T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Tezi Hazırlayan
Yaşar ÜÇOK

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2015
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT danışmanlığında **Yaşar ÜÇOK** tarafından hazırlanan **"Esnek Çoklu Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlar"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

15/06/2015

JÜRİ

Başkan	:	Doç. Dr. Hacı AKTAŞ
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 26.06.2015 tarih ve 2015/27-02 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

29/6/2015

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yaşar ÜÇOK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince gerek ders dönemindeki yalın ve anlaşılır tarzı ile topoloji dersini sevmemi sağlayan, gerekse tez dönemindeki cesaretlendirici tutumu ile tezi bitirmem noktasında büyük emekleri olan Yrd. Doç. Dr. Deniz Tokat'a,

Tez döneminin başından sonuna kadar bana evinin, gönlünün ve zihninin kapılarını ardına kadar açan kardeşim İsmail Osmanoğlu'na,

Hayatın müşterek yükünü yüksek lisans eğitimimi bitirebilmem için tek başına göğüsleyen değerli eşim Ülkü Üçok'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ESNEK ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİ FONKSİYONLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Yaşar ÜÇOK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2015

ÖZET

Bu tezin amacı, esnek çoklu topolojik uzaylar arasında esnek çoklu sürekli fonksiyon ve esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon kavramlarını incelemektir. Çalışmada ilk olarak; esnek küme, çoklu küme, esnek çoklu küme teorileri ve ayrıca esnek çoklu fonksiyonlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci olarak; esnek çoklu topolojik uzay hatırlatılarak, esnek çoklu yarı açık küme ve esnek çoklu yarı kapalı küme kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca tanımlanan bu kavramların bazı özellikleri incelenmiştir. Son olarak, esnek çoklu sürekli fonksiyon ve esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon tanımlanarak, bu kavramlarla ilgili bazı teoremler incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Esnek çoklu küme, esnek çoklu fonksiyon, esnek çoklu topoloji, esnek çoklu yarı açık küme, esnek çoklu sürekli fonksiyon, esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon.
Tez Danışman: Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT
Sayfa Adeti: 64

CONTINUOUS FUNCTIONS ON SOFT MULTI TOPOLOGICAL SPACES
(M. Sc. Thesis)

Yaşar ÜÇOK

NEVSEHIR HACI BEKTAS VELI UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2015

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to investigate the notions of soft multi continuous function and soft multi semi continuous function between soft multi topological spaces. In this work firstly, theories of soft set, multi set and soft multi set and also soft multi function with the basic definitions and theorems are given. Secondly, after reminding the soft multi topological space, the concepts of soft multi semi open set and soft multi semi closed set are defined. In addition, some properties of these concepts were examined. Finally, after defining the structures of soft multi continuous function and soft multi semi continuous function, the theories related with these concepts were examined.

Keywords: Soft multi set, soft multi function, soft multi topology, soft multi semi open set, soft multi continuous function, soft multi semi continuous function.
Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Deniz TOKAT
Page Number: 64

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

U	Evrensel küme
E	Parametreler kümesi
P(U)	U kümesinin kuvvet kümesi
$\mathbf{C_M(x)}$	M çoklu kümesinde x elemanının tekrar sayısı
$\mathbf{M^*}$	M çoklu kümesinin destek kümesi
$\mathbf{[X]^m}$	Çoklu küme uzayı
(F,A)	Esnek çoklu küme
$(\mathbf{F,A})\tilde{\subseteq}(\mathbf{G,B})$	(F,A), (G,B)'nin esnek çoklu alt kümesi
$(\mathbf{F,A})\tilde{\cup}(\mathbf{G,B})$	(F,A) ve (G,B) esnek çoklu kümelerinin birleşimi
$(\mathbf{F,A})\tilde{\cap}(\mathbf{G,B})$	(F,A) ve (G,B) esnek çoklu kümelerinin kesişimi
$\tilde{\mathbf{U}}$	Mutlak esnek çoklu küme
$\mathbf{\Phi}$	Boş esnek çoklu küme
$\mathbf{X_E}$	X üzerinde E ile tanımlanan bütün esnek çoklu kümelerin kümesi
$\mathbf{(F,A)^c}$	(F,A) esnek çoklu kümesinin tümleyeni
$\mathbf{x_e}$	Esnek çoklu nokta
$\tilde{\in}$	Esnek çoklu aitlik
$\mathbf{f=(\varphi,\psi)}$	Esnek çoklu fonksiyon
$\mathbf{f^{-1}}$	f esnek çoklu fonksiyonunun tersi
$\mathbf{(X_E,\tau)}$	Esnek çoklu topolojik uzay
$\boldsymbol{\tau_1}$	Esnek çoklu ayrık olmayan topoloji
$\boldsymbol{\tau_2}$	Esnek çoklu ayrık topoloji
$\boldsymbol{\tau\subseteq\sigma}$	τ, σ esnek çoklu topolojisinden daha kaba

$\overline{\mathbf{(F, A)}}$	(F,A) esnek çoklu kümesinin kapanışı
$\mathbf{(F,A)^{\circ}}$	(F,A) esnek çoklu kümesinin içi
$\mathbf{(F,A)_{-}}$	(F,A) esnek çoklu kümesinin yarı kapanışı
$\mathbf{(F,A)_{o}}$	(F,A) esnek çoklu kümesinin yarı içi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Klasik matematiksel yöntemler, günlük hayatın sorunlarını çözmek ve yeni gereksinimleri karşılamak için yeterli değildir. Çünkü belirsizlik içeren problemlerin matematiksel olarak modellenmesi oldukça güçtür. Bu amaçla her geçen gün yeni teoriler ortaya atılmaktadır. Bu teorilerden bazıları bulanık küme [25], kaba küme [17], esnek küme [12] ve çoklu küme [24] gibi teorilerdir.

Bu teorilerin karar verme problemleri, bilgi sistemleri, Optimizasyon teorisi ve matematiksel analiz gibi belirsizlik içeren birçok alanda ve ayrıca matematiğin topoloji alanında birçok uygulamaları vardır. Bulanık kümeler üzerinde topolojik yapı ilk olarak Chang [5] tarafından verildi. Lowen [11] ise bulanık topolojik uzayları geliştirerek, bulanık kompaktlık kavramı tanımlamıştır. Daha sonra Shabir ve Naz [19] esnek kümelerin topolojik yapılarını ve bu uzaylardaki ayırma aksiyomlarını çalışmışlardır. Çağman ve ark. [3] ile verilen referansta eş zamanlı olarak esnek topoloji tanımını ve bazı özelliklerini incelemişlerdir. Zorlutuna ve ark. [26] esnek iç nokta ve esnek komşuluk yapılarını incelemişlerdir. Esnek kümeler üzerindeki topolojik yapıların süreklilik, taban ve kompaktlık gibi temel kavramlar Aygünoğlu ve Aygün [1] tarafından incelenmiştir. Varol ve Aygün [23] esnek topoloji üzerinde Hausdorff uzayını tanımlamışlardır. Tanay ve Kandemir [20] bulanık esnek topolojik uzay ve bazı sonuçlarını ortaya koymuşlardır. Varol ve Aygün [22] bulanık esnek topolojik uzaylarda bulanık esnek sürekli fonksiyon kavramını tanımlamış ve bazı temel özelliklerini incelemişlerdir.

Bilindiği gibi klasik küme teorisinde kümenin elemanlarının tekrarına izin verilmez. Ancak bazı durumlarda elemanların tekrarı kullanışlı olabilmektedir. Bir kümenin elemanlarının tekrarına izin verilmesi durumunda ortaya çıkan kümeye çoklu küme denir. Çoklu küme teorisi, Cerf ve ark. [4] tarafından ortaya konulmuştur. Çoklu kümeler güncel hayatta bilgisayar bilimleri, tıp, bankacılık, mühendislik, bilgi depolama ve bilgi analizi gibi birçok alanda kullanılabilmektedir. Peterson [18] ve Yager [24] çoklu küme teorisinin ilerlemesine katkı sağlamışlardır. Bu yazarlar, bulanık çoklu kümeler kavramını ortaya koymuşlardır. Bu ilerleme Jena ve ark. [8] tarafından sürdürülmüştür. Girish ve John [6] çoklu küme bağıntılarını kullanarak çoklu kümeler üzerinde topoloji ve bazı topolojik yapıların tanımlarını vermişlerdir. Bu çalışmanın devamı olarak, Girish ve John [7] esnek topolojinin birçok yapısını incelemişlerdir.

Esnek küme ve çoklu küme kavramlarını birleştirerek esnek çoklu küme kavramı ilk olarak Babitha ve John [2] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca Tokat ve Osmanoğlu [21] yeni ve daha genel bir esnek çoklu küme tanımı vermişlerdir. Bu yazarlar [15,16,21] bu kümeler üzerinde topoloji yapısını ve bu topolojinin birçok özelliğini incelemişlerdir.

Bu çalışmanın temel amacı esnek çoklu topolojik uzay kavramı üzerindeki çalışmaları daha ileriye taşımaktır. Bunun için ilk olarak Levine [10] tarafından tanımlanan yarı açık (yarı kapalı) küme kavramı ve esnek çoklu kümeler kullanılarak bu uzayda esnek çoklu yarı açık ve esnek çoklu yarı kapalı küme kavramları tanımlandı. Bu kavramlar hakkında birçok teorem elde edildi. Daha sonra Osmanoğlu ve Tokat [15] tarafından verilen esnek çoklu fonksiyon yapısı kullanılarak esnek çoklu sürekli fonksiyon yapısı elde edildi. Son olarak esnek çoklu yarı açık (yarı kapalı) kümeleri kullanarak esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon ve bazı temel teoremleri incelendi.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, esnek küme, çoklu küme ve esnek çoklu küme kavramları ile birlikte esnek çoklu fonksiyonlar tanıtılmıştır.

2.1. Esnek Kümeler

Bu bölümde Molodtsov [12] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanan esnek küme kavramını verildi.

Tanım 2.1.1 [12] U evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. P(U), U nun kuvvet kümesini ve A, E nin boştan farklı bir alt kümesini göstersin. $F:A \rightarrow P(U)$ şeklinde bir dönüşüm olmak üzere (F, A) sıralı ikilisi U üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır.

Bir başka deyişle, U üzerinde bir esnek küme, U evrensel kümesinin alt kümelerini parametrize edilmiş bir ailesidir. $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$, (F, A) esnek kümesinin ε-yaklaşık elemanlarının kümesi olarak düşünülebilir. Esnek bir kümenin küme olmadığı açıktır.

Örnek 2.1.2 [12] U, göz önüne alınan şartlar altındaki evlerin kümesi ve E, parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime ya da cümledir.
E={pahalı, güzel, ahşap, ucuz, bahçeli, modern, iyi durumda, kötü durumda}
Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, pahalı evler, güzel evler ve diğerlerini belirtmek anlamına gelir.
(F, A) esnek kümesi X kişisinin satın alacağı "evlerin çekiciliği" ni belirtiyor.
Kabul edelim ki, $U = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ ile verilen U evreninde 6 ev olsun ve e_1 'pahalı' parametresini, e_2 'güzel' parametresini, e_3 'ahşap' parametresini, e_4 'ucuz' parametresini, e_5 'bahçeli' parametresini göstermek üzere, $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ şeklinde verilsin. Kabul edelim ki, $F(e_1)= \{h_2,h_4\}$, $F(e_2)= \{h_1,h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3,h_4,h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1,h_3,h_5\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ olsun. (F,A) esnek kümesi U kümesinin alt kümelerinin $\{F(e_i),\ i = 1, 2, 3, ..., 5\}$ parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının bir koleksiyonunu verir.

Bu nedenle, (F,A) esnek kümesi aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterilebilir:

$(F,A) = \{F(e_1), F(e_2), F(e_3), F(e_4), F(e_5)\}$
$= \{ \{h_2,h_4\}, \{h_1,h_3\}, \{h_3,h_4,h_5\}, \{h_1,h_3,h_5\}, \{h_1\}\}.$

2.2. Çoklu Kümeler

Bu bölümde Cerf ve ark. [4] tarafından tanımlanan çoklu küme kavramı tanıtıldı. Bu konu ile ilgili bilgiler için [6], [8], [18] ve [24] verilen çalışmalara bakılabilir.

Tanım 2.2.1 [8] X kümesinden alınan bir M çoklu kümesi (multiset) $C_M: X \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ile temsil edilir.

$X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ kümesinde bir M çoklu kümesi $M=\{k_1/x_1,k_2/x_2,...,k_n/x_n\}$ şeklinde gösterilir. Burada k_i, x_i nin tekrar sayısıdır ($1 \leq i \leq n$). Bu $x_i \in^{k_i} M$ şeklinde gösterilir.

$C_M(x)$, M çoklu kümesindeki x in tekrar sayısını gösterir. Ancak M çoklu kümesinin elemanı olmayan elemanlar için sıfır olarak yazılır. Yani $x \notin X$, için $C_M(x)=0$ dır.

Tanım 2.2.2 [8] Her $x \in X$ için $C_M(x)=0$ ya da 1 ise M çoklu kümesi bir kümedir.

Örnek 2.2.3 [14] $X=\{a,b,c\}$ kümesinden alınan bir M çoklu kümesi $M=\{3/a,2/b,5/c\}=\{a,a,a,b,b,c,c,c,c,c\}$ şeklinde verilsin. Burada $C_M(a)=3$, $C_M(b)=2$, $C_M(c)=5$ dir.

Tanım 2.2.4 [8] M ve N, X kümesinden alınan iki çoklu küme olsun. O halde aşağıdaki tanımlar verilebilir. Her $x \in X$ için

i) $C_M(x) = C_N(x)$ ise $M = N$ dir.

ii) $C_M(x) \leq C_N(x)$ ise $M \subseteq N$ dir.

iii) $C_P(x) = \max\{C_M(x),C_N(x)\}$ ise $P = M \cup N$ dir.

iv) $C_P(x) = \min\{C_M(x),C_N(x)\}$ ise $P = M \cap N$ dir.

v) $C_P(x) = C_M(x)+C_N(x)$ ise $P = M \oplus N$ dir. Burada $M \oplus N$, M ile N çoklu kümelerinin toplamıdır.

vi) $C_P(x) = \max\{C_M(x) - C_N(x), 0\}$ ise $P = M \ominus N$ dir. Burada $M \ominus N$, M ile N çoklu kümelerinin farkıdır.

Tanım 2.2.5 [6] $M^* = \{x \in X : C_M(x) > 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye M çoklu kümesinin destek kümesi denir. Burada M^* alışılmış kümedir ve X in bir alt kümesidir.

Tanım 2.2.6 [8] Her $x \in X$ için $C_M(x)=0$ ise M çoklu kümesine boş çoklu küme denir.

Tanım 2.2.7 [8] $[X]^m$ çoklu küme uzayı, elemanlarının hiç biri m den daha fazla tekrar etmeyen X çoklu kümelerinin kümesidir. $[X]^\infty$, X üzerinde tanımlı bütün çoklu kümelerin uzayıdır ve bu çoklu kümelerin elemanlarının tekrar sayısı sınırsızdır.

$X=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k\}$ ise

$[X]^m=\{\{m_1/x_1,m_2/x_2,...,m_k/x_k\} \mid i=1,2,...,k$ için $m_i \in \{0,1,2,...,m\}\}$ dir.

Örnek 2.2.8 [14] X={a,b} ise

$[X]^2$ = {{1/a,1/b},{1/a,2/b},{2/a,1/b},{2/a,2/b},{1/a},{2/a},{1/b},{2/b},∅} dir.

Tanım 2.2.9 [8] X bir destek küme ve $[X]^m$, X üzerinde tanımlı bir çoklu küme uzayı olsun. Herhangi bir $M \in [X]^m$ çoklu kümesinin tümleyeni M^c, $[X]^m$ uzayının elemanıdır öyle ki her $x \in X$ için $C_{M^c}(x) = m - C_M(x)$ dir.

Örnek 2.2.10 [14] $[X]^2$ için A={2/a,1/b} olsun. A^c={1/b} olur.

Tanım 2.2.11 [6] N, M nin bir çoklu alt kümesi olsun. Her $x \in N$ için $C_N(x)=C_M(x)$ ise N ye M nin çoklu tam alt kümesi denir.

