T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK KÜMELER ÜZERİNDE YAKINSAKLIK YAPILARI

Tezi Hazırlayan
Gizem MENEKŞE

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2016
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK KÜMELER ÜZERİNDE YAKINSAKLIK YAPILARI

Tezi Hazırlayan
Gizem MENEKŞE

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2016
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT danışmanlığında **Gizem MENEKŞE** tarafından hazırlanan **"Esnek Kümeler Üzerinde Yakınsaklık Yapıları"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

19/07/2016

JÜRİ

Başkan : Doç. Dr. Muammer KULA

Üye : Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT

ONAY :

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 29/07/2016 tarih ve 28-252 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

29/07/2016

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gizem MENEKŞE

TEŞEKKÜR

Lisans döneminde ilk defa gördüğüm soyut ve zor olan topoloji dersini, zorluğundan dolayı yüksek lisans tezimi bu alanda asla yapmam demiş olmama rağmen Nevşehir'e gelip Nevşehir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapacağım yüksek lisansım, topoloji alanı üzerine olup danışmanımla ilk defa tanışmış olmamın çekingenliğini yaşayarak başlayan ve zamanla beni topolojiye ısındıran, sabırla anlamamı sağlayan ve tez döneminde cesaretlendirip destekleyen, bu zorlu dönemde elimden geldiği kadarını yapıp zorlandığım zamanlarda emeğini esirgemeden tezimi bitirmeme yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT'a,

Yüksek lisans dönemini bitirene kadar her zaman arkamda olan aileme,

Bu dönem içerisinde tanışıp, beni her daim destekleyen, hayatımı birleştireceğim Ferhat YÜCEL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ESNEK KÜMELER ÜZERİNDE YAKINSAKLIK YAPILARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Gizem MENEKŞE

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Temmuz 2016

ÖZET

Bu tezde öncelikle çalışmamızda kullanacağımız esnek küme, esnek topoloji ve esnek süzgeç kavramları hatırlatılmıştır. Daha sonra esnek kümeler üzerinde başlangıç, topolojik, pretopolojik, pseudotopolojik, ayrık ve ayrık olmayan yakınsaklık yapıları incelenmiş ve bunlar arasındaki ilişkiler ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler : Esnek küme, esnek fonksiyon, esnek topoloji, esnek süreklilik, esnek süzgeç, esnek homeomorfizm, esnek yakınsaklık yapısı.

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT

Sayfa Adedi: 80

CONVERGENCE STRUCTURES ON SOFT SETS

(M.Sc. Thesis)

Gizem MENEKŞE

NEVSEHİR HACI BEKTAŞ VELI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2016

ABSTRACT

In this thesis, firstly, we recall the concepts of soft set, soft topology, and soft filter which we will use in our study. Then, we investigate the initial, topological, pretopological, pesudotopological, discrete, and indiscrete convergence structures and study the interrelations among them.

Keywords : ***Soft set, soft function, soft topology, soft open set, soft contuinity, soft filter,soft homeomorphism, soft convergence structure.***

Thesis Supervisor : Asst. Prof. Dr. Deniz TOKAT

Page Number: 80

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{X}$	Evrensel küme
$\boldsymbol{E}$	Parametreler kümesi
$\boldsymbol{P(X)}$	X in kuvvet kümesi
$\boldsymbol{P_X}$	X üzerindeki tüm süzgeçlerin sınıfı
$\boldsymbol{F_A}$	Esnek küme
$\boldsymbol{F_A^c}$	Esnek kümenin tümleyeni
$\boldsymbol{F_A \tilde{\subseteq} G_B}$	F_A, G_B esnek kümesinin alt kümesi
$\boldsymbol{F_A \tilde{\cup} G_B}$	F_A ve G_B esnek kümesinin birleşimi
$\boldsymbol{F_A \tilde{\cap} G_B}$	F_A ve G_B esnek kümesinin kesişimi
$\boldsymbol{\Phi}$	Boş esnek küme
$\boldsymbol{S(X, E)}$	Tüm esnek kümelerinin sınıfı
$\boldsymbol{\vartheta_\varphi}$	Esnek fonksiyon
$\boldsymbol{\vartheta_\varphi^{-1}}$	Esnek fonksiyonun tersi
$\boldsymbol{(F_A, \tilde{\tau})}$	Esnek topolojik uzay
$\boldsymbol{\tilde{\tau}^0}$	Ayrık olmayan esnek topolojik uzay
$\boldsymbol{\tilde{\tau}^1}$	Ayrık topolojik uzay
$\boldsymbol{\tilde{\tau}^0 \subseteq \tilde{\tau}^1}$	$\tilde{\tau}^0$, $\tilde{\tau}^1$ esnek topolojisinden daha kaba
$\boldsymbol{\tilde{\beta}}$	Esnek topolojik uzayın esnek bazı
$\tilde{\tau}_{G_B}$	Esnek alt topolojik uzay
$\boldsymbol{G_B^o}$	G_B esnek kümesinin içi
$\boldsymbol{\overline{G_B}}$	G_B esnek kümesinin kapanışı
Ƒ	Esnek süzgeç
Ƒ $\downarrow$ **x**	Ƒ, x esnek noktasına esnek yakınsıyor
$\boldsymbol{\widetilde{N_X}}$	Esnek komşuluk

