Tanım 2.6.9 [16] M üzerinde $I: M \to M$ özdeşlik çoklu küme fonksiyonu $I(m/x) = m/x$ şeklinde tanımlanır. Burada $C_1(x,x) = C_2(x,x)$ dir.

Tanım 2.6.10 [16] $f: M_1 \to M_2$ ve $g: M_2 \to M_3$ iki çoklu küme fonksiyonu olsun. O zaman $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ şeklinde tanımlı, $C_1(x,z) = min\{C_1(x,y), C_1(y,z)\}$ ve $C_2(x,z) = min\{C_2(x,y), C_2(y,z)\}$ şartlarını sağlayan $g \circ f: M_1 \to M_3$ bir çoklu küme fonksiyonudur. Bu fonksiyona f ve g çoklu küme fonksiyonlarının *bileşkesi* denir.

Örnek 2.6.11 $f = \{(2/x, 4/1)/2, (3/y, 5/1)/3, (6/z, 3/2)/6\}$ ve $g = \{(5/1, 8/p)/5, (3/2, 6/q)/3\}$ iki çoklu küme fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonların bileşkesi $g \circ f = \{(2/x, 4/p)/2, (3/y, 5/p)/3, (3/z, 3/q)/6\}$ dir.

Tanım 2.6.12 [16] f^{-1} çoklu küme bağıntısı bir çoklu küme fonksiyonu ise $f: M_1 \to M_2$ çoklu küme fonksiyonu *tersinebilirdir* denir.

3.BÖLÜM

ESNEK ÇOKLU KÜMELER

Bu bölümde, ilk olarak esnek ve çoklu kümelerin birleştirilmesiyle elde edilen esnek çoklu küme kavramı tanımlandı. Bu kümenin bir çok matematiksel özelliği incelendi. Daha sonra iki esnek küme arasında esnek çoklu fonksiyon kavramı tanımlandı ve bir çok sonucu ortaya konuldu.

3.1. Esnek Çoklu Kümeler

Tanım 3.1.1 U bir çoklu küme evrenseli, E parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. (F, A) ikilisine bir *esnek çoklu küme* denir. Burada F dönüşümü $F: A \to P^*(U)$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\forall e \in A$ için $F(e)$ çoklu kümesi $C_{F(e)} : U^* \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ile temsil edilir.

Örnek 3.1.2 $U = \{1/x, 5/y, 3/z, 4/\mathrm{w}\}$ ve $E = \{p, q, r\}$ olsun. $F: A \to P^*(U)$ dönüşümü

$$F(p) = \{1/x, 2/y, 3/z\},\ F(q) = \{4/\mathrm{w}\} \text{ ve } F(r) = \{3/y, 1/z, 2/\mathrm{w}\}$$

şeklinde tanımlansın. O halde (F, A) bir esnek çoklu kümedir. $\forall e \in A$ için $F(e)$ çoklu kümesi $C_{F(e)} : U^* \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ile

$$\begin{gathered} C_{F(p)}(x) = 1, C_{F(p)}(y) = 2, C_{F(p)}(z) = 3,\ C_{F(p)}(w) = 0, \\ C_{F(q)}(x) = 0, C_{F(q)}(y) = 0,\ C_{F(q)}(z) = 0,\ C_{F(q)}(w) = 4, \\ C_{F(r)}(x) = 0,\ C_{F(r)}(y) = 3,\ C_{F(r)}(z) = 1,\ C_{F(r)}(w) = 2 \end{gathered}$$

şeklinde tanımlıdır. O halde

$$(F, A) = \{F(p), F(q), F(r)\} = \{\{1/x, 2/y, 3/z\}, \{4/\mathrm{w}\}, \{3/y, 1/z, 2/\mathrm{w}\}\}$$

dır.

Tanım 3.1.3 U üzerindeki (F, A) ve (G, B) esnek çoklu kümeleri için, eğer

$i)$ $A \subseteq B$

$ii)$ $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x),\ \forall x \in U^*,\ \forall e \in A$

ise (F, A) esnek çoklu kümesine (G, B) esnek çoklu kümesinin *esnek çoklu alt kümesi* denir ve $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ şeklinde gösterilir. Eğer

$$C_{F(e)}(x) = C_{G(e)}(x), \forall x \in U^*, \forall e \in A$$

ise (F, A) esnek çoklu kümesine (G, B) esnek çoklu kümesinin *tam esnek çoklu alt kümesi* denir

Tanım 3.1.4 (F, A) esnek çoklu kümesi (G, B) esnek çoklu kümesinin ve (G, B) esnek çoklu kümesi (F, A) esnek çoklu kümesinin esnek çoklu alt kümesi ise (F, A) ve (G, B) esnek çoklu kümeleri eşittir. Yani,

$$(F, A) = (G, B) \Leftrightarrow (F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)\ ve\ (G, B) \tilde{\subseteq} (F, A)$$

Tanım 3.1.5 (F, A) ve (G, B) esnek çoklu kümelerinin birleşimi (H, C) esnek çoklu kümesidir. Burada $C = A \cup B$ ve $C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}, \forall x \in U^*, \forall e \in A \cup B$ dir. Bu $(F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.6 (F, A) ve (G, B) esnek çoklu kümelerinin kesişimi (H, C) esnek çoklu kümesidir. Burada $C = A \cap B$ ve $C_{H(e)}(x) = \min\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}, \forall x \in U^*, \forall e \in A \cap B$ dir. Bu $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.7 $U = \{1/x, 2/y, 3/z, 4/\mathrm{w}\}$ ve $E = \{p, q\}$ olsun. U üzerinde iki esnek çoklu küme $(F, E) = \{F(p) = \{1/x, 1/y\},\ F(q) = \{2/z\}\}$ ve $(G, E) = \{F(p) = \{1/x, 2/y\},\ F(q) = \{3/z, 4/\mathrm{w}\}\}$ şeklinde tanımlı olsun. Burada $(F, E) \tilde{\subset} (G, E)$ dir. Çünkü $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in E$ için $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x)$ dır.

$(H, E) = (F, E) \tilde{\cup} (G, E)$ olsun. O halde $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in E$ için $C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}$ olmalıdır. Yani $(H, E) = \{F(p) = \{1/x, 2/y\},\ F(q) = \{\{3/z, 4/\mathrm{w}\}\}$ dır. Gerçekten $(F, E) \tilde{\subset} (G, E)$ olduğundan $(H, C) = (F, E) \tilde{\cup} (G, E) = (G, E)$ dır.

$(H,E) = (F,E) \tilde{\cap} (G,E)$ olsun. O halde $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in E$ için $C_{H(e)}(x) = \min\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}$ olmalıdır. Yani $(H,E) = \{F(p) = \{1/x, 1/y\},\ F(q) = \{\{2/z\}\}$ dır. Gerçekten $(F,E) \tilde{\sqsubseteq} (G,E)$ olduğundan $(H,C) = (F,E) \tilde{\cap} (G,E) = (F,E)$ dır.

Tanım 3.1.8 Eğer $\forall e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ ise U üzerindeki (F,A) esnek çoklu kümesine *boş esnek çoklu küme* denir ve Φ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.9 (F,A) ve (G,B) esnek çoklu kümelerinin farkı $(H,C) = (F,A)\backslash(G,B)$ esnek çoklu kümesidir ve $H(e) = F(e)\backslash G(e), \forall e \in E$ şeklinde tanımlanır. Burada $C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x) - C_{G(e)}(x), 0\}, \forall x \in U^*$ dır.

Örnek 3.1.10 Örnek 3.1.7 deki (F,E) ve (G,E) esnek çoklu kümelerini göz önüne alalım. $(H,E) = (F,E)\backslash(G,E)$ olsun. O halde $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in E$ için $C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x) - C_{G(e)}(x), 0\}$ olmalıdır. Yani $(H,E) = \{F(p) = \{1/y\},\ F(q) = \{\{1/z, 4/w\}\}$ dır.

Tanım 3.1.11 (F,E), U üzerinde bir esnek çoklu küme ve $a \in U^*$olsun. $a \in (F,E)$ olması demek $\forall e \in E$ için $a \in F(e)$ olması anlamına gelir. Yani,

$$a \in (F,E) \Leftrightarrow \forall e \in E \text{ için } a \in F(e)$$

dır. Ancak bazı $e \in E$ için $a \notin F(e)$ ise $a \notin (F,E)$ dır.

Not 3.1.12 $\forall e \in E$ ve $a \in U^*$için $C_{F(e)}(a) = n$ $(1 \le n)$ ise $a \in^n F(e)$ şeklinde yazılır. Aksi belirtilmediği sürece $a \in^n F(e)$ ifadesinin yerine $a \in F(e)$ ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 3.1.13 U çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi V olsun. $\forall e \in E$ için $V(e) = V$ ise (V,E) esnek çoklu kümesi $\tilde{V}$ şeklinde gösterilir. Açıkça (U,E) esnek çoklu kümesi $\tilde{U}$ şeklinde gösterilir. $\tilde{U}$ esnek çoklu kümesi U üzerinde tanımlanan en geniş esnek çoklu kümedir.

Tanım 3.1.14 $a \in U^*$ olsun. O zaman (a,E) bir esnek çoklu kümedir. Burada $\forall e \in E$ için $a(e) = \{a\}$ dır.

Örnek 3.1.15 $U = \{4/x, 3/y, 2/z\}$ ve $E = \{p, q, r, k\}$ olsun. (x, E) esnek çoklu kümesi $(x, E) = \{F(p) = \{1/x\}, F(q) = \{1/x\}, F(r) = \{1/x\}, F(k) = \{1/x\}\} = \{\{x\}, \{x\}, \{x\}, \{x\}\}$ şeklinde tanımlıdır. Aslında (x, E) esnek çoklu kümesi bir esnek kümedir.

Tanım 3.1.16 (F, E), U üzerinde bir esnek çoklu küme ve U çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi V olsun. V üzerinde (F, E) esnek çoklu kümesinin alt esnek çoklu kümesi $\left({}^{V}F, E\right)$ şeklinde gösterilir ve $\forall e \in E$ için ${}^{V}F(e) = V \cap F(e)$ şeklinde tanımlanır. Burada $C_{{}^{V}F(e)}(x) = \min\{C_V(x), C_{F(e)}(x)\}, \forall x \in U^*$dır.

Başka bir ifadeyle $\left({}^{V}F, E\right) = \tilde{V} \,\tilde{\cap}\, (F, E)$ dir.

Tanım 3.1.17 Bir (F, A) esnek çoklu kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ şeklinde gösterilir ve $(F, A)^c = (F^c, A)$ şeklinde tanımlıdır. Buradaki $F^c: A \to P^*(U)$ dönüşümü $\forall e \in A$, $F^c(e) = U \backslash F(e)$ şeklinde tanımlıdır. Burada $C_{F^c(e)}(x) = C_U(x) - C_{F(e)}(x)$, $\forall x \in U^*$dır.

Örnek 3.1.18 $U = \{4/x, 4/y, 3/z, 3/\mathrm{w}\}$ ve $E = \{p, q\}$ olsun. U üzerinde bir esnek çoklu küme $(F, E) = \{F(p) = \{1/x, 1/y\},\ F(q) = \{2/z\}\}$ şeklinde tanımlı olsun. O halde $(F, A)^c$ esnek çoklu kümesi $(F, A)^c = \{F(p) = \{3/x, 3/y, 3/z, 3/w\},\ F(q) = \{4/x, 4/y, 1/z, 3/\mathrm{w}\}\}$ şeklinde tanımlıdır.

3.2. Esnek Çoklu Kümelerde Bazı Sonuçlar

Önerme 3.2.1 U üzerinde bir esnek çoklu küme (F, A) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F, A) \,\tilde{\cup}\, (F, A) = (F, A)$,

(2) $(F, A) \,\tilde{\cap}\, (F, A) = (F, A)$,

(3) $(F, A) \,\tilde{\cup}\, \Phi = (F, A)$,

(4) $(F, A) \,\tilde{\cap}\, \Phi = \Phi$,

(5) $(F, A) \,\tilde{\cup}\, \tilde{X} = \tilde{X}$,

(6) $(F, A) \,\tilde{\cap}\, \tilde{X} = (F, A)$.

