T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN DURULAMA METODLARI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Figen YILDIZ

Danışman
Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2013
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN DURULAMA METODLARI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Figen YILDIZ

Danışman
Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2013
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL danışmanlığında **Figen YILDIZ** tarafından hazırlanan **"Bulanık Sayı Dizilerinin Durulama Metodları Üzerine''** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

06 / 06 /2013

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye : Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 28.06.2013 tarih ve 2013/18-01 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28 / 06 / 2013

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"Bulanık Dizilerin Durulama Metodları Üzerine" konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde maddi ve manevi imkanları sağlayarak bana yardımcı olan; kıymetli fikirleriyle yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen danışmanlığımı üstlenen Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL'e teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca her türlü desteğiyle yanımda olan canım annem ve babama, kardeşlerime teşekkür ederim.

ÖZET

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN DURULAMA METODLARI ÜZERİNE
Figen YILDIZ
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2013
Tez Danışman: Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Bu tezin ilk bölümünde bulanık kümeler ve onların cebirsel özelliklerine dair literatürde bulunan tanım ve teoremlere yer verilecektir.

İkinci bölümde, önce kesin bir değerin bulanıklaştırılması yöntemleri hakkında bilgiler verildikten sonra bulanık kümelerin Hellendorn ve Thomas[7], Sugeno[19], Yager ve Flev[23] tarafından literatüre kazandırılan durulama metodları tanıtılacaktır.

Üçüncü bölümde Şengönül ve Zararsız[25] tarafından tanımlanan bulanık sayı dizilerinin durulaması hakkında verilen tanım ve teoremler ele alınacaktır.

Son bölüm olan tezin orijinal kısmında, bulanık sayı dizilerinin benzerliğinin ölçüsü tanımlanacak ve bu tanıma dayalı teorem ve ispatlarına yer verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı, bulanık sayı dizisi, bulandırma metodları, durulama metodları.

ABSTRACT

ON THE DEFUZZIFICATION METHODS OF THE SEQUENCES FUZZY NUMBER

Figen YILDIZ

Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, June 2013

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

In the first part of this thesis is found in the literature on fuzzy sets and their algebraic properties will be included in the definition and theorems.

In the second part , after giving information about the fuzzification methods of an exact number , it will be introduced the defuzzification methods of the fuzzy sets, gained to the literature by Hellendom and Thomas[7], Sugeno[19], Yager and Filev[23].

In the third part, it will be handled the definitions and theorems, given about the defuzzification of fuzzy number sequences which were also defined by Sengönül and Zararsız[25].

The last chapter of the thesis that the original part of the similarity measure defined sequences of fuzzy numbers and will be included in this definition based on the theorems and proofs.

Keywords: Fuzzy numbers, fuzzy number sequences, fuzzification methods, defuzzification methods.

İÇİNDEKİLER

KISALTMA ve SİMGELER

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
w	Bütün reel veya kompleks terimli dizilerin uzayı
I	Kapalı ve sınırlı birim interval sayı
E	Reel sayılar kümesi üzerindeki kapalı intervallerin kümesi
$\mathcal{F}(X)$	X evrensel kümesinin bütün bulanık alt kümeleri
E^1	Bulanık sayıların kümesi
$w(E^1)$	Bütün bulanık sayıların dizilerinin uzayı
$c_0(E)$	İnterval sayıların sıfıra yakınsak dizilerinin uzayı
$c(E)$	İnterval sayıların yakınsak dizilerinin uzayı
$w(E)$	Bütün interval sayıların dizilerinin uzayı
u_α^+	Bir bulanık kümenin kuvvetli $\alpha-$kesim kümesi
u_α	Bir bulanık kümenin $\alpha-$kesim kümesi
d	İki interval sayı arasındaki uzaklık
$\overline{d}$	İki bulanık sayı arasındaki uzaklık
$\mathcal{D}$	İki bulanık sayı dizisi arasındaki uzaklık
z_{goc}^*	Ağırlık merkezi
z_{SM}^*	Sentroid metodu
z_{TM}^*	Toplamların merkezi metodu
z_{AO}^*	Ağırlık ortalama metodu
S	İki bulanık sayı arasındaki benzerliğin ölçüsü
r_k^u	benzerlik ölçüsünün x bileşeni
$y_{\tilde{u}}^*$	benzerlik ölçüsünün y bileşeni

1. BÖLÜM

GİRİŞ

1960'ların ortasında Lütfi Zadeh'in yaptığı çalışmalarla ortaya atılan bulanık mantık yaklaşımı ile dış dünyadan gelen verilerin daha uygun bir şekilde değerlendirilebilmesi mümkün olabilmektedir. Doğu kültürünün etksiyle Zadeh'in ortaya koyduğu bulanık mantık anlayışı batının dualist düşünce sistemi nedeniyle uzun süre Avrupa ve Amerika'da kabul görmedi. Uzak doğu ülkelerinde bulanık mantığa dayalı teknolojik ürünlerin kullanılmaya başlamasıyla batıda da bulanık mantı, onun ortaya koyduğu felsefe ve teknolojik uygulamaları batı bilim adamlarınca yakından incelenmeye başlandı. Bulanık mantığın temelleri ve temel bilimleri ve özellikle matematik ve fiziksel bilimlere etkisi gün geçtikçe daha da belirginleşmektedir. Bilgisayarlarla bilgi işleme, bilişim ve yapay zeka alanlarında da yepyeni olanaklar sunan bulanık mantık kesin akıl yürütme yerine yaklaşık akıl yürütmeye odaklanmaktadır. Bulanık mantık bulanık küme teorisini de kapsar. Dolayısıyla kümeler üzerinde tarif edilen bütün kavramların bulanık küme karşılıklarını elde etmek mümkündür. Örneğin; Matloka[10] tarafından bulanık sayı dizilerinin limitlerinin tarifinden sonra Nanda[15]'nın yakınsak ve sınırlı dizilerin uzaylarını tarif etmesi ve bunlarla ilgili bazı teoremleri yayınlamasından sonra bu alanla ilgili birçok araştırmacı yaptığı çalışmaları seçkin dergilerde yayınlatmışlardır, [10], [15, [20], [21].

Klâsik anlamda bağıntı, boş olmayan iki kümenin kartezyen çarpımının alt kümesi olarak tarif edilir. Bilinen klâsik bağıntılardan bir tanesi de benzerlik bağıntısıdır. Benzerlik bağıntısı, denklik bağıntısının bir genellenmesi olarak düşünülebilir. Bulanık anlamda benzerlik çalışmaları hakkında literatürde birçok makale mevcuttur, [4], [9], [11], [12], [14], [18]. Bu çalışmaların tümünde bulanık benzerlik bağıntılarının uygulamaları hakkında teoremler verilmiştir. A=(a_1, a_2, a_3, a_4) ve B= $b_1, b_2, b_3, b_4)$ bulanık kümelerinin benzerliğinin derecesi hakkında ilk çalışmaları Chen [18];

$S(A,B) = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{4} |a_i - b_i|}{4}$ olarak ve Hsieh, Deng Yong, Shi- Jay Chen' de Chen' in fikrini geliştirerek iki bulanık kümenin benzerliğinin derecesini belirleyen yeni tarifler vermişlerdir. Yukarıda ifade edildiği gibi iki bulanık kümenin benzerliğinin derecesi ele alınmıştır. Biz bu çalışmamızda bulanık sayı dizilerinin benzerliğinin derecesi tanımını yapıp bununla alakalı orjinal teoremleri son bölümde sunduk. Böylece bulanık sayı kümelerinin benzerliği derecesini dizilere genişleterek literatürdeki boşlukları doldurmayı amaçladık.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde bulanık kümeler ve onların özel bir hali olan bulanık sayıların cebirsel özellikleri ve bazı topolojik özellikleri hakkında temel tanım ve teoremler sunulacaktır.

2.1 İnterval ve İntervallerin Aritmetiği

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin her kapalı alt aralığına yani, $E_i = \{\overline{u} = [u^-, u^+] : u^- \leq u^+, u^-, u^+ \in \mathbb{R}\}$ kümesinin herbir elemanına interval sayı denir. $\overline{u} = [u^-, u^+]$ ve $\overline{v} = [v^-, v^+]$ interval sayıları verilsin. Eğer $u^- = v^-$ *ve* $u^+ = v^+$ ise $\overline{u}$ ve $\overline{v}$ interval sayılarına eşittir denir ve kısaca $\overline{u} = \overline{v}$ ile gösterilir, [13].

Eğer bir $\overline{u} = [u^-, u^+]$ interval sayısı verildiğinde $u^- = u^+$ ise $\overline{u}$ interval sayısına dejenere interval sayı denir. Dejenere interval sayılar bir tek reel sayıyı temsil eder.

Tanım 2.1. *Herhangi* $\overline{u} = [u^-, u^+]$ *ve* $\overline{v} = [v^-, v^+]$ *intevalleri verilsin .* $\overline{u} = [u^-, u^+]$ *ve* $\overline{v} = [v^-, v^+]$ *intervallerinin toplamı, farkı, çarpımı, bir skaler ile çarpımı ve bölümü sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$\overline{u} + \overline{v} = [u^- + v^-, u^+ + v^+]$, $\overline{u} - \overline{v} = [u^- - v^-, u^+ - v^+]$, $\overline{u}.\overline{v} = [minR_1, maxR_1]$,

$$\alpha\overline{u} = \begin{cases} [\alpha u^-, \alpha u^+], & \alpha \geq 0 \ \ ise, \\ [\alpha u^+, \alpha u^-], & \alpha < 0 \ \ ise \end{cases}$$

ve $\overline{u}/\overline{v} = [minR_2, maxR_2]$ *şeklinde ifade edilir, burada* $R_1 = \{u^-v^-, u^-v^+, u^+v^-, u^+v^+\}$ *ve* $R_2 = \{u^-/v^-, u^-/v^+, u^+/v^-, u^+/v^+\}$*,dir* [13].

Uzaklık kavramı analizin en önemli kavramlarından olup, limit, süreklilik v.s gibi topolojik kavramlar uzaklığa dayandırılır. Bu nedenle bulanık sayıların, dolayısıyla bulanık kümelerin topojisini oluşturmak için kullanılan uzaklıkla yakından ilgili olduğundan, önce interval sayılarının kümesi E_i üzerindeki metriği tanımlayacağız.