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Mühendislik, sağlık bilimleri, ekonomi, çevresel problemlerin çoğunda çeşitli belirsizlikler mevcuttur. Esnek küme teorisi, belirsizlik içeren problemleri modellemek için bir matematiksel araç olarak Molodtsov tarafından 1999 yılında ortaya atıldı.

Molodtsov [18] ilk çalışmasında esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzsüzlüğü, oyun teorisi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçü teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır. Bu teori kullanılarak karar verme problemleri, bilgi sistemleri, cebirsel yapılar, matematiksel analiz gibi belirsizlikler içeren birçok alanda da faydalı çalışmalar yapılmıştır [19]. Ayrıca, yazar 2004 yılında "Esnek Küme Teorisi" isimli bir kitap yayımladı [20].

Molodtsov'un çalışmalarından sonra esnek kümeler teorisinin diğer alanlara ve gerçek hayatta karşılaştığımız problemlere uygulamaları olmuştur. Shabir ve Naz [31] esnek kümelerin topolojik yapılarını ve bu uzaylardaki ayırma aksiyomlarını çalıştılar. Esnek kümeler üzerindeki topolojik yapıların süreklilik, taban ve kompaktlık gibi temel kavramları Aygünoğlu ve Aygün [3] tarafından incelenmiştir.

Chen ve ark. [7,8] ile Kong ve ark. [16] esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine çalışmalar yaptı. Xiao ve ark. [33] ile Pei ve Miao [30] esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmışlardır. Mushrif ve ark. [27], esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine bir çalışma yaptı. Zou ve Xiao [36] eksik bilgi altında esnek kümelerin veri analizi yaklaşımını ortaya koydu. Bu yaklaşımlar esnek kümelerde eksik verilerin mevcut durumlarını yansıtmak için tercih edilebilir.

Molodtsov ve ark. [19] tarafından, esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramlar formüle edildi. Bu analiz, Konkov ve ark. [17] tarafından optimizasyon teorisi ile ilgili problemlere uygulandı. Şu anda, esnek küme teorisi ve onun uygulamaları üzerine yapılan çalışmalar hızla gelişmektedir.

Esnek kümelerin cebirsel özellikleri bazı yazarlar tarafından çalışılmaktadır. Maji ve ark. [22-23], bulanık esnek kümeleri tanımladı. Daha sonra pek çok araştırmacı bulanık esnek kümeler üzerine çalışmalar yaptı. Aktaş ve Çağman [1] grupların yeni bir tanımını vererek, bazı temel özelliklerini elde etti.

Cartan 1937 yılında dizilerin yakınsaklığını sayılabilirlikten yararlanmadan incelemek için süzgeç kavramını tanımladı [9]. Süzgeç, yakınsak uzaylar alanında önemli bir kavramdır. Kabaca, bir süzgeç boştan farklı kümelerin boştan farklı bir sınıfı olup tersten içerme ve sonlu keşisim altında kapalıdır. Cartan'ın süzgeç kavramını tanımlamasından on yıl sonra Choquet [10] yakınsak uzaylar teorisini geliştirmek için bu kavramı kullandı. Topolojik uzaylardan farklı olarak yakınsak uzaylar bir Kartezyen kapalı kategori oluşturur. Ayrıca topolojik uzaylar kategorisi yakınsak uzaylar kategorisinin bir dolgun alt kategorisidir.

