T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Zarife ZARARSIZ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Mart 2015
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Zarife ZARARSIZ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Mart 2015
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL danışmanlığında **Zarife ZARARSIZ** tarafından hazırlanan "**Hemen Hemen Yakınsaklık Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

12/03/2015

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. İhsan SOLAK ....

Üye : Prof. Dr. Fatma KARİPCİN ....

Üye : Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL ....

Üye : Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN ....

Üye : Doç. Dr. Necdet BATIR ....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun...19.03.2015...tarih ve...2015/16-01... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

23/3/2015

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Zarife ZARARSIZ

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, bu çalışmayı bana vererek, yöneten ve çalışma süresince yardımını benden esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL' e,

Maddi ve manevi olarak her zaman desteğini hissettiren ve beni yalnız bırakmayan canım kardeşim Neriman ZARARSIZ' a ve AİLEME, teşekkür ederim.

HEMEN HEMEN YAKINSAKLIK ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

Zarife ZARARSIZ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mart 2015

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, bu çalışma hakkında literatür bilgisi verildi. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremler incelendi. Üçüncü bölümde, Banach limiti ve hemen hemen yakınsaklık tanımları ve bu kavramlara ait literatür bilgisi verildi. Ayrıca önemli görülen bazı teorem ve örnekler incelendi. Dördüncü bölümde, f_T, T- yakınsak dizilerin kümesi temel alınarak rf ve rf_0 dizi uzayları inşa edildi. Ayrıca, Banach limiti tarifi genelleştirildi ve rf ve rf_0 kümelerinin önemli görülen bazı özellikleri incelendi. Bu çalışmalara ek olarak, klasik anlamda bilinen hemen hemen yakınsaklığın dışında, onu kapsayan fakat daha genel bir yakınsaklık fikri öne sürüldü. Hemen hemen yakınsaklık tarifinin bir tür genellemesi olan ve zrf- yakınsaklık olarak isimlendirilen bu yeni tip yakınsaklık tarifi bilinen hemen hemen yakınsaklık tanımından farklı olarak, bir bakıma *"ötelenmiş Zweier transformlar dizisinin Riesz ortalaması"* olarak tanımlanacağından ilgili bilimsel alana yenilik ve orijinallik katması bakımından ilgi çekici olmuştur. Bu tarife ek olarak, zrf ve zrf_0 dizi uzayları tanımlandı ve bu uzayların üzerine cebirsel ve topolojik yapılar konularak çeşitli özellikleri incelendi. Bunlara ek olarak, zrf ve zrf_0 uzaylarının β-dualleri belirlendi. Beşinci bölümde, rf ve rf_0 dizi uzaylarından ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarına ve tersine olarak ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarından rf ve rf_0 uzaylarına olan matris sınıflarının karakterizasyonu klasik analiz teknikleri kullanılarak yapıldı. Son olarak, Zweier dual matrisler adı verilen dual matrisler yardımı ile zrf ve zrf_0 uzaylarından herhangi bir λ dizi uzayına ve tersine bir λ dizi uzayından zrf ve zrf_0 uzaylarına matris sınıfları karakterize edildi.

Anahtar kelimeler: Dizi uzayı, rf- yakınsaklık, Banach limiti, zrf- yakınsaklık, matris dönüşümü.

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Sayfa Adeti: 50

ON THE ALMOST CONVERGENCE
(Ph.D. Thesis)

Zarife ZARARSIZ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

March 2015

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, literature information is given about this work. In the second chapter, basic and necessary definitions and theorems for this work have been given. The definitions of Banach limit, almost convergence and some literature informations are given in the third chapter. In addition these, some important theorems and examples based on these concepts are studied in this chapter. In the fourth chapter, the sets rf and rf_0 are introduced by means of the set f_T, the set of all T- convergent sequences. Furthermore, the definition of Banach limit is generalized. In addition these, some properties of the sets rf and rf_0 are investigated. Finally, zrf-convergence idea that is more general and comprehensive than the definition of classic almost convergence, is suggested. It is interesting that zrf- convergence could be defined as "Riesz average of the series of shifted Zweier transforms" in terms of adding innovation and originality to the related scientific area. In addition to this description, the spaces zrf and zrf_0 are defined and by putting algebraic and topological structures on these spaces, various properties are investigated. Finally, β- duals of the spaces zrf and zrf_0 are determined in the fourth chapter. In the fifth chapter, firstly using classical analysis techniques, we characterized matrices classes from spaces rf and rf_0 to ℓ_∞, c and c_0 and vice versa. Secondly, using Zweier dual type matrices, we characterized matrices classes from zrf to any sequence space μ and vice versa.

Keywords: Sequence space, rf- convergence, Banach limit, zrf- convergence, matrix transformation.

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Page Number: 50

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
w	: Tüm dizilerin kümesi
$\mathrm{A} = (a_{mn})$	: Reel terimli sonsuz matris
ϕ	: Sonlu diziler kümesi
c'	: c üzerinde tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellerin lineer uzayı
L	: Banach limiti
f	: Hemen hemen yakınsak diziler uzayı
f_0	: Sıfıra hemen hemen yakınsak diziler uzayı
rf	: Riesz yakınsak diziler uzayı
rf_0	: Sıfıra Riesz yakınsak diziler uzayı
Z^p	: p. dereceden Zweier matrisi
f_T	: T- yakınsak dizilerin kümesi
zrf	: zrf- yakınsak dizilerin kümesi
zrf_0	: Sıfıra zrf- yakınsak dizilerin kümesi
$(\lambda:\mu)$	: λ' nın elemenlarını μ' deki elemanlara dönüştüren tüm sonsuz A matrislerinin kümesi
$\|\cdot\|_{\lambda,\mu}$	: λ veya μ uzayı üzerindeki norm
$\sum_{k=1}^{\infty}$	: 1' den sonsuza kadar ∞' a kadar toplam
$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{\mathrm{n}} x_n$	: (x_n) dizisinin limiti

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Dizi uzayı inşa etmenin birçok yolu olmasına rağmen sonsuz bir matrisin yakınsaklık alanından faydalanmak fikri birçok önemli çalışmaya konu olmuştur. Sonsuz bir matrisin özel seçimleri ile, yeni bir dizi uzayı inşa etmek ve bu yeni dizi uzayının cebirsel, topolojik ve geometrik özelliklerini incelemek önemli ve kullanışlı bir araştırma alanı olarak görülmektedir. Bu tip çalışmalara, Malkowsky [1], Wang [2], Ng ve Lee [3], Malkowsky, Mursaleen ve Suantai [4], Altay ve Başar [5-10], Başarır [11], Malkowsky ve Savaş [12], Aydın ve Başar [13-17], Başar, Altay ve Mursaleen [18], Şengönül ve Başar [19], Altay [20], Polat ve Başar [21], Kirişçi ve Başar [22], Başar ve Kirişçi [23] örnek olarak verilebilir. Son yıllarda Şengönül ve Kayaduman [24-25], Kirişçi ve Başar [26] ve daha birçok araştırmacı Cesàro, Riesz, B(r,s) ortalamaları hemen hemen yakınsak olan yeni tip dizi uzayları tanımlayıp bu yeni uzayların bazı cebirsel ve topolojik özelliklerini incelemişler, matris dönüşüm problemlerine ek olarak çekirdek problemleri ile ilgilenmişlerdir.

Dizilerin bilinen yakınsaklığından sonra G. G. Lorentz "*A contribution to the theory of divergent sequences*" adlı makalesi ile bu çalışmada da sıklıkla kullanılacak olan hemen hemen yakınsaklık tanımını Banach limitleri yardımıyla literatüre kazandırmış ve hemen hemen yakınsak diziler uzayının herhangi bir matrisin etki alanı olarak verilemeyeceğini ispatlamıştır [27].

King, hemen hemen toplanabilen dizi ve hemen hemen regüler matris dizisi tanımlarını aşağıdaki gibi vermiştir [28].

$$\mathcal{A} = (A^{\nu}) = \left((a_{nk}^{\nu})\right), \qquad \nu \in \mathbb{N}\,,$$

olmak üzere $\mathcal{A}$ karmaşık veya reel sayıların sonsuz matrislerinin bir dizisi olsun. Reel sayıların $x = (x_n)$ dizisi verildiğinde, $t_n^{\nu} = \sum_k a_{nk}^{\nu} x_k$ serileri her bir $\nu = 1,2,\dots$ için düzgün olarak bir l limitine yakınsak ise $t = (t_n^{\nu})$' ye, $x = (x_n)$' nin $\mathcal{A}$-transformu denir ve kısaca $\mathcal{A}-\lim_n x_n = l$ biçiminde gösterilir. $\lim_n x_n = l$ iken $\mathcal{A}-\lim_n x_n = l$ ise $\mathcal{A} = (A^\nu)$' ye regüler matris dizisi denir.

Çoğunlukla f ile gösterilen hemen hemen yakınsak diziler uzayının regüler bir matris dizisinin yakınsaklık alanı olduğu Bell tarafından gösterilmiştir [29]. Hemen hemen yakınsaklık fikrinin bir genellemesi olan F_B- yakınsaklık fikri Stieglitz tarafından ele alınmıştır [30]. Bu sıralanan yakınsaklık tanımları, kuvvetli yakınsaklık adı altında Maddox [31] tarafından yeniden ele alınmış ve Maddox' un çalışmalarının bir devamı olarak 1982' de mutlak F_B- yakınsaklık tanımı Mursaleen [32] tarafından verilmiştir. 1985' de hemen hemen yakınsak diziler uzayının, Cesàro matrisinin, satırlarının ötelenmesiyle elde edilen matrislerin yakınsaklık alanlarının kesişimi olduğu Butković, Kraljević ve Sarapa tarafından gösterilmiştir, yani $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olmak üzere $U = (u_{nk})$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$u_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & p(n) \le k \le p(n) + n \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak verilsin. Dikkat edilirse $U = (u_{nk})$ matrisi, Cesàro matrisinin satırlarının ötelenmesi ile elde edilmiştir. Bu şekilde tanımlanabilecek bütün matrislerin kümesi G ile gösterilmek üzere, Butković v.d., hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi f' nin

$$\bigcap_{U \in G} c_U = f$$

olduğunu ispatlamıştır [33].

Bu çalışmalara ek olarak, kısa bir süre önce Başar ve Kirişçi, genelleştirilmiş fark matrisinden yararlanarak hemen hemen yakınsak diziler uzayından yeni bir dizi uzayı türetmişlerdir [23]. Ayrıca Sönmez, üçlü bant matrisini ve hemen hemen yakınsak diziler uzayını kullanarak yeni bir dizi uzayı inşa etmiş, bu uzayın β- ve γ- duallerini belirlemiş ve bazı matris sınıflarını karakterize etmiştir [34].

Çolak ve Çakar da Banach limitleri yardımıyla tanımlanan alt lineer fonksiyonellerle kuvvetli regüler matrisler arasındaki ilişkiyi incelemiş, daha sonra sınırlı diziler uzayı üzerinde tanımlı alt lineer fonksiyonelin, Banach limitlerinin bir genellemesi olduğunu ve bütün Banach limitlerini içerdiğini göstermişlerdir [35]. Ayrıca sınırlı diziler uzayı üzerinde tanımlı olan alt lineer fonksiyonelin, Banach limitleri ile olan ilişkisini araştırmışlardır.

Bu çalışmada, klasik anlamda bilinen hemen hemen yakınsaklığın dışında, onu kapsayan fakat daha genel ve kapsamlı olan bir yakınsaklık fikri ile ilgilenilmiştir. Hemen hemen yakınsaklık fikrini geliştirmek için öncelikle,

$$f_T = \left\{ x \in \ell_\infty : \lim_k [T(S^\nu x)]_k = l,\ \ \nu = 0,1,2,\dots \right\}$$

şeklinde tanımlan T- yakınsak dizilerin kümesi tanıtılmıştır. f_T kümesinde T matrisi yerine Riesz matrisi alınarak yeni bir yakınsaklık tanımı verilmiş ve rf ve rf_0 dizi uzayları inşa edilmiştir. f_T kümesi tanımı ve bu çalışmada kullanılan düşünce 1973' de Stieglitz' in [30] da tarifini verdiği F_B- yakınsaklık tanımı ile örtüşmekle beraber ifade bakımından farklılık ortaya koyduğu açıktır.

Bu tezin, ilerleyen bölümlerinde zrf- yakınsaklık olarak isimlendirilen, yeni tip yakınsaklık tarifi verilmiştir. Bu yeni tarif, bilinen hemen hemen yakınsaklık tanımından farklı olarak, bir bakıma "*ötelenmiş Zweier transformlar dizisinin Riesz ortalaması*" olarak tanımlanacağından ilgili bilimsel alana yenilik ve orijinallik katması bakımından ilgi çekici olmuştur.