Tanım 2.2. $\overline{u} = [u^-, u^+]$ *ve* $\overline{v} = [v^-, v^+]$ *interval sayılarının aralarındaki uzaklık,*

$$d(\overline{u}, \overline{v}) = max\{|u^- - v^-|, |u^+ - v^+|\} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\overline{u}$ *ve* $\overline{v}$ *tek nokta intervalleri yani* $\overline{u} = [u, u]$ *ve* $\overline{v} = [v, v]$ *ise bu durumda (2.1) ifadesi reel sayılar arasındaki uzaklığa indirgenir. Gerçekten,*

$$d([u, u], [v, v]) = max(|u - v|, |u - v|) = |u - v|$$

dır.

Lemma 2.1. *Bütün interval sayıların cümlesi* E_i, $d : E_i \times E_i \to \mathbb{R}$ *ile tanımlı*

$$d(\overline{a}, \overline{b}) = max\{|a^- - b^-|, |a^+ - b^+|\}$$

fonksiyonu ile beraber tam metrik uzaydır, [13].

2.2 Bulanık Kümeler

Küme ortak özelliklere sahip nesneler topluluğu olarak tanımlanır. Verilen ortak özelliğe sahip her bir nesneye o kümenin bir elemanı denir. Kümeleri elemanlarının ortak özelliğini yazarak veya kümeye ait elamanları tek tek yazarak ifade edebiliriz. Fakat evrensel kümenin bir alt kümesini ifade etmenin bir diğer yolu da karakteristik fonksiyon adı verilen ve bir X evrensel kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine tanımlı bir u fonksiyonunu kullanmaktır. Bu fonksiyona karakteristik fonksiyon adı verilir. Karakteristik fonksiyon ele alınan özelliğe sahip olma ve olmama durumuna göre 1 ve 0 değerlerini alarak ifade etmek istediğimiz kümenin elemanlarını belirler. Yani bir $A \subset X$ kümesini karakteristik fonksiyon yardımı ile $\forall x \in X$ için,

$$u_A = \begin{cases} 1, & x \in A \ \ ise, \\ 0, & x \in A \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde belirleyebiliriz.

İki değerli olan bu yaklaşım, Zadeh[24] tarafından matematiğin reel problemlere uygulanmasına esneklik kazandırılması bakımından aşağıdaki gibi genişletilmiş, dilsel değişkenler adı verilen, biraz, ılık, sıcak vs. gibi durumlar matematiksel olarak ifade edilmiştir.

Tanım 2.3. *X evrensel küme ve $A \subset X$ olsun. Bulanık A kümesi, $u_A : X \longrightarrow [0,1]$ ile tanımlı fonksiyonla belirlenir. u_A fonksiyonuna üyelik fonksiyonu (veya çıktı fonksiyonu) denir. Burada $u_A(x)$ değeri, $x \in X$' in üyelik derecesini göstermektedir. A klâsik anlamda bir küme olduğu zaman üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. $u_A(x) = 1$, x'in X'e kesinlikle ait olması ve $u_A(x) = 0$ ise x'in X'e kesinlikle ait olmaması anlamındadır. Genel olarak bir X evrensel kümesinin bulanık bir A alt kümesini*

$$A = \{(x, u_A(x)) : x \in X, u_A(x) \in [0,1]\} \tag{2.2}$$

ile gösterebiliriz.

Bir X evrensel kümesinin bütün bulanık alt kümelerinin kümesini $\mathcal{F}(X)$ ile gösterelim.

Tanım 2.4. *Bir A bulanık kümesinin boş olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $u_A(x) = 0$ olmasıdır,* [22].

Tanım 2.5. *A ve B gibi iki bulanık kümenin eşit olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $u_A(x)$ ve $v_B(x)$ üyelik fonksiyonlarının eşit olmasıdır,* [22].

Tanım 2.6. *Bir A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $[0,1]$ aralığındaki bütün α' lar için*

$$\Gamma_\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanan Γ_α *kümesinin konveks olmasıdır,* [24]. *Ya da bir bulanık kümenin konveks olması demek* $\forall\alpha \in [0,1]$ *ve* $\forall x_1, x_2 \in X$ *için,*

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \min\{u(x_1), u(x_2)\}$$

dır.

Tanım 2.7. *Bir A bulanık kümesinin destek kümesi*

$$des(A) = \{x \in X | u(x) > 0 \ \ ve \ \ x \in X\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.8. $A, B \in \mathcal{F}(X)$ *ve* $u_A(x)$*, A nın,* $v_B(x)$ *de B nin üyelik fonksiyonu olsun.* $\forall x \in X$ *için* $u_A(x) \leq v_B(x)$ *oluyorsa A bulanık kümesi, B bulanık kümesinin alt kümesidir denir ve* $A \subset B$ *şeklinde gösterilir,* [24].

2.3 Bulanık Sayılar

X evrensel kümesi özel olarak $\mathbb{R}$ reel sayıların kümesi olarak alınsın. Bir bulanık A kümesini belirleyen $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ ile tanımlı u üyelik fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa A'ya, $\mathbb{R}$ üzerinde bulanık sayı denir, [8]:

(1) A normaldir. Yani $u(x_0) = 1$ olacak şekilde en az $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcuttur.

(2) A konvekstir.

(3) A yı belirleyen u fonksiyonu üstten yarı süreklidir.

(4) A kompaktır. Yani ${}^0[A] = \overline{\{x \in \mathbb{R} | u(x) > 0\}}$ kümesi kapalı ve sınırlıdır.

[19] daki notasyona göre bir bulanık sayı $\tilde{u} = (u^-, \dot{u}, u^+)$ üçlüsü ile temsil edilebilir. Burada u^-, $\tilde{u}$ bulanık sayısının sol bulanıklık yayılımını u^+, $\tilde{u}$ bulanık sayısının sağ bulanıklık yayılımını, $\dot{u}$ de üyeliğinin derecesi 1 olan reel sayıyı göstermektedir. Bütün bulanık sayılarının kümesini E^1 ile gösterelim.

Bulanık sayıların dizileri ve bulanık sayıların dizi uzayları hakkında literatürde birçok çalışma yapılmıştır, [1], [8], [10], [20]. Bu çalışmaların hemen hepsinde ortak olarak verilen bütün bulanık sayıların dizi uzayı

$$w(E^1) = \{\tilde{u} = (\tilde{u}_k) = ((u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)) : \tilde{u} : \mathbb{N} \to E^1, \tilde{u}(k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)\} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada her $k \in \mathbb{N}$ için $(\tilde{u}_k)$ bulanık sayı dizisinin $u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+$ sırasıyla ilk, orta ve son elemanını temsil eder. $\dot{u}_k - u_k^-$ ve $u_k^+ - \dot{u}_k$ reel sayıları sırasıyla her bir $k \in \mathbb{N}$ için u_k nın sağ ve sol bulanıklığı olarak adlandırılır.

Herhangi bir r reel sayısı,

$$\overline{r}(t) = \begin{cases} 1, & t = r \ \ ise, \\ 0, & t \neq r \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir $\overline{r}$ bulanık sayı olarak düşünülebilir, [1]. Herhangi bir r reel sayısı $(u^-, \dot{u}, u^+)$ üçlüsü ile (r, r, r) yani $u^- = r, \dot{u} = r, u^+ = r$ olarak verilir. Bu ise reel sayılar kümesi bulanık sayılar kümesinin özel bir hali olduğu fikrini verir.

E^1 nin elemanları u, v gibi küçük harflerle gösterilecektir.

Kesim kümeleri, bulanık sayı kümelerinin cebirsel ve topolojik yapılarının incelenmesinde önemli rol oynar. u bulanık kümesinin $\alpha-$kesim kümesi X evrensel kümesinin kesin bir alt kümesidir. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $\mathbb{R}$'de tanımlı bir u bulanık kümesinin ${}^{\alpha}u$ ile gösterilen $\alpha-$kesim kümesi ve ${}^{\alpha+}u$ ile gösterilen güçlü $\alpha-$kesim kümesi sırasıyla,

$${}^{\alpha}u = \{x : u(x) \geq \alpha \ \text{ ve } \ x \in X\}$$

$${}^{\alpha+}u = \{x : u(x) > \alpha \ \text{ ve } \ x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. $\forall \alpha \in [0,1]$ için u^{α} kesim kümesi ${}^{\alpha}u = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ şeklinde $\mathbb{R}$' nin kapalı bir alt aralığını belirler, [5].

Teorem 2.1. *$u \in E^1$ ve herbir $\alpha \in [0,1]$ için ${}^{\alpha}u = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ olsun. Bu durumda*

(1) $u^{-}(\alpha);(0,1]$ *üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur,*

(2) $u^{+}(\alpha);(0,1]$ *üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve artmayan bir fonksiyondur,*

(3) $u^{-}(\alpha)$ *ve* $u^{+}(\alpha)$ *fonksiyonları,* $\alpha=0$ *noktasında sağdan süreklidir,*

(4) $u^{-}(1)\leq u^{+}(1)$

şartları mevcuttur. Eğer α *ve* β *yukarıdaki* $(1-4)$ *şartlarını sağlayan iki fonksiyon ise o halde herbir* $\alpha\in[0,1]$ *için* ${}^{\alpha}u=[u^{-}(\alpha),u^{+}(\alpha)]$ *olan bir tek* $u\in E^{1}$ *vardır ve* $u^{-}(\alpha),u^{+}(\alpha)$ *fonksiyon çifti için elde edilen u bulanık sayısı;* $u:\mathbb{R}\to[0,1]$, $u(x)=sup\{\alpha:u^{-}(\alpha)\leq u^{+}(\alpha)\}$ *şeklinde tanımlanır,* [6].

2.4 Bulanık Sayıların Aritmetiği

Bulanık sayıların toplaması, çıkarması, çarpması ve bölmesi aşağıdaki biçimde tanımlanır.

1. Toplama: $u,v\in E^{1}$ olmak üzere $u+v$ toplamı α-kesim kümeleri yardımıyla

$$ {}^{\alpha}u+{}^{\alpha}v=[{}^{\alpha}u^{-},{}^{\alpha}u^{+}]+[{}^{\alpha}v^{-},{}^{\alpha}v^{+}]=[{}^{\alpha}u^{-}+{}^{\alpha}v^{-},{}^{\alpha}u^{+}+{}^{\alpha}v^{+}] \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır, [8].