Şahin ve Küçük esnek süzgeç ve esnek ideal kavramlarını tanımlayarak esnek topolojik uzaylarda esnek süzgeçlerin yakınsamasını incelemiştir [32].

Bu çalışmada esnek kümeler üzerinde başlangıç, topolojik, pretopolojik, pseudotopolojik, ayrık ve ayrık olmayan yakınsaklık yapılarını inceleyeceğiz. Ayrıca bunlar arasındaki ilişkileri de ele alacağız.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde esnek küme ve süzgeç kavramlarının gelişim süreci hakkında kısa bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde esnek kümeler ile ilgili temel kavramlar ve teoremler ele alınmıştır. Üçüncü bölümde esnek süzgeçler ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde esnek yakınsaklık yapıları tanımlanmış, bunlarla ilgili özellikler incelenmiş ve aralarındaki ilişkiler ele alınmıştır. Son bölümde ise yapılar çalışma ile ilgili sonuçlar ve öneriler sunulmuştur.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde esnek kümeler ve esnek topoloji ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilecektir. Bunlar verilirken temel olarak Molodtsov [18], Çağman ve ark.[11], Maji ve ark.[21] ın çalışmaları göz önünde bulundurulacaktır.

2.1 Esnek Küme

Esnek küme kavramı, X evrensel kümesinin alt kümeler ailesinin parametrize edilmiş bir ailesidir. Bir esnek kümede sıralı ikililer, esnek kümenin elemanı veya üyesi olarak isimlendirilir. Biz bu esnek kümeleri F_A, F_B , ..., G_A , ... şeklinde büyük harfler ile göstereceğiz.

Bir nesneler kümesi üzerinde esnek küme tanımlamak için, nesneleri karakterize eden özellikleri ifade etmek zorundayız. Bu özellikleri ifade etmek için kullanacağımız parametrelerin kümesine parametre kümesi denir. Birinci bileşende parametre, ikinci bileşende özelliği sağlayan nesnelerin kümesi olacak şekilde yazılan sıralı ikililerle bir esnek küme yazabiliriz. Diğer bir deyişle bir esnek küme bu şekilde iyi tanımlı sıralı ikililerin bir koleksiyonudur.

Tanım 2.1.1 [18] X ve E boştan farklı iki küme olmak üzere, E bütün parametrelerin kümesi, $A \subseteq E$ ve $P(X)$, X in kuvvet kümesi olsun. X evrensel kümesi üzerinde bir F_A esnek kümesi, $F_A : E \to P(X)$ bir fonksiyon olup $e \notin A$ ise $F_A(e) = \emptyset$ olmak üzere

$$F_A = \{(e, F_A(e)) : e \in E, F_A(e) \in P(X)\}$$

şeklinde sıralı ikililer kümesi olarak tanımlanır. X üzerindeki tüm esnek kümelerinin sınıfı $S(X, E)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 [21] Eğer bir esnek kümede her $e \in A$ için $F_A(x) = \emptyset$ oluyorsa bu esnek küme, boş esnek küme olarak adlandırılır ve Φ ile gösterilir.

$F_A(x) = \Phi$ olmasının anlamı X de ki elemanların hiçbirinin $e \in E$ parametresi ile ilişkili olmadığıdır. Bu yüzden bu tür parametrelerin göz önüne alınması anlamsız olduğu için, bu tür elemanlar bir esnek kümede gösterilmeyecektir.

Tanım 2.1.3 [21] Eğer bir esnek kümede her $e \in A$ için $F_A(x) = X$ oluyorsa bu esnek küme, A -evrensel esnek küme olarak adlandırılır ve $F_{\tilde{A}}$ ile gösterilir. Eğer $A = E$ için bu şart sağlanırsa, bu esnek kümeye, evrensel esnek küme denir ve $F_{\tilde{E}}$ ile gösterilir. $F_A(e) = X$ olmasının anlamı, X ' in bütün elemanlarının $e \in E$ parametresi ile ilgili olduğudur.