Ayrıca bu çalışmada, sırası ile z_{rf} ve z_{rf_0} ile gösterilen zrf- yakınsak ve sıfıra zrf- yakınsak dizilerin kümesi tanıtılarak bu kümeler üzerine cebirsel ve topolojik yapılar konulmuş, çeşitli özellikleri incelenmiş ve bazı matris sınıfları karakterize edilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, okuyucunun tez de ele alınan konuyu anlamasına yardımcı olacak ve daha sonraki kısımlarda kullanılacak olan temel tanım, terminoloji ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. $\boldsymbol{F}$ reel veya karmaşık sayılar cismi olsun. Üzerinde vektör toplaması ve skaler ile çarpma işleminin tanımlı olduğu ve lineer uzay koşullarını sağlayan boş olmayan bir λ kümesine $\boldsymbol{F}$ üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir. λ kümesinin elemanlarına vektör, $\boldsymbol{F}$ cisminin elemanlarına skaler denir.

$\boldsymbol{\lambda}$**,** toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzay ve $\mu \subset \lambda$ olsun. μ' nün lineer alt uzay olması için gerek ve yeter şartların her $a \in$ $\boldsymbol{F}$ ve μ' nün her *x*, *y* elemanı için

(1) $ax \in \mu$
(2) $x + y \in \mu$

olması gerektiği bir çok kaynakta mevcuttur.

$\lambda \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun. $g: \mathbb{N} \rightarrow \lambda$ şeklinde tanımlı fonksiyona λ değerli dizi denir. $\lambda = \mathbb{R}$ alınırsa g reel değerli, $\lambda = \mathbb{C}$ alınırsa g karmaşık değerli dizi olarak adlandırılır. Bu çalışmada da reel veya karmaşık terimli diziler ile ilgilenilmiştir. Düşünülebilen bütün reel veya karmaşık değerli dizilerin $w = \{g\colon\ g: \mathbb{N} \rightarrow \lambda, \mathrm{k} \rightarrow g(k) = x_k, x = (x_k)\}$ kümesi göz önüne alınsın. w üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$$+: w \times w \rightarrow w$$
$$\big((x_k),\ (y_k)\big) \rightarrow +\big((x_k), (y_k)\big) = (x_k) + (y_k) = (x_k + y_k) \tag{2.1}$$

ve her $a \in \boldsymbol{F}$ için

$$\cdot : \boldsymbol{F} \times w \to w$$

$$\big(a,(x_k)\big) \to \cdot \big(a,(x_k)\big) = a \cdot (x_k) = (ax_k) \qquad (2.2)$$

olarak tanımlansın. (2.1) ve (2.2) de verilen toplama ve skalerle çarpma işlemleri vektör uzayı şartlarını veya diğer bir deyişle vektör toplaması ve vektörlerin skalerle çarpma işlemlerinin tüm özelliklerini sağlar. Dolayısıyla w, $\boldsymbol{F}$ üzerinde bir lineer uzaydır. w' nin bazı önemli özel alt kümeleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

$$c_0 = \left\{x = (x_k) \in w : \lim_k x_k = 0\right\}, \qquad \text{(Sıfıra yakınsak dizilerin kümesi)}$$

$$c = \left\{x = (x_k) \in w : \lim_k x_k = \ell, \ell \in \boldsymbol{F}\right\}, \qquad \text{(Yakınsak dizilerin kümesi)}$$

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_k) \in w : \sup_k |x_k| < \infty\right\}, \qquad \text{(Sınırlı dizilerin kümesi)}$$

$$cs = \left\{x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \in c, n \in \mathbb{N}\right\}, \text{(Yakınsak serilerin kümesi)}$$

$$bs = \left\{x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \in \ell_\infty, n \in \mathbb{N}\right\}, \text{(Sınırlı serilerin kümesi)}$$

ve (p. dereceden mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin kümesi)

$$\ell_p = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, 0 \le p < \infty\right\}.$$

Yukarıda sıralanan $c_0, c, \ell_\infty, cs, bs$ ve ℓ_p kümelerinin w' nin alt uzayları olduğu kolayca gösterilebilir.

Bilindiği gibi "lineer uzaylar" matematiğin önemli araştırma alanlarından biridir. Bu tezde w' nin yeni alt kümeleri inşa edilecek ve bu yeni kümelerin cebirsel özelliklerinden bahsetmek gerektiğinde, lineer uzaylar hakkında ihtiyaç duyulan bilgiler gerekli görüldükçe verilecektir. Bu nedenle lineer uzay hakkındaki hatırlatmalar daha fazla genişletilmemiştir.

Bir kümenin topolojik yapısı da en az cebirsel yapısı kadar önemlidir. Bir küme üzerindeki topolojik yapı, o küme üzerinde tanımlı norm fonksiyonunun ürettiği metriğin açıkları yardımı ile inşa edilebilir. Bu nedenle ele alınan kümeleri daha zengin hale getirmek maksadı ile aşağıdaki tanımlar verilecektir.

Tanım 2.2. X boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(3) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(4) $d(x,y) = d(y,x)$,
(5) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

şartları sağlanıyorsa $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve X' e bir metrik uzay denir. Genellikle (X, d) şeklinde gösterilir [36].

Tanım 2.3. λ lineer uzay ve $\|\cdot\|: \lambda \to \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in \lambda$ vektörü ve her α skaleri için

(6) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
(7) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
(8) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna λ üzerinde bir norm ve $(\lambda, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [36].

Tanım 2.4. λ normlu uzay olsun. λ, norm metriğine göre tam ise λ' ya Banach uzayı denir [36].

$c_0, c, \ell_\infty, bs, cs$ ve ℓ_p dizi uzayları, sırasıyla $\|x\|_{c_0} = \|x\|_c = \|x\|_{\ell_\infty} = \sup_k |x_k|$,

$$\|x\|_{bs} = \|x\|_{cs} = \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right|, \|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}, & (1 \le p < \infty) \\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p, & (0 < p < 1) \end{cases}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_{c_0,c,\ell_\infty}: c_0, c, \ell_\infty \to \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_{bs,cs}: bs, cs \to \mathbb{R}$ ve $\|\cdot\|_{\ell_p}: \ell_p \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ile beraber normlu uzaylardır [37]. Buna ek olarak $c_0, c, \ell_\infty, bs, cs$ ve ℓ_p uzayları Banach uzaylarıdır [37]. Bu uzayların zengin topolojik, cebirsel ve geometrik özellikleri uzun yıllar matematikçilerin ilgisini çekmiş ve bu özellikler üzerine birçok makaleler yazılmıştır. [36], [37], [38], [39], [40] ve [41] bu çalışmalara örnek gösterilebilir.

Tanım 2.5. $I = \{1, 2, \dots, m\}$ ve $J = \{1, 2, \dots, n\}$ alt cümleleri göz önüne alınsın. Bu durumda

$$g: I \times J \to \boldsymbol{F}, \quad g(i,j) = a_{ij}$$

ile verilen iki değişkenli g fonksiyonuna, $\boldsymbol{F}$ cismi üzerindeki $m \times n$ tipinde bir matris denir [42].

Bu çalışmada matrisler alfabenin A, B gibi büyük harfleriyle ve elemanları da aynı harflerin küçükleriyle gösterilecektir.

Bilindiği gibi her lineer dönüşümün bir matris temsili mevcuttur [37]. Dolayısıyla lineer uzaylar arasındaki en genel lineer dönüşümler matrisler yardımı ile verilir. Toplanabilme teorisi, ıraksak fakat sınırlı bir dizinin bir dönüşüm yardımıyla limitlenebilmesi problemleri ile ilgilenir ve bu limitleme işleminde kullanılan en yaygın dönüşümler sonsuz matrislerdir.

$\lambda, \mu \subset w$ ve $A = (a_{nk}), (n, k \in \mathbb{N})$ satır ve sütun sayıları sonsuz olan bir matris olmak üzere, her $x \in \lambda$ için $Ax = ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi μ' nün bir elemanı ise $((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A- dönüşümü denir. λ uzayının elemanlarını μ' nün elamanlarına dönüştüren dönüşümlerin kümesi $(\lambda: \mu)$ biçiminde gösterilir. Dönüşüm dizilerinin mevcut olması için $Ax = (Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisinin her bir $n \in \mathbb{N}$ için yakınsak olması gerektiği açık olarak görülmektedir. $\lambda = \mu = c$ alındığında yani, $A \in (c{:}\, c) = \{A{:} \lim_n x_n = a$ ve $\lim_n (Ax)_n = b, x = (x_k) \in c,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ ise A dönüşümüne yakınsaklığı koruyan dönüşüm, özel olarak $a = b$ ise A dönüşümüne regüler veya limiti koruyan dönüşüm denir. Bütün regüler dönüşümlerin kümesi (c, c, P) ile gösterilir [37].

Lineer bir dönüşümün (matrisin) regüler olması için gerek ve yeter şartlar Silverman-Toeplitz tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir [36].

Teorem 2.1. (Silverman-Toeplitz Teoremi). $A \in (c, c, P)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$(9)\ \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

$$(10)\ \lim_n a_{nk} = 0, \text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için},$$

$$(11)\ \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

olmasıdır.

$u = (u_n)$ kompleks sayıların bir dizisi, $M = (m_{nn})$, $(n = 0,1, \dots)$ için $m_{nn} = u_n$ şeklinde verilen bir köşegen matris, $\binom{n}{k}$, $(0 \le k \le n)$, $(n \in \mathbb{N})$ binom katsayıları olmak üzere $D = (d_{nk})$, $d_{nk} = (-1)^k \binom{n}{k}$ bir üçgensel matris olsun. $H^* = H^*(u) = DMD$' ye Hausdorff matrisi denir ve $n, k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki şekilde yazılabilir [39]:

$$h_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j+k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} u_j, & 0 \le k \le n \text{ } ise \\ 0, & k > n \text{ } ise. \end{cases}$$

Bazı önemli lineer dönüşümler Hausdorff matrisinin özel halleridir ve bunlar Hölder, Cesàro ve Euler matrisleri olarak adlandırılıp aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.6. (Hölder Matrisi). Hausdorff matrisinde her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = (n+1)^{-r}$ ve $r > -1$ alınarak elde edilen matrise Hölder matrisi denir [39].

Tanım 2.7. (Cesàro Matrisi). $a \in \mathbb{R}, -a \notin \mathbb{N}$ olsun. a. dereceden Cesàro matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $n, k \in \mathbb{N}$ için $C_a = \left(c_{nk}^{(a)}\right)$ ile gösterilir [38]:

$$c_{nk}^{(a)} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n-k+a-1}{n-k}}{\binom{n+a}{n}}, & k \leq n \; ise \\ 0, & k > n \; ise. \end{cases}$$

Bir başka yazılışla a. dereceden Cesàro matrisi $a > -1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = 1/\binom{n+a}{n}$ alınarak elde edilebilir [37].

Tanım 2.8. $0 < r < 1$ ve $n, k \in \mathbb{N}$ için $\binom{n}{k} = n!/[k!\,(n-k)!]$ olmak üzere r. dereceden Euler matrisi,

$$e_{nk}^{(r)} = \begin{cases} \binom{n}{k}(1-r)^{n-k} r^k, & 0 \leq k \leq n \; ise \\ 0, & k > n \; ise \end{cases}$$

olarak tanımlanır [38]. Bir başka yazılışla Hausdorff matrisinde $r > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = (r+1)^{-n}$ olarak seçilirse Euler matrisi elde edilmiş olur.

Tanım 2.9. (Riesz Matrisi). $r = (r_k)$ reel sayıların bir dizisi $r_0 > 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $r_k \geq 0$ olsun. Ayrıca genel terimi, $R_n = \sum_{k=0}^{n} r_k$ $(n \in \mathbb{N})$ olan (R_n) dizisi verilsin. Bu durumda her $n, k \in \mathbb{N}$ için $R = (r_{nk})$ şeklinde gösterilen Riesz matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır [38]:

$$r_{nk} = \begin{cases} \dfrac{r_k}{R_n}, & k \leq n \; ise \\ 0, & diğer\ durumlarda. \end{cases}$$

Tanım 2.10. (Zweier Matrisi). p, -1' den farklı bir reel sayı olmak üzere her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$z_{nk} = \begin{cases} p, & n = k \; ise \\ 1 - p, & n - 1 = k \; ise \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $Z = (z_{nk})$ matrisine Zweier matrisi denir [38].

Dizi uzayı üretmenin değişik yolları vardır. Bunlardan biri hatta en önemlisi bir matrisin etki alanından faydalanmaktır. O halde temel bilgilere bir matrisin etki alanı tanımını vererek devam edelim.

Tanım 2.11. A sonsuz matris, λ bir dizi uzayı olsun.

$$\lambda_A = \{x \in w : Ax \in \lambda\} \tag{2.3}$$

ile tanımlı kümeye A lineer dönüşümünün veya daha genel olarak A matrisinin λ üzerindeki etki alanı denir.