Önerme 3.2.2 U üzerinde üç esnek çoklu küme (F,A), (G,B) ve (H,C) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F,A) \subseteq (G,B)$ ve $(G,B) \subseteq (H,C) \Rightarrow (F,A) \subseteq (H,C)$,

(2) $(F,A) \tilde{\cup} \big((G,B) \tilde{\cup} (H,C)\big) = \big((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\big) \tilde{\cup} (H,C))$,

(3) $(F,A) \tilde{\cap} \big((G,B) \tilde{\cap} (H,C)\big) = \big((F,A) \tilde{\cap} (G,B)\big) \tilde{\cap} (H,C))$,

(4) $(F,A) \tilde{\cup} \big((G,B) \tilde{\cap} (H,C)\big) = \big((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\big) \tilde{\cap} ((F,A) \tilde{\cup} (H,C))$,

(5) $(F,A) \tilde{\cap} \big((G,B) \tilde{\cup} (H,C)\big) = \big((F,A) \tilde{\cap} (G,B)\big) \tilde{\cup} ((F,A) \tilde{\cap} (H,C))$.

İspat : (1) $(F,A) \subseteq (G,B)$ ve $(G,B) \subseteq (H,C)$ olsun. O halde $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A$ için $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x)$ ve $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in B$ için $C_{G(e)}(x) \leq C_{H(e)}(x)$ dır. Dolayısıyla $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A$ için $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x) \leq C_{H(e)}(x)$ dır. Bu da $(F,A) \subseteq (H,C)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.3 U üzerinde bir esnek çoklu küme (F,A) ve $\{(F_i,A)\}_{i\in I}$ esnek çoklu küme ailesi olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F,A) \tilde{\cup} [\tilde{\cap}_{i\in I} (F_i,A)] = \tilde{\cap}_{i\in I} [(F,A) \tilde{\cup} (F_i,A)]$,

(2) $(F,A) \tilde{\cap} [\tilde{\cup}_{i\in I} (F_i,A)] = \tilde{\cup}_{i\in I} [(F,A) \tilde{\cap} (F_i,A)]$.

Önerme 3.2.4 U üzerinde iki esnek çoklu küme (F,A) ve (G,B) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F,A) \subseteq (G,B) \Leftrightarrow (F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (G,B)$,

(2) $(F,A) \subseteq (G,B) \Leftrightarrow (F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (F,A)$,

(3) $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = \Phi \Rightarrow (F,A) \subseteq (G,B)^c$,

(4) $(F,A) \subseteq (G,B) \Rightarrow (G,B)^c \subseteq (F,A)^c$.

İspat : (1) $(F,A) \subseteq (G,B)$ ve $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H, A \cup B)$ olsun. $(F,A) \subseteq (G,B)$ olduğundan $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A$ için $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x)$ dır. Dolayısıyla $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A \cup B$ için $C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\} = C_{G(e)}(x)$ dır. O halde $(H, A \cup B) = (G,B)$ dır. Bu da $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (G,B)$ olduğunu gösterir.

(2) $(F,A) \subseteq (G,B)$ ve $(F,A) \widetilde{\cap} (G,B) = (H, A \cap B)$ olsun. $(F,A) \subseteq (G,B)$ olduğundan $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A$ için $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x)$ dır. Dolayısıyla $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A \cap B$ için $C_{H(e)}(x) = \min\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\} = C_{F(e)}(x)$ dır. O halde $(H, A \cap B) = (F,A)$ dır. Bu da $(F,A) \widetilde{\cap} (G,B) = (F,A)$ olduğunu gösterir.

(3) $(H, A \cap B) = (F,A) \widetilde{\cap} (G,B) = \Phi$ olsun. O halde $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A \cap B$ için $C_{H(e)}(x) = \min\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\} = 0$ dır. Buradan bazı $x \in U^*$ için $C_{F(e)}(x) + C_{G(e)}(x) = C_{F(e)}(x)$ ve aynı şekilde bazı $x \in U^*$ için $C_{F(e)}(x) + C_{G(e)}(x) = C_{G(e)}(x)$ dır. Her iki durumda da $C_{F(e)}(x) + C_{G(e)}(x) \leq C_U(x)$ olur. Buradan

$$C_{F(e)}(x) + C_{G(e)}(x) \leq C_U(x) \Leftrightarrow C_{F(e)}(x) \leq C_U(x) - C_{G(e)}(x) = C_{G^c(e)}(x)$$

$$\Leftrightarrow C_{F(e)}(x) \leq C_{G^c(e)}(x)$$

elde edilir. Bu da $(F,A) \subseteq (G,B)^c$ olduğunu gösterir.

(4) $(F,A) \subseteq (G,B)$ olsun. O halde $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A$ için $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x)$ dır. Buradan

$$C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x) \Leftrightarrow -\,C_{G(e)} \leq -C_{F(e)}(x)$$

$$\Leftrightarrow C_U(x) - \,C_{G(e)} \leq C_U(x) - C_{F(e)}(x)$$

$$\Leftrightarrow C_{G^c(e)}(x) \leq C_{F^c(e)}(x)$$

dır. Dolayısıyla $(G,B)^c \subseteq (F,A)^c$ dır.

(5) $(F,A) \widetilde{\cup} (G,B) = (H, A \cup B)$ olsun. O halde $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in A \cup B$ için $C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}$ dır.

Önerme 3.2.5 U üzerinde iki tam esnek çoklu küme (F,A) ve (G,B) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $((F,A) \widetilde{\cup} (G,B))^c = (F,A)^c \widetilde{\cap} (G,B)^c$,

(2) $((F,A) \widetilde{\cap} (G,B))^c = (F,A)^c \widetilde{\cup} (G,B)^c$.

Sonuç 3.2.6 U üzerinde tam esnek çoklu küme ailesi $\{(F_i, A)\}_{i \in I}$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $[\widetilde{\cup}_{i\in I}\ (F_i, A)]^c = \widetilde{\cap}_{i\in I}\ (F_i, A)^c$,

(2) $[\widetilde{\cap}_{i\in I}\ (F_i, A)]^c = \widetilde{\cup}_{i\in I}\ (F_i, A)^c$.

3.3. Esnek Çoklu Fonksiyon ve Bazı Sonuçları

Tanım 3.3.1 X çoklu küme evrenseli ve E parametrelerin kümesi olsun. X üzerinde tanımlı bütün esnek çoklu kümelerin koleksiyonuna *esnek çoklu sınıf* denir ve X_E ile gösterilir.

Yani, X çoklu küme evrenselinden alınan çoklu kümeler ile E kümesinden alınan parametrelerin oluşturduğu bütün esnek çoklu kümeler X_E sınıfının içerisindedir.

Tanım 3.3.2 X_E ve Y_K iki esnek çoklu sınıf olsun. $\varphi: X^* \to Y^*$ ve $\psi: E \to K$ iki fonksiyon olsun. O zaman $f = (\varphi, \psi): X_E \to Y_K$ bir esnek çoklu fonksiyondur ve aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

X_E de bir esnek çoklu küme (F, E) olsun. (F, E) esnek çoklu kümesinin f esnek çoklu fonksiyonu altındaki görüntüsü $f(F, E)$, Y_K de bir esnek çoklu kümedir. Burada $k \in \psi(E) \subseteq K$ ve $y \in Y^*$ için

$$C_{f(F,E)(k)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{e\in\psi^{-1}(k)\cap E,\, x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset, \psi^{-1}(k) \neq \emptyset; \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

Y_K de bir esnek çoklu küme (G, K) olsun. (G, K) esnek çoklu kümesinin f esnek çoklu fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(G, K)$, X_E de bir esnek çoklu kümedir. Burada $e \in \psi^{-1}(K) \subseteq E$ ve $x \in X^*$ için

$$C_{f^{-1}(G,K)(e)}(x) = C_{G(\psi(e))}(\varphi(x)).$$

Eğer ψ ve φ birebir iki fonksiyon ise f esnek çoklu birebir fonksiyondur. Eğer ψ ve φ örten iki fonksiyon ise f esnek çoklu örten fonksiyondur.

Eğer f esnek çoklu sabit fonksiyon ise ψ ve φ fonksiyonları sabittir.

Örnek 3.3.3 $X = \{2/a, 3/b, 4/c, 5/d\}$, $Y = \{5/x, 4/y, 3/z, 2/w\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ ve X_E, Y_K iki esnek çoklu sınıf olsun. $\varphi: X^* \to Y^*$ ve $\psi: E \to K$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlı olsun;

$$\varphi(a) = z, \quad \varphi(b) = y, \quad \varphi(c) = y, \quad \varphi(d) = x,$$
$$\psi(e_1) = k_1, \quad \psi(e_2) = k_3, \; \psi(e_3) = k_2 \quad \psi(e_4) = k_1.$$

Sırasıyla X_E ve Y_K de iki esnek çoklu kümeyi aşağıdaki gibi seçelim;

$$(F,A) = \{e_1 = \{1/a, 2/b, 1/d\}, e_2 = \{3/b, 2/c, 1/d\}, e_3 = \{2/a, 5/d\}\},$$

$$(G,B) = \{k_1 = \{4/x, 2/w\}, k_2 = \{1/x, 1/y, 2/z, 2/w\}\}.$$

(F,A) esnek çoklu kümesinin f esnek çoklu fonksiyonu altındaki görüntüsü aşağıda elde edilmiştir;

$$C_{f(F,A)(k_1)}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{e\in\psi^{-1}(k_1)\cap A, a\in\varphi^{-1}(x)} C_{F(e)}(a), & \varphi^{-1}(x) \neq \emptyset, \psi^{-1}(k_1) \neq \emptyset; \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$= \sup_{e\in\{e_1,e_4\}, a\in\{d\}} C_{F(e)}(a)$$

$$= \sup\{C_{F(e_1)}(d), C_{F(e_4)}(d)\}$$

$$= 1,$$

$C_{f(F,A)(k_1)}(y) = 2,$

$C_{f(F,A)(k_1)}(z) = 1,$

$C_{f(F,A)(k_1)}(w) = 0$ ($\varphi^{-1}(x) = \emptyset$ olduğundan),

$$C_{f(F,A)(k_2)}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{e\in\psi^{-1}(k_2)\cap A, a\in\varphi^{-1}(x)} C_{F(e)}(a), & \varphi^{-1}(x) \neq \emptyset, \psi^{-1}(k_2) \neq \emptyset; \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$= \sup_{e\in\{e_3\}, a\in\{d\}} C_{F(e)}(a)$$

$$= \sup\{C_{F(e_3)}(d)\}$$

$$= 5,$$

$C_{f(F,A)(k_2)}(y) = 0,$

$C_{f(F,A)(k_2)}(z) = 2,$

$C_{f(F,A)(k_2)}(w) = 0$ ($\varphi^{-1}(x) = \emptyset$ olduğundan),

Sonuç olarak,

$$(f(F,A),B) = \{k_1 = \{1/x, 2/y, 1/z\}, k_2 = \{5/x, 2/z\}\}$$

elde edilir.

(G,B) esnek çoklu kümesinin f esnek çoklu fonksiyonu altındaki ters görüntüsü aşağıda elde edilmiştir;

$C_{f^{-1}(G,B)(e_3)}(a) = C_{G(\psi(e_3))}(\varphi(a)) = C_{G(k_2)}(z) = 2,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_3)}(b) = C_{G(\psi(e_3))}(\varphi(b)) = C_{G(k_2)}(y) = 1,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_3)}(c) = C_{G(\psi(e_3))}(\varphi(c)) = C_{G(k_2)}(y) = 1,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_3)}(d) = C_{G(\psi(e_3))}(\varphi(d)) = C_{G(k_2)}(x) = 1,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_4)}(a) = C_{G(\psi(e_4))}(\varphi(a)) = C_{G(k_1)}(z) = 0,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_4)}(b) = C_{G(\psi(e_4))}(\varphi(b)) = C_{G(k_1)}(y) = 0,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_4)}(c) = C_{G(\psi(e_4))}(\varphi(c)) = C_{G(k_1)}(y) = 0,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_4)}(d) = C_{G(\psi(e_4))}(\varphi(d)) = C_{G(k_1)}(x) = 4.$

Sonuç olarak,

$$(f^{-1}(G,B),D) = \{e_3 = \{2/a, 1/b, 1/c, 1/d\}, e_4 = \{4/d\}\}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.4 $f: X_E \to Y_K$ esnek çoklu fonksiyon, X_E de iki esnek çoklu küme (F,A) ve (F_i, A_i) ve Y_K de iki esnek çoklu küme (G,B) ve (G_i, B_i) esnek çoklu küme olsun.