Örnek 2.1.4 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evrensel küme, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ise parametrelerin kümesi olsun. Eğer;

$A = \{e_2, e_3, e_4\}$ ve $F_A(e_2) = \{x_2, x_4\}$, $F_A(e_3) = \emptyset$, $F_A(e_4) = X$ ise o halde F_A esnek kümesi

$F_A = \{(e_2, \{x_2, x_4\}), (e_4, X)\}$ şeklinde yazılır.

$B = \{e_1, e_3\}$ ve $F_B(e_1) = \emptyset$, $F_B(e_3) = \emptyset$ ise o halde F_B esnek kümesi boş esnek kümedir. $F_B = \Phi$ şeklinde yazılır.

$C = \{e_1, e_2\}$ ve $F_C(e_1) = X$, $F_C(e_2) = X$ ise o halde F_C esnek kümesi C- evrensel esnek kümedir. Yani $F_C = F_{\tilde{C}}$ dir.

$D = E$ ve her bir $e_i \in E, i = 1,2,3,4$ $için\ F_D(e_i) = X\ ise\ F_D$ esnek kümesine evrensel esnek küme denir. Yani $F_D = F_{\tilde{E}}$

Örnek 2.1.5 Bir okulun öğretmen alımı için yaptığı ilan sonucunda başvuran öğretmenlerin kümesi $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ olsun. Bu okula öğretmen alımında, " deneyim, bilgisayar bilgisi, genç yaş ve yabancı dil bilgi seviyesi " parametrelerini dikkate alsın. Bu parametreleri $i = 1,2,3,4$ olmak üzere sırasıyla, e_i ile isimlendirirsek parametreler kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olur. Bu okulun öğretmen alım komisyonunda, üç kişi bulunsun. Bu komisyon üyelerinin değerlendirmelerinin sırasıyla,

$F(e_1) = \{x_2, x_4\}$

$F(e_2) = \emptyset$

$F(e_3) = \{x_1, x_2, x_4\}$

$F(e_4) = \{x_3, x_5\}$

$G(e_1)$ =$\{x_1, x_3, x_4\}$

$G(e_2)$ =$\{x_1, x_3\}$

$G(e_3) = \emptyset$

$G(e_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$

$H(e_1) = \emptyset$

$H(e_2) = \emptyset$

$H(e_3)$ =$\{x_2, x_3, x_4\}$

$H(e_4) = X$

biçiminde olduğu kabul edilirse bunların oluşturacağı F_E, G_E ve H_E esnek kümeleri sırasıyla,

$F_E = \{$ (e_1,$\{x_2, , x_4\}$), (e_3, $\{x_1, x_3, x_4\}$), (e_4,$\{x_3, x_5\}$) }

$G_E = \{$ (e_1,$\{x_1, x_3, x_4\}$), (e_3, $\{x_1, x_3\}$), (e_4,$\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$) }

$H_E = \{$ (e_3, $\{x_2, x_3, x_4\}$), (e_4, X) }

olarak bulunur.

Örnek 2.1.6 Bir F_A esnek kümesi X şahsının almak için düşündüğü evin özelliklerinin tasviri olsun.

Farz edelim ki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ durumunda altı ev vardır ve

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerinin kümesi olsun. e_i ($i = 1,2,3,4,5$) sırasıyla "pahalı, güzel, ahşap, ucuz, bahçeli" parametrelerine karşılık gelir. (.), $e_i \in E$ parametrelerinin birini işaret etmek üzere F dönüşümü " ev (.) " şeklinde verildiği düşünülsün.

Örneğin $F(e_1)$, "ev (pahalı) " anlamındadır ve onun fonksiyon değeri

$\{u \in U: u\ \ pahalı\ evdir\}$ kümesidir.

Farz edelim ki $F(e_1) = \{u_2, u_4\}$, $F(e_2) = \{u_1, u_3\}$, $F(e_3) = \emptyset$, $F(e_4) = \{u_1, u_3, u_5\}$ ve $F(e_5) = \{u_1\}$ dir. O halde F_E esnek kümesini yaklaşımların aşağıdaki gösterimini içeren bir küme olarak görebiliriz.