Bu çalışmada $A = (a_{nk})$ sonsuz matrislerinin özel seçimleri ile (2.3) de gösterildiği gibi yeni dizi uzayları inşa edildi ve çeşitli özellikleri incelendi. Bu özelliklere örnek olarak dizi uzaylarının $\|x\|_{\lambda_A} = \|Ax\|_\lambda$ şeklinde tanımlanan norm fonksiyonu ile Banach uzayı oldukları, izometrik uzaylar oldukları, λ_A ve λ uzayları arasındaki kapsama ilişkileri, bu yeni uzayların Schauder bazları, topolojik dualleri ve λ_A' dan λ' ya veya tersine λ' dan λ_A' ya olan matris sınıflarını karakterize eden çalışmalar verilebilir. $A = (a_{nk})$' nın özel seçimleri ile λ_A kümelerinin matrisin yapısına bağlı olarak kimi zaman genişleyip, kimi zaman daraldığı, bazen de λ ile λ_A kümelerinin overlap kümeler oldukları bilinmektedir. Örneğin $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$ olmak üzere λ_{C_1}

yakınsaklık alanı, Cesàro dizi uzayları olarak adlandırılmak üzere $(\ell_\infty)_{C_1}, (\ell_p)_{C_1}$ Cesàro dizi uzayları Ng ve Lee [3] tarafından c_{C_1} ve $(c_0)_{C_1}$ dizi uzayları Şengönül ve Başar [19] tarafından tanımlanmıştır. $c_0 \subset (c_0)_{C_1}$ ve $c \subset c_{C_1}$ kapsamalarının varlığı Şengönül ve Başar tarafından gösterilmiştir [19]. Kirişçi ve Başar [22], Başar ve Kirişçi [23] de ℓ_∞, c, c_0 veya ℓ_p dizi uzayları üzerinde $B(r,s)$ fark matrisinden faydalanarak $(\ell_\infty)_{B(r,s)}, c_{B(r,s)}, (c_0)_{B(r,s)}$ ve $(\ell_p)_{B(r,s)}$ olarak gösterilen yeni yakınsaklık alanlarını tanıtmışlardır. Ayrıca $\lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$ ve $B = B(r,s)$ fark matrisi olmak üzere $|{}^{s}/_{r}| < 1$ için $\lambda = \lambda_B$ ve $|{}^{s}/_{r}| \geq 1$ için $\lambda \subset \lambda_B$ olduğunu göstermişlerdir.

Matris sınıflarının karakterizasyonunda dual tip matrisleri kullanarak karakterizasyon yapmak, çoğu hallerde klasik analizin yorucu ve can sıkıcı işlemlerinden kaçınılmasına olanak vermektedir.

Başar ve Çolak [43], Kuttner [44], Lorentz ve Zeller [45] ve Başar [46] dual toplanabilme metodları üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Şimdi Cesàro dual toplanabilme metodu hakkında bazı bilgiler verilecektir [37].

$s = (s_n)$ ve $x = (x_n)$ dizileri arasında

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \tag{2.4}$$

bağıntısı bulunsun. $x = (x_k)$ dizisinin A- transformu $z = (z_n)$ ve $s = (s_k)$ dizisinin B-transformu $t = (t_n)$ olsun. Yani

$$z_n = (Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k, \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.5}$$

$$t_n = (Bs)_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} s_k, \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.6}$$

olsun. Ayrıca $\sum_k \frac{1}{k} b_{nk}$ serileri her bir $n \in \mathbb{N}$ için yakınsak olsun. Bu durumda (2.5) deki $z = (z_n)$ dizisi (2.6) daki $t = (t_n)$ dizisine (veya (t_n), (z_n)' ye) Abel kısmi toplaması yardımı ile dönüştürülebiliyorsa A ve B matrislerine Cesàro dual toplama metodları denir. Bu ifade

$$b_{nk} = k\Delta a_{nk}, \Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{nk+1} \text{ veya } a_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i} b_{ni}$$

bağıntılarına denktir. (t_n), (z_n)' ye aşağıdaki yolla dönüştürülebilir:

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} s_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k} b_{nk} \right) x_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i = z_n.$$

$$z_n = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} (ks_k - (k-1)s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m-1} k(a_{nk} - a_{nk+1}) s_k + m a_{nm} s_m$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} b_{nk} s_{k-1} + m a_{nm} s_m \tag{2.7}$$

Yukarıdaki eşitlikler dikkate alındığında (2.5) ve (2.6) serilerinden biri yakınsarken diğeri de ancak ve ancak $m a_{nm} s_m \to u_0 (m \to \infty)$ olması halinde yakınsar. Ayrıca (2.7)' de $m \to \infty$ için limit alınarak

$$z_n = t_n + b_n \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. Demek ki (s_n), A veya B metodlarından biri ile limitlenebiliyorsa o zaman diğeri ile de limitlenebilirdir ancak ve ancak her $n \in \mathbb{N}$ için (2.8) eşitliği mevcut ise.

Buradan A ve B metodlarından birinin limitlediği dizinin A ve B limitlerinin eşit olması için $u_0 = 0$ olması gerektiği anlaşılır. Benzer durum A ve B' nin rollerinin değiştirilmesi durumunda da geçerlidir [37].

Yukarıda verilen tanımlara ek olarak bu çalışmada kullanılacak önemli görülen diğer tanımlar aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.12. λ ve μ aynı bir $\boldsymbol{F}$ cismi üzerinde lineer iki uzay olsun. Her $x, y \in \lambda$ ve her $a \in \boldsymbol{F}$ için $T: \lambda \to \mu$ dönüşümü

(12) $T(x + y) = T(x) + T(y)$
(13) $T(ax) = aT(x)$

şartlarını sağlıyorsa T' ye λ' dan μ' ye lineer operatör denir.

λ uzayından μ uzayına bütün lineer operatörlerin kümesi $\mathbb{L}(\lambda, \mu\,)$ ile gösterilecektir [36].

Tanım 2.13. $T \in \mathbb{L}(\lambda, \mu\,)$ olsun. T birebir ve örtense T' ye λ' dan μ' ye izomorfizm, λ ve μ uzaylarına da izomorfik uzaylar denir, ve $\lambda \cong \mu$ ile gösterilir [36].

Tanım 2.14. (Seriler için Genel Yakınsaklık Prensibi). $x \in cs \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_0$ ve her $p \geq 0$ için $\left|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon$ olmalıdır [36].

Teorem 2.2. (Düzgün Sınırlılık Teoremi). (A_n), λ Banach uzayından μ normlu uzayına tanımlı sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi ve λ üzerinde $\sup_n \|A_n(x)\| < \infty$ eşitsizliği mevcut olsun. Bu durumda, $\sup_n \|A_n\| < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ dir. Yani normlardan oluşan $(\|A_n\|)$ dizisi sınırlıdır [36].

Tanım 2.15. λ normlu lineer uzayında, her bir $x \in \lambda$' ya karşılık bir tek (α_k) dizisi vardır öyle ki $\lim_n \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\| = 0$ ise $(x_k) \in \lambda$' ya λ için Schauder bazıdır denir [36].

Tanım 2.16. (Yoğun Küme). X metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. $\overline{M} = X$ ise M' ye X' de yoğun küme denir [47].

Tanım 2.17. (Fundamental Küme). X normlu bir uzay ve $M \subset X$ olsun. $spanM$, X de yoğun ise M' ye bir fundamental küme denir [47].

Tanım 2.18. (Konveks Küme). X bir vektör uzayı ve $M \subset X$ olsun. Eğer $x, y \in M$ için $\{z \in X: z = ax + (1-a)y, 0 \leq a \leq 1\} \subset M$ oluyorsa M' ye konveks küme denir [47].

Tanım 2.19. (Schur matrisi). Sınırlı dizileri yakınsak dizilere dönüştüren matrislere Schur matrisi denir. Bir A matrisinin Schur matrisi olması için gerek ve yeter şartlar

(14) $\lim_{n} a_{nk}$ her $k \in \mathbb{N}$ için mevcut

(15) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$ n' ye göre düzgün yakınsak

olarak verilmiştir [48].

Tanım 2.20. $P_i: \lambda \to \mathbb{C}$, $P_i(x) = x_i$ dönüşümü sürekli olmak üzere, lineer topolojiye sahip λ dizi uzayına bir K- uzayı denir. Tam metrik uzay olan bir K- uzayına FK- uzayı, topolojisini oluşturan metrikten norm üretebilen FK- uzayına ise bir BK- uzayı denir. Yani $BK \Rightarrow FK \Rightarrow K$ dır. $\phi \subset \lambda$ dizi uzayı bir FK- uzayı olsun. $x = (x_k) \in \lambda$ dizisinin n. terimi $x^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)}$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda,

(16) $n \to \infty$ için $x^{[n]} \to x$ ise x dizisi AK özelliğine sahiptir denir.
(17) Eğer $\left(x^{[n]}\right)$ dizisi sınırlı ise x dizisi AB özelliğine sahiptir denir.
(18) Eğer $x \in \bar{\phi}$ ise x dizisi AD özelliğine sahiptir denir.
(19) $\left\{x_k e^{(k)}\right\}$ kümesi λ dizi uzayında sınırlı bir küme ise x dizisi KB özelliğine sahiptir denir [37].

Tanım 2.21. λ dizi uzayı normaldir ancak ve ancak $\tilde{\lambda} = \{(u_k) \in w: \exists (x_k) \in \lambda \ni |u_k| \leq |x_k|, \forall\, k \in \mathbb{N}\} \subset \lambda$ ise [37].

Tanım 2.22. $A = (a_{nk})$, $(n, k = 1, 2, ...)$ bir sonsuz matris olsun. $k > n$ olan her $n, k \in \{1, 2, ...\}$ için $a_{nk} = 0$ oluyorsa A matrisine alt üçgen matris ve $n > k$ olan her $n, k \in \{1, 2, ...\}$ için $a_{nk} = 0$ oluyorsa A matrisine üst üçgen matris denir. Eğer A matrisi üçgensel ve $n = 0, 1, ...$ için $a_{nn} \neq 0$ ise A matrisine normaldir denir [49].

Tanım 2.23. λ ve μ herhangi iki dizi uzayı olmak üzere

$$S(\lambda, \mu) = \{z = (z_k) \in w : xz = (x_k z_k) \in \mu, \forall\, x = (x_k) \in \lambda\} \tag{2.9}$$

kümesine λ ve μ uzaylarının çoklu(multiplier) uzayı denir.

Açıkça görülür ki θ bir dizi uzayı olmak üzere $\mu \subset \theta \subset \lambda$ kapsamaları mevcutsa $S(\lambda, \mu) \subset S(\theta, \mu)$ ve $S(\lambda, \mu) \subset S(\lambda, \theta)$ kapsamaları da mevcuttur. (2.9) eşitliğinde μ yerine ℓ_1, cs ve bs dizi uzayları konularak elde edilen $S(\lambda, \ell_1)$, $S(\lambda, cs)$ ve $S(\lambda, bs)$ kümelerine sırasıyla λ dizi uzayının α-, β- ve γ- duali denir.

Lemma 2.1. Normlu bir λ uzayı üzerinde, bir norm tarafından doğurulan bir d metriği, her $x, y, z \in \lambda$ ve her a skaleri için

$d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Ötelemenin Değişmezliği)

$d(ax, ay) = |a| d(x, y)$

özelliklerini gerçekler [47].

İspat: $d(x + z, y + z) = \|x + z - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$ ve $d(ax, ay) = \|ax - ay\| = |a| \|x - y\| = |a| d(x, y)$ elde edilir.

Lemma 2.2. limsup $(x_n + y_n) \leq$ limsup x_n + limsup y_n eşitsizliği mevcuttur.

İspat: Kabul edelim ki limsup $(x_n + y_n) \geq$ limsup x_n + limsup y_n olsun. Bu kabul ile birlikte $(x_n) = (1, -1, 1, -1, ...)$ ve $(y_n) = (0, 1, 0, ...)$ dizileri ele alınırsa kabul edilen ifadenin çelişkili olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

BÖLÜM 3

3. HEMEN HEMEN YAKINSAK DİZİLER UZAYI

Bu bölümde hemen hemen yakınsaklık hakkında matematik bilgi sisteminde bulunan tanım ve teoremler hakkında bilgiler özetlenip, yakınsaklık ile hemen hemen yakınsaklık tanımları arasında kısa bir karşılaştırmaya yer verilecektir.

3.1. Hemen Hemen Yakınsaklık

3.1.1. Banach limitleri

Tanım 3.1.1. $g: \lambda \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli göz önüne alınsın. Eğer her $x, y \in \lambda$ için, $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ eşitsizliği mevcut ise g fonksiyoneline alt toplamsal, her $x, y \in \lambda$ için, $g(x+y) = g(x) + g(y)$ ise g fonksiyoneline toplamsaldır denir. Her $x \in \lambda$ ve $a \in \mathbb{R}\,(a \geq 0)$ için $g(ax) = ag(x)$ eşitliği mevcutsa g fonksiyoneline homojendir denir [48].

Bir fonksiyonel toplamsal ve homojen olma özelliklerini sağlıyorsa lineer fonksiyonel, alt toplamsal ve homojenlik şartlarını sağlıyorsa alt lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. g fonksiyoneli lineer ise $g(-x) + g(x) = g(-x+x) = g(0) = 0 \Rightarrow g(-x) = -g(x)$ eşitlikleri geçerli olduğundan her $x, y \in \lambda$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için $g(ax+by) = ag(x) + bg(y)$ eşitliği mevcuttur.

Teorem 3.1.1. λ bir lineer uzay ve her $x \in \lambda$ için $P(x)$ alt lineer fonksiyoneli verilsin. $x_0 \in \lambda$ ve a' da $P(x_0) > 0$ olmak üzere $0 \leq a \leq P(x_0)$ şartını sağlayan herhangi bir reel sayı olacak şekilde seçilsin. Eğer $P(x)$, her $x \in \lambda$ için tanımlı bir alt lineer fonksiyonel ise bu durumda her $x \in \lambda$ için, $g(x) \leq P(x)$ olacak şekilde bir g lineer fonksiyoneli vardır. Buna ek olarak, her $x \in \lambda$ için $P(-x) = -P(x)$ ise g lineer fonksiyoneli $g(x_0) = a$ şeklinde seçilebilir [48].