2. Çıkarma: $u,v\in E^{1}$ ise $\alpha\in[0,1]$ olmak üzere $u-v$ farkı α kesim kümeleri yardımıyla

$$ {}^{\alpha}u-{}^{\alpha}v=[{}^{\alpha}u^{-},{}^{\alpha}u^{+}]-[{}^{\alpha}v^{-},{}^{\alpha}v^{+}]=[{}^{\alpha}u^{-}-{}^{\alpha}v^{+},{}^{\alpha}u^{+}-{}^{\alpha}v^{-}]$$

biçiminde tanımlanır, [8].

3. Çarpma: $u,v\in E^{1}$ ve $\alpha\in[0,1]$ olmak üzere $u.v$ çarpımı;

$$ {}^{\alpha}u.{}^{\alpha}v=[{}^{\alpha}u^{-},{}^{\alpha}u^{+}].[{}^{\alpha}v^{-}.{}^{\alpha}v^{+}]$$

$$=[\min\{{}^{\alpha}u^{+}.{}^{\alpha}v^{+},{}^{\alpha}u^{+}.{}^{\alpha}v^{-},{}^{\alpha}u^{-}.{}^{\alpha}v^{-},{}^{\alpha}u^{-}.{}^{\alpha}v^{+}\},\max\{{}^{\alpha}u^{+}.{}^{\alpha}v^{+},{}^{\alpha}u^{+}.{}^{\alpha}v^{-},{}^{\alpha}u^{-}.{}^{\alpha}v^{-},{}^{\alpha}u^{-}.{}^{\alpha}v^{+}\}]$$

şeklindedir, [8].

4. Bölme: $u,v \in E^1$ olmak üzere iki bulanık sayının bölümü, ${}^{\alpha}v^-, {}^{\alpha}v^+ \neq 0$ ve $\forall\alpha \in [0,1]$ için

$${}^{\alpha}u/{}^{\alpha}v = [{}^{\alpha}u^-, {}^{\alpha}u^+]/[{}^{\alpha}v^-. {}^{\alpha}v^+]$$

$$= [\min\{{}^{\alpha}u^+/{}^{\alpha}v^+, {}^{\alpha}u^+/{}^{\alpha}v^-, {}^{\alpha}u^-/{}^{\alpha}v^-, {}^{\alpha}u^-/{}^{\alpha}v^+\}, \max\{{}^{\alpha}u^+/{}^{\alpha}v^+, {}^{\alpha}u^+/{}^{\alpha}v^-, {}^{\alpha}u^-/{}^{\alpha}v^-,$$

$${}^{\alpha}u^-/{}^{\alpha}v^+\}]$$

şeklindedir, [8].

Örnek 2.1. *u ve v bulanık sayılarını sırasıyla $u(x)$ ve $v(x)$ üyelik fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlayalım.*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \quad ve \quad x \geq 3 \; ise, \\ \frac{x+1}{2}, & x \in (-1,1] \; ise \\ \frac{3-x}{2}, & x \in [1,3) \; ise \end{cases} . \tag{2.5}$$

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \; ve \; x \geq 5 \; ise, \\ \frac{x-1}{2}, & x \in (1,3] \; ise \\ \frac{5-x}{2}, & x \in [3,5) \; ise \end{cases} . \tag{2.6}$$

${}^{\alpha}u = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$, ${}^{\alpha}v = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha]$ *olduğundan dolayı* (2.4) *ifadesinden*

$${}^{\alpha}(u+v) = {}^{\alpha}u + {}^{\alpha}v = [4\alpha, 8 - 4\alpha]$$

elde ederiz. Dolayısıyla $[4\alpha, 8-4\alpha]$ *intervali kullanılarak elde edilen u ve v bulanık sayılarının toplamı olan z bulanık sayısının üyelik fonksiyonu ;*

$$z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \quad ve \quad x > 8 \; ise, \\ \frac{x}{4}, & x \in (0,4] \; ise \\ \frac{8-x}{4}, & x \in (4,8] \; ise \end{cases} \tag{2.7}$$

dir.

Benzer olarak u ve v'nin farkı ${}^{\alpha}u = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$, ${}^{\alpha}v = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha]$ *olduğu dikkate alınarak $u - v$ farkının α seviye kümesini*

$${}^{\alpha}(u-v) = [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha]$$

şeklinde yazabiliriz ve $u-v$'nin üyelik fonksiyonu

$$(u-v)(x)=\begin{cases} 0, & x\leq -6 \quad ve \quad x\geq 2 \ ise, \\ \frac{x+6}{4}, & x\in(-6,-2] \ ise, \\ \frac{2-x}{4}, & x\in[-2,2) \ ise \end{cases} \quad olur. \tag{2.8}$$

Aynı şekilde u ve v bulanık sayılarının çarpımı onlara karşılık gelen $\alpha-$ seviye kümeleri kullanılarak u ve v nin $\alpha-$ seviye kümelerinin çarpımını

$$^{\alpha}(u.v)=\begin{cases} [-4\alpha^2+12\alpha-5, 4\alpha^2-16\alpha+15], & \alpha\in(0,0.5] \ ise, \\ [-4\alpha^2-1, 4\alpha^2-16\alpha+15], & \alpha\in(0.5,1] \ ise \end{cases}$$

şeklinde elde ederiz ve $^{\alpha}(u.v)$ ye karşılık gelen bulanık sayımız ise;

$$(u.v)(x)=\begin{cases} 0, & x<-5 \quad ve \quad x\geq 15 \ ise, \\ \frac{[3-(4-x)]^{\frac{1}{2}}}{2}, & x\in[-5,0) \ ise \\ \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{2}, & x\in[0,3) \ ise \\ \frac{([4-(1+x)^2)]}{2}, & x\in[3,15) \ ise \end{cases} \quad olur.$$

Son olarak u'nun ve v'nin bölümü

$$^{\alpha}(u/v)=\begin{cases} [(2\alpha-1)/(2\alpha+1),(3-2\alpha^2)/(2\alpha+1)], & \alpha\in(0,0.5] \ ise, \\ [(2\alpha-1)/(5-2\alpha),(3-2\alpha^2)/(2\alpha+1)], & \alpha\in(0.5,1] \ ise \end{cases}$$

den

$$(u/v)(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \quad ve \quad x\geq 3 \ ise, \\ \frac{x+1}{2-2x}, & -1\leq x<0 \ ise \\ \frac{5x+1}{2x+2}, & 0\leq x<\frac{1}{3} \ ise \\ \frac{3-x}{2x+2}, & \frac{1}{3}\leq x<3 \ ise \end{cases} \quad olur.$$

Bulanık sayılar, onları temsil eden üyelik fonksiyonlarının şekillerine göre isimler alırlar. Örneğin üyelik fonksiyonu, üçgen görünümlü ise üçgensel bulanık küme, yamuk görünümlü ise yamuk bulanık küme olarak adlandırılır. Genel olarak uygulamalarda elde edilen sonuçlar üyelik fonksiyonların görünümlerine fazla duyarlı olmadıklarından, üçgen ve yamuk bulanık küme gösterimde kolaylık olması bakımından Örnek 2.1 de verilen u ve v bulanık sayılarını sırası ile $u = (-1,1,3;1)$ ve $v = (1,3,5;1)$ sıralıları ile temsil edilebilirler. Bu sıralıları kullanarak toplama ve çarpma işlemlerini sırasıyla $u+v = (-1,1,3;1)+(1,3,5;1) = (0,4,8;1)$, $u.v = (-1,1,3;1).(1,3,5;1) = (-1,3,15;1)$ şeklinde yazarsak Örnek 2.1 verilen sonuçlara eşit sonuçlar elde edebiliriz. Bu tip verilen aritmetik işlemlere karşılık gelen üyelik fonksiyonları Örnek 2.1 de verilenlerle çok yakın olduğu kolaylıkla görülebilir. Tezimizde bulanık sayılar veya bulanık kümeleri temsil ederken yerine göre yukarıdaki biçimde tarif ettiğimiz gösterimleri kullanacağız.

Verilen bir küme üzerinde cebirsel işlemlerle beraber bir uzaklık tanımlandığında o kümenin oldukça zengin bir yapıya kavuşacağını reel veya karmaşık sayıların kümelerinden biliyoruz. Bu nedenle, aşağıda bulanık sayılar kümesi üzerinde bir metrik tanımlayarak daha zengin yapılara ulaşmayı hedefliyoruz.

Tanım 2.9. *$u,v \in E^1$ olsun. u ve v bulanık sayıları arasındaki uzaklık $\overline{d} : E^1 \times E^1 \to \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$\overline{d}(u,v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} d({}^{\alpha}u, {}^{\alpha}v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} max\{|u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|, |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|\}$$

şeklinde tanımlanır, [21].

Yukarıda Örnek 2.1 de verilen u ve v bulanık sayıları arasındaki uzaklık

$$\overline{d}(u,v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} d(\alpha^u, \alpha^v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} max\{|(2\alpha-1)-(2\alpha+1)|, |(3-2\alpha)-(5-2\alpha)|\} = 2$$

dir.

E^1 üzerinde tanımlı $\overline{d}$ metriği aşağıdaki lemmada verilen (1)-(4) özelliklerini sağladığını göstermek kolaydır.

Lemma 2.2. *$u,v,w,z \in E^1$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman*

(1) *$(E^1, \overline{d})$, tam metrik uzaydır,* [16].

(2) $\overline{d}(ku,kv) = |k|\overline{d}(u,v)$.

(3) $\overline{d}(u+v,w+v) = \overline{d}(u,w)$.

(4) $\overline{d}(u+v,w+z) \leq \overline{d}(u,v) + \overline{d}(w,z)$ *şartları sağlanır,* [21].

2.5 Bulanık Sayı Dizileri

$f : \mathbb{N} \to E^1, k \to f(k) = (u_k)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona, genel terimi u_k olan bulanık sayıların bir dizisi denir ve u_k dizinin k. terimi olarak adlandırılır. Yani bu tanıma göre herbir k doğal sayısına bir bulanık sayısı karşılık gelmiş olur, [10]. Bulanık sayıların dizi uzayları üzerindeki çalışmaların bir çoğunda diziler, sonraki bölümlerde tanımlayacağımız gibi, aslında verilen bir reel sayı dizisinin terimlerinin üçgen veya yamuk bulandırma tekniği kullanılarak elde edilen bulanık sayıların dizisi olarak ele alınmıştır.

Bütün bulanık sayı dizilerinin kümesini $w(E^1)$ ile gösterelim.