$F_E = \{(pahal$ı $ev, \{u_2, u_4\})$, (güzel ev, $\{u_1, u_3\}$), (ahşap ev, $\emptyset$),

(ucuz ev, $\{u_1, u_3, u_5\}$), (bahçeli ev, $\{u_1\}$)}

Tanım 2.1.7 [21] F_A ve G_B, X üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Her $e \in E$ için

$F_A(e) \subset G_B(e)$ oluyorsa F_A, G_B nin esnek alt kümesi olarak adlandırılır ve $F_A \tilde{\subseteq} G_B$ ile gösterilir. Eğer F_A esnek kümesi G_B esnek kümesinin alt kümesi ise $G_B \tilde{\supseteq} F_A$ dir.

Buradan hareketle $F_A \tilde{\subseteq} G_B$ ve $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ oluyorsa X üzerindeki F_A ve G_B esnek kümelerine esnek eşittir denir. $F_A \cong G_B$ olarak gösterilir.

Örnek 2.1.8 $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ diyelim. $A \subset B$ olduğu açıktır.

F_A ile G_B aynı evrensel küme $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ üzerinde iki esnek küme olsun.

G$(e_1) = \{u_2, u_4\}$ F$(e_1) = \{u_2, u_4\}$

G$(e_2) = \{u_1, u_3\}$ F$(e_3) = \{u_3, u_4, u_5\}$

G$(e_3) = \{u_3, u_4, u_5\}$ F$(e_5) = \{u_1\}$

G$(e_5) = \{u_1\}$

alınırsa $F_A \tilde{\subseteq} G_B$ dir.

F_A $\tilde{\subseteq} G_B$ olması, F_A nin her elemanının G_B nin elemanı olması anlamına gelmemektedir. Bu yüzden, klasik alt küme tanımı esnek alt küme tanımı için geçerli değildir.

Örneğin, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ tüm parametrelerin kümesi olsun. Eğer $F = \{e_1\}$, $G = \{e_1, e_3\}$ ve

$F_E = \{(e_1, \{u_2, u_4\})\}$

$G_E = \{(e_1, \{u_2, u_3, u_4\}), (e_3, \{u_1, u_5\})\}$ ise o halde her $e \in F_E$ için $F_E \tilde{\subseteq} G_E$ doğrudur. Dolayısıyla $F_E \tilde{\subseteq} G_E$. Açıktır ki $(e_1, (F, e_1)) \in F_E$ fakat $(e_1, (F, e_1)) \notin G_E$.

Önerme 2.1.9 [21] F_A ve G_B, X üzerinde iki esnek küme olsun. O halde aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

i) $F_A \tilde{\subseteq} F_E$
ii) $\Phi \tilde{\subseteq} F_A$
iii) $F_A \tilde{\subseteq} F_A$
iv) $F_A \tilde{\subseteq} F_B$ ve $F_B \tilde{\subseteq} F_C$ ise $F_A \tilde{\subseteq} F_C$

Tanım 2.1.10 [21] $F_A \in S(X, E)$ ise

$$F_A{}^{\tilde{c}} \cong \{F_A{}^{\tilde{c}}(e) : e \in E\}$$

esnek kümesine F_A esnek kümesinin esnek tümleyeni denir.

Uyarı: Esnek kümenin esnek tümleyeni tanımında, her $e \in E$ için $F_A{}^{\tilde{c}}(e) \cong X \backslash F_A(e)$ dir. Ayrıca;

i) $(F_A{}^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} \cong F_A$
ii) $\Phi^c \cong X$

eşitliklerini sağlar.

2.2 Esnek Küme İşlemleri

Tanım 2.2.1 [21] F_A ve G_B, X üzerinde iki esnek küme olsun. F_A ve G_B esnek kümelerin birleşimi,

$H_{A \tilde{\cup} B}(e) \cong F_A(e) \tilde{\cup} G_B(e)$, her $e \in E$ için $H_{A \tilde{\cup} B} = F_A \tilde{\cup} G_B$ dir.

Burada, $A \tilde{\cup} B$ bir küme işlemi değildir. Bu sadece yaklaşım fonksiyonunu göstermek için kullanılan notasyondur.

Örnek 2.2.2 F_A esnek kümesi "evlerin maliyetini" ve G_B esnek kümesi de "evlerin çekiciliğini" tanımlansın.