(1) $f(\Phi) = \Phi, f(\tilde{X}) \tilde{\subseteq} \tilde{Y}$,

(2) $f^{-1}(\Phi) = \Phi, f^{-1}(\tilde{Y}) = \tilde{X}$,

(3) $f((F_1, A_1) \tilde{\cup} (F_2, A_2)) = f(F_1, A_1) \tilde{\cup} f(F_2, A_2)$,

Genel hali, $f\left(\tilde{\cup}_{i\in I}\,(F_i,A_i)\right) = \tilde{\cup}_{i\in I}\, f(F_i,A_i)$,

(4) $f^{-1}\left((G_1,B_1)\,\tilde{\cup}\,(G_2,B_2)\right) = f^{-1}(G_1,B_1)\,\tilde{\cup}\, f^{-1}(G_2,B_2)$,

Genel hali, $f^{-1}\left(\tilde{\cup}_{i\in I}\,(G_i,B_i)\right) = \tilde{\cup}_{i\in I}\, f^{-1}(G_i,B_i)$,

(5) $f((F_1,A_1)\,\tilde{\cap}\,(F_2,A_2)) \tilde{\subseteq} f(F_1,A_1)\,\tilde{\cap}\, f(F_2,A_2)$,

Genel hali, $f(\tilde{\cap}_{i\in I}\,(F_i,A_i)) \tilde{\subseteq} \tilde{\cap}_{i\in I}\, f(F_i,A_i)$,

(6) $f^{-1}\left((G_1,B_1)\,\tilde{\cap}\,(G_2,B_2)\right) = f^{-1}(G_1,B_1)\,\tilde{\cap}\, f^{-1}(G_2,B_2)$,

Genel hali, $f^{-1}\left(\tilde{\cap}_{i\in I}\,(G_i,B_i)\right) = \tilde{\cap}_{i\in I}\, f^{-1}(G_i,B_i)$,

(7) Eğer $(F_1,A_1) \tilde{\subseteq} (F_2,A_2)$ ise $f(F_1,A_1) \tilde{\subseteq} f(F_2,A_2)$,

(8) Eğer $(G_1,B_1) \tilde{\subseteq} (G_2,B_2)$ ise $f^{-1}(G_1,B_1) \tilde{\subseteq} f^{-1}(G_2,B_2)$,

(9) $f^{-1}((G,B)^c) = (f^{-1}(G,B))^c$.

İspat: (1) ve (2) ifadeleri açıktır.

(3) $(F,A) = (F_1,A_1)\,\tilde{\cup}\,(F_2,A_2)$ olsun. $k \in K$ ve $y \in Y^*$ için

$$C_{f(F,A)(k)}(y) = \sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap A,\, x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F(e)}(x)$$

$$= \sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap(A_1\cup A_2),\, x\in\varphi^{-1}(y)} \max\{C_{F_1(e)}(x), C_{F_2(e)}(x)\}$$

$$= \max\{\sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap(A_1\cup A_2),\, x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F_1(e)}(x),$$

$$\sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap(A_1\cup A_2),\, x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F_2(e)}(x)\}$$

$$= \max\{C_{f(F_1,A)(k)}(y), C_{f(F_2,A)(k)}(y)\}$$

elde edilir. Bu $f\left((F_1,A_1)\,\tilde{\cup}\,(F_2,A_2)\right) = f(F_1,A_1)\,\tilde{\cup}\, f(F_2,A_2)$ olduğunu gösterir. Genel hali de benzer şekilde ispat edilebilir.

(4) $f^{-1}(G,B) = f^{-1}\left((G_1,B_1)\,\tilde{\cup}\,(G_2,B_2)\right)$ olsun. $e \in E$ ve $x \in X^*$ için

$$C_{f^{-1}(G,B)(e)}(x) = C_{G(\psi(e))}(\varphi(x))$$

$$= \max\{C_{G_1(\psi(e))}(\varphi(x)), C_{G_2(\psi(e))}(\varphi(x))\}$$
$$= \max\{C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e)}(x), C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e)}(x)\}$$

elde edilir. Bu $f^{-1}((G_1,B_1) \tilde{\cup} (G_2,B_2)) = f^{-1}(G_1,B_1) \tilde{\cup} f^{-1}(G_2,B_2)$ olduğunu gösterir. Genel hali de benzer şekilde ispat edilebilir.

(5) $(F,A) = (F_1,A_1) \tilde{\cap} (F_2,A_2)$ olsun. $k \in K$ ve $y \in Y^*$ için

$$C_{f(F,A)(k)}(y) = \sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap A, x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F(e)}(x)$$

$$= \sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap(A_1\cap A_2), x\in\varphi^{-1}(y)} \min\{C_{F_1(e)}(x), C_{F_2(e)}(x)\}$$

$$= \min\{\sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap(A_1\cap A_2), x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F_1(e)}(x),$$

$$\sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap(A_1\cap A_2), x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F_2(e)}(x)\}$$

$$\leq \min\{\sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap A_1, x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F_1(e)}(x),$$

$$\sup_{e\in\psi^{-1}(k)\cap A_2, x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F_2(e)}(x)\}$$

$$= \min\{C_{f(F_1,A)(k)}(y), C_{f(F_2,A)(k)}(y)\}$$

elde edilir. Bu $f((F_1,A_1) \tilde{\cap} (F_2,A_2)) \tilde{\subseteq} f(F_1,A_1) \tilde{\cap} f(F_2,A_2)$ olduğunu gösterir. Genel hali de benzer şekilde ispat edilebilir.

(6) $f^{-1}(G,B) = f^{-1}((G_1,B_1) \tilde{\cap} (G_2,B_2))$ olsun. $e \in E$ ve $x \in X^*$ için

$$C_{f^{-1}(G,B)(e)}(x) = C_{G(\psi(e))}(\varphi(x))$$

$$= \min\{C_{G_1(\psi(e))}(\varphi(x)), C_{G_2(\psi(e))}(\varphi(x))\}$$
$$= \min\{C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e)}(x), C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e)}(x)\}$$

elde edilir. Bu $f^{-1}((G_1,B_1) \tilde{\cap} (G_2,B_2)) = f^{-1}(G_1,B_1) \tilde{\cap} f^{-1}(G_2,B_2)$ olduğunu gösterir. Genel hali de benzer şekilde ispat edilebilir.

(7) $(F_1, A_1) \tilde{\subseteq} (F_2, A_2)$ olsun. O halde $e \in A_1$ ve $x \in X^*$ için $C_{F_1(e)}(x) \leq C_{F_2(e)}(x)$ dır.

$$C_{f(F_1,A_1)(k)}(y) = \sup_{e \in \psi^{-1}(k) \cap A_1, x \in \varphi^{-1}(y)} C_{F_1(e)}(x)$$

$$\leq \sup_{e \in \psi^{-1}(k) \cap A_2, x \in \varphi^{-1}(y)} C_{F_2(e)}(x)$$

$$= C_{f(F_2,A_2)(k)}(y)$$

ifadesi $(F_1, A_1) \tilde{\subseteq} (F_2, A_2)$ için $f(F_1, A_1) \tilde{\subseteq} f(F_2, A_2)$ olduğunu gösterir.

(8) $(G_1, B_1) \tilde{\subseteq} (G_2, B_2)$ olsun. O halde $k \in B_1$ ve $y \in Y^*$ için $C_{G_1(k)}(y) \leq C_{G_2(k)}(y)$ dır.

$$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e)}(x) = C_{G_1(\psi(e))}(\varphi(x))$$

$$\leq C_{G_2(\psi(e))}(\varphi(x))$$

$$= C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e)}(x)$$

ifadesi $(G_1, B_1) \tilde{\subseteq} (G_2, B_2)$ için $f^{-1}(G_1, B_1) \tilde{\subseteq} f^{-1}(G_2, B_2)$ olduğunu gösterir. Burada $\psi(e) \in K$ ve $\varphi(x) \in Y^*$ dır.

(9) $(G, B)^c$ ifadesi $C_{G^c(k)}(y) = C_Y(y) - C_{G(k)}(y),\ \forall y \in Y^*, \forall k \in K$ şeklinde tanımlıdır. O halde $k \in B$ ve $y \in Y^*$ için

$$C_{f^{-1}(G,B)^c(e)}(x) = C_{G^c(\psi(e))}(\varphi(x))$$

$$= C_Y(\varphi(x)) - C_{G(\psi(e))}(\varphi(x))$$

$$= C_{f^{-1}(\tilde{Y})(e)}(x) - C_{f^{-1}(G,B)(e)}(x)$$

ifadesi $f^{-1}((G, B)^c) = (f^{-1}(G, B))^c$ olduğunu gösterir.

4.BÖLÜM

ESNEK ÇOKLU TOPOLOJİ

Bu bölümde ilk olarak esnek çoklu kümeler üzerine topoloji yapısı inşa edilmiştir. Daha sonra esnek çoklu açık küme, esnek çoklu kapalı küme, esnek çoklu baz ve esnek çoklu alt uzay gibi bir çok topolojik yapı tanımlanmış ve en temel tanım ve teoremleri incelenmiştir. Son olarak ayırma aksiyomları, kompaktlık ve bağlantılılık gibi bir çok topolojik özellik tanımlanmış ve yaygın teoremleri incelenmiştir.

4.1. Esnek Çoklu Topoloji

Tanım 4.1.1 $\tau \subseteq X_E$ ve $A \subseteq E$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan τ sınıfına X üzerinde bir *esnek çoklu topoloji* ve $(X_E\ ,\tau)$ ikilisine de X üzerinde bir *esnek çoklu topolojik uzay* denir.

$\boldsymbol{i.}\, \Phi, \tilde{X} \in \tau.$

$\boldsymbol{ii.}\, \tau$ sınıfındaki sonlu sayıda esnek çoklu kümenin kesişimi τ sınıfına aittir.
Yani, $(F_1, A),\ (F_2, A), \dots ,\ (F_n, A) \in \tau$ için $\tilde{\cap}_{i=1}^{n}\, (F_i, A) \in \tau$ dır.

$\boldsymbol{iii.}\, \tau$ sınıfındaki esnek çoklu kümelerin keyfi birleşimi τ sınıfına aittir.
Yani, $\forall i \in I, (F_i, A) \in \tau$ için $\tilde{\cup}_{i\in I}\, (F_i, A) \in \tau$ dır.

Tanım 4.1.2 $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayında τ sınıfının her bir elemanına *esnek çoklu açık küme* denir.

Tümleyeni açık olan esnek çoklu kümeye *esnek çoklu kapalı küme* denir.

Örnek 4.1.3 $X = \{2/x, 3/y, 4/z, 5/w\}, E = \{p, q\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)\}$ olsun. Buradaki $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)$ esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\begin{array}{ll} F_1(p) = \{1/x, 2/y, 3/z\}, & F_1(q) = \{4/w\} \\ F_2(p) = X, & F_2(q) = \{1/x, 3/y, 4/z, 5/w\} \\ F_3(p) = \{2/x, 3/y, 3/z, 1/w\}, & F_3(q) = \{1/x, 4/w\} \\ F_4(p) = \{2/y\}, & F_4(q) = \{2/w\} \\ F_5(p) = \{3/y, 3/z, 1/w\}, & F_5(q) = \{1/x, 4/w\} \end{array}$$

O halde τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar ve (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzaydır.

Örnek 4.1.4 $\tau = \{\Phi, \tilde{X}\}$ olsun. τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar. τ sınıfına esnek çoklu ayrık olmayan topoloji denir.

Örnek 4.1.5 $\tau = X_E$ olsun. τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar. τ sınıfına esnek çoklu ayrık topoloji denir.

Tanım 4.1.6 (X_E, τ_1) ve (X_E, τ_2) iki esnek çoklu topolojik uzay olsun. Eğer $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise τ_1 esnek çoklu topolojisi τ_2 esnek çoklu topolojisinden daha *kaba* veya τ_2 esnek çoklu topolojisi τ_1 esnek çoklu topolojisinden daha *ince* denir.