Tanım 3.1.2. $\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \subset \mathbb{Z}$ ve

$$P: \ell_\infty \to \mathbb{R}, P(x_k) = \inf_{n_1,n_2,\dots,n_k} \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k} x_{n_p+j} \quad , (\mathrm{k} \in \mathbb{N}) \tag{3.1}$$

olmak üzere her $x \in \ell_\infty$ için $L(x_k) \le P(x_k)$ şartını sağlayan L lineer fonksiyoneline Banach limiti denir [48].

Teorem 3.1.2. (3.1) de verilen P fonksiyoneli alt lineerdir [48].

İspat: Bunu göstermek için

(20) $P(x_k + y_k) \le P(x_k) + P(y_k)$
(21) $P(ax_k) = aP(x_k),\ \ a \in \mathbb{R},\ \ a \ge 0$

şartlarının sağlandığı gösterilmelidir.

İspat: a bir skaler olmak üzere (21) eşitliğinin sağlandığı açıktır. (20)' nin ispatı aşağıdaki gibidir:

$$P(x_k + y_k) = \inf_{n_1,n_2,\dots,n_k} \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\left(x_{n_p+j} + y_{n_p+j}\right)$$

$$= \inf_{n_1,n_2,\dots,n_k} \limsup_{j\to\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k} x_{n_p+j} + \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k} y_{n_p+j}\right)$$

$$\le \inf_{n_1,n_2,\dots,n_k} \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k} x_{n_p+j} + \inf_{n_1,n_2,\dots,n_k} \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k} y_{n_p+j}$$

$$= P(x_k) + P(y_k). \qquad \square$$

Aşağıdaki teorem Banach limitlerinin sahip olduğu bazı karakteristik özellikleri göstermesi bakımından ilginçtir.

Teorem 3.1.3. Bir L Banach limiti aşağıdaki özellikleri sağlar [48]:

(22) $L(ax_k) = aL(x_k),\ a \in \mathbb{R}$,

(23) $L(x_k + y_k) = L(x_k) + L(y_k)$,

(24) $L(x_{k+1}) = L(x_k)$,

(25) $L(\boldsymbol{e}) = 1,\ \ \boldsymbol{e} = (1,1,1, \dots ,1, \dots)$,

(26) $x_k \geq 0,\ k = (1,2,3, \dots)$ ise $L(x_k) \geq 0$ dır.

Tanım 3.1.3. $x = (x_k) \in \ell_\infty$ olsun. Her L Banach limiti için $L(x_k) = s \in \mathbb{R}$ eşitliği varsa (x_k) dizisi s reel sayısına hemen hemen yakınsaktır denir ve $f - \lim x_k = s$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $s = 0$ ise yani, $f - \lim x_k = 0$ şartını sağlayan (x_k) dizilerinin kümesine sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi denir [5]. Bu çalışma boyunca hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı ve sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı sırasıyla f ve f_0 ile gösterilecektir.

Teorem 3.1.4. (x_k) dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart $P(x_k) = -P(-x_k)$ olmasıdır [48].

G. G. Lorentz "*A contribution to the theory of divergent sequences*" adlı makalesi ile hemen hemen yakınsaklık tanımını literatüre kazandırmış ve hemen hemen yakınsak diziler uzayının herhangi bir matrisin herhangi bir λ dizi uzayı üzerindeki etki alanı olarak verilemeyeceğini ispatlamıştır. Lorentz' in tanımını yaptığı hemen hemen yakınsak ve sıfıra hemen hemen yakınsak dizi kümeleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır [27]:

$$f = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \lim_m \sum_{k=0}^{m} \frac{x_{n+k}}{m+1} = s, n' \text{ ye göre düzgün}, s \in \mathbb{C} \right\},$$

$$f_0 = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \lim_m \sum_{k=0}^{m} \frac{x_{n+k}}{m+1} = 0, n' \text{ ye göre düzgün} \right\}.$$

Hemen hemen yakınsak dizi tanımı, diğer bir ifade ile aşağıdaki teoremde olduğu gibi verilebilir:

Teorem 3.1.5. Bir (x_m) dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart n' ye göre düzgün olarak $\lim_m \frac{x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+m-1}}{m}$ limitinin mevcut olmasıdır [48].

$x = (x_k) \in \ell_\infty$ ise, $L(x_k) \leq P(x_k) \leq \limsup_k x_k$ olduğu açıktır. Buradan $L(x_k) = -L(-x_k) \geq -P(-x_k) \geq \liminf_k x_k$ eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla $(x_k) \in c_0$ ise $(x_k) \in f_0$ olur ki bu da $c_0 \subset f_0$ kapsamasının geçerli olduğunu gösterir. Ayrıca $c \subset f$ kapsaması da mevcuttur. Benzer olarak s' ye yakınsak olan her dizi aynı zamanda s' ye hemen hemen yakınsaktır.

Bunlara ek olarak $(x_k) = \left((-1)^{\mathrm{k}}\right)$ dizisi için L bir Banach limiti olmak üzere

$$L\left((-1)^{\mathrm{k}}\right) = L\left((-1)^{\mathrm{k}+1}\right) \tag{3.2}$$

eşitliği bulunur. L lineer olduğundan

$$L\left((-1)^{\mathrm{k}}\right) = -L\left((-1)^{\mathrm{k}+1}\right) \tag{3.3}$$

eşitliği mevcuttur. (3.2), (3.3) eşitlikleri ve Teorem 3.1.4 göz önüne alındığında $(x_k) = \left((-1)^{\mathrm{k}}\right) \in f$ fakat $(x_k) = \left((-1)^{\mathrm{k}}\right) \notin c$ olduğu yani $c \subset f$ kapsamasının kesin olduğu görülür.

BÖLÜM 4

4. zrf- YAKINSAKLIK

Bu bölümde hemen hemen yakınsaklık tarifinin bir genellemesi olan ve zrf-yakınsaklık olarak isimlendirilen, yeni tip yakınsaklık tanımı verilecektir. Bu yeni tanım, bilinen hemen hemen yakınsaklık tanımından farklı olarak, bir bakıma "*ötelenmiş Zweier transformlar dizisinin Riesz ortalaması*" olarak tarif edilebileceğinden ilgili bilimsel alana yenilik ve orijinallik katması bakımından ilgi çekicidir.

Hemen hemen yakınsaklık tarifi, Tanım 3.1.3 anlamında verilebileceği gibi; Butković, Kraljević ve Sarapa' nın [33] de gösterdiği gibi de ele alınabilir. Ya da birinci mertebeden Cesàro matrisinin satırlarının ötelenmesiyle elde edilen matrislerin yakınsaklık alanlarının kesişimi olarak tarif edilebilir. Ayrıca bu tanımlara ek olarak Teorem 3.1.5 anlamında da ele alınabilir. Bu tanımlar akılda tutularak, ν bir doğal sayı ve $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi olmak üzere $S^\nu = (s_{nk}^\nu)$ matrisi $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$s_{nk}^{\nu} = \begin{cases} 1, & n + \nu = k \; ise \\ 0, & diğerleri \end{cases}$$

formunda yazılıp $(S^\nu x) = (S^0 x,\ S^1 x,\ S^2 x, \dots, S^\nu x, \dots)$ dizisi elde edilebilir. Bu formda tanımlanan dizi, S^ν ile elde edilen ötelenmiş transformlar dizisi olarak adlandırılacaktır. Bu bilgiler ışığında hemen hemen yakınsaklık tanımının, her bir ν doğal sayısı için $(S^\nu x) = (S^0 x,\ S^1 x,\ S^2 x, \dots, S^\nu x, \dots)$ ötelenmiş transformlar dizisinin, C_1, birinci mertebeden Cesàro ortalamasının sabit bir diziye yakınsaması ile aynı anlama geleceği anlaşılmaktadır. Bir başka söyleyişle "$x = (x_k)$ *sınırlı dizisi hemen hemen yakınsaktır ancak ve ancak her bir* $\nu \in \mathbb{N}$ *için* $([C_1(S^\nu x)]_k)$ *dönüşüm dizilerinin limiti mevcut ve eşit ise*" önermesi hemen hemen yakınsaklık tarifi için kullanılabilecektir.

Dolayısıyla, yukarıda öne sürülen düşünce "C_1, birinci mertebeden Cesàro matrisi yerine bir başka T matrisi alınıp, "$x = (x_k)$ *sınırlı dizisi* T- *yakınsaktır ancak ve ancak her bir* $\nu \in \mathbb{N}$ *için* $([T(S^\nu x)]_k)$ *dönüşüm dizilerinin limiti mevcut ve eşit ise*" biçiminde genişletilebilir. Böylece klasik anlamda bilinen hemen hemen yakınsaklığın dışında, onu kapsayan ve daha genel bir yakınsaklık fikrinin ortaya çıktığı görülür. Yukarıda ileri sürülen düşünceler göz önüne alındığında

$$f_T = \left\{x \in \ell_\infty : \lim_k [T(S^\nu x)]_k = l, l \in \mathbb{R},\ \nu = 0,1,2,\dots\right\} \tag{4.1}$$

$$f_{T_0} = \left\{x \in \ell_\infty : \lim_k [T(S^\nu x)]_k = 0,\ \nu = 0,1,2,\dots\right\} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlan kümeler sırasıyla, T- yakınsak ve sıfıra T- yakınsak dizilerin kümesi olarak adlandırılır.

1973' de Stieglitz' in [30]' da hemen hemen yakınsaklık fikrinin bir genellemesi olan F_B- yakınsaklık üzerinde çalışmalar yaptığı bilinmektedir. Fakat (4.1) ve (4.2) ile tanımlanan kümelerin Stieglitz' in [30] F_B- yakınsaklık tanımı ile örtüşmekle beraber ifade bakımından farklılık ortaya koyduğu açıktır.

(4.1) ve (4.2) de T matrisi yerine Riesz matrisi alınarak bir sonraki bölümde tarifi verilecek olan zrf- yakınsaklık için gerekli görülen tanım ve teoremler aşağıda ele alınmıştır. Burada şu vurgulanmalıdır ki, Riesz matrisi, $r = (r_k)$ dizisinin seçilişine bağlı olarak çok farklı biçimde yazılabilir. Bu nedenle örnek verileceği durumlarda veya çalışmaların içinden çıkılamaz olduğu yerlerde $r = (r_k)$ dizisi özelleştirilecektir.

Tanım 4.1. $\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \subset \mathbb{Z}$ ve $P_{rf} : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli

$$P_{rf}(x_n) = \inf_{n_1, n_2, \dots, n_k} \limsup_{j \to \infty} \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{k} r_i x_{n_i + j}$$

olmak üzere her $x \in \ell_\infty$ için $L_{rf}(x_n) \le P_{rf}(x_n)$ eşitsizliğini sağlayan L_{rf} lineer fonksiyoneline rf- limiti denir. Eğer $r = (1)$ alınırsa rf- limitlerinin Banach limitlerine eşdeğer olacağı açıktır.

Tanım 4.2. $x = (x_n) \in \ell_\infty$ olsun. Eğer her L_{rf} , rf- limiti için $L_{rf}(x_n) = x_0 \in \mathbb{R}$ oluyorsa (x_n) dizisi x_0' a $\boldsymbol{rf}$**- yakınsaktır** denir ve kısaca $rf - \lim_n x_n = x_0$ ile gösterilir.

Aşağıda P_{rf} fonksiyonelinin bazı önemli özelliklerini ifade ve ispat eden lemma ve teoremlere yer verilmiştir.

Lemma 4.1. P_{rf} fonksiyoneli alt lineerdir.

İspat: Bunun için aşağıda verilen iki ifadenin sağlandığı gösterilmelidir:

(27) $P_{rf}(x_n + y_n) \leq P_{rf}(x_n) + P_{rf}(y_n)$,
(28) $P_{rf}(ax_n) = aP_{rf}(x_n)$, $a \in \mathbb{R}, (a \geq 0)$.

(28) eşitliğinin sağlandığı açıktır. Şimdi (27)' nin ispatı yapılacaktır:

$$P_{rf}(x_n + y_n) = \inf_{n_1,n_2,\dots,n_k} \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{k} r_i \left(x_{n_i+j} + y_{n_i+j}\right)$$

$$= \inf_{n_1,n_2,\dots,n_k} \limsup_{j\to\infty} \left(\frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{k} r_i \, x_{n_i+j} + \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{k} r_i \, y_{n_i+j} \right)$$

$$\leq \inf_{n_1,n_2,\dots,n_k} \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{k} r_i \, x_{n_i+j} + \inf_{n_1,n_2,\dots,n_k} \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{k} r_i \, y_{n_i+j}$$

$$= P_{rf}(x_n) + P_{rf}(y_n)$$

olur ki bu (27)' nin ispatıdır. □

Teorem 4.1. L_{rf} lineer fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(29) $L_{rf}(ax_n) = aL_{rf}(x_n)$, $(a \in \mathbb{R})$,

(30) $L_{rf}(x_n + y_n) = L_{rf}(x_n) + L_{rf}(y_n)$,

(31) $L_{rf}(x_{n+1}) = L_{rf}(x_n)$,

(32) $L_{rf}(\boldsymbol{e}) = 1, \quad \boldsymbol{e} = (1,1,1, \dots ,1, \dots)$,

(33) $x_n \geq 0,\ n = (1,2,3, \dots)$ ise $L_{rf}(x_n) \geq 0$ dır.