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$, $A = \{çok\ pahalı, pahalı, ucuz\}$ ve

$$B = \{güzel, bahçeli, ucuz\}$$

olsun. O halde

$F(çok\ pahalı) = \{u_2, u_4, u_7, u_8\}$ $\quad$ $G(güzel) = \{u_2, u_3, u_7\}$

$F(pahalı) = \{u_1, u_3, u_5\}$ $\quad$ $G(bahçeli) = \{u_5, u_6, u_8\}$

$F(ucuz) = \{u_6, u_8, u_{10}\}$ ve $G(ucuz) = \{u_6, u_9, u_{10}\}$

esnek kümeleri tanımlansın. O zaman;

$H(çok\ pahalı, güzel) = \{u_2, u_3, u_4, u_7, u_8\}$

$H(çok\ pahalı, bahçeli) = \{u_2, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$

$H(çok\ pahalı, ucuz) = \{u_2, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$

$H(pahalı, güzel) = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_7\}$

$H(çok\ pahalı, bahçeli) = \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_8\}$

$H(çok\ pahalı, ucuz) = \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}\}$

$H(ucuz, güzel) = \{u_2, u_3, u_6, u_7, u_9, u_{10}\}$

$H(ucuz, bahçeli) = \{u_5, u_6, u_8, u_9, u_{10}\}$

$H(ucuz, ucuz) = \{u_6, u_9, u_{10}\}$

Teorem 2.2.3 [21] F_A, G_B ve $H_C \in S(X, E)$ için,

i) $F_A \,\tilde{\cup}\, F_A = F_A$

ii) $F_A \,\tilde{\cup}\, \Phi = F_A$

iii) $F_A \,\tilde{\cup}\, X_E = X_E$

iv) $F_A \tilde{\cup} F_A^{\tilde{c}} = X_E$

v) $F_A \tilde{\cup} G_B = G_B \tilde{\cup} F_A$

vi) $F_A \tilde{\cup} (G_B \tilde{\cup} H_C) = (F_A \tilde{\cup} G_B) \tilde{\cup} H_C$

vii) $F_A \tilde{\cup} (G_B \tilde{\cap} H_C) = (F_A \tilde{\cup} G_B) \tilde{\cap} (F_A \tilde{\cup} H_C)$

Tanım 2.2.4 [21] F_A ve G_B, X üzerinde iki esnek küme olsun. F_A ve G_B esnek kümelerin kesişimi,

$T_{A\tilde{\cap} B}(e) = F_A(e) \tilde{\cap} G_B(e)$, her $e \in E$ için $T_{A\tilde{\cap} B} = F_A \tilde{\cap} G_B$ dir.

Yukarıdaki örneği göz önüne alırsak;

$T(\text{çok pahalı}, \text{güzel}) = \{u_2, u_7\}$

$T(\text{çok pahalı}, \text{bahçeli}) = \{u_8\}$

$T(\text{çok pahalı}, ucuz) = \Phi$

$T(\text{pahalı}, \text{güzel}) = \{u_3\}$

$T(\text{pahalı}, \text{bahçeli}) = \{u_5\}$

$T(\text{pahalı}, ucuz) = \Phi$

$T(ucuz, \text{güzel}) = \Phi$

$T(ucuz, \text{bahçeli}) = \{u_6\}$

$T(ucuz, ucuz) = \{u_6, u_9, u_{10}\}$

Teorem 2.2.5 F_A, G_B ve $H_C \in S(X, E)$ olmak üzere,

i) $F_A \tilde{\cap} F_A = F_A$

ii) $F_A \tilde{\cap} \Phi = \Phi$

iii) $F_A \tilde{\cap} X_E = F_A$

iv) $F_A \tilde{\cap} F_A^{\tilde{c}} = \Phi$

v) $F_A \tilde{\cap} G_B = G_B \tilde{\cap} F_A$

vi) $F_A \tilde{\cap} (G_B \tilde{\cap} H_C) = (F_A \tilde{\cap} G_B) \tilde{\cap} H_C$

vii) $F_A \tilde{\cap} (G_B \tilde{\cup} H_C) = (F_A \tilde{\cap} G_B) \tilde{\cup} (F_A \tilde{\cap} H_C)$