Önerme 4.1.7 (X_E, τ_1) ve (X_E, τ_2) iki esnek çoklu topolojik uzay olsun. O halde $(X_E, \tau_1 \cap \tau_2)$, X üzerinde esnek çoklu topolojik uzaydır.

İspat : ***i.*** $\Phi, \tilde{X} \in \tau_1$ ve $\Phi, \tilde{X} \in \tau_2$ olduğundan $\Phi, \tilde{X} \in \tau_1 \cap \tau_2$ dır.

ii. $(F, A), (G, B) \in \tau_1 \cap \tau_2$ olsun. O halde $(F, A), (G, B) \in \tau_1$ ve $(F, A), (G, B) \in \tau_2$ dır. τ_1 ve τ_2 esnek çoklu topoloji olduğundan $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) \in \tau_1$ ve $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) \in \tau_2$ dir. Dolayısıyla $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) \in \tau_1 \cap \tau_2$ dır.

iii. $\forall i \in I, (F_i, A) \in \tau_1 \cap \tau_2$ olsun. O halde $(F_i, A) \in \tau_1$ ve $(F_i, A) \in \tau_2$ dır. τ_1 ve τ_2 esnek çoklu topoloji olduğundan $\tilde{\bigcup}_{i \in I} (F_i, A) \in \tau_1$ ve $\tilde{\bigcup}_{i \in I} (F_i, A) \in \tau_2$ dır. Dolayısıyla $\tilde{\bigcup}_{i \in I} (F_i, A) \in \tau_1 \cap \tau_2$ dır.

Bu da gösterir ki $\tau_1 \cap \tau_2$ sınıfı X üzerinde esnek çoklu topoloji tanımlar ve $(X_E\,, \tau_1 \cap \tau_2)$ bir esnek çoklu topolojik uzaydır.

Teorem 4.1.8 $(X_E\,, \tau)$ esnek çoklu topolojik uzayındaki esnek çoklu kapalı kümelerin bir koleksiyonu σ olsun. O halde

i. $\Phi, \tilde{X} \in \sigma$

ii. $(F_1, A),\ (F_2, A), \dots,\ (F_n, A) \in \sigma$ için $\tilde{\cup}_{i=1}^{n}\ (F_i, A) \in \sigma$

iii. $\forall i \in I, (F_i, A) \in \sigma$ için $\tilde{\cap}_{i\in I}\ (F_i, A) \in \sigma$

Tanım 4.1.9 $(X_E\,, \tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$ esnek çoklu açık kümelerin bir sınıfı olsun. τ sınıfının her elemanı $\mathfrak{B}$ sınıfına ait olan bir takım kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathfrak{B}$ sınıfına τ topolojisinin bir *esnek çoklu bazı* denir.Yani

[B1] $\mathfrak{B} \mathrel{\tilde{\subseteq}} \tau$.

[B2] Her $(F, A) \in \tau$ için $(F, A) = \tilde{\cup}_{i\in I}\ (G_i, B)$ olacak şekilde $(G_i, B) \in \mathfrak{B}$ vardır.

Not 4.1.10 $\mathfrak{B} \mathrel{\tilde{\subseteq}} \tau$ ise $\Phi = \tilde{\cup}_{i\in\emptyset}\ (G_i, B)$ olur.($(G_i, B) \in \mathfrak{B}$)

Örnek 4.1.11 $X = \{1/x, 2/y, 4/z\}, E = \{p, q\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (F_6, E)\}$ olsun. Buradaki $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E)$, (F_6, E) esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\begin{aligned}
F_1(p) &= \{1/x\}, & F_1(q) &= \{1/x\} \\
F_2(p) &= \{2/y\}, & F_2(q) &= \{2/y\} \\
F_3(p) &= \{4/z\}, & F_3(q) &= \{4/z\} \\
F_4(p) &= \{1/x, 2/y\}, & F_4(q) &= \{1/x, 2/y\} \\
F_5(p) &= \{1/x, 4/z\}, & F_5(q) &= \{1/x, 4/z\} \\
F_6(p) &= \{2/y, 4/z\}, & F_6(q) &= \{2/y, 4/z\}
\end{aligned}$$

O halde τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar ve $(X_E\,, \tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzaydır.

$\mathfrak{B} = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ alalım.

$$\begin{aligned}
&(F_1, E)\ \tilde{\cup}\ (F_2, E) = (F_3, E), \quad (F_1, E)\ \tilde{\cup}\ (F_3, E) = (F_5, E), \\
&(F_2, E)\ \tilde{\cup}\ (F_3, E) = (F_6, E), \quad (F_1, E)\ \tilde{\cup}\ (F_2, E)\ \tilde{\cup}\ (F_3, E) = \tilde{X}
\end{aligned}$$

olur. Yani $\mathfrak{B}$ sınıfı τ esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu bazdır. Gerçekten τ sınıfının her bir elemanı $\mathfrak{B}$ sınıfının elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir.

Önerme 4.1.12 Eğer $\mathfrak{B}$ sınıfı X üzerindeki τ ve σ esnek çoklu topolojileri için ayrı ayrı birer esnek çoklu bir baz ise bu topolojiler aynıdır.

İspat : $(F,A) \in \tau$ olsun. $\mathfrak{B}$ sınıfı τ esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu baz olduğundan $(F,A) = \widetilde{\cup}_{i\in I}\,(G_i,B)$ olacak şekilde $(G_i,B) \in \mathfrak{B}$ vardır. $\mathfrak{B}$ sınıfı aynı zamanda σ esnek çoklu topolojisi için de bir esnek çoklu baz olduğundan her bir $i \in I$ için $(G_i,B) \in \sigma$ olup $(F,A) \in \sigma$ den $\tau \mathrel{\widetilde{\sqsubseteq}} \sigma$ dır. Benzer şekilde $\sigma \mathrel{\widetilde{\sqsubseteq}} \tau$ gösterilir. Buradan $\tau = \sigma$ elde edilir.

Tanım 4.1.13 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve $\mathcal{A}$ esnek çoklu açık kümelerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$ sınıfındaki elemanların sonlu arakesitinden oluşan $\mathfrak{B}$ sınıfı τ topolojisi için bir esnek çoklu baz ise $\mathcal{A}$ sınıfına τ topolojisinin bir *esnek çoklu alt bazı* denir

O halde $\mathcal{A}$ sınıfı τ topolojisi için bir esnek çoklu alt bazıdır ancak ve ancak τ topolojisindeki her esnek çoklu açık küme $\mathcal{A}$ sınıfındaki kümelerin sonlu arakesitlerinin keyfi birleşimi olarak yazılır.

Not 4.1.14 $\mathcal{A} \mathrel{\widetilde{\sqsubseteq}} \tau$ ise $\widetilde{X} = \widetilde{\cap}_{i\in\emptyset}\,(G_i,B)$ olur. ($(G_i,B) \in \mathcal{A}$)

Önerme 4.1.15 Eğer $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerindeki τ ve σ esnek çoklu topolojileri için ayrı ayrı birer esnek çoklu bir alt baz ise bu topolojiler aynıdır.

İspat : Önerme 4.1.12 ve esnek çoklu alt baz tanımını kullanılarak ispatlanabilir.

4.2. Esnek Çoklu Alt Uzay

Tanım 4.2.1 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve X çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi Y olsun. O zaman

$$\tau_Y = \{({}^{Y}F,E) : (F,E) \in \tau\}$$

sınıfına Y üzerinde bir esnek çoklu topoloji ve $(X_E\,,\tau_Y)$ esnek çoklu topolojik uzayına $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayının *esnek çoklu alt uzayı* denir.

Örnek 4.2.2 Örnek 4.1.3 deki (X_E, τ) esnek çoklu topolojisini göz önüne alalım. Ayrıca $Y = \{1/x, 2/y, 3/z\}$ olsun. O halde $\tau_Y = \{\Phi, \tilde{Y}, ({}^Y F_1, E), ({}^Y F_2, E), ({}^Y F_3, E), ({}^Y F_4, E), ({}^Y F_5, E)\}$ esnek çoklu topolojisi ve buradaki $({}^Y F_1, E)$, $({}^Y F_2, E)$, $({}^Y F_3, E)$, $({}^Y F_4, E)$, $({}^Y F_5, E)$ esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$
\begin{array}{ll}
{}^Y F_1(p) = \{1/x, 2/y, 3/z\}, & {}^Y F_1(q) = \emptyset \\
{}^Y F_2(p) = \{1/x, 2/y, 3/z\}, & {}^Y F_2(q) = \{1/x, 2/y, 3/z\} \\
{}^Y F_3(p) = \{1/x, 2/y, 3/z\}, & {}^Y F_3(q) = \{1/x\} \\
{}^Y F_4(p) = \{2/y\}, & {}^Y F_4(q) = \emptyset \\
{}^Y F_5(p) = \{2/y, 3/z\}, & {}^Y F_5(q) = \{1/x\}
\end{array}
$$

Burada $({}^Y F_2, E) = \tilde{Y}$ olduğundan $\tau_Y = \{\Phi, \tilde{Y}, ({}^Y F_1, E), ({}^Y F_3, E), ({}^Y F_4, E), ({}^Y F_5, E)\}$ şeklinde yazılır ve görüldüğü üzere (X_E, τ_Y) esnek çoklu topolojik uzayı (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayının esnek çoklu alt uzayıdır

Örnek 4.2.3 Herhangi esnek çoklu ayrık topolojik uzayın alt uzayı da esnek çoklu ayrık topolojik uzaydır.

Ayrıca herhangi esnek çoklu ayrık olmayan topolojik uzayın alt uzayı da esnek çoklu ayrık olmayan topolojik uzaydır.

Önerme 4.2.4 (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi Y olsun. Eğer $\mathfrak{B}$ sınıfı τ esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu baz ise $\mathfrak{B}_Y = \{(G, B) \tilde{\cap} \tilde{Y} : (G, B) \in \mathfrak{B}\}$ sınıfı da Y üzerindeki τ_Y esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu bazdır.

İspat : $({}^Y F, A) = (F, A) \tilde{\cap} \tilde{Y} \in \tau_Y$ ise $(F, A) \in \tau$ dır. $\mathfrak{B}$ sınıfı τ esnek çoklu topolojisi için bir esnek çoklu baz olduğundan $(F, A) = \tilde{\cup}_{i \in I} (G_i, B)$ olacak şekilde $(G_i, B) \in \mathfrak{B}$ vardır.Buradan

$$({}^Y F, A) = \tilde{\cup}_{i \in I} ((G_i, B) \tilde{\cap} \tilde{Y})$$

olacak şekilde $(G_i, B) \tilde{\cap} \tilde{Y} \in \mathfrak{B}_Y$ vardır.

4.3. Esnek Çoklu Bir Kümenin Kapanışı

Tanım 4.3.1 $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de (F,A) bir esnek çoklu küme olsun. (F,A) esnek çoklu kümesini kapsayan bütün esnek çoklu kapalı kümelerin kesişimine (F,A) *esnek çoklu kümesinin kapanışı* denir ve $\overline{(F,A)}$ şeklinde gösterilir. Yani, (F,A) esnek çoklu kümesini kapsayan esnek çoklu kapalı kümelerin sınıfı $\mathcal{K}_{(F,A)}$ olmak üzere

$$\overline{(F,A)} = \widetilde{\cap}_{(H,C)\in\mathcal{K}_{(F,A)}}\ (H,C)$$

dır. Açıkça $\overline{(F,A)}$, (F,A) esnek çoklu kümesini kapsayan en küçük esnek çoklu kapalı kümedir.