Örnek 2.2.12 [14] M={2/x,3/y,5/z} bir çoklu küme olsun. {2/x,3/y}, {3/y,5/z}, {2/x,5/z} çoklu alt kümeleri M çoklu kümesinin çoklu tam alt kümesidir.

Tanım 2.2.13 [6] $M \in [X]^m$ olsun. M nin çoklu kuvvet kümesi P(M) şeklinde gösterilir ve M nin bütün çoklu alt kümelerinin kümesidir.

Örnek 2.2.14 [6] M={2/x,3/y} bir çoklu küme olsun.

M nin çoklu kuvvet kümesi

P(M)={3/{2/x,1/y},3/{2/x,2/y},6/{1/x,1/y},6/{1/x,2/y},2/{1/x,3/y},1/{2/x},1/{3/y}, 2/{1/x},3/{1/y},3/{2/y},M,∅} dır.

P(M) nin çoklu destek kümesi

P^*(M)={{2/x,1/y},{2/x,2/y},{1/x,1/y},{1/x,2/y},{1/x,3/y},{2/x}, {3/y},{1/x},{1/y}, {2/y},M,∅} dır.

2.3. Esnek Çoklu Kümeler

Bu bölümde Tokat ve Osmanoğlu [16, 21] tarafından tanımlanan, esnek ve çoklu kümelerin birleştirilmesiyle elde edilen esnek çoklu küme kavramı tanıtıldı. Ayrıca bu kümenin bazı matematiksel özellikleri verildi.

Tanım 2.3.1 [21] U bir çoklu küme evrenseli, E parametrelerin kümesi ve A⊆E olsun. (F,A) ikilisine bir esnek çoklu küme denir. Burada F dönüşümü $F:A\to P^*(U)$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca her e∈A için F(e) çoklu kümesi $C_{F(e)} : U^* \to N$ fonksiyonu ile temsil edilir.

Örnek 2.3.2 [21] U={1/x,5/y,3/z,4/w} ve E={p,q,r} olsun. $F:A\to P^*(U)$ dönüşümü

F(p)={1/x,2/y,3/z}, F(q)={4/w} ve F(r)={3/y,1/z,2/w}

şeklinde tanımlansın. O halde (F,A) bir esnek çoklu kümedir. ∀e∈A için F(e) çoklu kümesi $C_{F(e)} : U^* \to N$ fonksiyonu ile

$$C_{F(p)}(x)=1,\ C_{F(p)}(y)=2,\ C_{F(p)}(z)=3,\ C_{F(p)}(w)=0,$$
$$C_{F(q)}(x)=0,\ C_{F(q)}(y)=0,\ C_{F(q)}(z)=0,\ C_{F(q)}(w)=4,$$
$$C_{F(r)}(x)=0,\ C_{F(r)}(y)=3,\ C_{F(r)}(z)=1,\ C_{F(r)}(w)=2$$

şeklinde tanımlıdır. O halde

(F,A)={F(p),F(q),F(r)}={{1/x,2/y,3/z},{4/w},{3/y,1/z,2/w}} dır.

Tanım 2.3.3 [16] U üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek çoklu kümeleri için, eğer

i) A⊆B

ii) $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x)$, $\forall x \in U^*$, $\forall e \in A$

ise (F,A) esnek çoklu kümesine (G,B) esnek çoklu kümesinin esnek çoklu alt kümesi denir ve $(F,A) \tilde{\subset} (G,B)$ şeklinde gösterilir. Eğer

$$C_{F(e)}(x)=C_{G(e)}(x),\ \forall x \in U^*,\ \forall e \in A$$

ise (F,A) esnek çoklu kümesine (G,B) esnek çoklu kümesinin tam esnek çoklu alt kümesi denir.

Tanım 2.3.4 [21] (F,A) esnek çoklu kümesi (G,B) esnek çoklu kümesinin ve (G,B) esnek çoklu kümesi (F,A) esnek çoklu kümesinin esnek çoklu alt kümesi ise (F,A)ve (G,B) esnek çoklu kümeleri eşittir. Yani,

$$(F,A)=(G,B) \Leftrightarrow (F,A) \tilde{\subseteq} (G,B) \text{ ve } (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$$

Tanım 2.3.5 [21] (F,A) ve (G,B) esnek çoklu kümelerinin birleşimi (H,C) esnek çoklu kümesidir. Burada $C=A \cup B$ ve $C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}$, $\forall x \in U^*, \forall e \in A \cup B$ dir. Bu $(F,A) \tilde{\cup} (G,B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.6 [21] (F,A) ve (G,B) esnek çoklu kümelerinin kesişimi (H,C) esnek çoklu kümesidir. Burada $C=A \cap B$ ve $C_{H(e)}(x) = \min\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}$, $\forall x \in U^*, \forall e \in A \cap B$ dir. Bu $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.3.7 [14] U={1/x,2/y,3/z,4/w} ve E={p,q} olsun. U üzerinde iki esnek çoklu küme
(F,E)={F(p)={1/x,1/y}, F(q)={2/z}} ve (G,E)={F(p)={1/x,2/y}, F(q)={3/z,4/w}} şeklinde tanımlı olsun. Burada $(F,E) \tilde{\subset} (G,E)$ dir. Çünkü $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in E$ için $C_{F(e)}(x) \leq C_{G(e)}(x)$ dır. $(H,E)=(F,E) \tilde{\cup} (G,E)$ olsun. O halde $\forall x \in U^*$ ve $\forall e \in E$ için

$$C_{H(e)}(x) = \max\{C_{F(e)}(x), C_{G(e)}(x)\}$$

olmalıdır. Yani (H,E)={F(p)={1/x,2/y}, F(q)={3/z,4/w}}dır. Gerçekten $(F,E) \tilde{\subset} (G,E)$ olduğundan $(H,C)=(F,E) \tilde{\cup} (G,E)=(G,E)$ dır.

$(H,E)=(F,E)\tilde{\cap}(G,E)$ olsun. O halde $\forall x\in U^*$ ve $\forall e$ için $C_{H(e)}(x)=\min\{C_{F(e)}(x),C_{G(e)}(x)\}$ olmalıdır. Yani $(H,E)=\{F(p)=\{1/x,1/y\},\ F(q)=\{2/z\}\}$ dır. Gerçekten $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ olduğundan $(H,C)=(F,E)\tilde{\cap}(G,E)=(F,E)$ dır.

Tanım 2.3.8 [21] Eğer $\forall e\in A$ için $F(e)=\emptyset$ ise U üzerindeki (F,A) esnek çoklu kümesine boş esnek çoklu küme denir ve Φ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.9 [21] (F,A) ve (G,B) esnek çoklu kümelerinin farkı $(H,C)=(F,A)\setminus(G,B)$ esnek çoklu kümesidir ve $H(e)=F(e)\setminus G(e),\ \forall e\in E$ şeklinde tanımlanır. Burada $C_{H(e)}(x)=\max\{C_{F(e)}(x)-C_{G(e)}(x),0\},\ \forall x\in U^*$ dır.

Örnek 2.3.10 [14] (F,E) ve (G,E) esnek çoklu kümelerini Örnek 2.3.7 de verildiği gibi göz önüne alalım. $(H,E)=(G,E)\setminus(F,E)$ olsun. O halde $\forall x\in U^*$ ve $\forall e\in E$ için $C_{H(e)}(x)=\max\{C_{F(e)}(x)-C_{G(e)}(x),0\}$ olmalıdır. Yani

$$(H,E)=\{F(p)=\{1/y\},\ F(q)=\{\{1/z,4/w\}\} \text{ dır.}$$

Esnek çoklu kümeler için herkes tarafından kabul gören bir nokta tanımı yoktur. Birkaç farklı nokta tanımı yapılmaktadır. Bunlardan birini aşağıdaki gibi yeniden tanımlanabilir.

Tanım 2.3.11 X üzerinde (F,E) bir esnek çoklu küme olsun. Eğer $e\in E$ için $F(e)=\{1/x\}=\{x\}$ ve her $e'\in E-\{e\}$ için $F(e')=\emptyset$ ise (F,E) esnek çoklu kümesine, esnek çoklu nokta denir. Biz bu esnek çoklu noktayı x_e ile göstereceğiz.

Bu esnek çoklu noktanın bir esnek çoklu kümeye ait olması gerektiği aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.12 X üzerinde (F,E) bir esnek çoklu küme ve $e\in E$ olsun. Eğer $C_{F(e)}(x)=n$ için $n\geq 1$ ise $x_e\tilde{\in}(F,E)$ dir.

Örnek 2.3.13 $X=\{2/x,1/y,1/z,3/w\}$ ve $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ olsun. $F:A\rightarrow P^*(X)$ dönüşümü $F(e_1)=\{1/x,1/z,2/w\}$ ve $F(e_2)=\{1/y,2/w\}$ şeklinde tanımlansın. O halde; $(F,A)=\{F(e_1),F(e_2)\}=\{\{1/x,1/z,2/w\},\{1/y,2/w\}\}$ dir.

$y_{e_2} \tilde{\in} (F,A)$ dır. Çünkü $C_{F(e_2)}(y)=1$ dir. Aslında y_{e_2} esnek çoklu noktası

$y_{e_2}=\{\{1/y\}\}=\{y\}$ dir. $y_{e_1} \tilde{\notin} (F,A)$ dır. Çünkü $C_{F(e_1)}(y)=0$ dır.

Tanım 2.3.14 [21] U çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi V olsun. Her $e\in E$ için $V(e)=V$ ise (V,E) esnek çoklu kümesi $\tilde{V}$ şeklinde gösterilir. Açıkça (U,E) esnek çoklu kümesi $\tilde{U}$ şeklinde gösterilir. $\tilde{U}$ esnek çoklu kümesi U üzerinde tanımlanan en geniş esnek çoklu kümedir.

Tanım 2.3.15 [21] $a\in U^*$ olsun. O zaman (a,E) bir esnek çoklu kümedir. Burada her $e\in E$ için $a(e)=\{a\}$ dır.

Örnek 2.3.16 [16] $U=\{4/x,3/y,2/z\}$ ve $E=\{p,q,r,k\}$ olsun. (x,E) esnek çoklu kümesi $(x,E)=\{F(p)=\{1/x\}, F(q)=\{1/x\},F(r)=\{1/x\},F(k)=\{1/x\}\}=\{\{x\},\{x\},\{x\},\{x\}\}$ şeklinde tanımlıdır. Aslında (x,E) esnek çoklu kümesi bir esnek kümedir.

Tanım 2.3.17 [21] (F,E) , U üzerinde bir esnek çoklu küme ve U çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi V olsun. V üzerinde (F,E) esnek çoklu kümesinin alt esnek çoklu kümesi $\left({}^{V}F,E\right)$ şeklinde gösterilir ve $\forall e\in E$ için ${}^{V}F(e)=V\cap F(e)$ şeklinde tanımlanır. Burada $C_{{}^{V}F(e)}(x)=\min\left\{C_V(x),C_{F(e)}(x)\right\}$, $\forall x\in U^*$dır.

Başka bir ifadeyle $\left({}^{V}F,E\right)=\tilde{V}\tilde{\cap}(F,E)$ dir.

Tanım 2.3.18 [21] Bir (F,A) esnek çoklu kümesinin tümleyeni $(F,A)^c$ şeklinde gösterilir ve $(F,A)^c=(F^c,A)$ şeklinde tanımlıdır. Buradaki $F^c:A\to P^*(U)$ dönüşümü $\forall e\in A$, $F^c(e)=U\backslash F(e)$ şeklinde tanımlıdır. Burada $C_{F^c(e)}(x)=C_U(x)-C_{F(e)}(x)$, $\forall x\in U^*$dır.

Örnek 2.3.19 [14] $U=\{4/x,4/y,3/z,3/w\}$ ve $E=\{p,q\}$ olsun. U üzerinde bir esnek çoklu küme $(F,E)=\{F(p)=\{1/x,1/y\}, F(q)=\{2/z\}\}$ şeklinde tanımlı olsun. O halde $(F,A)^c$ esnek çoklu kümesi $(F,A)^c=\{F(p)=\{3/x,3/y,3/z,3/w\}, F(q)=\{4/x,4/y,1/z,3/w\}\}$ şeklinde tanımlıdır.

Önerme 2.3.20 [16] U üzerinde bir esnek çoklu küme (F,A) olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $(F, A)\tilde{\cup}(F,A)=(F, A)$,

(2) $(F, A)\tilde{\cap}(F, A) = (F, A)$,

(3) $(F,A)\tilde{\cup}\Phi=(F,A)$,

(4) $(F,A)\tilde{\cap}\Phi=\Phi$,

(5) $(F,A)\tilde{\cup}\tilde{X}=\tilde{X}$,

(6) $(F,A)\tilde{\cap}\tilde{X}=(F,A)$.

Önerme 2.3.21 [16] U üzerinde üç esnek çoklu küme (F,A), (G,B) ve (H,C) olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ve $(G,B)\tilde{\subseteq}(H,C)\Rightarrow(F,A)\tilde{\subseteq}(H,C)$,

(2) $(F,A)\tilde{\cup}\big((G,B)\tilde{\cup}(H,C)\big)=\big((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\big)\tilde{\cup}(H,C))$,

(3) $(F,A)\tilde{\cap}\left((G,B)\tilde{\cap}(H,C)\right)=\left((F,A)\tilde{\cap}(G,B)\right)\tilde{\cap}(H,C))$,

(4) $(F,A)\tilde{\cup}\left((G,B)\tilde{\cap}(H,C)\right)=\big((F,A)\tilde{\cup}(G,B)\big)\tilde{\cap}((F,A)\tilde{\cup}(H,C))$,

(5) $(F,A)\tilde{\cap}\big((G,B)\tilde{\cup}(H,C)\big)=\left((F,A)\tilde{\cap}(G,B)\right)\tilde{\cup}((F,A)\tilde{\cap}(H,C))$.

Sonuç 2.3.22 [16] U üzerinde bir esnek çoklu küme (F,A) ve $\{(F_i,A)\}_{i\in I}$ esnek çoklu küme ailesi olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F,A)\tilde{\cup}\big[\tilde{\cap}_{i\in I}(F_i,A)\big]=\tilde{\cap}_{i\in I}[(F,A)\tilde{\cup}(F_i,A)]$,

(2) $(F,A)\tilde{\cap}[\tilde{\cup}_{i\in I}(F_i,A)]=\tilde{\cup}_{i\in I}\big[(F,A)\tilde{\cap}(F_i,A)\big]$.

Önerme 2.3.23 [16] U üzerinde iki esnek çoklu küme (F,A) ve (G,B) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(F, A)\tilde{\subseteq}(G,B)\Leftrightarrow(F, A)\tilde{\cup}(G,B)=(G,B)$,

(2) $(F, A)\tilde{\subseteq}(G,B)\Leftrightarrow(F, A)\tilde{\cap}(G,B)=(F,A)$,

(3) $(F, A)\tilde{\cap}(G,B)=\Phi\Rightarrow(F, A)\tilde{\subseteq}(G,B)^c$,

(4) $(F, A)\tilde{\subseteq}(G,B)\Rightarrow(G,B)^c\tilde{\subseteq}(F, A)^c$.

Önerme 2.3.24 [16] U üzerinde iki tam esnek çoklu küme (F,A) ve (G,B) olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $((F, A)\tilde{\cup}(G,B))^c=(F, A)^c\tilde{\cap}(G,B)^c$,

(2) $((F, A)\tilde{\cap}(G,B))^c=(F, A)^c\tilde{\cup}(G,B)^c$.

Sonuç 2.3.25 [16] U üzerinde tam esnek çoklu küme ailesi $\{(F_i,A)\}_{i\in I}$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $[\tilde{\cup}_{i\in I}(F_i,A)]^c=\tilde{\cap}_{i\in I}(F_i,A)^c$,

(2) $[\tilde{\cap}_{i\in I}(F_i,A)]^c=\tilde{\cup}_{i\in I}(F_i,A)^c$.

2.4. Esnek Çoklu Fonksiyon

Bu bölümde Osmanoğlu ve Tokat [15] tarafından tanımlanan esnek çoklu fonksiyon kavramı ve özellikleri verildi.