Örneğin, $u : \mathbb{N} \to E^1$ şeklinde tanımlanan $u = u_k(x)$ fonksiyonu

$$u_k(x) = \begin{cases} x-k, & x \in [k-1,k] \ \textit{ise} \\ k-x, & x \in [k,k+1] \ \textit{ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.9}$$

ile verilsin. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $u_k(x)$'lar bulanık sayı olma şartlarını sağlar.

Genel olarak üçgen üyelik fonksiyonlarına sahip bulanık sayıların bir dizisi

$$u_k(x) = \begin{cases} \lambda_k(x), & x \in [a_k,b_k] \\ \mu_k(x), & x \in [b_k,c_k] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{2.10}$$

ile verilen $u_k : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonlarının bir dizisidir, burada $\lambda_k(x)$ fonksiyonları her k doğal sayısı için $[a_k,b_k]$ aralıklarında artan, sürekli ve $\mu_k(x)$ fonksiyonları her k doğal sayısı için $[b_k,c_k]$ aralıklarında azalan, sürekli fonksiyonlardır. Bulanık sayıların tanımında verilen (1) numaralı özellik, bir bulanık sayı dizisinin her bir terimi tarafından sağlanır. Dolayısıyla

(2.10) de verilen bulanık sayı dizisi için

$$(u_k) = (a_k, b_k, c_k; 1) \tag{2.11}$$

gösterimini kullanmak bir çok kolaylığı beraberinde getirir, burada a_k, b_k ve c_k reel sayıların dizileridir ve herbir $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \leq b_k \leq c_k$ eşitsizliğini sağlamalıdır. Kolayca aşağıda verilen tanımların (2.10) ve (2.11) gösterimleri için eşdeğer sonuçlar verdiği kolayca görülür.

$u = (u_k)$, $v = (v_k) \in W(E^1)$ olmak üzere u, v bulanık dizileri arasındaki fark

$$D(u, v) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \overline{d}(u_k, v_k)$$

olarak tanımlanır, [8].

Tanım 2.10. $u = (u_k)$ *bir bulanık sayı dizisi olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *sayısı için,* $D(u_k, u_0) < \varepsilon$, $k \geq n$ *olacak şekilde bir* $n \in \mathbb{N}$ *doğal sayısı mevcut ise bulanık sayıların* (u_k) *dizisi yakınsaktır denir ve limiti* u_0 *bulanık sayısıdır ve kısaca* $\lim_{k \to \infty} u_k = u_0$ *ile gösterilir. Eğer bir* $(u_k) \in w(E^1)$ *dizisi* u *bulanık sayısına yakınsıyorsa D' nin tanımından* $\{u_k^-(\alpha)\}$ *ve* $\{u_k^+(\alpha)\}$ *fonksiyon dizileri* $[0, 1]$ *aralığında sırasıyla* $u^-(\alpha)$ *ve* $u^+(\alpha)$*' ya yakınsar. Eğer* $\lim_k u_k$ *mevcut değilse* (u_k) *bulanık sayıların dizisine ıraksaktır denir,* [21].

Aşağıda bulanık sayıların yakınsak dizileri hakkında literatürde mevcut olan bazı teoremleri ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 2.2. *Yakınsak bir* $u = (u_k) \in w(E^1)$ *bulanık sayı dizisinin limiti tektir,* [10].

Örnek 2.2. $(v_k) \in w(E^1)$ *bulanık sayı dizisini*

$$v_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in [\frac{2k-2}{2}, 3]; (k = n^2, n = 1,2,3...) \ \textit{ise} \\ \frac{-k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in [3, \frac{4k+2}{k}]; (k = n^2, n = 1,2,3...) \ \textit{ise} \\ 0, & \textit{diğer durumlarda}; (k = n^2, n = 1,2,3...) \\ v_0(x); & k \leq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada,

$$v_0(x) = \begin{cases} x-8, & x \in [8,9] \text{ ise} \\ -x+10, & x \in [9,10] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $v = (v_k) \in w(E^1)$ dizisi yakınsak değildir.

Teorem 2.3. *$u = (u_k)$ ve $v = (v_k) \in w(E^1)$, $\lim_k u_k = u_0, \lim_k v_k = v_0$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O halde aşağıdaki dört şart sağlanır:*

(1) $u_k + v_k \to u_0 + v_0,\ k \to \infty$

(2) $u_k - v_k \to u_0 - v_0,\ k \to \infty$

(3) $u_k.v_k \to u_0.v_0,\ k \to \infty$

(4) $u_k/v_k \to u_0/v_0,\ k \to \infty$; *(her $k \in \mathbb{N}, v_k \neq 0, v_0 \neq 0$ için)' dır,* [10].

Tanım 2.11. *Her $\varepsilon > 0$ için $k,m \in \mathbb{N}$ olduğunda $\overline{d}(u_k,u_m) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı mevcut ise $u = (u_k) \in w(E^1)$ bulanık sayı dizisine bulanık sayıların Cauchy dizisi denir,* [10].

Teorem 2.4. *Bir $u = (u_k) \in w(E^1)$ bulanık sayı dizisini ve doğal sayıların artan bir (k_n) dizisini göz önüne alalım. Bu durumda (u_{k_n}) dizisine (u_k) dizisinin bir alt dizisi denir,* [10].

Teorem 2.5. *Yakınsak bir $u = (u_k) \in w(E^1)$ bulanık sayı dizisinin her alt dizisi de yakınsaktır ve alt dizinin limiti $u = (u_k)$ dizisinin limiti ile aynıdır,* [10].

Teorem 2.6. *Eğer her $k \geq k_0$ doğal sayısı için $u_k \geq v_k \geq z_k$ olacak şekilde k_0 sayısı mevcut ise ve $\lim_k u_k = u_0 = \lim_k z_k$ ise bu takdirde (v_k) bulanık sayıların dizisi yakınsaktır ve $\lim_k v_k = u_0$' dir,* [10].

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\lim_k u_k = u_0$ olduğundan $k > k_1$ iken $\overline{d}(u_k,u_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir k_1 sayısı mevcuttur. $\lim_k z_k = u_0$ olduğundan, $k > k_2$ olduğunda $\overline{d}(z_k,u_0) < \varepsilon$ olacak şekilde

k_2 sayısı mevcuttur. $\overline{k} = \max\{k, k_1, k_2\}$ olsun. Bu takdirde $k > \overline{k}$ için

$$\overline{d}(v_k, u_0) \leq \overline{d}(v_k, z_k) + \overline{d}(z_k, u_0) \leq \overline{d}(u_k, z_k) + \overline{d}(z_k, u_0) \leq \overline{d}(u_k, u_0) + \overline{d}(z_k, u_0) + \overline{d}(z_k, u_0) \leq 3\varepsilon$$

olur ve bu da bize $\lim_k v_k = u_0$ olduğunu gösterir. $\square$

3. BÖLÜM

BULANDIRMA ve DURULAMA TEKNİKLERİ

Bilindiği gibi bulanık kümelerin üzerindeki bazı topolojik ve cebirsel kavramlar onların $\alpha-$ kesim kümeleri kullanılarak tanımlanır. Dolayısı ile $\alpha-$ kesim kümelerini bulanık kümelerle klasik kümeleri birbirine bağlayan bir vasıta olarak düşünebiliriz, [8]. Benzer durum bulandırma ve durulama adı verilen işlemlerde de ortaya çıkar.

Bulandırma kesin bir değeri bulanıklaştırma işlemidir. Çoğu güncel işlerde örneğin dijital bir voltmetrenin gösterdiği değer belirli bir sayıdır. Fakat bu sayılar gerçekte kesin değerler değildir. Çünkü bu voltmetrenin gösterdiği sayı aslında bir miktar hata payı da içermektedir. Dolayısıyla voltmetrenin gösterdiği örneğin 5 voltluk bir değer $(4.8, 5, 5.2)$ bulanık sayısı ile ifade edilebilir. Bu işlem 5 kesin değerinin bulanıklaştırılması işlemi olarak yorumlanır.

3.1 Bulandırma Teknikleri

Bir çok bulandırma tekniği olmasına rağmen yaygın olarak üç farklı teknik kullanılır. Bunlar:

(1) Tekil bulandırma

(2) Gaussian bulandırma

(3) Üçgen veya yamuk bulandırma

teknikleridir.

Literatürdeki bulanık sayıların (genel anlamda bulanık kümelerin) dizileri incelendiğinde bu dizilerin aslında reel terimli dizilerin kesin elemanlarının üçgen bulandırma tekniği kullanılarak, herbir terimi bulandırılıp, bu bulanık elemanlardan oluşturulduğu görülür. Örneğin aşağıdaki biçimde üyelik fonksiyonu yardımı ile tanımlı bulanık sayıların bir yakınsak dizisini gözönüne alalım.

$$u = u_k(x) = \begin{cases} \frac{kx-0.8}{0.8-k}, & x \in [\frac{0.8}{k}, 1] \ ise \\ \frac{1.2-kx}{1.2-k}, & x \in [1, \frac{1.2}{k}] \\ 0, & aksi \ halde \end{cases}$$

$(u_k(x))$ dizisinin aslında terimleri; $(\frac{1}{k}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, ...)$ kesin yakınsak reel sayı dizisinin terimlerinin üçgen bulandırma tekniği kullanılarak elde edilmiştir. $(\frac{1}{k})$ dizisi 0'a yakınsaktır. Sezgisel olarak yakınsak reel terimli bir dizinin terimlerini bulandırarak elde edeceğimiz bulanık sayıların diziside yakınsak olacaktır diyebiliriz. Sınırlılık içinde benzer durum geçerlidir.

3.2 Durulama Teknikleri

Genel olarak, bulanık bir veya birden fazla bilgiden, bunları temsil edecek bir tek kesin değer elde edilmesi gerekebilir. Bulanık bir bilgi (küme)den kesin değer elde etme işlemi durulama olarak adlandırılır. Literatürde birçok durulama metodu bulunmasına rağmen, en çok kullanılanlardan bazıları aşağıda listelenmiştir:

(1) Maksimum Üyelik Metodu: Bu metodla bulanık kümeyi temsil eden A üyelik fonksiyonun, evrensel küme üzerinde maksimum yapan z^* değeri tespit edilir ve cebirsel olarak

$$A(z^*) \leq A(z), \ \forall z \in X$$

ile gösterilir. Burada X, A bulanık kümesinin üzerinde tanımlı olduğu evrensel kümedir.