Tanım 2.2.6 [21] F_A ve G_B, X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek kümenin esnek farkı

$$F_A \tilde{\setminus} G_B = \{F_A(e) \tilde{\setminus} G_B(e) : e \in E\}$$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2.7 F_A ve G_B, X üzerinde iki esnek küme olsun. O halde aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

i. $F_A \tilde{\setminus} G_B = F_A \tilde{\cap} G_B^{\bar{c}}$

ii. $F_A \tilde{\setminus} G_B = \Phi \Leftrightarrow F_A \subseteq G_B$

iii. $F_A \tilde{\cap} G_B = \Phi \Rightarrow F_A \tilde{\setminus} G_B = F_A$ ve $G_B \tilde{\setminus} F_A = G_B$

Teorem 2.2.8 F_A, $F_B \in S(X,E)$ olsun. Esnek kümelerde De Morgan kuralları aşağıdaki gibi sağlanır.

i) $(F_A \tilde{\cap} F_B)^{\bar{c}} = F_A^{\bar{c}} \tilde{\cup} F_B^{\bar{c}}$

ii) $(F_A \tilde{\cup} F_B)^{\bar{c}} = F_A^{\bar{c}} \tilde{\cap} F_B^{\bar{c}}$

İspat :

i) $F_{(A \tilde{\cap} B)}{}^{\bar{c}}(e) = F^{\bar{c}}_{A \tilde{\cap} B}(e)$

$= (F_A(e) \tilde{\cap} F_B(e))^{\bar{c}}$

$= F_A^{\bar{c}}(\mathrm{e}) \tilde{\cup} F_B^{\bar{c}}(e)$

ii) $F_{(A \tilde{\cup} B)}{}^{\bar{c}}(e) = F^{\bar{c}}_{A \tilde{\cup} B}(e)$

$= (F_A(e) \tilde{\cup} F_B(e))^{\bar{c}}$

$= F_A^{\bar{c}}(\mathrm{e}) \tilde{\cap} F_B^{\bar{c}}(e)$

Tanım 2.2.9 $F_E \in S(X, E)$ esnek kümesinin esnek kuvvet kümesi

$$P(F_E) = \{F_i \tilde{\subseteq} F_E : i \in I\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer X ve E kümeleri sonlu ise, F nin esnek kuvvet kümesinin eleman sayısı

$$|P(F_E)| = 2^{\sum|F(e)|}$$

olur. Burada, $|F(e)|$ ile $F(e)$ esnek kümesinin eleman sayısı gösterilmiştir.

Örnek 2.2.10 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. $F_E \in S_E(X)$ esnek kümesi

$F_E = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$ şeklinde tanımlansın. Buradan, F_E esnek kümenin bütün alt kümeleri yazılırsa,

$|P(F_E)| = 2^4 = 16$ dır.

2.3 Esnek Fonksiyon

Tanım 2.3.1 [21] $S(X, E)$ ve $S(Y, K)$, sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanmış, E ve K parametre kümelerine sahip tüm esnek kümelerin kümeleri olsun. $\vartheta: X \to Y$ ve $\varphi : E \to K$ iki fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayan

$\vartheta_\varphi: S(X, E) \to S(Y, K)$ fonksiyonuna esnek fonksiyon denir.

i) $A \tilde{\subseteq} E$ olmak üzere her $k_j \in K$ için $F_A \in S(X, A)$ esnek kümesinin ϑ_φ esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü;

$$\vartheta_\varphi(F_A)(k_j) = \begin{cases} \bigcup_{e_i \in \varphi^{-1}(k_j) \cap A} \vartheta(F_A(e_i)), & \varphi^{-1}(k_j) \cap A \neq \emptyset \\ \Phi & , \ \varphi^{-1}(k_j) \cap A = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

ii) $B \subseteq K$ olmak üzere, her $e_i \in E$ için $G_B \in S(Y,B)$ esnek kümesinin ϑ_φ esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü,

$$\vartheta_\varphi{}^{-1}(G_B)(e_i) = \begin{cases} \vartheta^{-1}\left(G_B(\varphi(e_i))\right), & \varphi(e_i) \in B \\ \Phi, & \varphi(e_i) \notin B \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.2 ϑ_φ: $\mathrm{S}(X,E) \rightarrow \mathrm{S}(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer ϑ ve φ fonksiyonları bire bir ϑ_φ esnek fonksiyonuna esnek bire bir fonksiyon denir.