Tanım 2.4.1 [15] X çoklu küme evrenseli ve E parametrelerin kümesi olsun. X üzerinde tanımlı bütün esnek çoklu kümelerin koleksiyonuna esnek çoklu sınıf denir ve X_E ile gösterilir.
Yani, X çoklu küme evrenselinden alınan çoklu kümeler ile E kümesinden alınan parametrelerin oluşturduğu bütün esnek çoklu kümeler X_E sınıfının içerisindedir.

Tanım 2.4.2 [15] X_E ve Y_K iki esnek çoklu sınıf olsun. $\varphi:X^*\to Y^*$ ve $\psi:E\to K$ iki fonksiyon olsun. O zaman $f=(\varphi,\psi):X_E\to Y_K$ bir esnek çoklu fonksiyondur ve aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

X_E de bir esnek çoklu küme (F,E) olsun. (F,E) esnek çoklu kümesinin f esnek çoklu fonksiyonu altındaki görüntüsü $f(F,E)$, Y_K de bir esnek çoklu kümedir. Burada $k\in\psi(E)\subseteq K$ ve $y\in Y^*$ için

$$C_{f(F,E)(k)}(y)=\begin{cases} \sup\limits_{e\in\psi^{-1}(k)\cap E,\ x\in\varphi^{-1}(y)} C_{F(e)}(x), & \varphi^{-1}(y)\neq\emptyset,\psi^{-1}(k)\neq\emptyset; \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Y_K de bir esnek çoklu küme (G,K) olsun. (G,K) esnek çoklu kümesinin f esnek çoklu fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(G,K)$, X_E de bir esnek çoklu kümedir. Burada $e\in \psi^{-1}(K)\subseteq E$ ve $x\in X^*$ için

$$C_{f^{-1}(G,K)(e)}(x)=C_{G(\psi(e))}(\varphi(x)).$$

Eğer ψ ve φ birebir iki fonksiyon ise f esnek çoklu birebir fonksiyondur. Eğer ψ ve φ örten iki fonksiyon ise f esnek çoklu örten fonksiyondur.

Eğer f esnek çoklu sabit fonksiyon ise ψ ve φ fonksiyonları sabittir.

Örnek 2.4.3 $X=\{2/a,3/b,4/c,5/d\}$, $Y=\{5/x,4/y,3/z,2/w\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, $K=\{k_1,k_2,k_3\}$ ve X_E, Y_K iki esnek çoklu sınıf olsun. . $\varphi:X^*\to Y^*$ ve $\psi:E\to K$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlı olsun;

$$\begin{array}{llll} \varphi(a)=z, & \varphi(b)=y, & \varphi(c)=y, & \varphi(d)=x, \\ \psi(e_1)=k_1, & \psi(e_2)=k_3, & \psi(e_3)=k_2 & \psi(e_4)=k_1. \end{array}$$

Sırasıyla X_E ve Y_K de iki esnek çoklu kümeyi aşağıdaki gibi seçelim;

$$\begin{aligned} (F,A) &=\{F(e_1),F(e_2),F(e_3)\}, \\ &=\{\{1/a,2/b,1/d\},\{3/b,2/c,1/d\},\{2/a,5/d\}\}, \\ \\ (G,B) &=\{G(k_1),G(k_2)\}, \\ &=\{\{4/x,2/w\},\{1/x,1/y,2/z,2/w\}\}. \end{aligned}$$

(F,A) esnek çoklu kümesinin $f:X_E\to Y_K$ esnek çoklu fonksiyonu altındaki görüntüsü aşağıda elde edilmiştir;

$$C_{f(F,A)(k_1)}(x)=\begin{cases}\sup\limits_{e\in\psi^{-1}(k_1)\cap A,\ a\in\varphi^{-1}(x)} C_{F(e)}(a), & \varphi^{-1}(x)\neq\emptyset,\psi^{-1}(k_1)\neq\emptyset;\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$=\sup_{e\in\{e_1,e_4\},\ a\in\{d\}} C_{F(e)}(a)$$

$$=\sup\{C_{F(e_1)}(d),C_{F(e_4)}(d)\}$$

$$=1,$$

$C_{f(F,A)(k_1)}(y)=2,$

$C_{f(F,A)(k_1)}(z)=1,$

$C_{f(F,A)(k_1)}(w)=0$ ($\varphi^{-1}(w)=\emptyset$ olduğundan),

$$C_{f(F,A)(k_2)}(x)=\begin{cases}\sup\limits_{e\in\psi^{-1}(k_2)\cap A,\ a\in\varphi^{-1}(x)} C_{F(e)}(a), & \varphi^{-1}(x)\neq\emptyset,\psi^{-1}(k_2)\neq\emptyset;\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$=\sup_{e\in\{e_3\},\ a\in\{d\}} C_{F(e)}(a)$$

$$=\sup\{C_{F(e_3)}(d)\}$$

$$=5,$$

$C_{f(F,A)(k_2)}(y)=0,$

$C_{f(F,A)(k_2)}(z)=2,$

$C_{f(F,A)(k_2)}(w)=0$ ($\varphi^{-1}(w)=\emptyset$ olduğundan),

$$C_{f(F,A)(k_3)}(x)=\begin{cases}\sup\limits_{e\in\psi^{-1}(k_3)\cap A,\ a\in\varphi^{-1}(x)} C_{F(e)}(a), & \varphi^{-1}(x)\neq\emptyset,\psi^{-1}(k_1)\neq\emptyset;\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$=\sup_{e\in\{e_2\},\ a\in\{d\}} C_{F(e)}(a)$$

$$=\sup\{C_{F(e_2)}(d)\}$$

$= 1,$

$C_{f(F,A)(k_3)}(y) = 3,$

$C_{f(F,A)(k_3)}(z) = 0,$

$C_{f(F,A)(k_3)}(w) = 0$ ($\varphi^{-1}(w)=\emptyset$ olduğundan),

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}(f(F,A),B) &= \{f(F,A)(k_1), f(F,A)(k_2), f(F,A)(k_3)\} \\ &= \{\{1/x,2/y,1/z\},\{5/x,2/z\},\{1/x,3/y\}\}\end{aligned}$$

elde edilir.

(G,B) esnek çoklu kümesinin f esnek çoklu fonksiyonu altındaki ters görüntüsü aşağıda elde edilmiştir;

$C_{f^{-1}(G,B)(e_1)}(a)=C_{G(\psi(e_1))}(\varphi(a))=C_{G(k_1)}(z)=0,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_1)}(b)=C_{G(\psi(e_1))}(\varphi(b))=C_{G(k_1)}(y)=0,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_1)}(c)=C_{G(\psi(e_1))}(\varphi(c))=C_{G(k_1)}(y)=0,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_1)}(d)=C_{G(\psi(e_1))}(\varphi(d))=C_{G(k_1)}(x)=4,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_3)}(a)=C_{G(\psi(e_3))}(\varphi(a))=C_{G(k_2)}(z)=2,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_3)}(b)=C_{G(\psi(e_3))}(\varphi(b))=C_{G(k_2)}(y)=1,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_3)}(c)=C_{G(\psi(e_3))}(\varphi(c))=C_{G(k_2)}(y)=1,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_3)}(d)=C_{G(\psi(e_3))}(\varphi(d))=C_{G(k_2)}(x)=1,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_4)}(a)=C_{G(\psi(e_4))}(\varphi(a))=C_{G(k_1)}(z)=0,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_4)}(b)=C_{G(\psi(e_4))}(\varphi(b))=C_{G(k_1)}(y)=0,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_4)}(c)=C_{G(\psi(e_4))}(\varphi(c))=C_{G(k_1)}(y)=0,$

$C_{f^{-1}(G,B)(e_4)}(d)=C_{G(\psi(e_4))}(\varphi(d))=C_{G(k_1)}(x)=4.$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}(G,B),A\right) &= \left\{f^{-1}(G,B)(e_1),f^{-1}(G,B)(e_3),f^{-1}(G,B)(e_4)\right\},\\ &= \{\{4/d\},\{2/a,1/b,1/c,1/d\},\{4/d\}\}.\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.4 [15] $f:X_E\rightarrow Y_K$ esnek çoklu fonksiyon, X_E de iki esnek çoklu küme (F,A) ve (F_i,A_i) ve Y_K de iki esnek çoklu küme (G,B) ve (G_i,B_i) esnek çoklu küme olsun.

(1) $f(\Phi)=\Phi$, $f\left(\tilde{X}\right)\tilde{\subseteq}\tilde{Y}$,

(2) $f^{-1}(\Phi)=\Phi$, $f^{-1}\left(\tilde{Y}\right)=\tilde{X}$,

(3) $f\left((F_1,A_1)\tilde{\cup}(F_2,A_2)\right)=f(F_1,A_1)\tilde{\cup}f(F_2,A_2)$,

Genel hali, $f\left(\tilde{\cup}_{i\in I}(F_i,A_i)\right)=\tilde{\cup}_{i\in I}f(F_i,A_i)$,

(4) $f^{-1}\left((G_1,B_1)\tilde{\cup}(G_2,B_2)\right)=f^{-1}(G_1,B_1)\tilde{\cup}f^{-1}(G_2,B_2)$,

Genel hali, $f^{-1}\left(\tilde{\cup}_{i\in I}(G_i,B_i)\right)=\tilde{\cup}_{i\in I}f^{-1}(G_i,B_i)$,

(5) $f((F_1,A_1)\tilde{\cap}(F_2,A_2))\tilde{\subseteq}f(F_1,A_1)\tilde{\cap}f(F_2,A_2)$,

Genel hali, $f(\tilde{\cap}_{i\in I}(F_i,A_i))\tilde{\subseteq}\tilde{\cap}_{i\in I}f(F_i,A_i)$,

(6) $f^{-1}\left((G_1,B_1)\tilde{\cap}(G_2,B_2)\right)=f^{-1}(G_1,B_1)\tilde{\cap}f^{-1}(G_2,B_2)$,

Genel hali, $f^{-1}\left(\tilde{\cap}_{i\in I}(G_i,B_i)\right)=\tilde{\cap}_{i\in I}f^{-1}(G_i,B_i)$,

(7) Eğer $(F_1,A_1)\tilde{\subseteq}(F_2,A_2)$ ise $f(F_1,A_1)\tilde{\subseteq}f(F_2,A_2)$,

(8) Eğer $(G_1,B_1)\tilde{\subseteq}(G_2,B_2)$ ise $f^{-1}(G_1,B_1)\tilde{\subseteq}f^{-1}(G_2,B_2)$,

(9) $f^{-1}((G,B)^c)=(f^{-1}(G,B))^c$.

3. BÖLÜM

ESNEK ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde ilk olarak esnek çoklu kümeler üzerinde topoloji yapısı incelendi. Daha sonra esnek çoklu yarı açık küme ve esnek çoklu yarı kapalı küme kavramları tanımlandı. Bu tanımlar kullanılarak bir kümenin esnek çoklu yarı içi ve esnek çoklu yarı kapanışı kavramları temel teoremleriyle incelendi.

3.1. Esnek Çoklu Topoloji

Bu bölümde Tokat ve Osmanoğlu [15, 16, 21] tarafından tanımlanan esnek çoklu topoloji yapısı ve birçok temel kavram hatırlatıldı.

Tanım 3.1.1 [21] $\tau \subseteq X_E$ ve $A \subseteq E$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan τ sınıfına X üzerinde bir esnek çoklu topoloji ve (X_E,τ) ikilisine de X üzerinde bir esnek çoklu topolojik uzay denir.

i. $\Phi, \tilde{X} \tilde{\in} \tau$.

ii. τ sınıfındaki sonlu sayıda esnek çoklu kümenin kesişimi τ sınıfına aittir. Yani, $(F_1,A), (F_2,A), \ldots, (F_n,A) \tilde{\in} \tau$ için $\tilde{\bigcap}_{i=1}^{n}(F_i,A) \tilde{\in} \tau$ dır.

iii. τ sınıfındaki esnek çoklu kümelerin keyfi birleşimi τ sınıfına aittir. Yani, her $i \in I$, $(F_i,A) \tilde{\in} \tau$ için $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A) \tilde{\in} \tau$ dır.

τ sınıfının her bir elemanına esnek çoklu açık küme, tümleyeni açık olan esnek çoklu kümeye ise esnek çoklu kapalı küme denir.

Örnek 3.1.2 [21] $X=\{2/x,3/y,4/z,5/w\}$, $E=\{p,q\}$ ve $\tau=\{\Phi, \tilde{X},(F_1,E), (F_2,E),$

$(F_4,E), (F_5,E)\}$ olsun. Buradaki $(F_1,E), (F_2,E),(F_3,E), (F_4,E),(F_5,E)$ esnek çoklu kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$
\begin{array}{ll}
F_1(p)=\{1/x,2/y,3/z\}, & F_1(q)=\{4/w\} \\
F_2(p)=X, & F_2(q)=\{1/x,3/y,4/z,5/w\} \\
F_3(p)=\{2/x,3/y,3/z,1/w\}, & F_3(q)=\{1/x,4/w\} \\
F_4(p)=\{2/y\}, & F_4(q)=\{2/w\} \\
F_5(p)=\{3/y,3/z,1/w\}, & F_5(q)=\{1/x,4/w\}
\end{array}
$$

O halde τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar ve $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzaydır.

Örnek 3.1.3 [21] $\tau_1=\{\Phi, \widetilde{X}\}$ ve $\tau_2=X_E$ olsun. τ_1 ve τ_2 sınıfları X üzerinde esnek çoklu topoloji tanımlar. τ_1 sınıfına esnek çoklu ayrık olmayan topoloji, τ_2 sınıfına esnek çoklu ayrık topoloji denir.

Tanım 3.1.4 [21] $(X_E\ ,\tau)$ ve $(X_E\ ,\sigma)$ iki esnek çoklu topolojik uzay olsun. Eğer $\tau\subseteq\sigma$ ise τ esnek çoklu topolojisi σ esnek çoklu topolojisinden daha kaba veya σ esnek çoklu topolojisi τ esnek çoklu topolojisinden daha ince denir.

Tanım 3.1.5 [21] $(X_E\ ,\tau)$ bir esnek çoklu topolojik uzay ve X çoklu küme evrenselinin boştan farklı bir alt kümesi Y olsun. O zaman

$$\tau_Y=\left\{\left({}^{Y}F,E\right) :(F,E)\widetilde{\in}\tau\right\}$$

sınıfına Y üzerinde bir esnek çoklu topoloji ve $(X_E\ ,\tau_Y)$ esnek çoklu topolojik uzayına $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojik uzayının esnek çoklu alt uzayı denir.

Örnek 3.1.6 [16] $(X_E\ ,\tau)$ esnek çoklu topolojisini Örnek 3.1.2 de verildiği şekilde göz önüne alalım. Ayrıca Y={1/x, 2/y,3/z} olsun. O halde $\tau_Y=\{\Phi, \widetilde{Y},\left({}^{Y}F_1,E\right), \left({}^{Y}F_2,E\right), \left({}^{Y}F_3,E\right), \left({}^{Y}F_4,E\right),\left({}^{Y}F_5,E\right)\}$ esnek çoklu topolojisi ve buradaki esnek çoklu kümeler aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$
\begin{array}{ll}
{}^{Y}F_1(p)=\{1/x,2/y,3/z\}, & {}^{Y}F_1(q)=\emptyset \\
{}^{Y}F_2(p)=\{1/x,2/y,3/z\}, & {}^{Y}F_2(q)=\{1/x,2/y,3/z\} \\
{}^{Y}F_3(p)=\{1/x,2/y,3/z\}, & {}^{Y}F_3(q)=\{1/x\} \\
{}^{Y}F_4(p)=\{2/y\}, & {}^{Y}F_4(q)=\emptyset \\
{}^{Y}F_5(p)=\{2/y,3/z\}, & {}^{Y}F_5(q)=\{1/x\}
\end{array}
$$

Burada $({}^{Y}F_2,E)=\tilde{Y}$ olduğundan $\tau_Y=\{\Phi, \tilde{Y}, ({}^{Y}F_1,E), ({}^{Y}F_3,E), ({}^{Y}F_4,E), ({}^{Y}F_5,E)\}$ şeklinde yazılır ve görüldüğü üzere (X_E, τ_Y) esnek çoklu topolojik uzayı (X_E, τ) esnek çoklu topolojik uzayının esnek çoklu alt uzayıdır

Örnek 3.1.7 [16] Herhangi esnek çoklu ayrık topolojik uzayın alt uzayı da esnek çoklu ayrık topolojik uzaydır. Ayrıca herhangi esnek çoklu ayrık olmayan topolojik uzayın alt uzayı da esnek çoklu ayrık olmayan topolojik uzaydır.