(2) Sentroid Metodu: Bu metod ağırlık merkezi olarak da isimlendirilir ve cebirsel olarak

$$z^*_{SM} = \frac{\int A(z)zdz}{\int A(z)dz}$$

şeklinde verilir. Burada $\int$ Rieamann anlamında integrali gösterir.

(3) Ağırlıklı Ortalama Yöntemi: Birçok bulanık uygulamada kullanılan bu metod, simetrik üyelik fonksiyonları ile durulanmış değerler verir. Cebirsel olarak

$$z^*_{AO} = \frac{\sum A(\bar{z})\bar{z}}{\sum A(\bar{z})}$$

ile ifade edilir, burada $\sum$ bilinen anlamda toplamı ve $\bar{z}$ de simetrik üyelik fonksiyonunun merkezini gösterir.

(4) Toplamın Merkezi Metodu: Bu metod birçok durulama metodundan daha hızlı çalışır. Bu metod da verilen bulanık kümelerin üyelik fonksiyonlarının simetrik olma zorunluluğu da yoktur. Buna göre toplamın merkezi metodu

$$z^*_{TM} = \frac{\int_X \sum_{k=1}^n \bar{z} A_k(z) dz}{\int_X \sum_{k=1}^n A_k(z) dz}$$

ile tanımlanır, burada X bulanık kümelerin tanımlı olduğu evrensel kümedir. Örneğin B_1, B_2 ve B_3 bulanık kümeleri sırası ile aşağıdaki gibi verilsin:

$$B_1(x) = \begin{cases} 0.3x & x \in [0,1] \\ 0.3 & x \in [1,4] \\ 1.5 - 0.3x & x \in [4,5] \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$B_2(x) = \begin{cases} 1.5 - 0.5x & x \in [3,4] \\ 0.5 & x \in [4,6] \\ 0.5x - 3.5 & x \in [6,7] \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$B_3(x) = \begin{cases} x - 5 & x \in [5,6] \\ 1 & x \in [6,7] \\ 8 - x & x \in [7,8] \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu durumda Sentroid metoduna göre B_1, B_2 ve B_3 bulanık kümelerini temsil eden durulanmış z^* kesin değeri 4.9 dur. Aynı bulanık kümelerin Toplamların Merkezi Metoduna göre z^* durulanmış değeri 5 dir. Diğer metodlara göre de ilgili formüller kullanılarak benzer hesaplar yapılabilir.

Acaba, yakınsak bulanık sayıların dizilerin yakınsaklığı veya diğer bazı özellikleri, her bir teriminin durulanması ile elde edilen reel sayı dizisinin yakınsak olmasını gerektirir mi? sorusuna cevap sonraki bölümde verilecektir.

4. BÖLÜM

DURULAMA VE BULANDIRMA TEKNİKLERİNİN DİZİLERE UYGULANMASI

Aşağıda, Şengönül ve Zararsız [25] tarafından tanımlanan bir dizinin sentroid durulama ve toplamların merkezi metodlarına göre durulanmış z^* değerleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.1. $u = (u_k)$ *bulanık sayıların dizisi olsun. Sentroid metoduna göre* u_k *dizisinin durulanmış* z^*_{SM} *değeri,*

$$z^*_{SM} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{\frac{u^+_{k-1}+u^-_k}{2}}^{\dot{u}_k}\frac{z-u^-_k}{\dot{u}_k-u^-_k}zdz+\int_{\dot{u}_k}^{\frac{u^+_k+u^-_{k+1}}{2}}\frac{u^+_k-z}{u^+_k-\dot{u}_k}zdz\right\}}{\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{\frac{u^+_{k-1}+u^-_k}{2}}^{\dot{u}_k}\frac{z-u^-_k}{\dot{u}_k-u^-_k}dz+\int_{\dot{u}_k}^{\frac{u^+_k+u^-_{k+1}}{2}}\frac{u^+_k-z}{u^+_k-\dot{u}_k}dz\right\}}\right]$$

ile hesaplanır, [25].

Bundan sonra kısalık olması için aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır: $A_k = \int_{\frac{u^+_{k-1}+u^-_k}{2}}^{\dot{u}_k}\frac{z-u^-_k}{\dot{u}_k-u^-_k}$ ve $B_k = \int_{\dot{u}_k}^{\frac{u^+_k+u^-_{k+1}}{2}}\frac{u^+_k-z}{u^+_k-\dot{u}_k}$.

Tanım 4.2. $u = (u_k)$ *bulanık sayılar dizisinin toplamların merkezi metoduna göre durulanmış* z^* *değeri,*

$$z^*_{TM} = \lim_{n\to\infty}\frac{\int_X \sum_k^n \bar{x}_k A_k(x)dx}{\int_X \sum_k^n A_k(x)dx} \tag{4.1}$$

ile hesaplanır.

Eğer $u = (u_k)$ bulanık sayılar dizisinin herbir teriminin birbiriyle arakesitleri boş ise sentroid durulama yöntemi ile toplamların merkezi durulama yöntemi aynı durulanmış değerleri verirler.

Yani $i,j \in \mathbb{N}$ için $u_i \cap u_j = \emptyset \Rightarrow z^*_{SM} = z^*_{TM}$ dir. Ve $i,j \in \mathbb{N}$ için $u_i \cap u_j \neq \emptyset \Rightarrow z^*_{TM} \geq z^*_{SM}$ dir. Önermesinin ispatı Tanım 4.1 ve Tanım 4.2 den açıktır.

Teorem 4.1. $(u_k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)$ *bulanık sayıların dizisi olsun.* (u_k) *dizisinin sonlu sayıda terimi bulanık sıfırdan farklı ise o zaman sentroid durulama metoduna göre* z^*_{SM} *ve toplamın merkezi metoduna göre* z^*_{TM} *durulanmış değerleri daima mevcuttur,* [20].

İspat. Benzer ispat z^*_{TM} için verilebileceğinden biz sadece z^*_{SM} nin varlığını ispatlayacağız.

$$z^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k z dz + B_k z dz}{A_k dz + B_k dz}$$

denklemi gözönüne alındığında $u_k = \begin{cases} (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+) & ,\mathrm{k} \leq \mathrm{n} \\ 0 & ,\mathrm{k>n} \end{cases}$ dizisi için

$$z^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k z dz + B_k z dz}{A_k dz + B_k dz} + \sum_{k>n}^{\infty} \frac{A_k z dz + B_k z dz}{A_k dz + B_k dz} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k z dz + B_k z dz}{A_k dz + B_k dz}$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k z dz + \sum_{k=1}^{n} B_k z dz}{\sum_{k=1}^{n} A_k dz + \sum_{k=1}^{n} A_k dz}.$$

yazabiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} = \int_{a_1}^{b_1} + \int_{a_2}^{b_2} + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b_n}$ integrali göz önüne alındığında $\int_{a_i}^{b_i}$ integrali her zaman mevcut ve reel sayıdır. Sonlu reel sayıların toplamı yine bir reel sayı olduğundan dolayı $\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} = K$ eşitliği mevcuttur. □

Örnek 4.1. *Genel terimi aşağıda verilen bir dizi alalım:*

$$\tilde{u}_k = \begin{cases} \left(\frac{4k-4}{k}, \frac{5k-4}{k}, \frac{6k-4}{k}\right), & k \leq n \\ 0, & k>n \end{cases}$$

Yani, $(\tilde{u}_k) = ((0,1,2),(2,3,4),(\frac{8}{3},\frac{11}{3},\frac{14}{3}),(\frac{12}{4},\frac{16}{4},\frac{20}{4}),\ldots,\frac{4k-4}{k},\frac{5k-4}{k},\frac{6k-4}{k},0,0,0,0,\ldots)$ *dır. Sentroid metoduna göre ağırlık merkezinin değeri 1.653 tür. Bu yüzden,*

$$z^* = \frac{\int_0^1 \frac{z-0}{1-0} z dz + \int_1^2 (2-z) z dz}{\int_0^1 \frac{z-0}{1-0} dz + \int_1^2 (2-z) dz} + \frac{\int_2^3 \frac{z-2}{3-2} z dz + \int_3^{\frac{10}{3}} \frac{(4-z)}{4-3} z dz}{\int_2^3 \frac{z-2}{3-2} dz + \int_3^{\frac{10}{3}} \frac{(4-z)}{4-3} dz} + 0 = 1.653.$$

dır.

Teorem 4.2. *(r_n) terimleri reel olan yakınsak bir dizi olsun. O zaman (r_n) dizisinin terimlerini üçgen bulandırma yöntemi kullanarak elde edeceğimiz, bulanık sayıların $(\tilde{r}_n)$ dizisi de yakınsaktır, [20].*

İspat. Kabul edelim ki (r_n) terimleri kesin reel sayılar olan ve r_0 reel sayısına yakınsak bir dizi olsun. O zaman reel sayı dizilerinin yakınsaklığı tanımından $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \geq n_0$ iken $|r_n - r_0| < \varepsilon$ dir. Bu (r_n) dizisinin baştan n_0 tane terimi hariç diğer bütün terimlerinin $(r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon)$ aralığında kalması demektir. Eğer (r_n) dizisinin her bir teriminin bulandırılması ile elde edilen bulanık terimlerin dizisi $(\tilde{r}_n)$ ise $(\tilde{r}_n)$'nin baştan n_0 terimi hariç diğer bütün terimleri, $\tilde{r}_0$, (r_n) dizisinin limit noktasına karşılık gelen bulandırılmış eleman olmak üzere, $(\tilde{r}_0 - \varepsilon, \tilde{r}_0 + \varepsilon)$ aralığı içinde kalır. Bu demektir ki $(\tilde{r}_n) \to \tilde{r}_0, (n \to \infty)$ dir.

□

(2.11) ifadesi göz önüne alınarak , (r_k) dizisi $(r_k) = (a_k, r_k, c_k; 1)$,burada $a_k \leq r_k \leq c_k$, (a_k), (r_k) artan ve (c_k) yakınsak, şeklinde bulandırılırsa $\lim_k a_k = a_0$, $\lim_k r_k = r_0$ ve $\lim_k c_k = c_0$ olacak şekilde a_0, r_0 ve c_0 reel sayıları vardır. (2.11) ifadesinden $a_k \leq r_k \leq c_k$ olduğu dikkate alınırsa $a_0 \leq r_0 \leq c_0$ olup; $(u_k) = (a_k, r_k, c_k; 1)$ bulanık sayı dizisinin yakınsadığı u_0 sayısı $(a_0, r_0, c_0; 1)$ sıralısı ile verilir, burada r_0, (r_k) reel terimli dizinin yakınsadığı reel sayıdır.