Önerme 4.3.2 $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de iki esnek çoklu küme (F,A) ve (G,B) olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $\overline{\Phi} = \Phi$ ve $\bar{X} = \tilde{X}$

(2) $(F,A) \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \overline{(F,A)}$

(3) $\overline{(F,A)}$ kapalıdır

(4) (F,A) esnek çoklu kapalı kümedir $\Leftrightarrow$ $(F,A) = \overline{(F,A)}$

(5) $\overline{\overline{(F,A)}} = \overline{(F,A)}$

(6) $(F,A) \mathrel{\widetilde{\subseteq}} (G,B) \Rightarrow \overline{(F,A)} \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \overline{(G,B)}$

(7) $\overline{(F,A)\ \widetilde{\cup}\ (G,B)} = \overline{(F,A)}\ \widetilde{\cup}\ \overline{(G,B)}$

(8) $\overline{(F,A)\ \widetilde{\cap}\ (G,B)} \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \overline{(F,A)}\ \widetilde{\cap}\ \overline{(G,B)}$

İspat : Tanım 4.3.1 den (1), (2) ve (3) ifadeleri açıktır.

(4) Eğer (F,A) esnek çoklu kapalı küme ise $\overline{(F,A)}$ nın tanımından $\overline{(F,A)} \mathrel{\widetilde{\subseteq}} (F,A)$ dır. Diğer yandan (2) den $(F,A) \mathrel{\widetilde{\subseteq}} \overline{(F,A)}$ dır. O halde $(F,A) = \overline{(F,A)}$ dır.

Tersine $(F,A) = \overline{(F,A)}$ ise (3) den dolayı $\overline{(F,A)}$ kapalıdır. Dolayısıyla (F,A) da esnek çoklu kapalı kümedir.

(5) $\overline{(F,A)}$ esnek çoklu kapalı küme olduğundan ve (4) den dolayı $\overline{\overline{(F,A)}} = \overline{(F,A)}$ dır.

(6) Eğer $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ ise $\mathcal{K}_{(F,A)} \tilde{\subseteq} \mathcal{K}_{(G,B)}$ dır. O halde

$$\tilde{\cap}_{(H,C)\in\mathcal{K}_{(F,A)}} (H,C) \tilde{\subseteq} \tilde{\cap}_{(H,C)\in\mathcal{K}_{(G,B)}} (H,C) \Leftrightarrow \overline{(F,A)} \tilde{\subseteq} \overline{(G,B)}$$

dır.

(7) $(F,A) \tilde{\subseteq} \overline{(F,A)}$ ve $(G,B) \tilde{\subseteq} \overline{(G,B)}$ olduğundan $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) \tilde{\subseteq} \overline{(F,A)} \tilde{\cup} \overline{(G,B)}$ dır. Buradan
$\overline{(F,A) \tilde{\cup} (G,B)} \tilde{\subseteq} \overline{\overline{(F,A)} \tilde{\cup} \overline{(G,B)}} = \overline{(F,A)} \tilde{\cup} \overline{(G,B)} \Leftrightarrow \overline{(F,A) \tilde{\cup} (G,B)} \tilde{\subseteq} \overline{(F,A)} \tilde{\cup} \overline{(G,B)}$ dır.

Tersine $(F,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (G,B)$ den $\overline{(F,A)} \tilde{\subseteq} \overline{(F,A) \tilde{\cup} (G,B)}$ ve $(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (G,B)$ den $\overline{(G,B)} \tilde{\subseteq} \overline{(F,A) \tilde{\cup} (G,B)}$ dır. Buradan $\overline{(F,A)} \tilde{\cup} \overline{(G,B)} \tilde{\subseteq} \overline{(F,A) \tilde{\cup} (G,B)}$ elde edilir.

(8) $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ den $\overline{(F,A) \tilde{\cap} (G,B)} \tilde{\subseteq} \overline{(F,A)}$ ve $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) \tilde{\subseteq} (G,B)$ den $\overline{(F,A) \tilde{\cap} (G,B)} \tilde{\subseteq} \overline{(G,B)}$ dır. Buradan $\overline{(F,A) \tilde{\cap} (G,B)} \tilde{\subseteq} \overline{(F,A)} \tilde{\cap} \overline{(G,B)}$ elde edilir.

4.4. Esnek Çoklu Bir Kümenin İçi

Tanım 4.4.1 (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay, X_E de bir esnek çoklu küme (F,A) ve $x \in X^*$ olsun. Eğer $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde $(G,B) \in \tau$ esnek çoklu açık kümesi varsa x noktasına (G,B) esnek çoklu kümesinin bir *esnek çoklu iç noktası* denir. (F,A) esnek çoklu kümesinin bütün esnek çoklu iç noktalarının kümesine (F,A) esnek çoklu kümesinin içi denir ve $(F,A)^\circ$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.4.2 (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de bir esnek çoklu küme (F,A) olsun. O halde

$$(F,A)^\circ = \tilde{\cup} \{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) : (G,B) \in \tau\}$$

dır.

İspat : Eğer $x \in (F,A)^{\circ}$ ise Tanım 4.4.1 den $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde $(G,B) \in \tau$ vardır. O halde $x \in \tilde{\cup} \{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A): (G,B) \in \tau\}$.

Tersine eğer $x \in \tilde{\cup} \{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A): (G,B) \in \tau\}$ ise $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde bir $(G,B) \in \tau$ bulunduğundan $x \in (F,A)^{\circ}$ dır.

Önerme 4.4.3 (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de iki esnek çoklu küme (F,A) ve (G,B) olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $(F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,A)$

(2) $(F,A)^{\circ}$ açıktır

(3) (F,A) açıktır ancak ve ancak $(F,A)^{\circ} = (F,A)$

(4) $(F,A)^{\circ}$, (F,A) esnek çoklu kümesinin kapsadığı en geniş esnek çoklu açık kümedir

(5) $((F,A)^{\circ})^{\circ} = (F,A)^{\circ}$

(6) $(F,A) \tilde{\subseteq} (H,C) \Rightarrow (F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} (H,C)^{\circ}$

(7) $(F,A)^{\circ} \tilde{\cup} (H,C)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (H,C))^{\circ}$

(8) $(F,A)^{\circ} \tilde{\cap} (H,C)^{\circ} = ((F,A) \tilde{\cap} (H,C))^{\circ}$

İspat : (1) Tanım 4.4.1 den açıktır.

(2) Önerme 4.4.2 den $(F,A)^{\circ}$, (F,A) esnek çoklu kümesini içerdiği açıkların birleşimi olduğundan açıktır.

(3) $(F,A)^{\circ} = \tilde{\cup} \{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A): (G,B) \in \tau\}$ olduğundan (F,A) esnek çoklu kümesi açık ise $(F,A)^{\circ} = (F,A)$ dır.

Tersine $(F,A)^{\circ} = (F,A)$ ise (F,A) esnek çoklu kümesi açıktır. Çünkü $(F,A)^{\circ}$ esnek çoklu kümesi açıktır. $(F,A)^{\circ}$ esnek çoklu kümesi (F,A) esnek çoklu kümesinin kapsadığı en geniş esnek çoklu açık kümedir

(4) $(F,A)^{\circ} = \tilde{\cup} \{(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A): (G,B) \in \tau\}$ olduğundan $(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekil deki her (G,B) esnek çoklu açık kümesi için $(G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)^{\circ}$ dır. O halde

(5) $(F,A)^{\circ}$ açık ve (F,A) açık ise $(F,A)^{\circ} = (F,A)$ olduğundan $((F,A)^{\circ})^{\circ} = (F,A)^{\circ}$ dır.

(6) $(F,A) \tilde{\subseteq} (H,C)$ olsun. Eğer $x \in (F,A)^{\circ}$ ise $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde $(G,B) \in \tau$ vardır. Buradan $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\subseteq} (H,C)$ ve de $x \in (H,C)^{\circ}$ olup $(F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} (H,C)^{\circ}$ dır.

(7) $(F,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (H,C)$ den $(F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,A)^{\circ} \tilde{\cup} (H,C)^{\circ}$ ve $(H,C) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (H,C)$ den $(H,C)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,A)^{\circ} \tilde{\cup} (H,C)^{\circ}$ dır. Buradan $(F,A)^{\circ} \tilde{\cup} (H,C)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (H,C))^{\circ}$elde edilir.

(8) $(F,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cap} (H,C)$ den $(F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cap} (H,C))^{\circ}$ ve $(H,C) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cap} (H,C)$ den $(H,C)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cap} (H,C))^{\circ}$ dır. Buradan $(F,A)^{\circ} \tilde{\cap} (H,C)^{\circ} = ((F,A) \tilde{\cap} (H,C))^{\circ}$ elde edilir.

Tersine $(F,A)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,A)$ ve $(H,C)^{\circ} \tilde{\subseteq} (H,C)$ olduğundan $(F,A)^{\circ} \tilde{\cap} (H,C)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cap} (H,C)$ ve buradan da $(F,A)^{\circ} \tilde{\cap} (H,C)^{\circ} \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cap} (H,C))^{\circ}$ elde edilir.

Teorem 4.4.4 (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de iki tam esnek çoklu küme (F,A) ve (G,A) olsun. O zaman,

(a) $(\overline{(F,A)})^c = ((F,A)^c)^{\circ}$,

(b) $((F,A)^{\circ})^c = \overline{((F,A)^c)}$.

İspat:

$$(a)\left(\overline{(F,A)}\right)^c = (\{\tilde{\cap}\,(G,A) : (G,A)\ esnek\ çoklu\ kapalı\ küme\ ve\ (F,A) \tilde{\subseteq} (G,A)\})^c$$

$$= \tilde{\cup}\,\{(G,A)^c : (G,A)\ esnek\ çoklu\ kapalı\ küme\ ve\ (F,A) \tilde{\subseteq} (G,A)\}$$

$$= \tilde{\cup}\,\{(G,A)^c : (G,A)^c\ esnek\ çoklu\ açık\ küme\ ve\ (G,A)^c \tilde{\subseteq} (F,A)^c\}$$

$$= ((F,A)^c)^{\circ}$$

$$(b)\ ((F,A)^{\circ})^c = (\tilde{\cup}\,\{(G,A) : (G,A)\ esnek\ çoklu\ kapalı\ küme\ ve\ (G,A) \tilde{\subseteq} (F,A)\})^c$$

$$= \tilde{\cap}\,\{(G,A)^c : (G,A)^c\ esnek\ çoklu\ açık\ küme\ ve\ (F,A)^c \tilde{\subseteq} (G,A)^c\}$$

$$= \overline{((F,A)^c)}$$

4.5. Bir Noktanın Komşuluğu

Tanım 4.5.1 $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay, X_E de bir esnek çoklu küme (F,A) ve $x \in X^*$ olsun. Eğer $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde $(G,B) \in \tau$ esnek çoklu açık kümesi varsa (F,A) esnek çoklu kümesine x noktasının bir *esnek çoklu komşuluğu* denir. x noktasının bütün esnek çoklu komşuluklarının kümesi $\widetilde{N}(x)$ şeklinde gösterilir. Yani,

$$\widetilde{N}(x) = \{(F,A):\ (F,A) \in \tau, x \in (F,A)\}$$

Önerme 4.5.2 $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de bir esnek çoklu küme (F,A) olsun. (F,A) esnek çoklu açık kümedir ancak ve ancak (F,A) esnek çoklu kümesi her noktasının bir esnek çoklu komşuluğudur.

İspat : Eğer (F,A) açık ve $x \in (F,A)$ ise $(G,B) = (F,A)$ alındığında (F,A) kümesi x in bir esnek çoklu komşuluğu olur.

Tersine eğer her $x \in (F,A)$ için $x \in (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde $(G,B) \in \tau$ esnek çoklu açık kümesi varsa $(F,A) = \cup_{x\in(F,A)} (G,B)$ olup esnek çoklu açık kümelerin keyfi birleşimleri açık olacağından (F,A) esnek çoklu kümesi açıktır.

4.6. Esnek Çoklu Bir Kümenin Yığılma Noktası

Tanım 4.6.1 $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay, X_E de bir esnek çoklu küme (F,A) ve $x \in X^*$ olsun. Eğer x noktasının her (G,B) esnek çoklu açık komşuluğu için $\big((G,B)\backslash(x,C)\big) \cap (F,A) \neq \Phi$ ise $x \in X^*$ noktasına (F,A) esnek çoklu kümesinin bir *esnek çoklu yığılma noktası* denir. (F,A) esnek çoklu kümesinin bütün esnek çoklu yığılma noktalarının kümesi $(F,A)'$ ile gösterilir.