Tanım 3.1.8 [16] (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de (F,A) bir esnek çoklu küme olsun. (F,A) esnek çoklu kümesini kapsayan bütün esnek çoklu kapalı kümelerin kesişimine (F,A) *esnek çoklu kümesinin kapanışı* denir ve $\overline{(F,A)}$ şeklinde gösterilir.

Açıkça $\overline{(F,A)}$, (F,A) esnek çoklu kümesini kapsayan en küçük esnek çoklu kapalı kümedir.

Önerme 3.1.9 [16] (X_E, τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de iki esnek çoklu küme (F,A) ve (G,B) olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $\overline{\Phi} = \Phi$ ve $\overline{\tilde{X}} = \tilde{X}$,

ii. $(F,A) \tilde{\subseteq} \overline{(F,A)}$,

iii. $\overline{(F,A)}$ kapalıdır,

iv. (F,A) esnek çoklu kapalı kümedir $\Leftrightarrow (F,A) = \overline{(F,A)}$,

v. $\overline{\overline{(F,A)}} = \overline{(F,A)}$,

vi. $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B) \Rightarrow \overline{(F,A)} \tilde{\subseteq} \overline{(G,B)}$,

vii. $\overline{(F,A) \tilde{\cup} (G,B)} = \overline{(F,A)} \tilde{\cup} \overline{(G,B)}$,

viii. $\overline{(F,A) \tilde{\cap} (G,B)} \tilde{\subseteq} \overline{(F,A)} \tilde{\cap} \overline{(G,B)}$,

Tanım 3.1.10 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay, (F,A), X de bir esnek çoklu küme ve $x_e \tilde{\in} (F,A)$ olsun. Eğer $x_e \tilde{\in} (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde (G,B) esnek çoklu açık kümesi varsa x_e esnek çoklu noktasına (F,A) esnek çoklu kümesinin esnek çoklu iç noktası denir. (F,A) esnek çoklu kümesinin bütün esnek çoklu iç noktalarının kümesine (F,A) esnek çoklu kümesinin içi denir ve $(F,A)^{\circ}$ şeklinde gösterilir.

Önerme 3.1.11 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de bir esnek çoklu küme (F,A) olsun. O halde

$$(F,A)^{\circ}=\tilde{\cup}\{(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A) :(G,B)\tilde{\in}\tau\}$$

dır.

İspat: Eğer $x_e\tilde{\in}(F,A)^{\circ}$ ise Tanım 3.1.10 den $x_e\tilde{\in}(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olacak şekilde $(G,B)\tilde{\in}\tau$ vardır. O halde $x_e\tilde{\in}\ \tilde{\cup}\{(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A) :(G,B)\tilde{\in}\tau\}$.

Tersine eğer $x_e\tilde{\in}\tilde{\cup}\{(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A) :(G,B)\tilde{\in}\tau\}$ ise $x_e\tilde{\in}(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olacak şekilde bir $(G,B)\tilde{\in}\tau$ bulunduğundan $x_e\tilde{\in}(F,A)^{\circ}$ dır.

Önerme 3.1.12 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de iki esnek çoklu küme (F,A) ve (G,B) olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- **i.** $(F,A)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,A)$,
- **ii.** $(F,A)^{\circ}$ açıktır,
- **iii.** (F,A) açıktır ancak ve ancak $(F,A)^{\circ}=(F,A)$,
- **iv.** $(F,A)^{\circ}$, (F,A) esnek çoklu kümesinin kapsadığı en geniş esnek çoklu açık kümedir,
- **v.** $((F,A)^{\circ})^{\circ}=(F,A)^{\circ}$,
- **vi.** $(F,A)\tilde{\subseteq}(H,C)\Rightarrow(F,A)^{\circ}\tilde{\subseteq}(H,C)^{\circ}$,
- **vii.** $(F,A)^{\circ}\tilde{\cup}(H,C)^{\circ}\tilde{\subseteq} ((F,A)\tilde{\cup}(H,C))^{\circ}$,
- **viii.** $(F,A)^{\circ}\tilde{\cap}(H,C)^{\circ}= ((F,A)\tilde{\cap}(H,C))^{\circ}$,

İspat: **i.** Tanım 3.1.10 den açıktır.

ii. Önerme 3.1.11 den $(F,A)^{\circ}$, (F,A) esnek çoklu kümesini içerdiği açıkların birleşimi olduğundan açıktır.

iii. $(F,A)^{\circ}=\tilde{\cup}\{(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A):(G,B)\in\tau\}$ olduğundan (F,A) esnek çoklu kümesi açık ise $(F,A)^{\circ}=(F,A)$ dır.

Tersine $(F,A)^{\circ}=(F,A)$ ise (F,A) esnek çoklu kümesi açıktır. Çünkü $(F,A)^{\circ}$ esnek çoklu kümesi açıktır. $(F,A)^{\circ}$ esnek çoklu kümesi (F,A) esnek çoklu kümesinin kapsadığı en geniş esnek çoklu açık kümedir.

iv. $(F,A)^{\circ}=\tilde{\cup}\{(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A):(G,B)\tilde{\in}\tau\}$ olduğundan $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olacak şekildeki her (G,B) esnek çoklu açık kümesi için $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)^{\circ}$ dır.

v. $(F,A)^{\circ}$ açık ve (F,A) açık ise $(F,A)^{\circ}=(F,A)$ olduğundan $((F,A)^{\circ})^{\circ}=(F,A)^{\circ}$ dır.

vi. $(F,A)\tilde{\subseteq}(H,C)$ olsun. Eğer $x_e\tilde{\in}(F,A)^{\circ}$ ise $x_e\tilde{\in}(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olacak şekilde $(G,B)\tilde{\in}\tau$ vardır. Buradan $x_e\tilde{\in}(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)\tilde{\subseteq}(H,C)$ ve de $x_e\tilde{\in}(H,C)^{\circ}$ olup $(F,A)^{\circ}\tilde{\subseteq}(H,C)^{\circ}$ dır.

vii. $(F,A)\tilde{\subseteq}(F,A)\tilde{\cup}(H,C)$ den $(F,A)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,A)^{\circ}\tilde{\cup}(H,C)^{\circ}$ ve $(H,C)\tilde{\subseteq}(F,A)\tilde{\cup}$ (H,C) den $(H,C)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,A)^{\circ}\tilde{\cup}(H,C)^{\circ}$ dır. Buradan$(F,A)^{\circ}\tilde{\cup}(H,C)^{\circ}\tilde{\subseteq}$ $((F,A)\tilde{\cup}(H,C))^{\circ}$ elde edilir.

viii. $(F,A)\tilde{\cap}(H,C)\tilde{\subseteq}(F,A)$ den $((F,A)\tilde{\cap}(H,C))^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,A)^{\circ}$ ve $(F,A)\tilde{\cap}$ $(H,C)\tilde{\subseteq}(H,C)$ den $((F,A)\tilde{\cap}(H,C))^{\circ}\tilde{\subseteq}(H,C)^{\circ}$ dır. Buradan $((F,A)\tilde{\cap}(H,C))^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,A)^{\circ}\tilde{\cap}(H,C)^{\circ}$ elde edilir.

Tersine $(F,A)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,A)$ ve $(H,C)^{\circ}\tilde{\subseteq}(H,C)$ olduğundan $(F,A)^{\circ}\tilde{\cap}(H,C)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,A)\tilde{\cap}(H,C)$ ve buradan da $(F,A)^{\circ}\tilde{\cap}(H,C)^{\circ}\tilde{\subseteq}((F,A)\tilde{\cap}(H,C))^{\circ}$ elde edilir.

Teorem 3.1.13 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay ve X_E de iki tam esnek çoklu küme (F,A) ve (G,A) olsun. O zaman,

i. $(\overline{(F,A)})^c=((F,A)^c)^{\circ}$

ii. $((F,A)^{\circ})^c=\overline{((F,A)^c)}$

İspat: **i.** $\left(\overline{(F,A)}\right)^c=\left(\{\tilde{\cap}(G,A) : (G,A) \text{ esnek çoklu kapalı küme ve } (F,A)\tilde{\subseteq}(G,A)\}\right)^c$

$$=\tilde{\cup}\{(G,A)^c : (G,A)^c \text{ esnek çoklu açık küme ve } (G,A)^c\tilde{\subseteq}(F,A)^c\}$$

$$=((F,A)^c)^{\circ}$$

ii. $((F,A)^{\circ})^c=(\tilde{\cup}\{(G,A): (G,A) \text{ esnek çoklu açık küme ve } (G,A)\tilde{\subseteq}(F,A)\})^c$

$= \widetilde{\cap}\{(G,A)^c : (G,A)^c$ esnek çoklu kapalı küme ve $(F,A)^c \widetilde{\subseteq} (G,A)^c\}$

$= \overline{((F,A)^c)}$

3.2 Esnek Çoklu Yarı Açık ve Esnek Çoklu Yarı Kapalı Kümeler

Bu bölümde esnek çoklu yarı açık küme, esnek çoklu yarı kapalı küme, esnek çoklu yarı iç ve esnek çoklu yarı kapanış kavramları incelendi.

Tanım 3.2.1 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (A,E), X_E de bir esnek çoklu küme olsun. (A,E) esnek çoklu yarı açık kümedir ancak ve ancak $(O,E) \widetilde{\subseteq} (A,E) \widetilde{\subseteq} \overline{(O,E)}$ olacak biçimde (O,E) esnek çoklu açık kümesi vardır.

Önerme 3.2.2 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzayında her esnek çoklu açık küme esnek çoklu yarı açık kümedir.

İspat: Esnek çoklu yarı açık kümenin tanımından aşikârdır.

Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 3.2.3 X={1/x,3/y,2/z} , E={p,q} ve $\tau=\{\Phi,\widetilde{X},(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),\ldots,(F_7,E)\}$ olsun. Buradaki esnek çoklu kümeler kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$F_1(p)=\{1/x,3/y\}$,	$F_1(q)=\{1/x,3/y\}$
$F_2(p)=\{3/y\}$,	$F_2(q)=\{1/x,2/z\}$
$F_3(p)=\{3/y,2/z\}$,	$F_3(q)=\{1/x\}$
$F_4(p)=\{3/y\}$,	$F_4(q)=\{1/x\}$
$F_5(p)=\{1/x,3/y\}$,	$F_5(q)=X$
$F_6(p)=X$,	$F_6(q)=\{1/x,3/y\}$
$F_7(p)=\{3/y,2/z\}$,	$F_7(q)=\{1/x,2/z\}$

O halde τ sınıfı X üzerinde bir esnek çoklu topoloji tanımlar. X üzerinde (G,E) esnek çoklu kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$G(p)=\{3/y,2/z\}, \quad G(q)=\{1/x,3/y\}$$

(F_3,E) esnek çoklu kümesi için $(F_3,E) \widetilde{\subseteq} (G,E)$ ve $\overline{(F_3,E)}=\widetilde{X}$ olduğundan $(F_3,E) \widetilde{\subseteq} (G,E) \widetilde{\subseteq} \overline{(F_3,E)}$ elde edilir. Bu ise (G,E) nin esnek çoklu yarı açık küme olduğunu gösterir. Ancak (G,E) esnek çoklu açık küme değildir.

Teorem 3.2.4 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (A,E), X_E de bir esnek çoklu küme olsun. (A,E) esnek çoklu yarı açık kümedir ancak ve ancak

$$(A,E)\tilde{\subseteq}\overline{((A,E)^\circ)}$$

dır.

İspat: (A,E), X de esnek çoklu yarı açık bir küme olsun. O halde (O,E) esnek çoklu açık kümesi vardır öyle ki $(O,E)\tilde{\subseteq}(A,E)\tilde{\subseteq}\overline{(O,E)}$ dır. Buradan $(O,E)=(O,E)^\circ\tilde{\subseteq}(A,E)^\circ$ ve dolayısıyla $\overline{(O,E)}\tilde{\subseteq}\overline{((A,E)^\circ)}$ olur. O halde

$$(A,E)\tilde{\subseteq}\overline{(O,E)}\tilde{\subseteq}\overline{((A,E)^\circ)}$$

dır.

Tersine $(A,E)\tilde{\subseteq}\overline{((A,E)^\circ)}$ olsun. O zaman $(O,E)=(A,E)^\circ$ için $(O,E)\tilde{\subseteq}(A,E)\tilde{\subseteq}\overline{(O,E)}$ yazılır. Bu ise (A,E) nin esnek çoklu yarı açık küme olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.5 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve $\{A_\alpha : \alpha\epsilon I\}$ esnek çoklu yarı açık kümelerin bir sınıfı olsun. O zaman

$$\tilde{\bigcup_{\alpha\epsilon I}}(A_\alpha,E)$$

esnek çoklu yarı açık kümedir.

İspat: Her $\alpha\epsilon I$ için $(O_\alpha,E)\tilde{\subseteq}(A_\alpha,E)\tilde{\subseteq}\overline{(O_\alpha,E)}$ olacak biçimde (O_α,E) esnek çoklu kümesi vardır. Buradan

$$\tilde{\bigcup_{\alpha\epsilon I}}(O_\alpha,E)\tilde{\subseteq}\tilde{\bigcup_{\alpha\epsilon I}}(A_\alpha,E)\tilde{\subseteq}\tilde{\bigcup_{\alpha\epsilon I}}\overline{(O_\alpha,E)}\tilde{\subseteq}\overline{\tilde{\bigcup_{\alpha\epsilon I}}(O_\alpha,E)}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\bigcup_{\alpha\epsilon I}(A_\alpha,E)$ esnek çoklu yarı açık kümedir.

Teorem 3.2.6 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (A,E) bir esnek çoklu yarı açık küme olsun. $(A,E)\tilde{\subseteq}(B,E)\tilde{\subseteq}\overline{(A,E)}$ ise (B,E) de esnek çoklu yarı açık kümedir.

İspat: $(O,E)\tilde{\subseteq}(A,E)\tilde{\subseteq}\overline{(O,E)}$ olacak şekilde bir (O,E) esnek çoklu açık kümesi vardır. Buradan $(O,E)\tilde{\subseteq}(B,E)$ dir. Ayrıca $(B,E)\tilde{\subseteq}\overline{(A,E)}$ ve $(A,E)\tilde{\subseteq}\overline{(O,E)}$ olduğundan $(B,E)\tilde{\subseteq}\overline{(O,E)}$ dır. Buradan

$$(O,E)\tilde{\subseteq}(B,E)\tilde{\subseteq}\overline{(O,E)}$$

elde edilir. Bu ise (B,E) nin esnek çoklu yarı açık küme olduğunu gösterir.

Tanım 3.2.7 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (B,E), X_E de bir esnek çoklu küme olsun. Eğer (B,E) esnek çoklu kümesinin tümleyeni esnek çoklu yarı açık küme ise (B,E)ye esnek çoklu yarı kapalı küme denir.

Başka bir ifadeyle $(F,E)^\circ\tilde{\subseteq}(B,E)\tilde{\subseteq}(F,E)$ olacak biçimde (F,E) esnek çoklu kapalı kümesi varsa (B,E) ye esnek çoklu yarı kapalı küme denir.

Önerme 3.2.8 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzayında her esnek çoklu kapalı küme, esnek çoklu yarı kapalı kümedir.

İspat: Esnek çoklu yarı kapalı kümenin tanımından aşikârdır.

Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 3.2.9 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzayını Örnek 3.2.3 de verildiği şekilde göz önüne alalım. $(B,E)=(G,E)^c$ alınırsa (B,E) nin esnek çoklu yarı kapalı küme olduğu görülür. Burada

$$B(p)=\{1/x\},\quad B(q)=\{2/z\}$$

dir. (X_E,τ) da kapalı kümeler aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{array}{ll}
H_1(p)=\{2/z\}, & H_1(q)=\{2/z\} \\
H_2(p)=\{1/x,2/z\}, & H_2(q)=\{3/y\} \\
H_3(p)=\{1/x\}, & H_3(q)=\{3/y,2/z\} \\
H_4(p)=\{1/x,2/z\}, & H_4(q)=\{3/y,2/z\} \\
H_5(p)=\{2/z\}, & H_5(q)=\Phi \\
H_6(p)=\Phi, & H_6(q)=\{2/z\} \\
H_7(p)=\{1/x\}, & H_7(q)=\{3/y\}
\end{array}$$

Buradan görüleceği üzere (B,E) esnek çoklu yarı kapalı kümesi, esnek çoklu kapalı küme değildir.

Teorem 3.2.10 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (B,E) , X_E de bir esnek çoklu küme olsun. (B,E) esnek çoklu yarı kapalı kümedir ancak ve ancak

$$\left(\overline{(B,E)}\right)^{\circ} \tilde{\subseteq} (B,E)$$

dir.

İspat: (B,E) , X de esnek çoklu yarı kapalı küme olsun. O halde (F,E) esnek çoklu kapalı kümesi vardır öyle ki;

$$(F,E)^{\circ} \tilde{\subseteq} (B,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$$

dir. Buradan $\overline{(B,E)} \tilde{\subseteq} \overline{(F,E)} = (F,E)$ ve dolayısıyla $\left(\overline{(B,E)}\right)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,E)^{\circ}$ olur. O halde $\left(\overline{(B,E)}\right)^{\circ} \tilde{\subseteq} (F,E)^{\circ} \tilde{\subseteq} (B,E)$ dir. Buradan $\left(\overline{(B,E)}\right)^{\circ} \tilde{\subseteq} (B,E)$ elde edilir.

Tersine $\left(\overline{(B,E)}\right)^{\circ} \tilde{\subseteq} (B,E)$ olsun. O zaman $(F,E) = \overline{(B,E)}$ için $(F,E)^{\circ} \tilde{\subseteq} (B,E) \tilde{\subseteq} (F,E)$ yazılır. Bu ise (B,E) nin esnek çoklu yarı kapalı küme olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.11 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve $\{B_\alpha : \alpha\epsilon I\}$ esnek çoklu yarı kapalı kümelerin bir sınıfı olsun. O zaman

$$\tilde{\bigcap_{\alpha\epsilon I}} (B_\alpha,E)$$

esnek çoklu yarı kapalı kümedir.

İspat: Her $\alpha\epsilon I$ için

$$(F_\alpha,E)^{\circ} \tilde{\subseteq} (B_\alpha,E) \tilde{\subseteq} (F_\alpha,E)$$

olacak biçimde (F_α,E) esnek çoklu kapalı kümesi vardır. Buradan;

$$\left(\tilde{\bigcap_{\alpha\epsilon I}} (F_\alpha,E)\right)^{o} \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcap_{\alpha\epsilon I}} (F_\alpha,E)^{\circ} \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcap_{\alpha\epsilon I}} (B_\alpha,E) \tilde{\subseteq} \tilde{\bigcap_{\alpha\epsilon I}} (F_\alpha,E)$$

elde edilir. Bu ise

$$\widetilde{\bigcap_{\alpha \in I}}(B_\alpha,E)$$

nin esnek çoklu yarı kapalı küme olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.12 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (B,E), X_E de bir esnek çoklu yarı kapalı küme olsun. $(B,E)^\circ \widetilde{\subseteq} (A,E) \widetilde{\subseteq} (B,E)$ ise (A,E) de esnek çoklu yarı kapalı kümedir.

İspat: $(F,E)^\circ \widetilde{\subseteq} (B,E) \widetilde{\subseteq} (F,E)$ olacak şekilde bir (F,E) esnek çoklu kapalı kümesi vardır. Buradan $(A,E) \widetilde{\subseteq} (F,E)$ dir. Ayrıca

$$((F,E)^o)^o = (F,E)^o \widetilde{\subseteq} (B,E)^\circ$$

ve dolayısıyla $(F,E)^\circ \widetilde{\subseteq} (A,E)$ olur. Buradan $(F,E)^\circ \widetilde{\subseteq} (A,E) \widetilde{\subseteq} (F,E)$ elde edilir. Bu ise (A,E) nin esnek çoklu yarı kapalı küme olduğunu gösterir.

Tanım 3.2.13 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (F,E), X_E de bir esnek çoklu küme olsun.

- $(A,E)_o = \widetilde{\bigcup}\{(O,E) : (O,E)$ esnek çoklu yarı açık küme ve $(O,E) \widetilde{\subseteq} (A,E)\}$ kümesi (A,E) nin esnek çoklu yarı içidir.
- $(A,E)_{-} = \widetilde{\bigcap}\{(F,E) : (F,E)$ esnek çoklu yarı kapalı küme ve $(A,E) \widetilde{\subseteq} (F,E)\}$ kümesi (A,E) nin esnek çoklu yarı kapanışıdır.

Teorem 3.2.5 den $(A,E)_{\mathbf{o}}$ kümesi esnek çoklu yarı açık kümedir. Teorem 3.2.11 den ise $(A,E)_{-}$ kümesi esnek çoklu yarı kapalı kümedir.

Örnek 3.2.14 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzayını Örnek 3.2.3 de verildiği şekilde göz önüne alalım.

$$(G,E)_{\mathbf{o}} = (G,E)$$

olduğundan $(G,E)_{\mathbf{o}}$ esnek çoklu yarı açık kümedir.

Örnek 3.2.15 (B,E) esnek çoklu yarı kapalı kümesi Örnek 3.2.9 da verildiği şekilde göz önüne alalım. O halde

$$(B,E)_{-}=(B,E)$$

olduğundan $(B,E)_{-}$ esnek çoklu yarı kapalı kümedir.

Esnek çoklu yarı iç ve esnek çoklu yarı kapanış tanımlarından aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.16 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (A,E), X_E de bir esnek çoklu küme olsun. O halde;

$$(A,E)^{\mathbf{o}}\tilde{\subseteq}(A,E)_{\mathbf{o}}\tilde{\subseteq}(A,E)\tilde{\subseteq}(A,E)_{-}\tilde{\subseteq}\overline{(A,E)}$$

olur.

İspat: Önerme 3.2.2, Önerme 3.2.8 ve Tanım 3.2.13 den açıkça görülür.

Teorem 3.2.17 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (A,E), X_E de bir esnek çoklu küme olsun.

i. $\left((A,E)_{-}\right)^{c}=((A,E)^{c})_{o}$,

ii. $((A,E)_{o})^{c}=((A,E)^{c})_{-}$,

iii. $(A,E)_{o}=\left(((A,E)^{c})_{-}\right)^{c}$.

İspat: **i.**

$$\begin{aligned}((A,E)_{-})^{c}&=\left(\tilde{\cap}\{(F,E):(F,E)\text{ esnek çoklu yarı kapalı küme ve}(A,E)\tilde{\subseteq}(F,E)\}\right)^{c}\\ &=\tilde{\cup}\{(F,E)^{c}:(F,E)\text{ esnek çoklu yarı kapalı küme ve}(A,E)\tilde{\subseteq}(F,E)\}\\ &=\tilde{\cup}\{(F,E)^{c}:(F,E)^{c}\text{ esnek çoklu yarı açık küme ve}(F,E)^{c}\tilde{\subseteq}(A,E)^{c}\}\\ &=((A,E)^{c})_{o}\end{aligned}$$

ii. $((A,E)_o)^c = (\tilde{\cup}\{(O,E):(O,E)$ esnek çoklu yarı açık küme $(O,E)\tilde{\subseteq}(A,E)\})^c$

$= \tilde{\cap}\{(O,E)^c:(O,E)$ esnek çoklu yarı açık küme $(O,E)\tilde{\subseteq}(A,E)\}$

$= \tilde{\cap}\{(O,E)^c:$ $(O,E)^c$ esnek çoklu yarı kapalı küme $(A,E)^c\tilde{\subseteq}(O,E)^c\}$

$= ((A,E)^c)_-$

iii. (ii.) den $((A,E)_o)^c=((A,E)^c)_-$ ifadesinin her iki yanının tümleyeni alınırsa;

$$(((A,E)_o)^c)^c=(((A,E)^c)_-)^c$$

$$(A,E)_o=(((A,E)^c)_-)^c$$

elde edilir.

Teorem 3.2.18 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (F,E) ve (G,E), X_E de iki esnek çoklu küme olsun. O halde

i. $\emptyset_-=\emptyset$ ve $\tilde{X}_-=\tilde{X}$,

ii. (F,E) esnek çoklu yarı kapalı kümedir ancak ve ancak $(F,E)=(F,E)_-$,

iii. $\left((F,E)_-\right)_-=(F,E)_-$,

iv. $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $(F,E)_-\tilde{\subseteq}(G,E)_-$,

v. $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)_-\tilde{\subseteq}(F,E)_-\tilde{\cap}(G,E)_-$,

İspat: **i.** Tanımdan dolayı açıktır.

ii. (F,E) esnek çoklu yarı kapalı ise o zaman (F,E) yi içeren en küçük esnek çoklu yarı kapalı küme (F,E) olduğundan $(F,E)=(F,E)_-$ dir.

Tersine $(F,E)=(F,E)_-$ olsun. $(F,E)_-$, esnek çoklu yarı kapalı küme olduğundan (F,E) de esnek çoklu yarı kapalı kümedir.

iii. $(F,E)_{-}$, esnek çoklu yarı kapalı küme olduğundan (ii.) den dolayı $\left((F,E)_{-}\right)_{-}=(F,E)_{-}$ dır.

iv. $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ olsun. (G,E) yi kapsayan her esnek çoklu yarı kapalı küme aynı zamanda (F,E) yi kapsar. Dolayısıyla (F,E) yi kapsayan esnek çoklu yarı kapalı kümelerin kesişimi, (G,E) yi kapsayan esnek çoklu yarı kapalı kümelerin kesişiminin içindedir. Bu yüzden $(F,E)_{-}\tilde{\subseteq}(G,E)_{-}$ olur.

v. $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)\tilde{\subseteq}(F,E)$ ve $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)\tilde{\subseteq}(G,E)$ olduğundan (iv.) ü kullanarak $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)_{-}\tilde{\subseteq}(F,E)_{-}$ ve $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)_{-}\tilde{\subseteq}(G,E)_{-}$ elde edilir. Bu yüzden $\left((F,E)\tilde{\cap}(G,E)\right)_{-}\tilde{\subseteq}(F,E)_{-}\tilde{\cap}(G,E)_{-}$ dir.

Teorem 3.2.19 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay ve (F,E) ve (G,E), X_E de iki esnek çoklu küme olsun. O halde

i. $\emptyset_o=\emptyset$ ve $\tilde{X}_o=\tilde{X}$,

ii. (F,E) esnek çoklu yarı açık kümedir ancak ve ancak $(F,E) = (F,E)_o$,

iii. $((F,E)_o)_o=(F,E)_o$,

iv. $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ise $(F,E)_o\tilde{\subseteq}(G,E)_o$,

v. $(F,E)_o\tilde{\cup}(G,E)_o\tilde{\subseteq}\left((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\right)_o$,

İspat: **i.** Tanımdan dolayı açıktır.

ii. (F,E) esnek çoklu yarı açık küme ise o zaman (F,E) nin kapsadığı en büyük esnek çoklu yarı açık küme (F,E) olduğundan $(F,E)=(F,E)_o$ dir.

Tersine $(F,E)=(F,E)_o$ olsun. $(F,E)_o$, esnek çoklu yarı açık küme olduğundan (F,E) de esnek çoklu yarı açık kümedir.

iii. $(F,E)_o$, esnek çoklu yarı açık küme olduğundan (ii.) den dolayı

$$((F,E)_o)_o=(F,E)_o$$

dır.

iv. $(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ olsun. $(F,E)_o\tilde{\subseteq}(F,E)\tilde{\subseteq}(G,E)$ ve $(G,E)_o$ tanımından $(F,E)_o$, $(G,E)_o$ nin esnek çoklu yarı açık alt kümesidir. Bu yüzden

$$(F,E)_o\tilde{\subseteq}(G,E)_o$$

dır.

v. $(F,E)\tilde{\subseteq}\big((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\big)$ ve $(G,E)\tilde{\subseteq}\big((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\big)$ olduğundan (iv.) kullanarak

$$(F,E)_o\tilde{\subseteq}\big((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\big)_o \text{ ve } (G,E)_o\tilde{\subseteq}\big((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\big)_o$$

yazılır. Buradan $(F,E)_o\tilde{\cup}(G,E)_o\tilde{\subseteq}\big((F,E)\tilde{\cup}(G,E)\big)_o$ elde edilir.

Teorem 3.2.20 (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzay (A,E), X_E de bir esnek çoklu küme olsun. O halde;

i. $((A,E)^o)_o=((A,E)_o)^o=(A,E)^o$,

ii. $\big(\overline{(A,E)}\big)_-=\overline{\big((A,E)_-\big)}=\overline{(A,E)}$ dir.

İspat: **i.** $(A,E)^o$ esnek çoklu açık küme olduğundan Önerme 3.2.2 den dolayı esnek çoklu yarı açık kümedir. Teorem 3.2.19 (ii.) yi kullanarak $((A,E)^o)_o=(A,E)^o$ dır.

Teorem 3.2.16 yi kullanarak $(A,E)^o\tilde{\subseteq}(A,E)_o\tilde{\subseteq}(A,E)$ yazılır. Bu yüzden $(A,E)^o\tilde{\subseteq}((A,E)_o)^o\tilde{\subseteq}(A,E)^o$ dır. Dolayısıyla $((A,E)_o)^o=(A,E)^o$ elde edilir.

ii. $\overline{(A,E)}$ esnek çoklu kapalı küme olduğundan Önerme 3.2.8 den dolayı esnek çoklu yarı kapalı kümedir. Teorem 3.2.18 (ii.) yi kullanarak $\big(\overline{(A,E)}\big)_-=\overline{(A,E)}$ dır. Teorem 3.2.16 yi kullanarak $(A,E)\tilde{\subseteq}(A,E)_-\tilde{\subseteq}\overline{(A,E)}$ yazılır. Bu yüzden $\overline{(A,E)}\tilde{\subseteq}\overline{\big((A,E)_-\big)}\tilde{\subseteq}\overline{(A,E)}$ dır. Dolayısıyla $\overline{\big((A,E)_-\big)}=\overline{(A,E)}$ elde edilir.

Sonuç olarak $\big(\overline{(A,E)}\big)_-=\overline{\big((A,E)_-\big)}=\overline{(A,E)}$ elde edilir.

4. BÖLÜM

ESNEK ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİ VE YARI SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde ilk olarak esnek çoklu fonksiyon kullanılarak esnek çoklu sürekli fonksiyon ve esnek çoklu açık fonksiyon yapıları elde edilerek bazı teoremleri incelendi. Daha sonra benzer şekilde esnek çoklu yarı açık kümeler kullanılarak esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon ve esnek çoklu yarı açık fonksiyon yapıları elde edildi. Ayrıca bu sürekli fonksiyonların bazı yaygın özellikleri incelendi.

4.1. Esnek Çoklu Sürekli Fonksiyonlar

Bu bölümde esnek çoklu sürekli fonksiyon ve bazı temel özellikleri incelendi.

Tanım 4.1.1 (X_E,τ) bir esnek çoklu topolojik uzay, (F,A), X de bir esnek çoklu küme ve $x_e \tilde{\in}$ (F,A) olsun. Eğer $x_e \tilde{\in} (G,B) \tilde{\subseteq} (F,A)$ olacak şekilde (G,B) esnek çoklu açık kümesi varsa (F,A) kümesine x_e esnek çoklu noktasının bir komşuluğu denir. Özel olarak (F,A) esnek çoklu açık küme ise (F,A) kümesine x_e esnek çoklu noktasının bir açık komşuluğu denir.

Tanım 4.1.2 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve $f: (X_E,\tau) \rightarrow (Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. $f(x)_k$ nın her (G,B) esnek çoklu açık komşuluğu için $f\big((F,A)\big) \tilde{\subseteq} (G,B)$ olacak biçimde x_e nin en az bir (F,A) açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna $x_e \tilde{\in} X_E$ esnek çoklu noktasında süreklidir denir. Eğer f, her $x_e \tilde{\in} X_E$ esnek çoklu noktasında sürekli ise f fonksiyonuna esnek çoklu sürekli fonksiyon denir.