Açık olarak reel terimli bir dizinin her bir terimi üçgen veya herhangi bir bulandırma tekniği ile bulandırıldığında, reel terimli dizinin yakınsaklığı, sınırlılığı, ıraksaklığı veya Cauchy dizisi olma gibi özellikleri oluşturulan bu yeni bulanık terimli dizide de ortaya çıkmaktadır.

Teorem 4.3. *(u_k) ve (v_k) dizilerinin her bir terimi her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \leq v_k$ eşitsizliğini sağlasın. Eğer $k \in \mathbb{N}$ için $\bar{z}(v_k) \geq \bar{z}(u_k)$ ise $z^*_{SM}(v_k) \leq z^*_{SM}(u_k)$ ve $z^*_{TM}(v_k) \leq z^*_{TM}(u_k)$ dir,* [20].

Tanım 4.3. *$(u_k) = ((u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+))$ bulanık sayıların bir dizisi olsun. (u_k) bulanık sayıların dizisi için max anlamında durulama metodu*

$$z^*_{mm} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} max\mu_C(\dot{u}_k)$$

ile tanımlanır.

Onerme 4.1. *(u_k), $w(E^2)$ $w(E^*)$ kümesinin herhangi bir elemanı olsun. O halde z^*_{cdm} reel değeri, reel sayıların (r_n) dizisinin limitine eşittir, burada (r_n), (u_k) dizisinin terim terim durulaştırılmasıyla elde edilen bir dizidir, [20].*

z^*_{mm} ın tanımı gözönüne alındığında z^*_{mm} reel değeri, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $max(\dot{u}_k)$ dizisinin C_1- transformuna eşittir. Böylece max anlamında durulama metoduyla bulanık sayıların herhangi bir dizisi için özel bir değer bulmayı istiyorsak $(\dot{u}_k)$ reel sayıların dizisinin C_1 transformunu bulmak yeterlidir, burada $(\dot{u}_k)$, max üyelik metoduna sahiptir.

Teorem 4.4. *(u_k), $\ell_\infty(E^2)$ $c(E^2)$ üzerindeki bulanık sayıların herhangi bir dizisi olsun. O halde (u_k) dizisinin maksimum anlamında durulama metoduyla ağırlık merkezi, (r_k) reel sayıların dizisinin C_1- transformuna eşittir, $r_k = max\mu(\dot{u}_k)$ dır.*

İspat.

$(u_k) \in \ell_\infty(E^2)$ $c(E^2)$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $max\mu_{\dot{u}_k}(x) = r_k$ ise $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k = (C_1 r)_n$ dir. Eğer $(u_k) = ((u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)) = ((\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}))$ şeklinde alınırsa, (u_k) nın ağırlık merkezi 0 a eşittir.

[17]'de verilen Sugeno'nun fikrini geliştirdik ve aşağıda verilen bulanık sayıların dizisinin ağırlık merkezini tanımladık.

Tanım 4.4. $(u_k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)$ *bulanık sayıların bir dizisi olsun. O halde* (u_k) *dizisinin ağırlık merkezi,*

$$z_{goc}^* = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\int_{\frac{u_{k-1}^+ + u_k^-}{2}}^{\dot{u}_k} \frac{z-u_k^-}{\dot{u}_k - u_k^-} z dz + \int_{\dot{u}_k}^{\frac{u_k^+ + u_{k+1}^-}{2}} \frac{u_k^+ - z}{u_k^+ - \dot{u}_k} z dz}{\int_{\frac{u_{k-1}^+ + u_k^-}{2}}^{\dot{u}_k} \frac{z-u_k^-}{\dot{u}_k - u_k^-} dz + \int_{\dot{u}_k}^{\frac{u_k^+ + u_{k+1}^-}{2}} \frac{u_k^+ - z}{u_k^+ - \dot{u}_k} dz} \tag{4.2}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 4.5. $(u_k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)$ *bulanık sayıların dizisi olsun. O halde* $\lambda < 1$ *ise* (u_k) *dizisinin ağırlık merkezi* z_{goc}^* *mevcuttur ve eğer* $\lambda \geq 1$ *ise* (u_k) *dizisinin ağırlık merkezi* z_{goc}^* *mevcut değildir burada* $\lambda = \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k}$, $\sigma_k = [\int_{\beta_k}^{\dot{u}_k} \frac{z-u_k^-}{\dot{u}_k - u_k^-} z dz + \int_{\dot{u}_k}^{\alpha_k} \frac{u_k^+ - z}{u_k^+ - \dot{u}_k} z dz] / [\int_{\beta_k}^{\dot{u}_k} \frac{z-u_k^-}{\dot{u}_k - u_k^-} dz + \int_{\dot{u}_k}^{\alpha_k} \frac{u_k^+ - z}{u_k^+ - \dot{u}_k} dz]$, $\alpha_k = \frac{u_k^+ + u_{k+1}^-}{2}$ *ve* $\beta_k = \frac{u_{k-1}^+ + u_k^-}{2}$ *dır.*

İspat. u_k^+, $\dot{u}_k$ ve u_{k+1}^- reel sayıların yakınsak dizileri olduğundan, her $k \in \mathbb{N}$ için $\int_{\beta_k}^{\dot{u}_k} \frac{z-u_k^-}{\dot{u}_k - u_k^-} z dz$, $\int_{\dot{u}_k}^{\alpha_k} \frac{u_k^+ - z}{u_k^+ - \dot{u}_k} z dz$, $\int_{\beta_k}^{\dot{u}_k} \frac{z-u_k^-}{\dot{u}_k - u_k^-} dz$ ve $\int_{\dot{u}_k}^{\alpha_k} \frac{u_k^+ - z}{u_k^+ - \dot{u}_k} dz$ integralleri her zaman Riemann anlamında var olan integraller olmadığı görülür. O halde (4.2) den ,pozitif terimli

$$z_{goc}^* = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \tag{4.3}$$

den ve sonsuz serilerin yakınsaklığından $\lambda < 1$ ise z_{goc}^*, bulanık sayıların $(u_k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)$ dizisi için mevcuttur ve yine $\lambda \geq 1$ ise z_{goc}^*, bulanık sayıların $(u_k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)$ dizisi için mevcut değildir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 4.6. $(u_k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)$ *bulanık sayıların bir dizisi olsun. Eğer* $n \geq N \in \mathbb{N}$ *için* $u_k = 0$ *ise yani* (u_k), *sonsuz sayıda* 0 *terimine sahipse* (u_k) *dizisinin ağırlık merkezi her zaman mevcuttur,* [20].

İspat. $(u_k) = ((u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+))$ dizisinin sıfır olmayan sonlu elemana sahip olduğundan $\lim_n \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ limiti her zaman mevcuttur. Bu yüzden ispat açıktır. □

Şimdi Teorem 4.5 ve Teorem 4.6'nın uygulamalarını verelim.

Örnek 4.2. $(u_k)=(u_k^-,\dot{u}_k,u_k^+)=((\frac{1}{(k+2)^2},\frac{1}{(k+1)^2},\frac{1}{k^2}))$ *bulanık sayıların dizisi olsun. Bulanık sayıların* (u_k) *dizisinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:*

$$u_k(x)=\begin{cases} u_k^-(x), & if \quad x\in[\frac{1}{(k+2)^2},\frac{1}{(k+1)^2}] \\ u_k^+(x), & if \quad x\in[\frac{1}{(k+1)^2},\frac{1}{k^2}] \\ 0, & diğer\ hallerde \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2-(k+1)^2}[(k+1)^2x-1], & if \quad x\in[\frac{1}{(k+2)^2},\frac{1}{(k+1)^2}] \\ \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2-(k+1)^2}[1-(k+1)^2x], & if \quad x\in[\frac{1}{(k+1)^2},\frac{1}{k^2}] \\ 0, & diğer\ hallerde \end{cases}$$

$u_k^-(x)$ *ve* $u_{k+1}^+(x)$ *ortak çözümünden* $\alpha_k=\frac{1}{2}[\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}]$ *dizisini elde ederiz. Böylece, (4.2) den,*

$$z^*=\lim_n\frac{\int_{\alpha_1}^1 u_1^-(x)xdx+\sum_{k=1}^n[\int_{\frac{1}{k+1}}^{\alpha_k}u_{k+1}^+(x)xdx+\int_{\alpha_{k+1}}^{\frac{1}{k+1}}u_{k+1}^-(x)xdx]}{\int_{\alpha_1}^1 u_1^-(x)dx+\sum_{k=1}^n[\int_{\frac{1}{k+1}}^{\alpha_k}u_{k+1}^+(x)dx+\int_{\alpha_{k+1}}^{\frac{1}{k+1}}u_{k+1}^-(x)dx]}=0,$$

yazabiliriz. Yani $(u_k)=(u_k^-,\dot{u}_k,u_k^+)=((\frac{1}{(k+2)^2},\frac{1}{(k+1)^2},\frac{1}{k^2}))$ *bulanık sayılarımn dizisi ağırlık merkezine sahiptir.*

Örnek 4.3. *(4.2)'ye benzer olarak,* $(u_k)=(u_k^-,\dot{u}_k,u_k^+)=((\frac{1}{k+2},\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}))$ *dizisini alalım. Bulanık sayıların* (u_k) *dizisinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:*

$$u_k(x)=\begin{cases} u_k^-(x), & if \quad x\in[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}] \\ u_k^+(x), & if \quad x\in[\frac{1}{k},\frac{1}{k-1}] \\ 0, & diğer\ hallerde \end{cases}=\begin{cases} k(k+1)x-k, & if \quad x\in[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}] \\ k-k(k+1)x, & if \quad x\in[\frac{1}{k},\frac{1}{k-1}] \\ 0, & diğer\ hallerde \end{cases}$$

$u_k^-(x)$ *ve* $u_{k+1}^+(x)$ *ortak çözümünden* $\alpha_k=\frac{2k+1}{2k(k+1)}$ *dizisini elde ederiz. Böylece, (4.2)'den ,*

$$z_{goc}^*=\lim_n\frac{\int_{\alpha_1}^1 u_1^-(x)xdx+\sum_{k=1}^n[\int_{\frac{1}{k+1}}^{\alpha_k}u_{k+1}^+(x)xdx+\int_{\alpha_{k+1}}^{\frac{1}{k+1}}u_{k+1}^-(x)xdx]}{\int_{\alpha_1}^1 u_1^-(x)dx+\sum_{k=1}^n[\int_{\frac{1}{k+1}}^{\alpha_k}u_{k+1}^+(x)dx+\int_{\alpha_{k+1}}^{\frac{1}{k+1}}u_{k+1}^-(x)dx]}$$

$$=\lim_n\frac{\frac{5}{24}+\sum_{k=1}^n\xi_k}{\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^n\gamma_k}=\infty,$$

yazabiliriz.