İspat: (29) ve (30)' un ispatı L_{rf} fonksiyoneli lineer olduğundan açıktır.

(31): $n_1, n_2, \dots, n_k$ tamsayıları $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, \dots, n_k = k$ olacak şekilde seçilsin ve $x \in \ell_\infty$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M \in \mathbb{R}$ olacak şekilde M pozitif reel sayısı vardır.

$$\frac{1}{R_k}\left|\sum_{i=1}^{k} r_i\left(x_{n_i+j} - x_{n_i+j+1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{R_k}\left|r_1\left(x_{1+j} - x_{2+j}\right) + r_2\left(x_{2+j} - x_{3+j}\right) + \cdots + r_k\left(x_{k+j} - x_{k+j+1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{r_1 + r_2 + \cdots + r_k}\left|x_{1+j}(r_1) + x_{2+j}(r_2 - r_1) + \cdots + x_{k+j}(r_k - r_{k-1}) - x_{k+1+j}(r_k)\right|$$

$$\leq \frac{Mr_1}{R_k} + \frac{M(r_2 - r_1)}{R_k} + \frac{M(r_3 - r_2)}{R_k} + \cdots + \frac{M(r_k - r_{k-1})}{R_k} + \frac{Mr_k}{R_k} = \frac{M}{R_k} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_k}\left|\sum_{i=1}^{k} r_i\left(x_{n_i+j} - x_{n_i+j+1}\right)\right| = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} r_i\left(x_{n_i+j} - x_{n_i+j+1}\right) = 0 \Rightarrow P_{rf}(x_n - x_{n+1}) \leq 0$$

olur ve benzer işlemler yapılarak $P_{rf}(x_{n+1} - x_n) \leq 0$ olduğu elde edilir. Ayrıca $L_{rf}(x_n) \leq P_{rf}(x_n)$ olacağından $L_{rf}(x_n - x_{n+1}) \leq 0 \Rightarrow L_{rf}(x_n - x_{n+1}) = -L_{rf}(x_{n+1} - x_n) \geq -P_{rf}(x_{n+1} - x_n) \geq 0 \Rightarrow L_{rf}(x_n - x_{n+1}) \geq 0$ olduğu görülür. Böylece $L_{rf}(x_n - x_{n+1}) = 0$ sonucu elde edilir. L_{rf} lineer olduğundan $L_{rf}(x_n) - L_{rf}(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow\ L_{rf}(x_n) = L_{rf}(x_{n+1})$ olduğu görülür.

(32): $P_{rf}(\boldsymbol{e}) = 1, P_{rf}(-\boldsymbol{e}) = -1$ ve $L_{rf}(-x_k) \leq P_{rf}(-x_k)$ olduğundan $L_{rf}(e) \leq P_{rf}(\boldsymbol{e}) = 1$ ve $L_{rf}(\boldsymbol{e}) = -L_{rf}(-\boldsymbol{e}) \geq -P_{rf}(-\boldsymbol{e}) = 1$ olur. Yani $L_{rf}(\boldsymbol{e}) = 1$ olur. (33): $x_n \geq 0, (n = 1,2,3, \dots)$ olsun. Bu durumda $P_{rf}(-x_n) \leq 0$ ve $L_{rf}(x_n) = -L_{rf}(-x_n) \geq -P_{rf}(-x_n) \geq 0$ olur ki bu da (33)' ün ispatıdır. □

Şimdi Teorem 3.1.4' e paralel olarak rf- yakınsaklığı P_{rf} fonksiyonelleri bakımından ele alan bir teorem verilecektir.

Teorem 4.2. (x_n) dizisinin rf- yakınsak olması için gerek ve yeter şart $P_{rf}(x_n) = -P_{rf}(-x_n)$ olmasıdır.

İspat: $P_{rf}(x_n) \geq L_{rf}(x_n) = -L_{rf}(-x_n) \geq -P_{rf}(-x_n)$ olduğundan her $x = (x_n)$ dizisi için $L_{zrf}(x_n) = a$ olacak şekilde a reel sayısı mevcuttur. O halde (x_n) dizisi rf-yakınsaktır.

Tersine, kabul edelim ki (x_n) dizisi rf- yakınsak olsun. Bu takdirde

$$0 = P_{rf}(x_n - x_n) \leq P_{rf}(x_n) + P_{rf}(-x_n) \Rightarrow P_{rf}(x_n) \geq -P_{rf}(-x_n)$$

olur. Benzer şekilde

$$0 = -P_{rf}(x_n - x_n) \leq -P_{rf}(x_n) - P_{rf}(-x_n) \Rightarrow P_{rf}(x_n) \leq -P_{rf}(-x_n)$$

olacağından $P_{rf}(x_n) = -P_{rf}(-x_n)$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

4.1. rf ve rf_0 kümeleri

(4.1) ve (4.2) de T matrisi yerine Riesz matrisi alınarak tanımlanan ve sırası ile, a' ya rf- ve sıfıra rf- yakınsak dizilerin kümesi olarak adlandırılan yeni dizi uzayları aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$rf = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} = a, n' \text{ ye göre düzgün}, \ \ a \in \mathbb{R} \right\} \qquad (4.3)$$

$$rf_0 = \left\{ x = (x_k) \in \ell_\infty : \lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} = 0, n' \text{ ye göre düzgün} \right\} \qquad (4.4)$$

rf ve rf_0 ile tanımlanan kümeler w' nin alt uzayları olup, $(r_k) = (1)$ özel seçimi ile sırasıyla klasik anlamda bilinen f ve f_0 dizi uzaylarına indirgenirler. Bu bilgiler göz önüne alındığında f ve f_0 uzaylarının sırası ile rf ve rf_0 dizi uzaylarının özel halleri olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde f ve f_0 uzayları için mevcut olan teorik ve uygulamalı bilgiler sırasıyla rf ve rf_0 uzaylarının $r = 1$ özel haline karşılık gelecektir.

Lemma 4.1.1. (4.3) ve (4.4) de tanımlanan rf ve rf_0 kümeleri

$$\|x\|_{rf} = \|x\|_{rf_0} = \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} \right|, n' \text{ ye göre düzgün} \qquad (4.5)$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_{rf,rf_0} : rf, rf_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ile Banach uzaylarıdır.

İspat: İlk olarak (4.5) eşitliğinin norm şartlarını sağladığını gösterelim. θ, rf, rf_0 uzaylarının toplama işlemine göre etkisiz(birim) elemanı olsun. Her $x, y \in rf$ ve her $a \in \mathbb{C}$ için

$$\|x\|_{rf} = 0 \Leftrightarrow \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{R_m} \left| \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} = 0$$

olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $r_0 \neq 0$ ve $R_k \geq 0$ olduğundan her $i \in \mathbb{N}$ için $x_n = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ olur.

$$\|ax\|_{rf} = \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} a r_k x_{k+n} \right| = |a| \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} \right| = |a| \|x\|$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan homojenlik koşulu da sağlanmış olur. Ve son olarak

$$\|x + y\|_{rf} = \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k (x_{k+n} + y_{k+n}) \right| = \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} + \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k y_{k+n} \right|$$

$$\leq \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} \right| + \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k y_{k+n} \right| = \|x\|_{rf} + \|y\|_{rf}$$

olduğundan üçgen eşitsizliği şartı sağlanır. Böylece rf ve rf_0 kümelerinin normlu uzay olduğu görülür.

Şimdi rf uzayının (4.5) normuna göre tam olduğu gösterilecektir. $\left(x_k^i\right)$, rf' de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ için $i, j \geq n_0$ olarak seçildiğinde, $\left\|x_m^i - x_m^j\right\|_{rf} = \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n}^i - \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n}^j \right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ bulunabilir.

Eğer $t_{mn}^i(x) = \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n}^i$ ve $t_{mn}^j(x) = \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n}^j$ kısaltmaları yapılırsa

$$\left| t_{mn}^i(x) - t_{mn}^j(x) \right| < \varepsilon \tag{4.6}$$

ifadesi elde edilir.

(4.6) den her bir $m, n \in \mathbb{N}$ için $\left(t_{mn}^i(x)\right)$ dizisinin $\mathbb{R}$' de bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varılır. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi tam olduğundan $\lim_i t_{mn}^i(x) = t_{mn}(x)$ eşitliği mevcuttur. (4.6) ifadesi üzerinden $i \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_i \left| t_{mn}^i(x) - t_{mn}^j(x) \right| = \left| \lim_i t_{mn}^i(x) - t_{mn}^j(x) \right| = \left| t_{mn}(x) - t_{mn}^j(x) \right| < \varepsilon$$

bulunur. Böylece $\left\| t_{mn}(x) - t_{mn}^{j}(x) \right\|_{rf} \to 0,\ (i \to \infty)$ elde edilir.

Şimdi $t_{mn}(x) \in rf$ olduğu gösterilecektir. $\left(t_{mn}^{i}(x)\right) \in rf$ olarak alınırsa

$\|t_{mn}(x) - a\|_{rf} = \left\| t_{mn}(x) - t_{mn}^{i}(x) + t_{mn}^{i}(x) - a \right\|_{rf} \leq \left\| t_{mn}(x) - t_{mn}^{i}(x) \right\|_{rf} +$
$\left\| t_{mn}^{i}(x) - a \right\|_{rf} = \left\| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} - \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n}^{i} \right\|_{rf} + \left\| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n}^{i} - a \right\|_{rf}$

$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ olduğundan $t_{mn}(x) = \dfrac{1}{R_m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} \in rf$ olduğu anlaşılır.

Böylece ispat tamamlanmış olur. rf_0 için ispat benzer şekilde yapılabileceğinden burada verilmemiştir. □

Teorem 4.1.1. $c_0, c, \ell_\infty, rf_0$ ve rf uzayları arasında $c_0 \subset rf_0 \subset rf \subset \ell_\infty$ ve $c \subset rf$ kapsamaları mevcuttur.

İspat: İlk olarak $c_0 \subset rf_0$ kapsamasının mevcut olduğu gösterilecektir. $x \in c_0$ olsun. Bu durumda her $k \geq n_0 \in \mathbb{N}$ için $|x_k| < \varepsilon$ olup $x = (x_k)$ dizisinin her alt dizisi de 0' a yakınsak olduğundan $|S^n x| < \varepsilon$ veya $|x_{k+n}| < \varepsilon, (n = 1, 2, \dots)$ yazılabilir. $R = (r_{nk})$ Riesz matrisi regüler olduğundan $\left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} \right| < \varepsilon$ eşitsizliği elde edilir. Bu $\lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} = 0$ olması anlamına gelir. Yani, $x \in rf_0$ olduğu görülür.

$rf_0 \subset rf$ kapsamasının geçerli olduğu açıktır.

Şimdi $rf \subset \ell_\infty$ olduğu gösterilecektir. $x = (x_k) \in rf,\ a \in \mathbb{C}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} - a \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n} - a < \varepsilon \ \Leftrightarrow$$

$$a-\varepsilon<\frac{1}{R_m}\sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n}<a+\varepsilon \tag{4.7}$$

eşitsizlikleri mevcuttur. $s_m=\frac{1}{R_m}\sum_{k=0}^{m} r_k x_{k+n}$ denilirse (4.7) den dolayı $a-\varepsilon<s_m<a+\varepsilon$ eşitsizliği elde edilir ki, bu diziye ait en fazla n_0 tane terimin $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığının dışında kalması demektir. $M=\min\{s_1, s_2, \dots, s_{n_0}, a-\varepsilon\}$ ve $N=\max\{s_1, s_2, \dots, s_{n_0}, a+\varepsilon\}$ denirse $M\le s_m\le N$ veya bir başka yazılışla $MR_m\le\sum_{k=0}^{m} r_k\, x_{k+n}\le NR_m$ ifadesi elde edilecektir. $MR_m-NR_{m-1}\le r_m x_{m+n}\le NR_m-MR_{m-1}\Leftrightarrow\frac{MR_m-NR_{m-1}}{r_m}\le x_{m+n}\le\frac{NR_m-MR_{m-1}}{r_m}$ eşitsizliği her $n\in\mathbb{N}$ için elde edilir. $\text{maks}\left\{\frac{MR_m-NR_{m-1}}{r_m},\frac{MR_m-NR_{m-1}}{r_m}\right\}=K$ denirse $|x_{m+n}|\le K$ olur. Bu durumda $x\in\ell_\infty$ olur. Şu halde $rf\subset\ell_\infty$ kapsaması mevcuttur.

Riesz matrisi regüler bir matris olduğundan $c\subset rf$ kapsamasının var olduğu kolaylıkla görülebilir. □

Şimdi rf ve rf_0 uzaylarına ait önemli görülen bazı özellikler verilecektir.

Teorem 4.1.2. rf ve rf_0 dizi uzayları K-, FK- ve BK- uzaylarıdır.