Teorem 4.1.3 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve $f: (X_E,\tau) \rightarrow (Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f, esnek çoklu süreklidir ancak ve ancak Y deki her (G,B) esnek çoklu açık kümesi için $f^{-1}\big((G,B)\big)$, X de bir esnek çoklu açık kümedir.

İspat: f, esnek çoklu sürekli fonksiyon ve (G,B) ,Y *de* esnek çoklu açık küme olsun. $x_e \tilde{\in} f^{-1}\big((G,B)\big)$ alalım. O halde;

$$f(x)_k=f(x_e)\tilde{\in}f\left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)\tilde{\subseteq}(G,B)$$

yazılır. f sürekli olduğundan $f\left((F,A)\right)\tilde{\subseteq}(G,B)$ olacak biçimde $x_e\tilde{\in}(F,A)$ esnek çoklu açık kümesi vardır. Buradan

$$x_e\tilde{\in}(F,A)\tilde{\subseteq}\ f^{-1}\left(f\left((F,A)\right)\right)\tilde{\subseteq}f^{-1}\left((G,B)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $f^{-1}\left((G,B)\right)$ esnek çoklu kümesinin her noktası iç noktadır. Bundan dolayı $f^{-1}\left((G,B)\right)$, X de esnek çoklu açık kümedir.

Tersine (G,B), $f(x)_k$ nın keyfi bir esnek çoklu açık komşuluğu olsun. O halde

$(F,A)=f^{-1}\left((G,B)\right)$ X de açıktır. Bu durumda $x_e\tilde{\in}(F,A)$ ve $f\left((F,A)\right)\tilde{\subseteq}(G,B)$ dir. Dolayısıyla f, x_e de esnek çoklu süreklidir. x_e keyfi olduğundan f esnek çoklu sürekli fonksiyondur.

Örnek 4.1.4 X={6/a,7/b,8/c}, Y={8/x,9/y,10/z}, $E=\{e_1,e_2,e_3\}$, $K=\{k_1,k_2,k_3\}$ olsun. $\varphi:X^*\to Y^*$ ve $\psi:E\to K$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\varphi(a)=z,\quad \varphi(b)=y,\quad \varphi(c)=y,$$
$$\psi(e_1)=k_1,\quad \psi(e_2)=k_1,\quad \psi(e_3)=k_3.$$

(X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzayındaki esnek çoklu kümeler aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$(F_1,A_1)=\{F_1(e_1),F_1(e_2)\}=\{\{1/a,2/b,2/c\},\{1/a,2/b,2/c\}\}$,

$(F_2,A_2)=\{F_1(e_1),F_1(e_2), F_1(e_3)\}=\{\{6/a,7/b,7/c\},\{6/a,7/b,7/c\}, \{6/a,4/b,4/c\}\}$.

(Y_K,σ) esnek çoklu topolojik uzayındaki esnek çoklu kümeler aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$(G_1,B_1)=\{G_1(k_1),G_1(k_2)\}=\{\{3/x,2/y,1/z\},\{5/x,9/y,6/z\}\}$,

$(G_2,B_2)=\{G_2(k_1),G_2(k_2), G_2(k_3)\}=\{\{3/x,7/y,6/z\},\{8/x,9/y,7/z\},\{2/x,4/y,6/z\}\}$.

$f^{-1}(\Phi_Y)=\Phi_X$, $f^{-1}\left(\tilde{Y}\right)=\tilde{X}$ olduğunu biliyoruz.

(G_1,B_1) ve (G_2,B_2) esnek çoklu kümelerinin f esnek çoklu fonksiyonu altındaki ters görüntüsü aşağıda elde edilmiştir;

$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e_1)}(a)=C_{G_1(\psi(e_1))}(\varphi(a))=C_{G_1(k_1)}(z)=1,$

$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e_1)}(b)=C_{G_1(\psi(e_1))}(\varphi(b))=C_{G_1(k_1)}(y)=2,$

$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e_1)}(c)=C_{G_1(\psi(e_1))}(\varphi(c))=C_{G_1(k_1)}(y)=2,$

$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e_2)}(a)=C_{G_1(\psi(e_2))}(\varphi(a))=C_{G_1(k_1)}(z)=1,$

$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e_2)}(b)=C_{G_1(\psi(e_2))}(\varphi(b))=C_{G_1(k_1)}(y)=2,$

$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e_2)}(c)=C_{G_1(\psi(e_2))}(\varphi(c))=C_{G_1(k_1)}(y)=2,$

$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e_3)}(a)=C_{G_1(\psi(e_3))}(\varphi(a))=C_{G_1(k_3)}(z)=0,$

$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e_3)}(b)=C_{G_1(\psi(e_3))}(\varphi(b))=C_{G_1(k_3)}(y)=0,$

$C_{f^{-1}(G_1,B_1)(e_3)}(c)=C_{G_1(\psi(e_3))}(\varphi(c))=C_{G_1(k_3)}(y)=0,$

dır. O halde

$$\left(f^{-1}(G_1,B_1),A_1\right)=\{\{1/a,2/b,2/c\},\{1/a,2/b,2/c\}\}=(F_1,A_1)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e_1)}(a)=C_{G_2(\psi(e_1))}(\varphi(a))=C_{G_2(k_1)}(z)=6,$

$C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e_1)}(b)=C_{G_2(\psi(e_1))}(\varphi(b))=C_{G_2(k_1)}(y)=7,$

$C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e_1)}(c)=C_{G_2(\psi(e_1))}(\varphi(c))=C_{G_2(k_1)}(y)=7,$

$C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e_2)}(a)=C_{G_2(\psi(e_2))}(\varphi(a))=C_{G_2(k_1)}(z)=6,$

$C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e_2)}(b)=C_{G_2(\psi(e_2))}(\varphi(b))=C_{G_2(k_1)}(y)=7,$

$C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e_2)}(c)=C_{G_2(\psi(e_2))}(\varphi(c))=C_{G_2(k_1)}(y)=7,$

$C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e_3)}(a)=C_{G_2(\psi(e_3))}(\varphi(a))=C_{G_2(k_3)}(z)=6,$

$C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e_3)}(b)=C_{G_2(\psi(e_3))}(\varphi(b))=C_{G_2(k_3)}(y)=4,$

$C_{f^{-1}(G_2,B_2)(e_3)}(c)=C_{G_2(\psi(e_3))}(\varphi(c))=C_{G_2(k_3)}(y)=4,$

dır. O halde

$$\left(f^{-1}(G_2,B_2),A_2\right)=\{\{6/a,7/b,7/c\},\{6/a,7/b,7/c\},\ \{6/a,4/b,4/c\}\}=(F_2,A_2)$$

elde edilir. Sonuç olarak f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ esnek çoklu sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.1.5 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f, esnek çoklu süreklidir ancak ve ancak Y deki her (G,B) esnek çoklu kapalı kümesi için $f^{-1}\left((G,B)\right)$, X de bir esnek çoklu kapalı kümedir.

İspat: Teorem 4.1.3 ün ispatına benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 4.1.6 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. f, esnek çoklu sürekli fonksiyondur.

ii. X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için $f\left(\overline{(F,A)}\right)\tilde{\subseteq}\ \overline{f(F,A)}$ dır.

iii. Y deki her (G,B) esnek çoklu kümesi için $\overline{f^{-1}\left((G,B)\right)}\tilde{\subseteq}\ f^{-1}\left(\overline{(G,B)}\right)$ dir.

İspat: **i⇒ii**: f, esnek çoklu sürekli fonksiyon ve (F,A), X de esnek çoklu küme olsun.

$$f\left((F,A)\right)\tilde{\subseteq}\ \overline{f\left((F,A)\right)}$$

olduğundan

$$(F,A)\tilde{\subseteq}\ f^{-1}\left(f(F,A)\right)\tilde{\subseteq}\ f^{-1}\left(\overline{f(F,A)}\right)$$

dır. f sürekli ve $\overline{f(F,A)}$ kapalı olduğundan $f^{-1}\left(\overline{f(F,A)}\right)$ kapalı olup

$$\overline{f^{-1}\left(\overline{f(F,A)}\right)}=f^{-1}\left(\overline{f(F,A)}\right)$$

dır. O halde $f((\overline{F,A}))\tilde{\subseteq}\ \overline{f(F,A)}$ olur.

ii⇒iii : *Y* de bir esnek çoklu küme (G,B) olsun. $(F,A)=f^{-1}\left((G,B)\right)$ diyelim. (ii) gereğince

$$f\left((\overline{F,A})\right)\tilde{\subseteq}\ \overline{f\left((F,A)\right)}=f\overline{\left(f^{-1}(G,B)\right)}\ \tilde{\subseteq}\ (\overline{G,B})$$

ve böylece $(\overline{F,A})\tilde{\subseteq}\ f^{-1}\left(\overline{(G,B)}\right)$ olur. Buradan $\overline{f^{-1}\left((G,B)\right)}\tilde{\subseteq}\ f^{-1}\left((\overline{G,B})\right)$ elde edilir.

iii⇒i : (G,B) esnek çoklu kümesi Y de kapalı olsun. O halde $(\overline{G,B})=(G,B)$ dir. (iii.) gereğince

$$\overline{f^{-1}\left((G,B)\right)}\ \tilde{\subseteq}\ f^{-1}\left((\overline{G,B})\right)=f^{-1}\left((G,B)\right)$$

dir. O halde

$$\overline{f^{-1}\left((G,B)\right)}=f^{-1}\left((G,B)\right)$$

olur. Buradan $f^{-1}\left((G,B)\right)$, *X* de kapalıdır. Teorem 4.1.5 gereğince f fonksiyonu süreklidir.

Teorem 4.1.7 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f, esnek çoklu süreklidir ancak ve ancak Y deki her (G,B) esnek çoklu kümesi için $f^{-1}\left((G,B)^{\circ}\right)\tilde{\subseteq}\ \left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)^{\circ}$ dır.

İspat: Y de bir esnek çoklu küme (G,B) olsun. Bu durumda $(G,B)^{\circ}\subseteq(G,B)$ olduğundan $f^{-1}\left((G,B)^{\circ}\right)$ kümesi X de esnek çoklu açıktır. Bu durumda

$$\left(f^{-1}\left((G,B)^{\circ}\right)\right)^{\circ}=f^{-1}\left((G,B)^{\circ}\right)$$

olur. O halde $f^{-1}\left((G,B)^\circ\right)=\left(f^{-1}\left((G,B)^\circ\right)\right)^\circ \tilde{\subseteq} \left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)^\circ$ dır. Yani $f^{-1}\left((G,B)^\circ\right)\tilde{\subseteq} \left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)^\circ$ dir.

Tersine (G,B) kümesi Y uzayında esnek çoklu açık bir küme olsun. Bu durumda $(G,B)^\circ=(G,B)$ dir. Teoremin ifadesinden $f^{-1}\left((G,B)^\circ\right)\tilde{\subseteq} \left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)^\circ$ dır. Diğer yandan $f^{-1}\left((G,B)^\circ\right)=f^{-1}\left((G,B)\right)$ olduğundan $f^{-1}\left((G,B)\right)\tilde{\subseteq} \left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)^\circ$ olur. Teorem 4.1.3 gereğince $f^{-1}\left((G,B)\right)$ kümesi X uzayında esnek çoklu açıktır. Böylece f fonksiyonu esnek çoklu süreklidir.

Tanım 4.1.8 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun.

- X deki her (F,A) esnek çoklu açık kümesi için $f\left((F,A)\right)$, Y de esnek çoklu açık küme ise f esnek çoklu fonksiyonuna esnek çoklu açık fonksiyon denir.
- [15] X deki her (G,B) esnek çoklu kapalı kümesi için $f\left((G,B)\right)$, Y de esnek çoklu kapalı küme ise f esnek çoklu fonksiyonuna esnek çoklu kapalı fonksiyon denir.

Teorem 4.1.9 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun.

i. f, esnek çoklu açık fonksiyondur ancak ve ancak X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için $f\left((F,A)^\circ\right)\tilde{\subseteq} \left(f\left((F,A)\right)\right)^\circ$ dır.

ii. f, esnek çoklu kapalı fonksiyondur. Ancak ve ancak X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için $\overline{f\left((F,A)\right)}\tilde{\subseteq} f\left(\overline{(F,A)}\right)$ dır.

İspat: **i.** f, esnek çoklu açık fonksiyon ve (F,A), X de esnek çoklu küme olsun. $(F,A)^\circ$, esnek çoklu açık küme, $(F,A)^\circ\subseteq(F,A)$ ve f, esnek çoklu açık fonksiyon olduğundan $f\left((F,A)^\circ\right)$, Y de esnek çoklu açık kümedir. Dolayısıyla $f\left((F,A)^\circ\right)\tilde{\subseteq} f\left((F,A)\right)$ dır. Bu yüzden $f\left((F,A)^\circ\right)\tilde{\subseteq} \left(f\left((F,A)\right)\right)^\circ$ elde edilir.

Tersine (F,A), X de esnek çoklu açık küme olsun. O halde $(F,A)=(F,A)^{\circ}$ dır.

$$f\big((F,A)^{\circ}\big)\tilde{\subseteq}\ \Big(f\big((F,A)\big)\Big)^{\circ}$$

olduğundan

$$f\big((F,A)\big)=f\big((F,A)^{\circ}\big)\tilde{\subseteq}\ \Big(f\big((F,A)\big)\Big)^{\circ}\ \tilde{\subseteq}\ f\big((F,A)\big)$$

dır. Bu yüzden $f\big((F,A)\big)=\Big(f\big((F,A)\big)\Big)^{\circ}$ dır. O halde f esnek çoklu açık fonksiyondur.

ii. f, esnek çoklu kapalı fonksiyon ve (F,A), X de esnek çoklu küme olsun. f, esnek çoklu kapalı fonksiyon olduğundan $f\big(\overline{(F,A)}\big)$, Y de esnek çoklu kapalı küme ve $f\big((F,A)\big)\tilde{\subseteq}\ f\big(\overline{(F,A)}\big)$ dır. Bu yüzden

$$\overline{f\big((F,A)\big)}\tilde{\subseteq}\ f\big(\overline{(F,A)}\big)$$

elde edilir.

Tersine (F,A), X de esnek çoklu kapalı küme olsun. O halde $(F,A)=\overline{(F,A)}$ dır. $\overline{f\big((F,A)\big)}\tilde{\subseteq}\ f\big(\overline{(F,A)}\big)$ olduğundan

$$\overline{f\big((F,A)\big)}\tilde{\subseteq}\ f\big(\overline{(F,A)}\big)=f\big((F,A)\big)\tilde{\subseteq}\ \overline{f\big((F,A)\big)}$$

dır. Dolayısıyla $\overline{f\big((F,A)\big)}=f\big((F,A)\big)$ elde edilir.

Teorem 4.1.10 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ esnek çoklu sürekli ve esnek çoklu açık fonksiyon olsun. O halde Y deki her (G,B) esnek çoklu kümesi için

$$\overline{f^{-1}\big((G,B)\big)}=f^{-1}\Big(\overline{(G,B)}\Big)$$

dir.

İspat: Teorem 4.1.6 (iii) den $\overline{f^{-1}((G,B))} \widetilde{\subseteq} f^{-1}\left((\overline{G,B})\right)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $f^{-1}\left((\overline{G,B})\right) \widetilde{\subseteq} \overline{f^{-1}((G,B))}$ olduğunu gösterelim. Teorem 4.1.9 (i.) de (F,A) esnek çoklu kümesi yerine $(F,A)=f^{-1}((G,B)^c)$ alırsak,

$$f((f^{-1}((G,B)^c))^o) \widetilde{\subseteq} (f(f^{-1}((G,B)^c)))^o \widetilde{\subseteq} ((G,B)^c)^o$$

elde edilir. Bu ifadeyi f^{-1} ile işleme sokarsak,

$$(f^{-1}((G,B)^c))^o \widetilde{\subseteq} f^{-1}(((G,B)^c)^o)$$

elde edilir. Her iki tarafın tümleyenini alırsak ,

$$(f^{-1}(((G,B)^c)^o))^c \widetilde{\subseteq} f^{-1}((((G,B)^c)^o)^c) = f^{-1}((((\overline{G,B}))^c)^c) = f^{-1}\left((\overline{G,B})\right) \widetilde{\subseteq}$$

$$\widetilde{\subseteq} ((f^{-1}((G,B)^c))^o)^c = \overline{(((f^{-1}((G,B)^c))^c)} \widetilde{\subseteq} \overline{f^{-1}((G,B))}$$

elde edilir. Yani $f^{-1}\left((\overline{G,B})\right) \widetilde{\subseteq} \overline{f^{-1}((G,B))}$ dır.