Yani, $(u_k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+) = ((\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}))$ *dizisi bir ağırlık merkezi noktasına sahip değildir.*

Burada

$$\xi_k = \frac{3k(2k+1)^2-(2k+1)^3-4k^3}{24k^2(k+1)^2} + (k+1)[\frac{2(k+2)(k+1)^3-3(k+1)}{6(k+1)^3} - \frac{2(k+2)(2k+3)^3-3(2k+2)(k+2)(2k+3)^3}{6(2k+2)(k+2)}]$$

ve

$$\gamma_k = \frac{3k(k+1)(2k+1)-(2k+1)(k+2)-4k^3(3(k+1)-2(k+2))}{24k^3(k+1)^2} + \frac{k(k+1)^2(2k+3)^2-2k(k+1)(2k+3)-k}{2(k+1)}$$

olup

$$\xi_k = \frac{48k^6+248k^5+448k^4+864k^3+573k^2+153k-2}{24k^2(k+1)^2(k+2)}$$

$$\gamma_k = \frac{48k^9+288k^8+636k^7+420k^6+24k^5+20k^4+10k^3+7k^2-2k-2}{24k^3(k+1)^2}$$

dir, [20].

Örnek 4.4. *Bulanık sayıların dizisi,*

$$\tilde{u}_k = \begin{cases} (\frac{4k-4}{k}, \frac{5k-4}{k}, \frac{6k-4}{k}), & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olsun. Ağırlık merkezi metodumuza göre (u_k) *bulanık sayı dizilerinin ağırlık merkezi* $z^*_{goc} =$ 1.653 *tür,* [25].

Teorem 4.7. $(u_k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)$ *dizisi* $(u_0^-, \dot{u}_0, u_0^+)$ *bulanık sayısına yakınsak olsun. Genel olarak,* $(u_k) = (u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)$ *dizisinin ağırlık merkezi* $(u_0^-, \dot{u}_0, u_0^+)$ *ın ağırlık merkezine eşit değildir,* [20].

İspat. Eğer (4.4) gözönüne alınırsa,

$$\tilde{u}_k = \begin{cases} (\frac{4k-4}{k}, \frac{5k-4}{k}, \frac{6k-4}{k}), & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

dizisi sıfıra yakınsaktır. Fakat ağırlık merkezi $z^*_{goc} = 1.653$ tür. □

$(u_k) = ((u_k^-, \dot{u}_k, u_k^+)) = ((-1)^{2k+1}2, (-1)^{2k+1}, 0), (0, 1, 2))$ bulanık sayıların dizisi olsun. (u_k) dizisi bulanık sayıların yakınsak bir dizisi değildir. Buna rağmen (4.2) den, (u_k) nın ağırlık merkezi z^* ;

$$z^*_{goc} = \lim_n \frac{\int_{-2}^{-1}(x^2+2x)dx + \sum_{k=1}^{n}[\int_{-1}^{0} -x^2dx + \int_0^1 x^2dx] + \int_1^2(2x-x^2)dx}{\int_{-2}^{-1}(x+2)dx + \sum_{k=1}^{n}[\int_{-1}^{0} -xdx + \int_0^1 xdx] + \int_1^2(2-x)dx}$$

$$= 0$$

dir. Bu da herhangi bir bulanık sayı dizisinin bulanık bir sayıya yakınsamasına gerek olmayan bir ağırlık merkezine sahip olabileceğini gösterir.

Onerme 4.2. *(u_k), $w(E^1)$ kümesinin herhangi bir elemanı olsun. (r_n), (u_k) dizisinin terim terim durulaştırılmasıyla elde edilen bir dizi olup z^*_{goc} reel değeri (r_n) dizisinin limitine eşittir.*

Teorem 4.8. *Bulanık kümelerin (u_k) dizisi z^*_{goc} ağırlık merkezi noktasına sahipse z^*_{goc} reel değeri; (u_k) dizisinin terim terim durulaştırılmasıyla elde edilen (r_n) dizisinin Cesàro anlamına eşittir fakat tersi eşit olmayabilir,* [20].

5. BÖLÜM

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN BENZERLİĞİNİN ÖLÇÜSÜ

Tezin orjinal kısmını oluşturan bu bölümde $(u_k) = ((u_k^-, \dot{u}_k, \dot{u}_k, u_k^+))$ şeklinde verilen bir bulanık sayı dizisinin benzerliğinin ölçüsü tanımı ve bununla ilgili teoremler verilecektir. Bundan sonra $(u_k) = ((u_k^-, \dot{u}_k, \dot{u}_k, u_k^+))$ formunda verilen bulanık sayı dizisini genelleştirilmiş bulanık sayı dizisi olarak isimlendireceğiz.

[18]'de iki genelleştirilmiş bulanık sayı arasındaki benzerliğin ölçüsü

$$S(u,v) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{4} |u_i - v_i|}{4}$$

olarak verildi, burada $u = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $v = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ ve $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$ dir.

Tanım 5.1. *(u_k) ve (v_k) genelleştirilmiş bulanık sayıların iki dizisi olsun. (u_k) dizisinin (v_k) dizisine benzerliğinin ölçüsü*

$$S(u,v) = \lim_k S_k(u_k, v_k) = \lim_n (1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} |u_n^k - v_n^k|}{4}) = \ell \tag{5.1}$$

değerine denir. $\ell = 1$ ise $u_k = v_k$, $0 < \ell < 1$ ise u_k, v_k'ya ℓ benzerdir, $\ell > 1$ veya $\ell < 0$ ise u_k, v_k'ya hiç benzer değildir denir.

Örnek 5.1. *$(u_k) = ((2,3,4,5))$ ve $(v_k) = ((-5,-4,-3,-2))$ bulanık sayıların sabit dizileri verilsin. Bu iki dizi arasındaki benzerliğin ölçüsü $S(u,v)$ değeri*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{\sup_n \sum_{k=1}^{4} |u_n^k - v_n^k|}{4}) &= \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{(|2+5|+|3+4|+|4+3|+|5+2|)}{4}) \\ &= \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{28}{4}) = -6 < 0\end{aligned}$$

olduğundan (u_k) ve (v_k) dizileri birbirine hic benzemezler.

Örnek 5.1. $(u_k) = ((2,3,4,5))$ *ve* $(v_k) = ((-5,-4,-3,-2))$ *bulanık sayıların sabit dizileri verilsin. Bu iki dizi arasındaki benzerliğin ölçüsü* $S(u,v)$ *değeri*

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\sum_{k=1}^{4}|u_n^k - v_n^k|}{4}) = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{(|2+5|+|3+4|+|4+3|+|5+2|)}{4})$$
$$= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{28}{4}) = -6 < 0$$

olduğundan (u_k) *ve* (v_k) *dizileri birbirine hiç benzemezler.*

Örnek 5.2. $(u_k) = (\frac{0.8}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1.2}{k})$ *ve* $(v_k) = (\frac{0.6}{k}, \frac{0.8}{k}, \frac{0.8}{k}, \frac{1}{k})$ *bulanık sayıların iki dizisi olsun. Bu iki dizi arasındaki benzerliğin ölçüsü* $S(u,v)$ *değeri,*

$$\lim_k S(u,v) = \lim_{k\to\infty}(1-\frac{\sum_{i=1}^{4}|u_i^k - v_i^k|}{4}) = \lim_k(1-\frac{(|\frac{0.8-0.6}{k}|+|\frac{1-0.8}{k}|+|\frac{1-0.8}{k}|+|\frac{1.2-1}{k}|)}{4})$$
$$= \lim_k(1-\frac{|\frac{0.8}{k}|}{4}) = \lim_k(1-\frac{1}{5k}) = 1$$

olduğundan (u_k) *ve* (v_k) *dizilerinin benzerliğinin derecesi* 1 *dir.*

Genelleştirilmiş $\widetilde{u}$ *bulanık sayının ağırlık merkezi [2], [3]'de* $\widetilde{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4; w_{\widetilde{u}})$ *olmak üzere*

$$y_{\widetilde{u}}^* = \begin{cases} \frac{w_{\widetilde{u}} \times (\frac{u_3-u_2}{u_4-u_1}+2)}{6} & , u_1 \neq u_4 \text{ ve } 0 < w_{\widetilde{u}} \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{w_{\widetilde{u}}}{2} & , u_1 = u_4 \text{ ve } 0 < w_{\widetilde{u}} \leq 1 \end{cases}, \tag{5.2}$$

$$r_k^u = \frac{y_{\widetilde{u}}^*(u_3+u_2) + (u_4+u_1)(w_{\widetilde{u}} - y_{\widetilde{u}}^*)}{2w_{\widetilde{u}}} \tag{5.3}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 5.1. (u_k) *ve* (v_k) *bulanık sayıların dizisi olsun. Eğer* $\lim_k S(u_k, v_k) = 1$ *ise* $\lim_k(r_k^u - r_k^v) = 0$ *dır.*

İspat. Burada $(r_k^u, y_{\tilde{u}}^*)$ ve $(r_k^v, y_{\tilde{u}}^*)$ sırasıyla $(u_k) = (a_k, b_k, b_k, c_k)$ ve $(v_k) = (d_k, e_k, e_k, f_k)$ dizilerinin ağırlık merkezi ve $S(u_k, v_k) = 1$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} S(u_k, v_k) &= \lim_{k\to\infty}(1 - \frac{\sum_{i=1}^{4}|u_k^i - v_k^i|}{4}) \\ &= \lim_{k\to\infty}(1 - \frac{|a_k - d_k| + |b_k - e_k| + |b_k - e_k| + |c_k - f_k|}{4}) = 1\end{aligned}$$

olması durumunda $\lim_{k\to\infty}(|a_k - d_k| + |b_k - e_k| + |b_k - e_k| + |c_k - f_k|) = 0$ olacağından $\lim_{k\to\infty}$-$(a_k - d_k) = 0$, $\lim_{k\to\infty}(b_k - e_k) = 0$ ve $\lim_{k\to\infty}(c_k - f_k) = 0$ dır. O halde $(r_k^u) = (\frac{a_k+b_k+b_k+c_k}{3})$ ve $(r_k^v) = (\frac{d_k+e_k+e_k+f_k}{3})$ olduğu göz önünde tutulursa

$$\lim_{k\to\infty}(r_k^u - r_k^v) = 0$$

olur. □

Teorem 5.2. *(u_k) , (v_k) ya ℓ_1 benzer ve (t_k), (v_k) ya ℓ_2 benzer olsun. Bu durumda (t_k) dizisi $c_0(E^1)$ in bir elemanı ise $(u_k + t_k)$ nın (v_k) ya benzerliği ℓ_1 den büyüktür.*

İspat.