Önerme 4.6.2 $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de iki esnek çoklu küme (F,A) ve (G,B) olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B) \Rightarrow (F,A)' \tilde{\subseteq} (G,B)'$

(2) $((F,A) \tilde{\cup} (G,B))' = (F,A)' \tilde{\cup} (G,B)'$

(3) $((F,A) \tilde{\cap} (G,B))' \tilde{\subseteq} (F,A)' \tilde{\cap} (G,B)'$

İspat : (1) Eğer $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ ise Tanım 4.6.1 den $(F,A)' \tilde{\subseteq} (G,B)'$ olduğu açıktır.

(2) $(F,A) \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (G,B))$ ve $(G,B) \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (G,B))$ olup (1) den $(F,A)' \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (G,B))'$ ve $(G,B)' \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (G,B))'$ olduğundan $(F,A)' \tilde{\cup} (G,B)' \tilde{\subseteq} ((F,A) \tilde{\cup} (G,B))'$ dır.

Diğer yandan

$$((F,A) \tilde{\cup} (G,B))' \tilde{\subseteq} (F,A)' \tilde{\cup} (G,B)' \Leftrightarrow ((F,A)' \tilde{\cup} (G,B)')^c \tilde{\subseteq} (((F,A) \tilde{\cup} (G,B))')^c$$

olduğundan $((F,A) \tilde{\cup} (G,B))' \tilde{\subseteq} (F,A)' \tilde{\cup} (G,B)'$ ifadesini ispat etmek için sağ tarafın doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $x \notin ((F,A)' \tilde{\cup} (G,B)')$ olsun. Buradan $x \notin (F,A)'$ ve $x \notin (G,B)'$ olacağından $(H,C) \tilde{\cap} (F,A) \tilde{\subseteq} (x,C)$ ve $(K,C) \tilde{\cap} (G,B) \tilde{\subseteq} (x,C)$ olacak şekilde x in (H,C) ve (K,C) esnek çoklu açık komşulukları vardır. Burada $(H,C) \tilde{\cap} (K,C)$ x in bir esnek çoklu açık komşuluğu olup

$\big((H,C) \tilde{\cap} (K,C)\big) \tilde{\cap} \big((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\big)$
$= \big((H,C) \tilde{\cap} (K,C) \tilde{\cap} (F,A)\big) \tilde{\cup} \big((H,C) \tilde{\cap} (K,C) \tilde{\cap} (G,B)\big) \tilde{\subseteq} \big((H,C) \tilde{\cap} (F,A)\big) \tilde{\cup} (K,C) \tilde{\cap} (G,B) \tilde{\subseteq} (x,C)$ den $\big((H,C) \tilde{\cap} (K,C)\big) \tilde{\cap} \big((F,A) \tilde{\cup} (G,B)\big) \tilde{\subseteq} (x,C)$ olup
$x \notin ((F,A) \tilde{\cup} (G,B))'$ dır. Bu sağ tarafın dolayısıyla (2) deki ifadenin ispatını tamamlar.

(3) $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ ise $((F,A) \tilde{\cap} (G,B))' \tilde{\subseteq} (F,A)'$ ve $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) \tilde{\subseteq} (G,B)$ ise $((F,A) \tilde{\cap} (G,B))' \tilde{\subseteq} (G,B)'$ olduğundan $((F,A) \tilde{\cap} (G,B))' \tilde{\subseteq} (F,A)' \tilde{\cap} (G,B)'$ dır.

4.7. Esnek Çoklu Topolojik Uzayda Süreklilik

Tanım 4.7.1 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve $f:(X_E,\tau) \to (Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. Eğer her $(G,B) \in \sigma$ için $f^{-1}(G,B) \in \tau$ ise f esnek çoklu fonksiyonuna *esnek çoklu sürekli fonksiyon* denir.

Örnek 4.7.2 $X = \{3/x_1, 6/x_2, 3/x_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $f:(X_E,\tau) \to (X_E,\sigma)$ sabit bir esnek çoklu fonksiyon olsun. Burada (X_E,τ) ve (X_E,σ) sırasıyla esnek çoklu ayrık olmayan ve esnek çoklu ayrık topolojik uzaylardır.

$\forall x \in X^*$ için $\varphi(x) = x_1$ ve $\forall e \in E$ için $\psi(e) = e_1$ şeklinde tanımlı ve $(F, A) = \{e_1 = \{2/x_1, 5/x_2\},\ e_2 = \{3/x_1\}\}$ olsun. O zaman

$$C_{f^{-1}(F,A)(e_1)}(x_1) = C_{F(\psi(e_1))}\big(\varphi(x_1)\big) = C_{F(e_1)}(x_1) = 2$$

elde edilir. Benzer şekilde hesaplanırsa

$$C_{f^{-1}(F,A)(e_1)}(x_2) = C_{f^{-1}(F,A)(e_1)}(x_3) = 2,$$

$$C_{f^{-1}(F,A)(e_2)}(x_1) = C_{f^{-1}(F,A)(e_2)}(x_2) = C_{f^{-1}(F,A)(e_2)}(x_3) = 2,$$

$$C_{f^{-1}(F,A)(e_3)}(x_1) = C_{f^{-1}(F,A)(e_3)}(x_2) = C_{f^{-1}(F,A)(e_3)}(x_3) = 2,$$

elde edilir. O halde

$$(f^{-1}(F, A), E) = \{e_1 = \{2/x_1, 2/x_2, 2/x_3\}, e_2 = \{2/x_1, 2/x_2, 2/x_3\}, e_3 = \{2/x_1, 2/x_2, 2/x_3\}\}$$

bulunur. Burada $(F, A) \in \sigma$ iken $f^{-1}(F, A) \notin \tau$ dır. Bu f esnek çoklu fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterir.

Teorem 4.7.3 (X_E, τ) ve (Y_K, σ) iki esnek çoklu topolojik uzay olmak üzere $f: (X_E, \tau) \to (Y_K, \sigma)$ esnek çoklu fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak Y_K deki her esnek çoklu kapalı kümenin ters görüntüsü X_E de kapalıdır.

İspat: $f: (X_E, \tau) \to (Y_K, \sigma)$ esnek çoklu sürekli fonksiyon ve Y_K da kapalı esnek çoklu bir küme (G, B) olsun. Burada $f^{-1}((G, B)^c) = (f^{-1}(G, B))^c$ ve $(G, B)^c$ esnek çoklu açık küme olduğundan $f^{-1}((G, B)^c)$ esnek çoklu kümesi X_E de açıktır. O halde $f^{-1}(G, B) \,\tilde{\subseteq}\, X_E$ esnek çoklu kapalı kümedir.

Tersine Y_K deki her esnek çoklu kapalı kümenin ters görüntüsü X_E de kapalı ve Y_K da açık esnek çoklu bir küme (F, A) olsun. Burada $f^{-1}((F, A)^c) = (f^{-1}(F, A))^c$ olup varsayımdan $f^{-1}((F, A)^c)$ esnek çoklu kümesi X_E de kapalı olduğundan $f^{-1}(F, A) \,\tilde{\subseteq}\, X_E$ esnek çoklu açık kümedir. O halde Tanım 4.7.1 den f süreklidir.

Sonuç 4.7.4 (X_E, τ) ve (Y_K, σ) iki esnek çoklu topolojik uzay olmak üzere $f: (X_E, \tau) \to (Y_K, \sigma)$ esnek çoklu fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir.

$\boldsymbol{i.}\, f:(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ esnek çoklu fonksiyonu süreklidir

$\boldsymbol{ii.}$ Her $(G,B)\in\sigma$ için $f^{-1}(G,B)\in\tau$

$\boldsymbol{iii.}$ Y_K deki her esnek çoklu kapalı kümenin ters görüntüsü X_E de kapalıdır.

4.8. Esnek Çoklu Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.8.1 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve $x\neq y$ olacak şekilde $x,y\in X^*$ olsun. Eğer $\forall x,y\in X^*$ için

$$x\in(F,A)\;ve\;y\notin(F,A)\;veya\;y\in(G,B)\;ve\;x\notin(G,B)$$

olacak şekilde $(F,A),(G,B)\in\tau$ varsa $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayına T_0 *uzayı* denir.

Örnek 4.8.2 X çoklu küme evrenseli ve E parametrelerin kümesi olsun. $\forall x\in X^*$ için $\tau_x=\{\Phi,\tilde{X},(x,E)\}$ sınıfı X üzerinde esnek çoklu topoloji tanımlar. Ayrıca her bir $(X_E\,,\tau_x)$ esnek çoklu topolojik uzayı T_0 uzayıdır.

Önerme 4.8.3 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve Y,X esnek çoklu kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı T_0 uzayı ise $(X_E\,,\tau_Y)$ esnek çoklu topolojik uzayı da T_0 uzayıdır.

İspat : $x\neq y$ olacak şekilde $x,y\in Y^*$ olsun. Bu durumda $x,y\in X^*$ dır. $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı T_0 uzayı olduğundan

$$x\in(F,A)\;ve\;y\notin(F,A)\;veya\;y\in(G,B)\;ve\;x\notin(G,B)$$

olacak şekilde $(F,A)\in\tau$ vardır. Bu durumda

$$x\in\left({}^{Y}F,A\right)\;ve\;y\notin\left({}^{Y}F,A\right)\;veya\;y\in\left({}^{Y}G,B\right)\;ve\;x\notin\left({}^{Y}G,B\right)$$

olur. $x\in(F,A)$ ve $x\in\tilde{Y}$ olduğundan $x\in\left({}^{Y}F,A\right)$ dır. Burada $\left({}^{Y}F,A\right)=\tilde{Y}\,\tilde{\cap}\,(F,A)$ dır. Benzer şekilde $y\notin\left({}^{Y}F,A\right),y\in\left({}^{Y}G,B\right)\,ve\;x\notin\left({}^{Y}G,B\right)$ ifadeleri de gösterilebilir. O halde $(X_E\,,\tau_Y)$ esnek çoklu topolojik uzayı da T_0 uzayıdır.

Tanım 4.8.4 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X^*$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X^*$ için

$$x \in (F,A), y \notin (F,A)\ ve\ y \in (G,B), x \notin (G,B)$$

olacak şekilde $(F,A),(G,B) \in \tau$ varsa $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayına T_1 *uzayı* denir.

Teorem 4.8.5 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X^*$ için (x,A) esnek çoklu kümesi kapalı ise $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı T_1 uzayıdır.

İspat : Kabul edelim ki $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X^*$ ve her $x \in X^*$ için (x,A) tam esnek çoklu kümesi kapalı olsun. O halde $(x,A)^c$ esnek çoklu açık kümedir.Burada $y \in (x,A)^c$ ve $x \notin (x,A)^c$ olacak şekilde $(x,A)^c, (y,A)^c \in \tau$ vardır. Ayrıca $x \in (y,A)^c$ ve $y \notin (y,A)^c$ dır. Dolayısıyla $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı T_1 uzayıdır.

Önerme 4.8.6 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve Y, X esnek çoklu kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı T_1 uzayı ise $(X_E\,,\tau_Y)$ esnek çoklu topolojik uzayı da T_1 uzayıdır.

İspat : $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in Y^*$ olsun. Bu durumda $x, y \in X^*$ dır. $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı T_1 uzayı olduğundan

$$x \in (F,A), y \notin (F,A)\ ve\ y \in (G,B), x \notin (G,B)$$

olacak şekilde $(F,A),(G,B) \in \tau$ vardır. Bu durumda

$$x \in \left({}^{Y}F,A\right), y \notin \left({}^{Y}F,A\right)\ ve\ y \in \left({}^{Y}G,B\right), x \notin \left({}^{Y}G,B\right)$$

olur. $x \in (F,A)$ ve $x \in \tilde{Y}$ olduğundan $x \in \left({}^{Y}F,A\right)$ dır. Burada $\left({}^{Y}F,A\right) = \tilde{Y}\ \tilde{\cap}\ (F,A)$ dır. Benzer şekilde $y \notin \left({}^{Y}F,A\right), y \in \left({}^{Y}G,B\right)\ ve\ x \notin \left({}^{Y}G,B\right)$ ifadeleri de gösterilebilir. O halde $(X_E\,,\tau_Y)$ esnek çoklu topolojik uzayı da T_1 uzayıdır.