Tanım 4.1.11 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f, birebir ve örten esnek çoklu sürekli ve f^{-1} esnek çoklu sürekli fonksiyon ise f esnek çoklu fonksiyonuna X den Y ye bir esnek çoklu homeomorfizm denir.

X ile Y arasında esnek çoklu bir homeomorfizma varsa X, Y ye esnek çoklu hemeomorftur denir.

Teorem 4.1.12 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f, esnek çoklu açık fonksiyondur ancak ve ancak f esnek çoklu kapalı fonksiyondur.

İspat: X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için

$$f((F,A)^c) = \left(f(F,A)\right)^c$$

dır.

(F,A), X de esnek çoklu kapalı küme olsun. O halde $(F,A)^c$ esnek çoklu açıktır. f, esnek çoklu açık fonksiyon ve $f((F,A)^c)=\big(f(F,A)\big)^c$ olduğundan $\big(f(F,A)\big)^c$esnek çoklu açıktır. Bu durumda $f\big((F,A)\big)$ esnek çoklu kapalıdır. Yani f esnek çoklu kapalıdır.

Tersine (F,A), X de esnek çoklu açık bir küme olsun. O halde $(F,A)^c$ esnek çoklu kapalıdır. f esnek çoklu kapalı fonksiyon ve

$$f((F,A)^c)=\big(f(F,A)\big)^c$$

olduğundan $\big(f(F,A)\big)^c$ esnek çoklu kapalıdır. Bu durumda $f\big((F,A)\big)$ esnek çoklu açıktır. Yani f, esnek çoklu açıktır.

Teorem 4.1.13 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f esnek çoklu fonksiyonu sürekli ve kapalıdır ancak ve ancak X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için

$$\overline{f\big((F,A)\big)}=f\big(\overline{(F,A)}\big)$$

dır.

İspat: Teorem 4.1.6 ve Teorem 4.1.9 (ii.) den açıktır.

Teorem 4.1.14 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f esnek çoklu sürekli fonksiyondur ancak ve ancak f^{-1} esnek çoklu açık (kapalı) fonksiyondur.

İspat: (G,B)**,** *Y* de esnek çoklu açık küme olsun. O halde $f^{-1}\big((G,B)\big)$, *X* de esnek çoklu açık kümedir. (f esnek çoklu sürekli fonksiyon olduğundan) Dolayısıyla f^{-1} esnek çoklu açık fonksiyondur. f^{-1} in esnek çoklu kapalı olması benzer şekilde yapılır.

Tersine (G,B), Y de esnek çoklu açık(kapalı) küme olsun. $f^{-1}((G,B))$, *X* de esnek çoklu açık (kapalı) kümedir. (f^{-1} esnek çoklu açık (kapalı) fonksiyon olduğundan) Dolayısıyla f esnek çoklu fonksiyonu süreklidir.

Teorem 4.1.15 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\to(Y_K,\sigma)$ birebir ve örten esnek çoklu fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. f, esnek çoklu bir homeomorfizmdir.

ii. f, esnek çoklu sürekli ve esnek çoklu açık fonksiyondur.

iii. f, esnek çoklu sürekli ve esnek çoklu kapalı fonksiyondur.

iv. X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için $\overline{f((F,A))}=f(\overline{(F,A)})$ dır.

İspat: **i.⇒ ii.** Teorem 4.1.14 den açıktır.

ii. ⇒ iii. Teorem 4.1.12 dan f esnek çoklu açık fonksiyonu, esnek çoklu kapalı olduğundan görülür.

iii. ⇒ iv. Teorem 4.1.13 den açıktır.

4.2. Esnek Çoklu Yarı Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\to(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. Y deki her (G,B) esnek çoklu açık kümesi için $f^{-1}((G,B))$, X de esnek çoklu yarı açık küme ise f fonksiyonuna esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon denir.

Teorem 4.2.2 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\to(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. Eğer f esnek çoklu sürekli fonksiyon ise esnek çoklu yarı sürekli fonksiyondur.

İspat: f esnek çoklu sürekli fonksiyon olsun. Y deki her (G,B) esnek çoklu açık kümesi için $f^{-1}((G,B))$, *X* de esnek çoklu açık küme ve $f^{-1}((G,B))$ esnek çoklu açık kümesi aynı zamanda esnek çoklu yarı açık küme olacağından f esnek çoklu yarı sürekli fonksiyondur.

Yukarıda verilen teoremin tersi doğru değildir. Yani her esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon, esnek çoklu sürekli fonksiyon değildir. Bu duruma aşağıda bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.2.3 $X=\{9/a,10/b,11/c\}$ ve $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ olsun. $\varphi:X^* \to X^*$ ve $\psi:E\to E$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\varphi(a)=a,\quad \varphi(b)=b,\quad \varphi(c)=c,$$
$$\psi(e_1)=e_1,\quad \psi(e_2)=e_2,\quad \psi(e_3)=e_3\quad \psi(e_4)=e_4.$$

(X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzayındaki esnek çoklu kümeler aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$(F_1,A_1)=\{F_1(e_1),F_1(e_2),F_1(e_4)\}=\{\{6/a,1/b\},\{7/a,9/b,5/c\},\{5/a,3/b,9/c\}\}$,

$(F_2,A_2)=\{F_1(e_1),F_1(e_2)\}=\{\{4/a,1/b\},\{6/a,5/b,2/c\}\}$.

(X_E,σ) esnek çoklu topolojik uzayındaki esnek çoklu kümeler aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$(G_1,B_1)=\{G_1(e_1),G_1(e_2)\}=\{\{7/a,3/b,2/c\},\{8/a,9/b,6/c\}\}$.

$f^{-1}(\Phi)=\Phi$, $f^{-1}(\widetilde{X})=\widetilde{X}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\left(f^{-1}(G_1,B_1),A_1\right)=(G_1,B_1)$ olduğu kolayca gösterilebilir. (G_1,B_1) esnek çoklu açık kümesi (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzayında esnek çoklu açık küme değildir. Bu yüzden f: $(X_E,\tau)\to(X_E,\sigma)$ esnek çoklu sürekli fonksiyon değildir. Ancak (G_1,B_1) esnek çoklu açık kümesi (X_E,τ) esnek çoklu topolojik uzayında esnek çoklu yarı açık küme olduğundan f esnek çoklu yarı sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.2.4 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\to(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f, esnek çoklu yarı sürekli fonksiyondur ancak ve ancak Y deki her (G,B) esnek çoklu kapalı kümesi için $f^{-1}\big((G,B)\big)$, X de esnek çoklu yarı kapalı kümedir.

İspat: f, esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon ve (G,B), *Y* de esnek çoklu kapalı küme olsun. O halde $(G,B)^c$, Y de esnek çoklu açık küme ve f esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon olduğundan ve

$$f^{-1}((G,B)^c)=X_E-f^{-1}\big((G,B)\big)$$

olduğundan esnek çoklu yarı açık kümedir. Dolayısıyla $f^{-1}\big((G,B)\big)$, X de esnek çoklu yarı kapalı kümedir.

Tersine Y deki $(G,B)^c$ esnek çoklu kapalı kümesi için $f^{-1}((G,B)^c)$, X de esnek çoklu yarı kapalı küme olsun. O halde (G,B), Y de esnek çoklu açık küme ve

$$f^{-1}((G,B)^c)=X_E-f^{-1}\big((G,B)\big)$$

olur. Dolayısıyla $f^{-1}\big((G,B)\big)$, X de esnek çoklu yarı açık kümedir. Bu ise f nin esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.5 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f esnek çoklu yarı sürekli fonksiyondur ancak ve ancak X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için $f\big((F,A)_{-}\big)\widetilde{\subseteq}\overline{f\big((F,A)\big)}$ dır.

İspat: f, esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon ve (F,A), X de esnek çoklu kapalı küme olsun. $\overline{f\big((F,A)\big)}$, Y de esnek çoklu kapalı küme ve f esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}\left(\overline{f\big((F,A)\big)}\right)$, X de esnek çoklu yarı kapalı küme ve $(F,A)\widetilde{\subseteq}f^{-1}\left(\overline{f\big((F,A)\big)}\right)$ dır. Bu yüzden

$$(F,A)_{-}\widetilde{\subseteq}\left(f^{-1}\left(\overline{f\big((F,A)\big)}\right)\right)_{-}=f^{-1}\left(\overline{f\big((F,A)\big)}\right)$$

olur. Dolayısıyla $f\big((F,A)_{-}\big)\widetilde{\subseteq}\overline{f\big((F,A)\big)}$ dır.

Tersine (G,B), Y de esnek çoklu kapalı küme olsun. O zaman $f^{-1}\big((G,B)\big)$, X de esnek çoklu kümedir. O halde

$$f\left(f^{-1}\left((G,B)\right)_{-}\right)\tilde{\subseteq}\overline{f\left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)}\tilde{\subseteq}\overline{(G,B)}=(G,B)$$

elde edilir. Bu yüzden $\left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)_{-}=f^{-1}\left((G,B)\right)$ olur. Dolayısıyla $f^{-1}\left((G,B)\right)$, X de esnek çoklu yarı kapalı kümedir. Bu ise f nin esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.6 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f esnek çoklu yarı sürekli fonksiyondur ancak ve ancak Y deki her (G,B) esnek çoklu kümesi için

$$f^{-1}((G,B)^{o})\tilde{\subseteq}\left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)_{o}$$

dır.

İspat: f esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon olsun. $(G,B)^{o}$, Y de esnek çoklu açık küme ve f esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}((G,B)^{o})$, X de esnek çoklu yarı açık küme ve $f^{-1}((G,B)^{o})\tilde{\subseteq}f^{-1}\left((G,B)\right)$ dir. Bu yüzden

$$\left(f^{-1}((G,B)^{o})\right)_{o}=f^{-1}((G,B)^{o})\tilde{\subseteq}\left(f^{-1}(G,B)\right)_{o}$$

elde edilir.

Tersine (G,B), Y de esnek çoklu açık küme olsun. O halde

$$f^{-1}((G,B)^{o})\tilde{\subseteq}\left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)_{o}$$

dır. Bu yüzden $f^{-1}\left((G,B)\right)\tilde{\subseteq}\left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)_{o}$ olur. Dolayısıyla

$$\left(f^{-1}\left((G,B)\right)\right)_{o}=f^{-1}\left((G,B)\right)$$

dir. Bu ise f nin esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon olduğunu gösterir.

Tanım 4.2.7 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\to(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun.

- X deki her (F,A) esnek çoklu yarı açık kümesi için $f\big((F,A)\big)$, Y de esnek çoklu yarı açık küme ise f esnek çoklu fonksiyonuna esnek çoklu yarı açık fonksiyon denir.
- X deki her (G,B) esnek çoklu yarı kapalı kümesi için $f\big((G,B)\big)$, Y de esnek çoklu yarı kapalı küme ise f esnek çoklu fonksiyonuna esnek çoklu yarı kapalı fonksiyon denir.

Teorem 4.2.8 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\to(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun.

i. f, esnek çoklu yarı açık fonksiyondur ancak ve ancak X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için $f((F,A)_o)\tilde{\subseteq}\Big(f\big((F,A)\big)\Big)_o$ dır.

ii. f, esnek çoklu yarı kapalı fonksiyondur. Ancak ve ancak X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için $\Big(f\big((F,A)\big)\Big)_-\tilde{\subseteq}f\big((F,A)_-\big)$ dır.

İspat: **i.** f, esnek çoklu yarı açık fonksiyon ve (F,A), X de esnek çoklu küme olsun. $(F,A)_o$, esnek çoklu yarı açık küme, $(F,A)_o\tilde{\subseteq}(F,A)$ ve f, esnek çoklu yarı açık fonksiyon olduğundan $f((F,A)_o)$, Y de esnek çoklu yarı açık kümedir. Dolayısıyla $f((F,A)_o)\tilde{\subseteq} f\big((F,A)\big)$ dır. Bu yüzden $f((F,A)_o)\tilde{\subseteq}\Big(f\big((F,A)\big)\Big)_o$ elde edilir.

Tersine (F,A), X de esnek çoklu yarı açık küme olsun. O halde $(F,A)=(F,A)_o$ dır.

$$f((F,A)_o)\tilde{\subseteq}\Big(f\big((F,A)\big)\Big)_o$$

olduğundan

$$f\big((F,A)\big)= f((F,A)_o)\tilde{\subseteq}\Big(f\big((F,A)\big)\Big)_o\tilde{\subseteq} f\big((F,A)\big)$$

dır. Bu yüzden $f((F,A))=\left(f((F,A))\right)_o$ dır. Bu da $f((F,A))$ nın esnek çoklu yarı açık küme olduğunu gösterir. O halde f esnek çoklu yarı açık fonksiyondur.

ii. f, esnek çoklu yarı kapalı fonksiyon ve (F,A), X de esnek çoklu küme olsun. f, esnek çoklu yarı kapalı fonksiyon olduğundan $f((F,A)_-)$, Y de esnek çoklu yarı kapalı küme ve $f((F,A))\tilde{\subseteq} f((F,A)_-)$ dır. Bu yüzden

$$\left(f((F,A))\right)_-\tilde{\subseteq} f((F,A)_-)$$

elde edilir.

Tersine (F,A), X de esnek çoklu yarı kapalı küme olsun. O halde $(F,A)=(F,A)_-$ dır. $\left(f((F,A))\right)_-\tilde{\subseteq} f((F,A)_-)$ olduğundan

$$\left(f((F,A))\right)_-\tilde{\subseteq} f((F,A)_-) = f((F,A))\tilde{\subseteq}\left(f((F,A))\right)_-$$

dır. Dolayısıyla $\left(f((F,A))\right)_- = f((F,A)_-)$ elde edilir. Bu da $f((F,A))$ nın esnek çoklu yarı kapalı küme olduğunu gösterir. O halde f esnek çoklu yarı kapalı fonksiyondur.

Tanım 4.2.9 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve $f: (X_E,\tau)\to(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. Y deki her (G,B) esnek çoklu yarı açık kümesi için $f^{-1}((G,B))$, X de esnek çoklu yarı açık küme ise f esnek çoklu fonksiyonuna esnek çoklu kararsız fonksiyon denir.

Esnek çoklu sürekli fonksiyon ve esnek çoklu kararsız fonksiyon birbirinden bağımsız iki kavramdır. Yani her ikisi de birbirlerini gerektirmezler. Aşağıdaki örneklerden bu kolayca görülebilir.

Örnek 4.2.10 $X=\{7/a,8/b\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ olsun. $\varphi:X^*\to X^*$ ve $\psi:E\to E$ fonksiyonları birim olsun. O halde f de birim fonksiyon olacaktır. X_E sınıfında iki esnek çoklu küme aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$(F,E)=\{F(e_1),F(e_2)\}=\{\{5/a,3/b\},\{4/a,7/b\}\},$$

$$(G,E)=\{G(e_1),G(e_2)\}=\{\{5/a,6/b\},\{6/a,8/b\}\}.$$

$\tau_1=\{\Phi, \widetilde{X},(F,E)\}$ ve $\tau_2=\{\Phi, \widetilde{X},(G,E)\}$ olacak biçimde (X_E ,τ_1) ve (X_E ,τ_2) esnek çoklu topolojik uzaylarını tanımlayalım.

Şimdi f: $(X_E ,\tau_1)\rightarrow(X_E ,\tau_2)$ esnek çoklu fonksiyonunun kararsız fakat sürekli olmadığını gösterelim.