(u_k) , (v_k) ya ℓ_1 benzer ise, $\lim_k(1 - \frac{\sum_{i=1}^{4}|u_i^k - v_i^k|}{4}) = \ell_1$ ve (t_k), (v_k) ya ℓ_2 benzer ise, $\lim_k(1 - \frac{\sum_{i=1}^{4}|t_i^k - v_i^k|}{4}) = \ell_2$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned}\lim_k(1 - \frac{\sum_{i=1}^{4}|(u_i^k + t_i^k) - v_i^k|}{4}) &= \lim_k(1 - \frac{\sum_{i=1}^{4}|(u_i^k - v_i^k) + t_i^k|}{4}) \\ &\geq \lim_k(1 - \frac{\sum_{i=1}^{4}(|u_i^k - v_i^k| + |t_i^k|)}{4}) \\ &= \lim_k(1 - \frac{\sum_{i=1}^{4}|u_i^k - v_i^k|}{4} - \frac{\sum_{i=1}^{4}|t_i^k|}{4}) \\ &= \lim_k(1 - \frac{\sum_{i=1}^{4}|u_i^k - v_i^k|}{4}) - \lim_k(\frac{\sum_{i=1}^{4}|t_i^k|}{4}) \\ &= \ell_1 - \frac{1}{4}\lim_k(|t_1^k| + |t_2^k| + |t_3^k| + |t_4^k|) \\ &= \ell_1 - \frac{1}{4}.0 = \ell_1\end{aligned}$$

dir. □

Teorem 5.3. *Bulanık sayıların* (u_k) *ve* (v_k) *dizileri için* $\lim_k S(u,v) = \ell$ *olsun.*

(i)(u_k) *ve* (v_k) *dizileri* $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $u_k = v_k$ *eşitliğini sağlıyorsa* $\mathcal{S}(u,v) = 1$ *dir.*

(ii)$\exists k \in \mathbb{N}$ *için* $u_k \neq v_k$ *ise* $\mathcal{S}(u,v) \neq 1$ *dir.*

İspat. (i) Kabul edelim ki (u_k) ve (v_k) dizileri $\forall k \in \mathbb{N}$ için $u_k = v_k$ eşitliğini sağlasın. O zaman

$$\mathcal{S}(u,v) = \lim_k S_k(u_k, v_k) = \lim_n (1 - \frac{\sum_{k=1}^{4} |u_n^k - u_n^k|}{4}) = \lim_n (1 - \frac{\sum_{k=1}^{4} |0|}{4}) = 1 \tag{5.4}$$

olması hemen elde edilir.

(ii) Örneğin $\forall k \in \mathbb{N}$ için $u_k - v_k \neq 0$ olsun. O halde $u_k - v_k \neq 0$ ise $u_n^k - v_n^k \neq 0$ ve $|u_n^k - v_n^k| \neq 0$, $\frac{|u_n^k - v_n^k|}{4} \neq 0$ dir. Dolayısıyla $1 - \frac{|u_n^k - v_n^k|}{4} \neq 1$ dir. Bu ifadenin limitini aldığımızda $\lim_n (1 - \frac{|u_n^k - v_n^k|}{4}) \neq \lim_n 1$ şeklinde elde edilen ifade benzerlik ölçüsünün değerini vereceğinden yani, $\mathcal{S}(u,v) = \lim_k S_k(u_k, v_k) = \lim_n (1 - \frac{|u_n^k - v_n^k|}{4}) \neq \lim_n 1$ olup $\mathcal{S}(u,v) \neq 1$ dir. □

Teorem 5.4. (u_k), (v_k)*'ya* ℓ *benzer ve* (t_k), (v_k)*'ya* ℓ *benzer ise* (u_k), (t_k)*'ya* $2\ell - 1$ *benzerdir.*

İspat. (u_k), (v_k)'ya ℓ benzer ise, $\lim_k (1 - \frac{\sum_{i=1}^{4} |u_i^k - v_i^k|}{4}) = \ell$ ve (t_k), (v_k)'ya ℓ benzer ise $\lim_k (1 - \frac{\sum_{i=1}^{4} |t_i^k - v_i^k|}{4}) = \ell$ dir.

$$\begin{aligned}
\lim_k (1 - \frac{\sum_{i=1}^{4} |u_i^k - t_i^k|}{4}) &= \lim_k (1 - \frac{\sum_{i=1}^{4} |u_i^k - v_i^k + v_i^k - t_i^k|}{4}) \\
&\geq \lim_k (1 - \frac{\sum_{i=1}^{4} |u_i^k - v_i^k| + \sum_{i=1}^{4} |v_i^k - t_i^k|}{4}) \\
&= \lim_k (1 - \frac{\sum_{i=1}^{4} |u_i^k - v_i^k|}{4} - \frac{\sum_{i=1}^{4} |v_i^k - t_i^k|}{4}) \\
&= \lim_k (1 - \frac{\sum_{i=1}^{4} |u_i^k - v_i^k|}{4}) - \lim_k (\frac{\sum_{i=1}^{4} |v_i^k - t_i^k|}{4}) \\
&= \ell - (1 - \ell) \\
&= 2\ell - 1
\end{aligned}$$

dir. □

KAYNAKLAR

1. Balasubramanian, T., Pandiarani, A., On Some Subspaces of Entire Sequence Space of Fuzzy Numbers, Mathematical and Computational Sciences, 5: 3, 2010.
2. Chen S.,J., Chen S., M., Fuzzy Risk Analysis Based on Measures of Similarity between İnterval Valued Fuzzy Numbers, Computer and Mathematics with Applications 55: 1670-1685, 2008.
3. Chen S.,J., Chen S., M., Fuzzy Risk Analysis Based on Similarity Measures of Generalized Fuzzy Numbers, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 11: 45- 46, 2003.
4. Chen, S., J., Chen, S., M., A New Method to Measure the Similarity between Fuzzy Numbers, IEEE International Fuzzy Systems Conference, 2001.
5. Fang J., X., Huang H., On The Level Convergence of A Sequence of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets Syst., 147: 415-417, 2004.
6. Goetschel, R., Voxman, W., Elemantary Fuzzy Calculus, Fuzzy Sets Syst., 18: 31-43, 1986.
7. Hellodorn, H., Thomas, C., Defuzzification in Fuzzy Controllers, Intell. Fuzzy Syst., 1: 109-123, 1993.
8. Klir, George J., Yuan B., Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Teory and Applications, 97: 563.
9. Lacsit, K., Y., M., Biswas, R., Finding a Shortest Path Using an Intelligent Technique, International Journal of Engineering and Technology, 1: 2, 2009.
10. Matloka M., Sequence of Fuzzy Numbers, BUSEFAL, 28: 28-37, 1986.
11. Ma, Q., Mi, H., Ma, S., Zang, C., The Inclusion Degree and Similarity Degree of Fuzzy Rough Sets Defined by Nanda, International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, 2010.
12. Mitrovic, Z., Rusov, S., Z Similarity Measure Among Fuzzy Sets, FME Transactions, 34: 115-119, 2006.
13. Moore, R., E., Methods and Applications of İnterval Analysis, SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1979.
14. Nahook, H.,N., Eftekhari, M., A New Method to Measure the Similarity between Features in Machine Learning Using the Triangular Fuzzy Number, International Journal of Soft Computing and Engineering, ISSN: 2231-2307, Volume-2, Issue-6, Jaunary, 2013.

15. Nanda, S., On Sequence Spaces of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 33: 123-126, 1989.
16. Puri, M., L., Ralescu, D., A., Differentials for Fuzzy Functions, J. Math. Anal. Appl. 91: 552-558, 1983.
17. Rossi, T.,J., Fuzzy Logic with Engineering Applications, University of New Mexico, USA 90, 2004.
18. Sridevi, B., Nadarajan, R., Fuzzy Similarity Measure for Generalized Fuzzy Numbers, Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 2, No. 2, June 2009.
19. Sugeno, M., An Introductory Survey of Fuzzy Control, Inf. Sci., vol. 36 pp. 59-83, 1985.
20. Şengönül, M., Zararsız, Z., Some Additions to the Fuzzy Convergent and Fuzzy Bounded Sequence Spaces of Fuzzy Numbers, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Vol: 2011, Article ID: 837584, Doi: 10.1155-2011-837584.
21. Talo, Ö., Başar, F., Determination of the Duals of Classical Sets of Sequences of Fuzzy Numbers and Related Matrix transformations, Comput, Math. Appl., 58: 717-733, 2009.
22. Talo, Ö. ve Başar F., Fuzzy Kümeler, 23: 1-10, 1987.
23. Yager, R., Flev, D., SLIDE: A Simple Adaptive Defuzzification Method, IEEE Trans. Fuzzy Syst., 1: 69-78 ,1993.
24. Zadeh, L., A., Fuzzy Sets, İnform and Control, 8: 338-353, 1965 .
25. Zararsız, Z., Şengönül, M., On The Gravity of Center of Sequence Fuzzy Numbers, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2013.
26. Wei, S., Chen, S., Fuzzy Risk Analysis Based on İnterval Valued Fuzzy Numbers, Expert Systems with Applications, 36: 2285–2299, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Figen YILDIZ, 10.07.1987 yılında Adana ilinde doğdu. İlk öğrenimini İstanbul ve Mersin, orta öğrenimimi Adana ilinde tamamladı. 2005 yılında kazandığı Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Matematik Bölümünden 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Fonksiyon ve Analiz anabilim dalında yüksek lisansa başladı.

Adres : Toros mah. 78101 sok. Birleş apt. B blk. Kat:1 No:4
Çukurova- ADANA

Telefon : 0 537 541 35 75