Tanım 4.8.7 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X^*$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X^*$ için

$$x \in (F,A), y \in (G,B)\ ve\ (F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B) = \Phi$$

olacak şekilde $(F,A),(G,B) \in \tau$ varsa (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayına T_2 *uzayı* ya da Hausdorff uzayı denir.

Önerme 4.8.8 $\boldsymbol{i}$**.** Her esnek çoklu T_1 uzayı aynı zamanda esnek çoklu T_0 uzayıdır.

$\boldsymbol{ii}$**.** Her esnek çoklu T_2 uzayı aynı zamanda esnek çoklu T_1 uzayıdır.

İspat: $\boldsymbol{i}$**.** Eğer (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı T_1 uzayı ise

$$x \in (F,A), y \notin (F,A) \ ve \ y \in (G,B), x \notin (G,B)$$

olacak şekilde $(F,A),(G,B) \in \tau$ vardır. Buradan

$$x \in (F,A) \ ve \ y \notin (F,A) \ veya \ y \in (G,B) \ ve \ x \notin (G,B)$$

olduğu açıktır. O halde (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı T_0 uzayıdır.

$\boldsymbol{ii}$**.** Eğer (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı T_2 uzayı ise

$$x \in (F,A), y \in (G,B) \ ve \ (F,A) \tilde{\cap} (G,B) = \Phi$$

olacak şekilde $(F,A),(G,B) \in \tau$ vardır. $x \in (F,A)$ ve $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = \Phi$ olduğundan $x \notin (G,B)$ dır. Aynı şekilde $y \in (G,B) \ ve \ (F,A) \tilde{\cap} (G,B) = \Phi$ olduğundan $y \notin (F,A)$ dır. Dolayısıyla

$$x \in (F,A), y \notin (F,A) \ ve \ y \in (G,B), x \notin (G,B)$$

olacak şekilde $(F,A),(G,B) \in \tau$ vardır. O halde (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı T_1 uzayıdır.

Önerme 4.8.9 (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve Y, X esnek çoklu kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı T_2 uzayı ise (X_E, τ_Y) esnek çoklu topolojik uzayı da T_2 uzayıdır.

İspat : $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in Y^*$ olsun. Bu durumda $x, y \in X^*$ dır. (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı T_2 uzayı olduğundan

$$x \in (F,A), y \in (G,B) \ ve \ (F,A) \tilde{\cap} (G,B) = \Phi$$

olacak şekilde $(F,A),(G,B) \in \tau$ vardır. Bu durumda

$$x \in ({}^{Y}F,A), y \in ({}^{Y}G,B) \ ve \ ({}^{Y}F,A) \tilde{\cap} ({}^{Y}G,B) = \Phi$$

olur. $x \in (F,A)$ ve $x \in \tilde{Y}$ olduğundan $x \in ({}^{Y}F,A)$ dır. Burada $({}^{Y}F,A) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (F,A)$ dır. Benzer şekilde $y \in ({}^{Y}G,B)$ ifadesi de gösterilebilir. Ayrıca $x \neq y$, $x \in ({}^{Y}F,A)$, $y \in ({}^{Y}G,B)$ ve $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = \Phi$ olduğundan $({}^{Y}F,A) \tilde{\cap} ({}^{Y}G,B) = \Phi$ dır. O halde $(X_E\,,\tau_Y)$ esnek çoklu topolojik uzayı da T_2 uzayıdır.

Tanım 4.8.10 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay, $x \notin (G,B)$ olacak şekilde (G,B) esnek çoklu kapalı küme ve $x \in X^*$ olsun.

Eğer $\forall x \in X^*$ için

$$x \in (F_1,A), (G,B) \tilde{\subseteq} (F_2,A) \; ve \; (F_1,A) \tilde{\cap} (F_2,A) = \Phi$$

olacak şekilde $(F_1,A), (F_2,A) \in \tau$ varsa $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayına *regüler uzay* denir.

Tanım 4.8.11 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay olsun. Eğer $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı hem T_1 hem de regüler uzay ise $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayına T_3 *uzayı* denir.

Not 4.8.12 Her esnek çoklu topolojik uzayına T_3 uzayı, esnek çoklu topolojik uzayına T_2 uzayı olmayabilir.

Tanım 4.8.13 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay, $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = \Phi$ olacak şekilde (F,A) ve (G,B) iki esnek çoklu kapalı küme olsun.

$$(F,A) \tilde{\subseteq} (F_1,A), (G,B) \tilde{\subseteq} (F_2,A) \; ve \; (F_1,A) \tilde{\cap} (F_2,A) = \Phi$$

olacak şekilde $(F_1,A), (F_2,A) \in \tau$ varsa $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayına *normal uzay* denir.

Tanım 4.8.14 $(X_E\,,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay olsun. Eğer $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı hem T_1 hem de normal uzay ise $(X_E\,,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayına T_4 *uzayı* denir.

Not 4.8.15 *i.* Her esnek çoklu topolojik uzayına T_4 uzayı, esnek çoklu topolojik uzayına T_3 uzayı olmayabilir.

ii. Eğer $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı T_4 uzayı ve Y, X esnek çoklu kümesinin boştan farklı bir alt kümesi ise $(X_E\ ,\tau_Y)$ esnek çoklu topolojik uzayı T_4 uzayı olmayabilir.

4.9. Esnek Çoklu Kompakt Uzay

Tanım 4.9.1 Esnek çoklu kümelerin bir ailesi Ψ olsun. Eğer

$$(F, A) \tilde{\subseteq} \tilde{\cup} \{(F_i, A) : (F_i, A) \in \Psi, i \in I\ \}$$

ise Ψ ailesine (F, A) esnek çoklu kümesinin örtüsü denir. Ψ ailesinin her bir elemanı esnek çoklu açık kümesi ise Ψ ailesine *esnek çoklu açık örtü* denir. Ψ ailesinin alt ailesine *alt örtü* denir.

Tanım 4.9.2 $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de bir esnek çoklu küme (F, A) olsun. (F, A) esnek çoklu kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (F, A) esnek çoklu kümesine *esnek çoklu kompakt küme* denir.

Eğer $\tilde{X}$ esnek çoklu kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayına esnek çoklu kompakt uzay denir.

Örnek 4.9.3 $\tilde{X}$ esnek çoklu kümesi sonlu ise $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı kompakttır.

Örnek 4.9.4 (X_E, τ) ve (Y_K, σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve $\tau \subset \sigma$ olsun. Eğer (Y_K, σ) esnek çoklu topolojik uzayı kompakt ise (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı kompakttır.

Önerme 4.9.5 (X_E, τ) kompakt esnek çoklu topolojik uzayında bir tam esnek çoklu kapalı küme (G, B) olsun. O zaman (G, B) kompakttır.

İspat: (G, B) esnek çoklu kümesinin herhangi bir açık örtüsü (F_i, A) olsun. O zaman $\tilde{X} \tilde{\subseteq} (\tilde{\cup}_{i\in I} (F_i, A)) \tilde{\cup} (G, B)^c$ dır. (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı kompakt olduğundan $(F_1, A) \tilde{\cup} (F_2, A) \tilde{\cup} \dots \tilde{\cup} (F_n, A) \tilde{\cup} (G, B)^c$ sonlu alt örtüsü vardır. O halde $\tilde{X} \tilde{\subseteq} (F_1, A) \tilde{\cup} (F_2, A) \tilde{\cup} \dots \tilde{\cup} (F_n, A) \tilde{\cup} (G, B)^c$ dır. Buradan $(G, B) \tilde{\subseteq} (F_1, A) \tilde{\cup} (F_2, A) \tilde{\cup} \dots \tilde{\cup} (F_n, A)$ elde edilir. O halde (G, B) kompakttır.

Önerme 4.9.6 (X_E, τ) esnek çoklu Hausdorff uzayında bir tam esnek çoklu ve kompakt küme (G, B) olsun. O zaman (G, B) esnek çoklu kapalı kümedir.

İspat: $x \in (G, B)^c$ olsun. (X_E, τ) esnek çoklu Hausdorff uzayı olduğundan $y \in (G, B)$ için $x \in (F_y, A)$ ve $y \in (H_y, A)$ olacak şekilde ayrık esnek çoklu açık kümeleri vardır. O halde $\{(H_y, A) : y \in (G, B)\}$ sınıfı (G, B) esnek çoklu kümesinin bir açık örtüsüdür. (G, B) esnek çoklu kümesi kompakt olduğundan $\{(H_{y_1}, A), (H_{y_2}, A), \dots, (H_{y_n}, A)\}$ sonlu alt örtüsü vardır. O halde $(G, B) \tilde{\sqsubseteq} \tilde{\cup}_{i=1}^{n} (H_{y_i}, A)$ dır. $(F_x, A) = \tilde{\cap}_{i=1}^{n} (F_{y_i}, A)$ ve $(H_x, A) = \tilde{\cup}_{i=1}^{n} (H_{y_i}, A)$ olmak üzere $(F_x, A) \tilde{\cap} (H_x, A) = \Phi$ dır. Buradan $(G, B) \tilde{\cap} (F_x, A) = \Phi$ olup $x \in (F_x, A) \tilde{\sqsubseteq} (G, B)^c$ den $(G, B)^c$ esnek çoklu kümesi açık dolayısıyla (G, B) esnek çoklu kapalı kümedir.

Teorem 4.9.7 (X_E, τ) ve (Y_K, σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve $f: (X_E, \tau) \rightarrow (Y_K, \sigma)$ sürekli ve örten bir esnek çoklu fonksiyon olsun. (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı kompakt ise (Y_K, σ) esnek çoklu topolojik uzayı kompakttır.

İspat: Teorem 3.3.4 ü göz önüne alalım. $\tilde{Y}$ esnek çoklu kümesinin bir açık örtüsü $\{(F_i, A)\}$ olsun. Yani $\tilde{Y} \tilde{\sqsubseteq} \tilde{\cup}_{i \in I} (F_i, A)$ dır. O zaman $f^{-1}(\tilde{Y}) \tilde{\sqsubseteq} f^{-1}(\tilde{\cup}_{i \in I} (F_i, A))$ ve buradan $\tilde{X} \tilde{\sqsubseteq} \tilde{\cup}_{i \in I} (f^{-1}(F_i, A))$ elde edilir. Bu $\tilde{\cup}_{i \in I} (f^{-1}(F_i, A))$ ifadesinin $\tilde{X}$ esnek çoklu kümesinin bir açık örtüsü olduğunu gösterir. (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayı kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. O halde

$$\tilde{X} \tilde{\sqsubseteq} f^{-1}(F_1, A) \tilde{\cup} f^{-1}(F_2, A) \tilde{\cup} \dots \tilde{\cup} f^{-1}(F_n, A)$$

elde edilir. f örten olduğundan,

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= f(\tilde{X}) \\ &\tilde{\sqsubseteq} f\left(f^{-1}(F_1, A) \tilde{\cup} f^{-1}(F_2, A) \tilde{\cup} \dots \tilde{\cup} f^{-1}(F_n, A)\right) \\ &= (F_1, A) \tilde{\cup} (F_2, A) \tilde{\cup} \dots \tilde{\cup} (F_n, A) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $\tilde{Y}$ esnek çoklu kümesinin sonlu bir alt örtüyle örtüldüğünü gösterir. O halde (Y_K, σ) esnek çoklu topolojik uzayı kompakttır.

4.10. Esnek Çoklu Bağlantılı Uzay

Tanım 4.10.1 $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay olsun.

$$\tilde{X} = (F,A) \,\tilde{\cup}\, (G,B) \text{ ve } (F,A) \,\tilde{\cap}\, (G,B) = \Phi$$

özelliğindeki boştan farklı (F,A) ve (G,B) esnek çoklu kümelerine $\tilde{X}$ esnek çoklu kümesinin bir *ayrışımı* denir. Eğer (F,A) ve (G,B) esnek çoklu kümeleri açık ise *açık ayrışım* denir.

Tanım 4.10.2 Eğer $\tilde{X}$ esnek çoklu kümesinin hiç bir açık ayrışımı yoksa $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayına esnek çoklu bağlantılı uzay aksi halde *bağlantısız esnek çoklu uzay* denir.