(X_E ,τ_2) uzayında herhangi bir esnek çoklu yarı açık küme (A,E) olsun. O halde $(G,E)\widetilde{\subseteq}(A,E)\widetilde{\subseteq}\overline{(G,E)}$ olacaktır. Çünkü (X_E ,τ_2) uzayında (G,E) den başka esnek çoklu açık küme yoktur. (A,E) esnek çoklu yarı açık kümesinin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}((A,E))=(A,E)\widetilde{\supseteq}(G,E)$ olur. $(G,E)\widetilde{\supseteq}(F,E)$ ve $\overline{(F,E)}=\widetilde{X}$ olacağından $(F,E)\widetilde{\subseteq}f^{-1}((A,E))\widetilde{\subseteq}\overline{(F,E)}$ elde edilir. Dolayısıyla f esnek çoklu kararsız fonksiyondur. $f^{-1}((G,E))=(G,E)$, (X_E ,τ_1) uzayında esnek çoklu açık küme olmadığından f esnek çoklu sürekli fonksiyon değildir.

Örnek 4.2.11 $X=\{6/a,6/b\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ olsun. $\varphi:X^*\rightarrow X^*$ ve $\psi:E\rightarrow E$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\varphi(a)=a, \quad \varphi(b)=b,$$
$$\psi(e_1)=e_2, \quad \psi(e_2)=e_2.$$

X_E sınıfında iki esnek çoklu küme aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$(F,E)=\{F(e_1),F(e_2)\}=\{\{4/a,3/b\},\{4/a,3/b\}\},$$

$$(G,E)=\{G(e_1),G(e_2)\}=\{\{5/a,6/b\},\{4/a,3/b\}\}.$$

$\tau_1=\{\Phi, \widetilde{X},(F,E)\}$ ve $\tau_2=\{\Phi, \widetilde{X},(G,E)\}$ olacak biçimde (X_E ,τ_1) ve (X_E ,τ_2) esnek çoklu topolojik uzaylarını tanımlayalım.

Şimdi f: $(X_E ,\tau_1)\rightarrow(X_E ,\tau_2)$ esnek çoklu fonksiyonunun sürekli fakat kararsız olmadığını gösterelim.

Kolayca gösterilebilir ki $f^{-1}((G,E))=(F,E)$ dir. Dolayısıyla f esnek çoklu sürekli fonksiyondur.

$$(A,E)=\{A(e_1),A(e_2)\}=\{\{8/a,7/b\},\{9/a,10/b\}\}$$

esnek çoklu kümesi için $(G,E)\tilde{\subseteq}(A,E)\tilde{\subseteq}\overline{(G,E)}=\tilde{X}$ olacağından (A,E), $(X_E\ ,\tau_2)$ uzayında esnek çoklu yarı açık kümedir. $f^{-1}((A,E))=\{\{9/a,10/b\},\{9/a,10/b\}\}$ olduğu kolayca görülür. Ancak bu esnek çoklu küme, esnek çoklu yarı açık küme değildir. Çünkü $(F,E)\tilde{\subseteq}f^{-1}((A,E))\tilde{\subseteq}\overline{(F,E)}=(F,E)^c$ ifadesi doğru değildir. Burada $(F,E)^c=\{\{2/a,3/b\},\{2/a,3/b\}\}$ dür ve dolayısıyla $f^{-1}((A,E))\tilde{\subsetneq}(F,E)^c$ dir. O halde f esnek çoklu kararsız fonksiyon değildir.

Teorem 4.2.12 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f esnek çoklu kararsız fonksiyondur ancak ve ancak Y deki her (G,B) esnek çoklu yarı kapalı kümesi için $f^{-1}\big((G,B)\big)$, X de esnek çoklu yarı kapalı kümedir.

İspat: Tanım 4.2.9 dan açıktır.

Teorem 4.2.13 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon olsun. f esnek çoklu kararsız fonksiyondur ancak ve ancak X deki her (F,A) esnek çoklu kümesi için

$$f((F,A)_{-})\tilde{\subseteq}\Big(f\big((F,A)\big)\Big)_{-}$$

dır.

İspat: f , esnek çoklu kararsız fonksiyon ve (F,A), X de esnek çoklu küme olsun. $f\big((F,A)_{-}\big)$, Y de esnek çoklu yarı kapalı küme ve f esnek çoklu kararsız fonksiyon olduğundan $f^{-1}\Big(f\big((F,A)_{-}\big)\Big)$, X de esnek çoklu yarı kapalı küme ve $(F,A)\tilde{\subseteq}f^{-1}\Big(f\big((F,A)_{-}\big)\Big)$ dır. Bu yüzden

$$(F,A)_{-}\tilde{\subseteq}\Big(f^{-1}\big(f((F,A)_{-})\big)\Big)_{-}=f^{-1}\big(f((F,A)_{-})\big)$$

olur. Dolayısıyla $f\big((F,A)_{-}\big)\tilde{\subseteq}\Big(f\big((F,A)\big)\Big)_{-}$ dır.

Tersine (G,B), Y de esnek çoklu yarı kapalı küme olsun. O zaman $f^{-1}\big((G,B)\big)$, X de esnek çoklu kümedir. O halde

$$f\left(f^{-1}\big((G,B)\big)_{-}\right)\tilde{\subseteq}\left(f\left(f^{-1}\big((G,B)\big)\right)\right)_{-}=(G,B)_{-}=(G,B)$$

elde edilir. Bu yüzden $\left(f^{-1}\big((G,B)\big)\right)_{-}=f^{-1}\big((G,B)\big)$ olur. Dolayısıyla $f^{-1}\big((G,B)\big)$, X de esnek çoklu yarı kapalı kümedir. Bu ise f nin esnek çoklu kararsız fonksiyon olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.14 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ esnek çoklu yarı açık ve esnek çoklu birebir ve örten fonksiyon olsun. O halde f^{-1}: $(Y_K,\sigma)\rightarrow(X_E,\tau)$ esnek çoklu kararsız fonksiyondur.

İspat: (F,A), X de esnek çoklu yarı açık küme olsun. f esnek çoklu yarı açık, esnek çoklu birebir ve örten fonksiyon olduğundan $g^{-1}\big((F,A)\big)=f\big((F,A)\big)$ $\left(g^{-1}=f\right)$ ve $f\big((F,A)\big)$, Y de esnek çoklu yarı açık kümedir. Bu ise f^{-1} in esnek çoklu kararsız fonksiyon olduğunu gösterir.

Tanım 4.2.15 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon olsun. f, birebir ve örten, esnek çoklu kararsız ve esnek çoklu yarı açık fonksiyon ise f esnek çoklu fonksiyonuna X den Y ye bir esnek çoklu yarı homeomorfizm denir.

Teorem 4.2.16 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu fonksiyon olsun. f, esnek çoklu sürekli ve esnek çoklu açık fonksiyon ise f esnek çoklu kararsız ve esnek çoklu yarı açık fonksiyondur.

İspat: f esnek çoklu sürekli ve esnek çoklu açık fonksiyon olsun. (G,B), Y de esnek çoklu yarı açık küme olsun. O halde $(O,B)\tilde{\subseteq}(G,B)\tilde{\subseteq}\overline{(O,B)}$ olacak biçimde (O,B) esnek çoklu açık kümesi vardır. Buradan

$$f^{-1}\big((O,B)\big)\tilde{\subseteq}f^{-1}\big((G,B)\big)\tilde{\subseteq}f^{-1}\big(\overline{(O,B)}\big)$$

dır. f esnek çoklu sürekli ve esnek çoklu açık fonksiyon olduğundan Teorem 4.1.10 dan

$$f^{-1}\left(\overline{(O,B)}\right)=\overline{\left(f^{-1}\left((O,B)\right)\right)}$$

ve dolayısıyla

$$f^{-1}\left((O,B)\right)\tilde{\subseteq}f^{-1}\left((G,B)\right)\tilde{\subseteq}\overline{\left(f^{-1}\left((O,B)\right)\right)}$$

elde edilir. Bu ise $f^{-1}\left((G,B)\right)$ nin X de esnek çoklu yarı açık küme olduğunu gösterir. Dolayısıyla f, esnek çoklu kararsız fonksiyondur.

Şimdi f in esnek çoklu yarı açık fonksiyon olduğunu gösterelim.

(F,A), X de esnek çoklu yarı açık küme olsun. O halde

$$(U,A)\tilde{\subseteq}(F,A)\tilde{\subseteq}\overline{(U,A)}$$

olacak biçimde X de (U,A) esnek çoklu açık kümesi vardır. Buradan

$$f\left((U,A)\right)\tilde{\subseteq}f\left((F,A)\right)\tilde{\subseteq}f\left(\overline{(U,A)}\right)$$

dır. f esnek çoklu sürekli ve esnek çoklu açık fonksiyon olduğundan

$$f\left(\overline{(U,A)}\right)\tilde{\subseteq}\overline{\left(f\left((U,A)\right)\right)}$$

ve dolayısıyla

$$f\left((U,A)\right)\tilde{\subseteq}f\left((F,A)\right)\tilde{\subseteq}\overline{\left(f\left((U,A)\right)\right)}$$

elde edilir. Bu ise $f\left((F,A)\right)$ nın Y de esnek çoklu yarı açık küme olduğunu gösterir. Dolayısıyla f esnek çoklu yarı açık fonksiyondur.

Teorem 4.2.17 (X_E,τ) ve (Y_K,σ) iki esnek çoklu topolojik uzay ve f: $(X_E,\tau)\rightarrow(Y_K,\sigma)$ bir esnek çoklu homeomorfizm olsun. O halde f, esnek çoklu yarı homeomorfizmdir.

İspat: f esnek çoklu homeomorfizm olsun. O halde f esnek çoklu birebir örten, esnek çoklu sürekli ve f^{-1} esnek çoklu sürekli fonksiyondur. Bu yüzden f esnek çoklu sürekli fonksiyonu, esnek çoklu açık fonksiyondur. Bu ise f in esnek çoklu kararsız ve esnek çoklu yarı açık fonksiyon olduğunu gösterir. Dolayısıyla f esnek çoklu yarı homeomorfizmdir.

5. BÖLÜM

TARTIŞMA–SONUÇ VE ÖNERİLER

Esnek çoklu küme teorisi Tokat ve Osmanoğlu [21] tarafından tanımlanmıştır. Esnek çoklu kümeler üzerinde topoloji yapısı ve birçok özelliği yine bu yazarlar [14, 15, 16, 21] tarafından incelenmiştir. Ayrıca [15] makalesinde esnek çoklu fonksiyon kavramı tanımlandı ve temel özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışmada açık kümelerin zayıf bir hali olan yarı açık küme ile esnek çoklu açık küme kullanılarak esnek çoklu yarı açık küme kavramı tanımlandı. Daha sonra esnek çoklu yarı iç ve esnek çoklu yarı kapanış yapıları bu kümeler kullanılarak verildi.

Osmanoğlu ve Tokat [15] tarafından verilen esnek çoklu fonksiyonun sürekliliği ve bu sürekliliğin birçok özelliği incelendi. Sonrasında bu sürekliliğin zayıf bir hali olan esnek çoklu yarı sürekli fonksiyon esnek çoklu yarı açık kümeler kullanılarak tanımlandı. Ayrıca bu zayıf sürekliliğin birçok özelliği incelendi. Yine esnek çoklu yarı açık kümeler kullanılarak esnek çoklu kararsız fonksiyon yapısı tanımlandı. Esnek çoklu kararsız fonksiyonun, esnek çoklu sürekli fonksiyon yapısıyla bağlantılı olmadığı örneklerle gösterildi.

Esnek çoklu küme teorisi, matematiğin birçok alanında uygulamaya açıktır. Uygulamalarla bu teori daha da gelişebilir ve güncel problemler için çözüm önerileri sunulabilir. Özellikle bilgisayar programları kullanılarak, bilgi depolama, bilgi analizi, eğitim ve tıp biliminin çeşitli konularında problemlerin çözülmesine yardımcı olabilir.

KAYNAKLAR

1. Aygünoğlu, A., Aygün, H., "Some notes on soft topological spaces", *Neural Comput & Applic* 21, 113-119, 2012.

2. Babitha, K.V., John, S.J., "On soft multi sets", *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* 5(1),35-44, 2013.

3. Cağman, N., Karatas, S. and Enginoglu, S., "Soft topology", *Computers and Mathematics with Applications* 62, 351-358, 2011.

4. Cerf, V., Fernandez, E., Gostelow, K., Volausky, S., "Formal control and low properties of a model of computation", Report ENG 7178, Computer Science Department, University of California, Los Angeles, CA, December, p. 81, 1971.

5. Chang, C.L., "Fuzzy Topological Spaces", *J. Math. Anal Appl.* 24, 182-190, 1968.

6. Girish, K.P., John, S.J., "Multiset topologies induced by multiset relations", *Information Sciences* 188,298-313, 2012.

7. Girish, K.P., John, S.J., "On Multiset Topologies", *Theory and Applications of Mathematics and Computer Science* 2 (1), 37–52, 2012.

8. Jena, S.P., Ghosh, S.K., Tripathy, B.K., "On the theory of bags and lists", *Information Sciences* 132, 241-254, 2001.

9. Koçak, M., Genel topolojiye giriş ve çözümlü alıştırmalar, Kampüs yayıncılık, Eskişehir, 2011.

10. Levine, N., "Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces", *American Mathematical Monthly*, 70, 36–41, 1963.

11. Lowen, R., "Fuzzy Topological Sapces and Fuzzy Compactness", *J. Math. Anal Appl.* 56, 621-633, 1976.

12. Molodtsov, D., “Soft set theory-first results”, *Computers and Mathematics with Applications* 37, 19-31, 1999.

13. Mucuk, O., Topoloji ve kategori, Nobel yayın dağıtım, Ankara, 2010.

14. Osmanoğlu, İ., “Esnek Çoklu Kümeler ve Topolojik Uzaylar”, *Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir, 2013.

15. Osmanoğlu, İ., Tokat, D., “Compact Soft Multi Spaces”, *Eur. J. Pure Appl. Math*, 7(1), 97-108, 2014.

16. Osmanoğlu, İ., Tokat, D., “Esnek çoklu topolojide bazı sonuçlar”, *SAÜ. Fen Bil. Der.* 17 (3), 371-379, 2013.

17. Pawlak, Z., “Rough sets”, *International Journal of Computer and Information Sciences* 11, 341–356, 1982.

18. Peterson, J., “Computation sequence sets”, *Journal of Computer System Science* 13(1), 1-24, 1976.

19. Shabir, M., Naz, M., “On soft topological spaces”, *Computers and Mathematics with Applications* 61, 1786-1799, 2011.

20. Tanay, B., Kandemir, M. B., “Topological Structure of Fuzzy Soft Sets”, *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 2952-2957, 2011.

21. Tokat, D., Osmanoğlu, İ., “Connectedness on soft multi topology spaces”, *Journal of New Results in Science* 2, 8-18, 2013.

22. Varol, B.P., Aygun, H., “Fuzzy soft topology”, *Hacettepe journal of mathematics and statistics* 41(3), 407-419, 2012.

23. Varol, B.P., Aygün, H., “On soft Hausdorff spaces”, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* 5(1),15- 24, 2012.

24. Yager, R.R., “On the theory of bags”, *International Journal General System* 13, 23-37, 1986.

25. Zadeh, L. A., “Fuzzy sets”, *Information and Control* 8, 338–353, 1965.

26. Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W.K. and Atmaca, S., “Remarks on soft topological spaces”, *Ann. Fuzzy Math. Inform.* 3(2), 171-185, 2012.

ÖZGEÇMİŞ

Yaşar ÜÇOK 1979 yılında Kayseri'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini sırasıyla Trabzon, Nevşehir ve Kayseri'de tamamladı. 1996 da kazandığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden 2000 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kayseri Pınarbaşı Kaynar İlköğretim Okulu'nda matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. Ardından Milli Eğitim Bakanlığı'nın Yozgat ve Kayseri'deki çeşitli okullarında yöneticilik ve matematik öğretmenliği yaptı. 2011 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi'nde yüksek lisans yapmaya başladı. Evli ve üç kız çocuğu babası olup, halen Kayseri Kocasinan İMKB Anadolu İmam Hatip Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

Adres:	Kocasinan İMKB Anadolu İmam Hatip Lisesi
	Zümrüt Mah. Kadir Has Cad. No:78 Kocasinan / Kayseri
Telefon:	0 505 456 55 10
Belgegeçer:	0 352 338 05 30
E-posta :	yasarucok@hotmail.com