Teorem 4.1.3. rf uzayı solid dizi uzayı değildir.

İspat: $v=(v_k)=(1,0,1,1,0,0,\dots)$ ve $u=(u_k)=(1,1,\dots)$, $k\in\mathbb{N}$ olarak seçilirse $u\in rf$ ve $v\in\ell_\infty$ olduğu kolayca görülür. Buradan $uv=v$ yani $(uv)_k=v_k$ bulunur. $rf-\lim v=\lim_n\frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n} r_k v_{k+i}=\infty$ olduğundan ℓ_∞ ve rf dizi uzaylarının $\ell_\infty rf$ çarpımı rf uzayının alt kümesi değildir. Yani $\ell_\infty rf\subset rf$ kapsaması mevcut değildir. Buradan rf uzayının solid uzay olmadığı görülür. □

Dizi uzaylarının en önemli cebirsel özelliklerinden biri de onların konveksliği ile ilgilidir. Aşağıdaki teorem rf ve rf_0 kümelerinin konveksliği ile ilgilidir.

Teorem 4.1.4. rf ve rf_0 konveks kümelerdir.

İspat: $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$, rf kümesinde iki dizi ve $a \in [0,1]$ olsun. O halde $\lim_n \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} r_k x_{k+i} = d$ ve $\lim_n \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} r_k y_{k+i} = e$ limitlerinin mevcut ve i' ye göre düzgün olduğu açıktır. $ax + (1-a)y \in rf$ olduğundan rf uzayı konvekstir. Yani, $a\lim_n \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} r_k x_{k+i} = ad$ ve $(1-a)\lim_n \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} r_k y_{k+i} = (1-a)e$ olur. Buradan $a\lim_n \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} r_k x_{k+i} + (1-a)\lim_n \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^{n} r_k y_{k+i} = ad + (1-a)e$ ve $ad + (1-a)e \in \mathbb{R}$ olacağından rf kümesinin konveks olduğu görülür. rf_0 içinde ispat benzer şekilde yapılabilir. □

Lemma 4.1.2. λ ve μ herhangi iki dizi uzayı ve ξ, λ veya μ' nün Köthe- Toeplitz duallerinden biri olsun. Eğer $\lambda \subset \mu$ ise o zaman $\mu^{\xi} \subset \lambda^{\xi}$ dir [40].

Lemma 4.1.3. $\xi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere ${c_0}^{\xi} = c^{\xi} = {\ell_\infty}^{\xi} = \ell_1$ eşitliği geçerlidir [40].

Teorem 4.1.5. f_0 ve f uzaylarının α-, β- ve γ- dual uzayları ℓ_1 uzayına denktir [41].

İspat: $c_0 \subset f_0 \subset \ell_\infty$ ve $c \subset f \subset \ell_\infty$ kapsamaları ile Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3 göz önüne alınırsa $\xi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere ${f_0}^{\xi} = f^{\xi} = \ell_1$ eşitliklerinin mevcut olduğu görülür. □

Ayrıca, $c_0 \subset rf_0 \subset \ell_\infty$ ve $c \subset rf \subset \ell_\infty$ kapsamaları mevcut ve ${\ell_\infty}^{\xi} = c^{\xi} = {c_0}^{\xi} = \ell_1$ olduğundan Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3 göz önünde bulundurulduğunda ${rf_0}^{\xi} = rf^{\xi} = \ell_1$ olduğu kolaylıkla elde edilebilir.

f ve f_0 uzaylarının Schauder bazlarına sahip olmadıkları göz önünde tutulursa [38], rf ve rf_0 uzaylarının da Schauder bazlarına sahip olamayacakları söylenebilir. Bu durum aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 4.1.1. rf_0 ve rf lineer uzaylarının Schauder bazları mevcut değildir.

4.2. zrf- Yakınsak Dizilerin Uzayları

Bu bölümde tez çalışmamızın ana kısımlarından birini oluşturan zrf- yakınsaklık tarifi verilecektir.

Şimdi, (4.1) de T matrisi yerine R, (bkz. Tanım 2.9) ve Zweier matrisinde $p = 1/2$ özel seçimleri ile "*Zweier ortalaması Riesz yakınsak*" kısaca, zrf- yakınsak olan dizilerin kümesi tanımlanacaktır.

Tanım 4.2.1.

$$zrf = \left\{ x \in w : \lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2} (x_{k+n} + x_{k+n-1}) = \ell, n' \text{ ye göre düzgün} \right\} \tag{4.8}$$

$$zrf_0 = \left\{ x \in w : \lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2} (x_{k+n} + x_{k+n-1}) = 0, n' \text{ ye göre düzgün} \right\} \tag{4.9}$$

kümeleri tanımlansın. Sırasıyla, zrf ve zrf_0 kümelerine zrf- yakınsak ve sıfıra zrf-yakınsak dizilerin kümesi denir.

Fonksiyonel Analizin ilgi alanı lineer topolojik uzaylardır. Bir küme üzerine cebirsel ve topolojik bir yapı konulması, bu kümelerle ilgili birçok özelliğin incelenebilmesine olanak vermektedir. Bu incelemeleri zrf ve zrf_0 kümeleri üzerinde yapabilmek adına bu kümelerin üzerine ilk olarak cebirsel daha sonrada topolojik bir yapı konulacaktır.

Teorem 4.2.1. zrf ve zrf_0 kümeleri,

$+ : zrf \times zrf \to zrf,$

$(x, y) \to x + y = (x_k) + (y_k) = (x_k + y_k)$

ve

$\cdot: \boldsymbol{F} \times zrf \to zrf,$
$(a, x) \to a \cdot x = ax = (ax_k)$

biçiminde tanımlanan, dizilerin koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre w' nin alt uzaylarıdır.

İspat: Lineer uzay şartlarının sağlatılması yeterlidir.

Şimdi, zrf dizi uzayı üzerinde

$d: zrf \times zrf \to \mathbb{R},$
$x, y \to d(x, y)$

$$= \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \left[\frac{r_k}{2}(x_{k+n} + x_{k+n-1}) - \frac{r_k}{2}(y_{k+n} + y_{k+n-1}) \right] \right|, n' \text{ ye göre düzgün} \quad (4.10)$$

biçiminde tanımlı d fonksiyonu göz önüne alınsın. d fonksiyonunun metrik şartlarını sağladığını görmek kolaydır. Üstelik zrf lineer uzay olduğundan ve d fonksiyonu ötelemenin değişmezliği ve homotesi özelliklerini sağladığından dolayı

$$d(x, \theta) = \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2}(x_{k+n} + x_{k+n-1}) \right| = ||x||_{zrf} \text{ , } n' \text{ ye göre düzgün} \quad (4.11)$$

eşitliği zrf dizi uzayı üzerinde bir norm olur.

Tezin kalan kısmında sık olarak kullanılacak olan $y = (y_k)$ dizisi, $x = (x_k)$ dizisinin Zweier transformu olarak alınacaktır, yani:

$$y_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanacaktır.

İzometrik iki uzayın topolojileri, lineer olarak izomorfik uzayların bu izomorfizmden dolayı cebirsel yapıları eş olacağından aşağıdaki teorem zrf ve zrf_0 dizi uzaylarının bazı özellikleri araştırılırken çok kullanışlı olması bakımından önemlidir.

Teorem 4.2.2. rf ve rf_0 uzayları sırası ile zrf ve zrf_0 uzaylarına izometrik olarak izomorftur.

İspat: Bunun için rf ve zrf uzayları arasında uzaklıkları koruyan lineer bijektif bir dönüşümün varlığı gösterilmelidir.

Eğer $g: z_{rf} \rightarrow rf,\ g(x) = y,$

$$y = (y_k),\ y_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) \tag{4.13}$$

ile tanımlanan dönüşüm göz önüne alınırsa, g dönüşümünün lineer ve birebir olduğu açıktır. Gerçekten her $x, t \in zrf$ ve her $a, b \in \boldsymbol{F}$ için

$$g(ax + bt) = \frac{1}{2}[ax_k + ax_{k-1} + bt_k + bt_{k-1}] = \frac{a}{2}[x_k + x_{k-1}] + \frac{b}{2}[t_k + t_{k-1}]$$

$$= ag(x) + bg(t)$$

olduğundan g dönüşümü lineer, $x = \theta = (0,0, \dots)$ alındığında $g(x) = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) = \theta$ olacağından g dönüşümü birebirdir.

Eğer $x = (x_k)$ dizisi $x_k = 2\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\, y_j$, n' ye göre düzgün olarak seçilirse, $a = \lim_m \frac{1}{R_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{r_k}{2}(x_{k+n} + x_{k+n-1}) = \lim_m \frac{1}{R_m}\sum_{k=0}^{m} r_k y_{k+n}$ eşitlikleri mevcut olur. Bu ise $x = (x_k) \in zrf$, yani (4.13) dönüşümünün örten olduğunu gösterir.

$$||x||_{zrf} = \sup_m \left|\frac{1}{R_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{r_k}{2}(x_{k+n} + x_{k+n-1})\right| = \sup_m \left|\frac{1}{R_m}\sum_{k=0}^{m} r_k y_{k+n}\right| = ||y||_{rf}$$

eşitliğinden (4.13) ile verilen dönüşümün izometri ve dolayısıyla ilgili uzayların izometrik uzaylar olduğu görülür. Benzer durum rf_0 ve zrf_0 uzayları içinde geçerlidir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.2.3. (4.8) ve (4.9) da tanımlanan zrf ve zrf_0 uzayları

$$\|x\|_{zrf,zrf_0} = \sup_m \left| \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2} (x_{k+n} + x_{k+n-1}) \right|, n' \text{ ye göre düzgün} \tag{4.14}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_{zrf,zrf_0}: zrf, zrf_0 \to \mathbb{R}$ normu ile Banach uzaylarıdır.

İspat: rf ve rf_0 uzaylarının sırası ile zrf ve zrf_0 uzaylarına izometrik olarak izomorf olduğu bir önceki teoremde görüldü. Z, Zweier matrisi normal, buna ek olarak rf ve rf_0 uzayları (4.5) dönüşümü ile Banach uzayları olduğundan Wilansky' nin [39]' da ifade ve ispatını verdiği Teorem 4.3.3' den ispat açıktır. □

Teorem 4.2.4. zrf ve zrf_0 dizi uzayları konveks kümelerdir.

İspat: Her $x, y \in zrf$ ve $a \in [0,1]$ için $ax + (1-a)y \in zrf$ olduğu gösterilmelidir. $\lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2} (x_{k+n} + x_{k+n-1}) = l_1$ ve $\lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2} (y_{k+n} + y_{k+n-1}) = l_2$ limitlerinin mevcut ve n' ye göre düzgün olduğu kolayca görülebilir. $a \lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2} (x_{k+n} + x_{k+n-1}) = al_1$ ve $(1-a) \lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2} (y_{k+n} + y_{k+n-1})$ $= (1-a)l_2$ limitleri mevcut olduğundan $a\lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2} (x_{k+n} + x_{k+n-1}) + (1-a)$ $\lim_m \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{r_k}{2} (y_{k+n} + y_{k+n-1}) = al_1 + (1-a)l_2$ olur. $ax \ +(1-a)y \in zrf$ ve $al_1 + (1-a)l_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan zrf kümesinin konveks olduğu görülür. zrf_0 içinde ispat benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 4.2.5. $i = 1, 2, 3$ olmak üzere d_i kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın. Bu durumda zrf ve zrf_0 dizi uzaylarının β- dual uzayı $\cap_{i=1}^{3} d_i$ kesişimine eşittir.

$$d_1 = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_m \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} a_{nj} \right| < \infty \right\}, \tag{4.15}$$

$$d_2 = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_m \frac{2}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} a_{nj} \text{ mevcut} \right\} \tag{4.16}$$

ve

$$d_3 = \left\{ a \in w : \lim_m \frac{2}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} a_{nj}, n^{'} \text{ ye göre düzgün} \right\} \tag{4.17}$$

İspat: $T = (t_{nk})$ matrisi $a = (a_{nk}) \in w$ dizisi yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$t_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} 2(-1)^{j-k} a_j, & (0 \leq k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases} \quad ; \quad (k, j, n \in \mathbb{N}).$$

$x_k = t_{nk} y_j$ olduğu hatırlanarak her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler kolayca yazılabilir:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} 2(-1)^{k-j} a_k y_j = (Ty)_n \tag{4.18}$$

(4.18)' den "$x = (x_k) \in zrf$ için $ax = (a_k x_k) \in cs$ dir ancak ve ancak $y = (y_k) \in rf$ için $Ty \in c$ olmalıdır" çift gerektirmesi, Önerme 4.1.1 ile birlikte göz önüne alındığında $zrf^{\beta} = zrf_0{}^{\beta} = \cap_{i=1}^{3} d_i$ olduğu görülür. □

BÖLÜM 5

5. MATRİS KARAKTERİZASYONU TEOREMLERİ

Çalışmanın bu kısmında, ilk olarak Bölüm 4' de inşa edilen rf ve rf_0 dizi uzaylarından ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarına ve tersine olarak ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarından rf ve rf_0 uzaylarına olan matris sınıflarının karakterizasyonları klasik analiz teknikleri kullanılarak yapılacaktır. Daha sonra Zweier dual matrisler adı verilen dual matrisler yardımı ile zrf ve zrf_0 dizi uzaylarından herhangi bir λ dizi uzayına veya tersine bir λ dizi uzayından zrf ve zrf_0 uzaylarına matris sınıflarını karakterize eden teoremlere yer verilecektir.