Örnek 4.10.3 $X = \{2/x, 3/y, 4/z, 5/w\}, E = \{p,q\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1,E), (F_2,E),$ $(F_3,E), (F_4,E), (F_5,E)\}$ olsun. Buradaki $(F_1,E), (F_2,E), (F_3,E)$ esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\begin{aligned} &F_1(p) = \{1/x, 2/y, 3/z\}, && F_1(q) = \{4/w\} \\ &F_2(p) = X, && F_2(q) = \{1/x, 3/y, 4/z, 5/w\} \\ &F_3(p) = \{2/x, 3/y, 3/z, 1/w\}, && F_3(q) = \{1/x, 4/w\} \end{aligned}$$

O halde τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar ve $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzaydır.

$(F_1,E) \,\tilde{\cap}\, (F_2,E) \neq \Phi$, $(F_1,E) \,\tilde{\cap}\, (F_3,E) \neq \Phi$ ve $(F_2,E) \,\tilde{\cap}\, (F_3,E) \neq \Phi$ ayrıca $(F_1,E) \,\tilde{\cap}\, (F_2,E) \neq \tilde{X}$, $(F_1,E) \,\tilde{\cap}\, (F_3,E) \neq \tilde{X}$ ve $(F_2,E) \,\tilde{\cap}\, (F_3,E) \neq \tilde{X}$ olduğundan $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı bağlantılıdır.

Teorem 4.10.4 $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı bağlantılıdır ancak ve ancak τ sınıfında Φ ve $\tilde{X}$ esnek çoklu kümelerinden başka hem açık hem de kapalı esnek çoklu küme yoktur.

İspat : $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı bağlantılı olsun. Kabul edelim ki X_E de (F,E) esnek çoklu tam kümesi Φ ve $\tilde{X}$ den farklı hem kapalı hem de açık esnek çoklu olsun. O halde $(F,E)^c$ esnek çoklu tam kümesi Φ ve $\tilde{X}$ den farklıdır. $(F,E) \,\tilde{\cup}\, (F,E)^c = \tilde{X}$, $(F,E) \,\tilde{\cap}\, (F,E)^c = \Phi$ olduğundan (F,E) ve $(F,E)^c$ esnek çoklu kümeleri $\tilde{X}$ esnek çoklu kümesinin bir ayrışımıdır. O halde $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı bağlantılı olamaz. Bu da τ sınıfında Φ ve $\tilde{X}$ esnek çoklu kümelerinden başka hem açık hem de kapalı esnek çoklu küme olamayacağını gösterir.

Tersine $(X_E\,, \tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı bağlantılı olmasın. O halde X_E in bir açık ayrışımı vardır. (F, A) ve (G, B) esnek çoklu kümeleri $\tilde{X}$ esnek çoklu kümesinin bir ayrışımı olsun. (F, A) esnek çoklu açık küme olduğundan $(F, A)^c$ kapalıdır. $\tilde{X} = (F, A) \,\tilde{\cup}\, (G, B)$ ve $(F, A) \,\tilde{\cap}\, (G, B) = \Phi$ olduğundan $(F, A) = X_E - (G, B)$ ve $(G, B) = X_E - (F, A)$ dur. $(F, A) \neq \Phi$ olduğundan $(G, B) \neq \tilde{X}$ dır. O halde (F, A) esnek çoklu kümesi τ sınıfında Φ ve $\tilde{X}$ esnek çoklu kümelerinden farklı hem açık hem de kapalı esnek çoklu kümedir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $(X_E\,, \tau)$ esnek çoklu topolojik uzayı bağlantılıdır.

Örnek 4.10.5 Esnek çoklu ayrık olmayan topolojik uzay bağlantılıdır. Çünkü Esnek çoklu ayrık olmayan topolojik uzayında Φ ve $\tilde{X}$ den farklı hem kapalı hem de açık esnek çoklu küme yoktur.

Örnek 4.10.6 Esnek çoklu ayrık topolojik uzay bağlantısızdır. Çünkü Esnek çoklu ayrık topolojik uzayında Φ ve $\tilde{X}$ den farklı hem kapalı hem de açık esnek çoklu küme vardır.

Sonuç 4.10.7 $(X_E\,, \tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $(X_E\,, \tau)$ esnek çoklu bağlantılı uzaydır.

(2) Boştan farklı (F, A) ve (G, B) esnek çoklu açık kümeleri için $\tilde{X} = (F, A) \,\tilde{\cup}\, (G, B)$

dır. Ancak $(F, A) \,\tilde{\cap}\, (G, B) \neq \Phi$ dır.

(3) Φ ve $\tilde{X}$ esnek çoklu kümelerinden başka hem açık hem de kapalı esnek çoklu küme yoktur.

(4) Eğer $\tilde{X} = (F, A) \,\tilde{\cup}\, (G, B)$ ve $(F, A) \,\tilde{\cap}\, (G, B) = \Phi$ ise $(F, A) = \Phi$ veya $(G, B) = \Phi$ dır.

(5) Eğer $\tilde{X} = (F, A) \,\tilde{\cup}\, (G, B)$ ve $(F, A) \,\tilde{\cap}\, (G, B) = \Phi$ ise $(F, A) = \tilde{X}$ veya $(G, B) = \tilde{X}$ dır.

5.BÖLÜM

TARTIŞMA–SONUÇ VE ÖNERİLER

Esnek ve çoklu küme teorileri matematiğin bir çok alanında uygulamalar bulmuştur. Ayrıca esnek kümeler, tıp, eğitim ve karar verme metotları gibi alanlarda, çoklu kümeler ise bilgi depolama, bilgi analizi ve bilgisayar bilimleri alanlarında uygulamaları olmuştur.

Bu iki yaygın küme kuramının birleşmesiyle oluşan esnek çoklu küme teorisi ilk olarak Babitha ve John [18] tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmanın takibinde Majumdar [31], Alkhazaleh [32] ve Neog [33] uygulamalarıyla esnek çoklu küme teorisinde farklı tanımlar vermişlerdir.

Bu çalışmada esnek çoklu kümeler yeniden tanımlandı. Bu tanım diğer tanımlardan daha genel bir bakış açısı içermektedir. İki esnek çoklu küme arasında fonksiyon yapısı uygulamaları artırmak için inşa edildi. Esnek çoklu kümeler üzerinde topoloji yapısı tanımlanarak bir çok yapısı ve özelliği incelendi.

Esnek çoklu küme teorisi güncel hayatta, özellikle bilgi depolama, bilgi analizi, eğitim, tıp ve bilgisayar bilimleri konularında bir çok uygulamaya imkan sağlamaktadır. Ayrıca esnek çoklu kümeler matematiğin diğer alanlarında da uygulanabilir ve bu sayede güncel hayata uyarlanması daha da kolaylaşabilir.

Bu çalışmanın gelecek araştırmalar için bir öncü olması en büyük temennimizdir.

KAYNAKLAR

1. Molodtsov, D., Soft set theory-first results, Computers and Mathematics with Applications 37, 19-31, 1999.
2. Molodtsov, D., Leonov, V.Y., Kovkov, D.V., Soft sets technique and its application, Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya 1(1), 8-39, 2006.
3. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, R., An application of soft sets in a decision making problem, Comput.Math. Appl. 44, 1077-1083, 2002.
4. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, R., Soft set theory, Comput. Math. Appl. 45, 555-562, 2003.
5. Chen, D., The parametrization reduction of soft sets and its applications, Computers and Math. with Appl. 49, 757-763, 2005.
6. Pie, D., Miao, D., From soft sets to information systems, Granular computing, IEEE Inter. Conf. 617-621, 2005.
7. Aktaş, H., Çağman, N., Soft sets and soft groups, Inf. Sci. 177, 2726-2735, 2007.
8. Shabir, M., Naz, M., On soft topological spaces, Computers and Mathematics with Applications 61, 1786-1799, 2011.
9. Aygünoğlu, A., Aygün, H., Some notes on soft topological spaces, Neural Comput & Applic 21, 113-119, 2012.
10. Varol, B.P., Aygün, H., On soft Hausdorff spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 5(1),15- 24, 2012.
11. Cerf, V., Fernandez, E., Gostelow, K., Volausky, S., Formal control and low properties of a model of computation, Report ENG 7178, Computer Science Department, University of California, Los Angeles, CA, December, p. 81, 1971.
12. Peterson, J., Computation sequence sets, Journal of Computer System Science 13(1), 1-24, 1976.
13. Yager, R.R., On the theory of bags, International Journal General System 13, 23-37, 1986.
14. Jena, S.P., Ghosh, S.K., Tripathy, B.K., On the theory of bags and lists, Information Sciences 132, 241-254, 2001.
15. Manjunath, A.S., John, S.J., On bag relations, Bulletin of Kerala Mathematics Association 3(2),15-22, 2006.

16. Girish, K.P., John, S.J., Relations and functions in multiset context, Information Sciences 179,758-768, 2009.
17. Girish, K.P., John, S.J., Multiset topologies induced by multiset relations, Information Sciences 188,298-313, 2012.
18. Babitha, K.V., John, S.J., On soft multi sets, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 5(1),35-44, 2013.
19. Babitha, K.V., Sunil J.J., Soft set relations and functions, Computers and Mathematics with Applications 60, 1840-1849, 2010.
20. Varol, B.P., Aygun, H., Fuzzy soft topology, Hacettepe journal of mathematics and statistics 41(3), 407-419, 2012.
21. Feng, F., Jun, Y.B., Zha, X.Z. o, Soft semirings, Computers and Math. with Appl. 56, 2621–2628, 2008.
22. Ali, M.I., Feng, F., Liu, X.Y., Min, W.K., Shabir, M., On some new operations in soft set theory, Computers and Math. with Appl. 57, 1547–1553, 2009.
23. Peyghan, E., Samadi, B. and Tayebi, A., On Soft Connectedness, arXiv:1202.1668, 2012.
24. Cağman, N., Karatas, S. and Enginoglu, S., Soft topology, Computers and Mathematics with Applications 62, 351-358, 2011.
25. Enginoğlu, S., Esnek Kümeler ve Esnek Karar Verme Metotları, Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat, 2008.
26. Aygünoğlu, A., Esnek Topolojik Uzaylar, Doktora Tezi, Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli, 2011.
27. Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W.K. and Atmaca, S., Remarks on soft topological spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 3(2), 171-185, 2012.
28. Min, W.K., A note on soft topological spaces, Comput. Math. Appl. 62, 3524-3528, 2011.
29. Yin, Y., Li, H. and Jun, Y.B., On algebraic structure of intuitionistic fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications 64, 2896-2911, 2012.
30. Kharal, A., Ahmad, B., Mappings on fuzzy soft classes, Hindawi Publishing Corporation, Advances in Fuzzy Systems, 6 pages, Article ID 407890, 2009.
31. Majumdar, P., Soft multisets, J. Math. Comput. Sci. 2, 1700-1711, 2012.

32. Alkhazaleh, S., Soft Multisets Theory, Applied Mathematical Sciences 5, 3561-3573, 2011.
33. Neog, T.J., Sut, D.K., On soft multisets theory, International Journal of Advanced Computer and Mathematical Sciences 3, 295-304, 2012.
34. Tokat, D., Osmanoğlu, İ., Connectedness on soft multi topology spaces, Journal of New Results in Science 2, 8-18, 2013.
35. Tokat, D., Osmanoğlu, İ., Soft multiset and soft multi topology, submitted.
36. Morris, S.A., Topology Without Tears, University of New England. Dept. of Mathematics, Statistics and Computing Science, 139, 1989
37. Koçak, M., Genel topolojiye giriş ve çözümlü alıştırmalar, Kampüs yayıncılık, Eskişehir, 2011
38. Mucuk, O., Topoloji ve kategori, Nobel yayın dağıtım, Ankara, 2010

ÖZGEÇMİŞ

İsmail OSMANOĞLU 1989 yılında Ordu'nun Gölköy ilçesinde doğdu. Ailesi aslen Trabzon'un Çaykara ilçesindendir. İlk ve orta öğrenimini Gölköy'de tamamladı.
2011 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı.

Adres: Erkilet Osmangazi mah. 54. sokak 19/33
38090 - Kocasinan/KAYSERI
Telefon: 0 537 403 59 00
e-posta : iso107@gmail.com, ismailosmanoglu@yahoo.com