5.1. rf ve rf_0 Uzaylarından ℓ_∞, c ve c_0 Uzaylarına ve Tersine olarak ℓ_∞, c ve c_0 Uzaylarından rf ve rf_0 Uzaylarına olan Matris Sınıflarının Karakterizasyonu

$A = (a_{nk})$ karmaşık veya reel sayıların sonsuz bir matrisi olarak ele alınarak aşağıdaki teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 5.1.1. $A \in (rf : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ ve $x = (x_k) \in rf$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in rf^\beta = \ell_1$ olduğundan x' in A- transformu mevcuttur. Hipotez göz önüne alındığında,

$$||Ax||_{\ell_\infty} = \sup_n |(Ax)_n| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \leq \|x\|_{rf} \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

olduğu görülür. Yani $Ax \in \ell_\infty$ olur.

Tersine, kabul edelim ki $A \in (rf : \ell_\infty)$ olsun. Bu durumda her $x \in rf$ için $Ax \in \ell_\infty$ olup $((Ax)_n) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k)$ dönüşüm dizisi yakınsak olduğundan $A = (a_{nk}) \in rf^\beta = \ell_1$

dir. Bu durumda her bir $n = 1, 2, ...$ için $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| < \infty$ dur. Demek ki $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| < \infty$ şartı sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Lemma 5.1.1. $\left(A^{(m)}\right)$ sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. Bu durumda her bir $x \in \ell_\infty$ için $\lim_q \left(A^{(m)}x\right)_q = 0$, m' ye göre düzgündür $\Leftrightarrow$ $\lim_q \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{qn}^{(m)}\right| = 0$, m' ye göre düzgün olmalıdır [52].

Teorem 5.1.2. $A \in (\ell_\infty : rf)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$(34)\ \sup_n \sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}| < \infty,$$

$$(35)\ rf - \lim_n a_{nk} = a_k,\ (\forall\, k \in \mathbb{N})\ \text{ve}$$

$$(36)\ \lim_m \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{R_m}\sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} - a_k\right| = 0\,, n\text{' ye göre düzgün}$$

olmasıdır.

İspat: $A \in (\ell_\infty : rf)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $A = (a_{nk}) \in {\ell_\infty}^{\beta} = \ell_1$ olduğundan (34)' ün gerekliliği açıktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $e_n^{(k)} = \delta_{nk}$ olsun. Bu kabule ek olarak $a_k = rf - \lim Ae^{(k)}$ eşitliği de mevcut olsun. O zaman $\left(Ae^{(k)}\right)_n = a_{nk}$ olacağından $a_k = rf - \lim a_{nk}$ eşitliği mevcut olduğundan (35)' in gerekliliği ortaya çıkar.

Şimdi, sonsuz matrislerin $\left(B^{(n)}\right)$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$b_{mk}^{(n)} = \frac{1}{R_m}\sum_{i=0}^{m} r_i\, a_{n+i,k}$$

$B^{(n)}$ matrisi bir Schur matrisidir. Gerçekten

1.$\lim\limits_m b_{mk}^{(n)} = \lim\limits_m \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} = a_k$ ve $A \in (\ell_\infty : rf)$ olduğundan bu madde açıktır.

2.$\lim\limits_m (Bx)_m = \lim\limits_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} x_k$, n' ye göre düzgün eşitlikleri gerçekleşir.

Gerçekten eğer $x \in \ell_\infty$ ise $\left(B^{(n)}x\right)_m = (S_m Ax)_n$, $m \to \infty$ için n' ye göre düzgündür. Her bir n ve k için $\lim\limits_m b_{mk}^{(n)} = a_k \Rightarrow \lim\limits_m (S_m Ax)_n = \lim\limits_m \left(B^{(n)}x\right)_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ olur. Ayrıca bu limit n' ye göre düzgündür. Yani, her bir x için $rf - \lim Ax = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ eşitliği mevcuttur. $\left(C^{(n)}\right)$ matris dizi uzayı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$C_{mk}^{(n)} = \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i\, a_{n+i,k} - a_k$$

$\left(C^{(n)}x\right)_m = (S_m Ax)_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ olduğundan, her bir $x \in \ell_\infty$ için $\lim\limits_{m\to\infty} \left(C^{(n)}x\right)_m = 0$, n' ye göre düzgün olur. Ve Lemma 5.1.1' den,

$$\lim_m \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} - a_k \right| = 0\,, n' \text{ ye göre düzgün}$$

olur. Bu ise (36)' nın gerekliliğinin ispatıdır.

Tersine, kabul edelim ki A matrisi için $(34) - (36)$ şartları sağlansın. O zaman $x \in \ell_\infty$ ise

$$\left| (S_m Ax)_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| \leq \|x\| \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} - a_k \right| = 0\,, n' \text{ ye göre düzgün}$$

olur. Böylece $rf - \lim Ax = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı sonuçlandırır.□

Sonuç 5.1.1. $A \in \left(\ell_\infty : f_{r_0}\right)$ olması için gerek ve yeter şartlar

(37) $\lim\limits_{m} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} \right| = 0, n$’ ye göre düzgün,

(38) $\sup\limits_{n} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

olmasıdır.

Teorem 5.1.3. $A \in (c{:}\,rf)$ olması için gerek ve yeter şartlar

(39) $\sup\limits_{m} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} \right| < \infty, n = 0,1, \dots,$

(40) $\lim\limits_{m} \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} = a_k$, n’ ye göre düzgün

olacak şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \in \mathbb{C}$ mevcut,

(41) $\lim\limits_{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} = a$, n’ ye göre düzgün

olacak biçimde $a \in \mathbb{C}$ mevcut,

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $A \in (c{:}\,rf)$ ve $A_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+i,k} x_k$ olmak üzere

$$t_{mn}(x) = \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i A_i(x) = \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+i,k} x_k$$

olsun. $A_i \in c'$, $i, n = 0,1, \dots$ olduğu açıktır. Buradan $t_{mn}(x) \in c'$ olduğu görülür. A matrisi Riesz konservatif olduğundan $\lim_m t_{mn}(x) = t(x)$, n' ye göre düzgün olur. Buradan $x \in c$ için $\left(t_{mn}(x)\right) \in \ell_\infty$ olduğu görülür. Böylece $(\|t_{mn}\|)$ dizisi de düzgün sınırlılık prensibi gereğince sınırlıdır.

Her $r \in \mathbb{Z}^+$ için $y = y(m)$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$y_k = \begin{cases} sgn \dfrac{1}{R_m} \displaystyle\sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k}, & 0 \leq k \leq r \\ 0, & r < k. \end{cases}$$

O halde $y \in c, \|y\| = 1$ ve $|t_{mn}(y)| = \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{r} \left| \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} \right|$ olur. Buradan $|t_{mn}(y)| \leq \|t_{mn}\| \|y\| = \|t_{mn}\|$ yazılır. Böylece $\frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} \right| \leq \|t_{mn}\|$ eşitsizliği her $m \in \mathbb{N}$ için sağlandığından

$$\sup_m \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} \right| < \infty, n = 0,1, \dots,$$

olduğu görülür.

$e = (1,1, \dots 1, \dots)$ ve $(e_k) = (0, \dots, 0,1,0, \dots)$, $k = 0,1, \dots$, şeklinde tanımlı e ve (e_k) dizileri verilmiş olsun. e ve (e_k) yakınsak birer dizi olduklarından $\lim_m t_{mn}(e)$ ve $\lim_m t_{mn}(e_k)$, n' ye göre düzgün, limitleri mevcut olmalıdır. Böylece (40) ve (41) şartlarının sağlandığı görülür.

Tersine, $(39) - (41)$ şartları her $n \in \mathbb{Z}^+$ ve her $x = (x_k) \in c$ için sağlansın. Bu durumda

$$t_{mn}(x) = \frac{1}{R_m} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} r_i a_{n+i,k} x_k = \frac{1}{R_m} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k} x_k$$

eşitlikleri mevcuttur. Buradan

$$\|t_{mn}(x)\| \leq \frac{1}{R_m}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{m} r_i a_{n+i,k}\right| \|x\|$$

olduğu görülür. (39) şartından dolayı bir $K > 0$ için $\|t_{mn}(x)\| \leq K\|x\|$ eşitsizliği yazılabilir. Burada $K \in \mathbb{R}^+$ dır. Bunlara ek olarak $m = 1,2, \ldots$ için $t_{mn} \in c^{'}$ ve her k için $(\|t_{mn}\|)$ dizisinin sınırlı olduğu sonuçlarına ulaşılır. (40) ve (41) durumlarından $n, k = 0,1, \ldots,$ için $\lim_m t_{mn}(e)$ ve $\lim_m t_{mn}(e_k)$ limitlerinin varlığı açıktır. $\{e, e_0, e_1, \ldots\}$ kümesi c, yakınsak dizilerin uzayında fundamental bir küme olduğundan [50]' den $\lim_m t_{mn}(x) = t_n(x) \in c^{'}$ eşitliği mevcuttur. Yine [50]' den dolayı t_n fonksiyonu aşağıdaki formda yazılabilir:

$$t_n(x) = \beta\left[t_n(e) - \sum_{k=0}^{\infty} t_n(e_k)\right] + \sum_{k=0}^{\infty} x_k t_n(e_k) \tag{5.1}$$

Burada $\beta = \lim_k x_k$ dir. Sırasıyla (40) ve (41) şartlarından dolayı $k = 0,1, \ldots$ için $t_n(e_k) = a_k$ ve $t_n(e) = a$ eşitlikleri mevcuttur. Böylece $k = 0,1, \ldots$ ve her $x \in c$ için

$$\lim_m t_{mn}(x) = t_n(x), \qquad t_n(x) = \beta\left[a - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right] + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$$

eşitliklerinin mevcut olduğu görülür. $t_{mn} \in c^{'}$ olduğundan

$$t_{mn}(x) = \beta\left[t_{mn}(e) - \sum_{k=0}^{\infty} t_{mn}(e_k)\right] + \sum_{k=0}^{\infty} x_k t_{mn}(e_k) \tag{5.2}$$

eşitliği elde edilir. (5.1) ve (5.2) den $t_{mn}(e) \to a$ ve $t_{mn}(e_k) \to a_k$, n' ye göre düzgündür. O halde $(t_{mn}(x)) \to t(x)$ yakınsaması da n' ye göre düzgün olur. Bu ise $A \in (c, rf)$ olması demektir. □

Önerme 5.1.1. $A \in (rf : c)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$(42)\ \lim_{n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = a,$$

$$(43)\ \lim_{n} a_{nk} = a_k,\ k \in \mathbb{N},$$

$$(44)\ \lim_{n} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta(a_{nk} - a_k)| = 0$$

olmasıdır.

5.2. zrf ve zrf_0 Uzaylarından Herhangi Bir λ Dizi Uzayına veya Tersine Bir λ Dizi Uzayından zrf ve zrf_0 Uzaylarına Matris Sınıflarının Zweier Dual Matrisler Yardımı ile Karakterizasyonu

zrf ve zrf_0 uzaylarından herhangi bir μ dizi uzayına veya tersine bir μ dizi uzayından zrf ve zrf_0 uzaylarına matris sınıflarının Zweier dual matrisleri yardımıyla karakterize edildiği teoremler bu bölümde verilecektir.

Öncelikle Zweier dual matrisler hakkında ön bilgilere yer verilecektir.

Kabul edelim ki $y = (y_i)$ ve $x = (x_i)$ dizileri arasında (4.13) bağıntısı bulunsun ve $x = (x_i)$ dizisinin A- transformu $z = (z_i)$, $y = (y_i)$ dizisinin B- transformu $t = (t_i)$, yani

$$z_i = (Ax)_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i \tag{5.3}$$

ve

$$t_i = (By)_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} y_i \tag{5.4}$$

olsun. Ayrıca $S = (s_{nk})$ toplam matrisi $n, k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki şekilde verilsin:

$$s_{nk} = \begin{cases} 1 \ , & 0 \leq k \leq n, \\ 0 \ , & k > n, \end{cases}$$

B metodu $x = (x_i)$ dizisinin Z- transformuna dönüşüm uygularken, A metodu direkt olarak $x = (x_i)$ dizisine dönüşüm uygulamaktadır. Kabul edelim ki BS matris çarpımı mevcut olsun. $\lim_k b_{nk} = 0$ olmak üzere eğer elemanter işlemler yardımı ile z_i, t_i' ye ya da t_i, z_i' ye indirgenebiliyorsa A ve B matrisleri Zwier dual toplanabilme metodları olarak adlandırılır [47]. Bu durum aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$b_{mk} = 2\sum_{j=k}^{m}(-1)^{m-j} a_{nj} \quad \text{veya} \quad a_{nk} = \frac{1}{2}(b_{nk} + b_{n,k+1}), \qquad n, k \in \mathbb{N}.$$

Teorem 5.2.1. $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ Zweier tip dual matrisler, μ herhangi bir dizi uzayı, $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ ve her $n, k \in \mathbb{N}$ için $\lim_m b_{nm} = 0$ olsun. Bu durumda $A \in (zrf\colon\mu)$ dir ancak ve ancak $B \in (rf\colon\mu)$ olmalıdır.

İspat: Kabul edelim ki $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ Zweier tip dual matrisler, $A \in (zrf\colon\mu)$ ve $y = (y_k) \in rf$ olsun. Bu durumda BZ matris çarpımı mevcuttur. $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in zrf^{\beta} = \ell_1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $(b_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ olur. Böylece her bir $y \in rf$ için By mevcuttur. Ayrıca $\lim_m b_{nm} = 0$ olduğu dikkate alınarak

$$\sum_{k=0}^{m} b_{nk}\, y_k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2}\left(b_{nk} + b_{n,k+1}\right) x_k + \frac{1}{2} b_{nm}\, x_m \tag{5.5}$$

eşitliği bulunur. (5.5) eşitliğinde $m \to \infty$ için limite geçilirse $By = Ax$ yani $B \in (rf\colon\mu)$ olduğu görülür.

Tersine, kabul edelim ki $B \in (rf\colon\mu)$, $x = (x_k) \in zrf$ olsun. O halde $(b_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ olup, bu $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in zrf^{\beta} = \ell_1$ olması anlamına gelir ki bu da Ax dönüşümünün mevcut olması demektir. Eğer $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m} 2 \sum_{j=k}^{m} (-1)^{j-k} a_{nj} y_k = \sum_{k=0}^{m} b_{nk} y_k \ ;$$

eşitliğinde $m \to \infty$ için limit alınırsa $Ax = By$ yani $A \in (zrf\!:\mu)$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 5.2.2. Kabul edelim ki $D = (d_{nk})$ ve $E = (e_{nk})$ sonsuz matrisleri arasında

$$e_{nk} = \frac{1}{2}\left(d_{nk} + d_{n-1,k}\right), \qquad (n, k \in \mathbb{N}) \tag{5.6}$$

bağıntısı bulunsun. Bu durmda μ herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $D \in (\mu\!: zrf)$ dir ancak ve ancak $E \in (\mu\!: rf)$ olmalıdır.

İspat: $D = (d_{nk})$ ve $E = (e_{nk})$ sonsuz matrisleri arasında (5.6) bağıntısı mevcut, $x = (x_k) \in \mu$ ve $D \in (\mu\!: zrf)$ olsun.

$$\sum_{k=0}^{n} e_{nk} x_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(d_{nk} + d_{n-1,k}\right) x_k \tag{5.7}$$

ifadesinin her iki yanı için $n \to \infty$ olacak biçimde limit alınırsa $x \in \mu$ için $Dx \in zrf$ dir ancak ve ancak $Ex \in rf$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

$A = (a_{nk})$ reel veya karmaşık sayıların sonsuz bir matrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler yukarıda verilen teoremlerden kolaylıkla elde edilebilir.

Önerme 5.2.1. $A = (a_{nk}) \in (\,zrf\!: \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$(45) \quad \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} 2 a_{nj} \right| < \infty$$

şartının sağlanmasıdır.

Önerme 5.2.2. $A \in (\, zrf : c)$ olması için gerek ve yeter şartlar

(46) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} 2a_{nj} \; = a$

(47) $\lim_n \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} 2a_{nj} \; = a_k,$

(48) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \Delta \left(\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} 2a_{nj} \; - a_k \right) \right| = 0,$

olmasıdır.

Önerme 5.2.3. $A = (a_{nk}) \in (\ell_{\infty} : zrf)$ olması için gerek ve yeter şart

(49) $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left| a_{nk} + a_{n-1,k} \right| < \infty,$

(50) $rf - \lim_n \frac{1}{2} \left(a_{nk} + a_{n-1,k} \right) = \alpha_k,$ mevcut her $k \in \mathbb{N}$ için,

(51) $\lim_m \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{R_m} \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{r_i}{2} \left(a_{n+i,k} + a_{n+i-1,k} \right) \right) - \alpha_k \right| = 0,$ $\;\; n'$ ye göre düzgün

olmasıdır.

Önerme 5.2.4. $A \in (c : zrf)$ olması için gerek ve yeter şartlar

(52) $\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left| a_{nk} + a_{n-1,k} \right| < \infty,$

$$(53)\quad \lim_{m} \sum_{i=0}^{m} \frac{r_i}{2R_m}\left(a_{n+i,k} + a_{n+i-1,k}\right) = \alpha_k$$ mevcut, n'ye göre düzgün,

$$(54)\quad \lim_{m} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_i}{2R_m}\left(a_{n+i,k} + a_{n+i-1,k}\right)$$ mevcut, n' ye göre düzgün

olmasıdır.

KAYNAKLAR

[1] Malkowsky, E., “Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces”, *Mat. Vesnik*, 49, 187-196, 1997.

[2] Wang, C. S., “On Nörlund sequence spaces”, *Tamkang J. Math*., 9, 269-274, 1978.

[3] Ng, P. N., Lee, P. Y., “Cesàro sequence spaces of non-absolute type”, *Comment. Math. Prace Mat*., 20(2), 429-433, 1978.

[4] Malkowsky, E., Mursaleen, M., Suantai, S., “The dual spaces of sets of difference sequences of order *m* and matrix transformations”, *Acta Math. Sin. Engl. Ser*., 23(3), 521–532, 2007.

[5] Altay, B., Başar, F., “Some Euler sequence spaces of non-absolute type”, *Ukrainian Math. J*., 57(1), 1-17, 2005.

[6] Altay, B., Başar, F., “Some paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type”, *Southeast Asian Bull. Math.*, 30(5), 591-608, 2006.

[7] Altay, B., Başar, F., “Some paranormed sequence spaces of non-absolute type derived by weighted mean”, *J. Math. Anal. Appl*., 319(2), 494-508, 2006.

[8] Altay, B., Başar, F., “Generalization of the sequence space $\ell(p)$ derived by weighted mean”, *J. Math. Anal. Appl*., 330(1), 174-185, 2007.

[9] Altay, B., Başar, F., “Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence space”, *J. Math. Anal. Appl*., 336(1), 632-645, 2007.

[10] Altay, B., Başar, F., “The matrix domain and the finite spectrum of the difference operator Δ on the sequence $\ell(p), (0 < p < 1)$”, *Commun. Math. Anal*., 2(2), 1-11, 2007.

[11] Başarır, M., “On some new sequence spaces and related matrix transformations”, *Indian J. Pure Appl. Math*., 26(10), 1003-1010, 1995.

[12] Malkowsky, E., Savaş, E., “Matrix transformation between sequence spaces of generalized weighted means”, *Appl. Math. Comput*., 147, 333-345, 2004.

[13] Aydın, C., Başar, F., “On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c”, *Hokkaido Math. J*., 33(2), 383–398, 2004.

[14] Aydın, C., Başar, F., “Some new paranormed sequence spaces”, *Inform. Sci*., 160(1–4), 27– 40, 2004.

[15] Aydın, C., Başar, F., "Some new difference sequence spaces", *Appl. Math. Comput.*, 157(3), 677– 693, 2004.

[16] Aydın, C., Başar, F., "Some new sequence spaces which include the spaces $\ell(p)$ and ℓ_∞", *Demonstratio Mathematica*, 38(3), 641–656, 2005.

[17] Aydın, C., Başar, F., "Some generalizations of the sequence space a_r^p", *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A, Sci.*, 30(A2), 175–190, 2006.

[18] Başar, F., Altay, B., Mursaleen M.," Some generalizations of the space bv_p of p- bounded variation sequences", *Nonlinear Anal.*, 68(2), 273-287, 2008.

[19] Şengönül, M., Başar, F., "Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c", *Soochow J. Math.*, 31(1), 107-119, 2005.

[20] Altay, B., "On the space of p- summable difference sequences of order m, $(1 \le p < \infty)$", *Stud. Sci. Math. Hungar.*, 43(4), 387–402, 2006.

[21] Polat, H., Başar, F., "Some Euler spaces of difference sequences of order *m*", *Acta Math. Sci.*, 27B(2), 254–266, 2007.

[22] Kirişçi, M., Başar, F., "Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix", *Comput. Math. Appl.*, 60(5), 1299-1309, 2010.

[23] Başar, F., Kirişçi, M., "Almost convergence and generalized difference matrix", *Comput. Math. Appl.*, 61, 602-611, 2011.

[24] Kayaduman, K., Şengönül, M., "The spaces of Cesàro almost convergent sequences and core theorems", *Acta Math. Sci.*, 32B(6): 2265-2278, 2012.

[25] Şengönül, M., Kayaduman, K., "On the Riesz almost convergent sequences space", *Abst. and Appl. Math.*, 691694, 2012.

[26] Kirişçi, M., Başar, F., "Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix", *Comput. Math. Appl.*, 60(5), 1299–1309, 2010.

[27] Lorentz, G. G., "A contribution to the theory of divergent sequences", *Acta Math.*, 80, 167-190, 1948.

[28] King, J. P., "Almost summable sequences", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17, 1219-1225, 1966.

[29] Bell, H. T., "Order summability and almost convergence", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38, 548-552, 1973.

[30] Stieglitz, M., "Eine verallgemeinerung des begriffs der fastkonvergenz", *Math.*

Japon., 18, 53-70, 1973.

[31] Maddox, I. J., “A new type of convergence”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*., 83, 61-64, 1978.

[32] Mursaleen, M., “Infinite matrices and absolute almost convergence”, *Internat. J. Math.&Math. Sci.*, 6(3), 503-510, 1983.

[33] Butković, D., Kraljević, H., Sarapa, N., “On the almost convergence”, *Functional Analysis (Dubrovnik,1985), Springer Lecture Notes*, 1242, 396-417, 1987.

[34] Sönmez, A., “Almost convergence and triple band matrix”, *Math. and Comp. Modelling*, 57(9-10), 2393-2402, 2013.

[35] Çolak, R., Çakar, Ö., “Banach limits and related matrix transformations”, *Stud. Sci. Math. Hung.*, 24, 429-436, 1989.

[36] Maddox, I. J., “Elements of Functional Analysis”, The University Press, *Cambridge*, second edition, 1988.

[37] Başar, F., “Summability Theory and its Applications”, *Bentham Science Publishers*, İstanbul, 2011.

[38] Boos, J., Cass, P., “Classical and Modern Methods in Summability”, *Oxford University Press*, New York, 2000.

[39] Wilansky, A., “Summability Through Functional Analysis”, North-Holland Mathematics Studies 85, *Elsevier Science Publishers*, Amsterdam, 1984.

[40] Kamthan, P. K., Gupta, M., “Sequence Spaces and Series”, *Marcel Dekker Inc*., New York, Basel, 1981.

[41] Wilansky, A., “Modern Methods in Topological Vector Spaces”, *McGraw-Hill, Inc.*, 1978.

[42] Başar, F., “Lineer Cebir ”, Fatih Üniversitesi, İstanbul, 2009.

[43] Başar, F., Çolak, R., “Almost-conservative matrix transformations”, *Doğa, Tu. J. Math*., 13(3), 91-100, 1989.

[44] Kuttner, B., “On dual summability methods”, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 71, 67-73, 1972.

[45] Lorentz, G. G., Zeller, K., “Summation of sequences and summation of series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15, 743-746, 1964.

[46] Başar, F., “Matrix transformations between certain sequence spaces of X_p and ℓ_p”, *Soochow J. Math.*, 26(2), 191-204, 2000.

[47] Kreyszig, E., “Introductory Functional Analysis with Applications”, John Wiley&Sons Inc., New York, Santa Barbara, London, Sydney, Toronto, 1978.

[48] Petersen, G. M., “Regular Matrix Transformations”, *McGraw- Hill Publishing Company Limited*, London, 1966.

[49] Borwein, D., Jakimovski, A., “Matrices that commute with certain Hausdorff matrices”, *Analysis*, 18, 227-244, 1998.

[50] Kantorovich, L.V., Akilov, G.P., “Functional Analysis in Normed Spaces”, *Macmillan*, New York, 1964.

[51] Şengönül, M., “On the Zweier sequence space”, *Demonstratio Mathematica*, 1, 181-196, 2007.

[52] Schaefer, P., “Matrix transformations of almost convergent sequences”, *Math. Z.*, 112, 321-325, 1969.

ÖZGEÇMİŞ

Zarife ZARARSIZ 1986 yılında Ankara’ da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara’ da tamamladı. 2005 yılında kazandığı Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında başladığı yüksek lisans eğitimini 2012 yılında tamamlayarak, aynı yıl, aynı enstitüde doktora eğitimine başladı. Yüksek lisans ve Doktora ders dönemi boyunca Bulanık kümeler ve Bulanık sayıların dizi uzayları üzerine çalışmalar yapan Zararsız, halen, 2010 yılında atandığı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesinde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

İletişim Bilgileri:

Adres:	2000 Evler Mah., Zübeyde Hanım Cad., Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, No:13, 50300 – Nevşehir / Türkiye
Telefon:	0 (384) 228 10 00 - 14092
Belgegeçer:	0 (384) 215 39 48
E-posta:	zarifezararsiz@nevsehir.edu.tr