Eğer ϑ ve φ fonksiyonları örten ise ϑ_φ esnek fonksiyonuna esnek örten fonksiyon denir.

Tanım 2.3.3 ϑ_φ: $\mathrm{S}(X,E) \rightarrow \mathrm{S}(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer ϑ ve φ fonksiyonları sabit ise ϑ_φ esnek fonksiyonuna esnek sabit fonksiyon denir.

Örnek 2.3.4 $X = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, $Y = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ve

$K = \{k_1,k_2,k_3\}$ olmak üzere $\vartheta: X \rightarrow Y$ ve $\varphi: E \rightarrow K$ fonksiyonları

$\vartheta(u_1) = v_1$ $\qquad$ $\varphi(e_1) = k_2$

$\vartheta(u_2) = v_4$ $\qquad$ $\varphi(e_2) = k_2$

$\vartheta(u_3) = v_1$ $\qquad$ $\varphi(e_3) = k_1$

$\vartheta(u_4) = v_2$ $\qquad$ $\varphi(e_4) = k_3$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $A = \{e_1,e_3\} \subseteq E$ ve $B = \{k_1,k_2\} \subseteq K$ için $\mathrm{F_A} \in \mathrm{S}(X,E)$ ve $\mathrm{G_B} \in \mathrm{S}(Y,K)$

$\mathrm{F_A} = \{(e_1,\{u_2\}),(e_3,\{u_1,u_4\})\} \in \mathrm{S(X,E)}$

$\mathrm{G_B} = \{(k_1,\{v_2,v_4\}),(k_2,\{v_3\})\} \in \mathrm{S(Y,K)}$

esnek kümeleri verilsin. $\varphi^{-1}(k_1) = \{e_3\}$ ve $\varphi^{-1}(k_2) = \{e_1,e_2\}$ olduğundan

$\vartheta_\varphi(\mathrm{F_A})(k_1) = \vartheta(\mathrm{F_A}(e_3))$

$= \vartheta(\{u_1, u_4\}) = \{v_1, v_2\}$

$\vartheta_\varphi(\mathrm{F_A})(k_2) = \vartheta(\mathrm{F_A}(e_1) \,\tilde{\cup}\, \mathrm{F_A}(e_2))$

$= \vartheta(\{u_2\} \,\tilde{\cup}\, \Phi) = \{v_4\}$

bulunur. Böylece

$\vartheta_\varphi(F_A) = \{(k_1, \{v_1, v_2\}), (k_2, \{v_4\})\}$

elde edilir. Ayrıca

$\vartheta_\varphi^{-1}(G_B)(e_1) = \vartheta^{-1}(G_B(\varphi(e_1)))$

$= \vartheta^{-1}(G_B(k_2))$

$= \vartheta^{-1}(v_3) = \Phi$

$\vartheta_\varphi^{-1}(G_B)(e_2) = \vartheta^{-1}(G_B(\varphi(e_2)))$

$= \vartheta^{-1}(G_B(k_2))$

$= \vartheta^{-1}(v_3) = \Phi$

$\vartheta_\varphi^{-1}(G_B)(e_3) = \vartheta^{-1}(G_B(\varphi(e_3)))$

$= \vartheta^{-1}(G_B(k_1))$

$= \vartheta^{-1}(\{v_2, v_4\}) = \{u_2, u_4\}$ olduğundan

$\vartheta_\varphi^{-1}(G_B) = \{(e_3, \{u_2, u_4\})\}$ elde edilir.

Teorem 2.3.5 $\vartheta_\varphi : \mathrm{S}(X, E) \to \mathrm{S}(Y, K)$ bir esnek fonksiyon ve $A \subseteq E$ olsun. $F_A, G_B \in \mathrm{S_A}(X, E)$ için,

i. $\vartheta_\varphi(\Phi) = \Phi$

ii. $\vartheta_\varphi(X_E) \,\tilde{\subseteq}\, K$ (ϑ_φ esnek örten olduğundan eşitlik sağlanır.)

iii. $\vartheta_\varphi(F_A \,\tilde{\cup}\, G_B) = \vartheta_\varphi(F_A) \,\tilde{\cup}\, \vartheta_\varphi(G_B)$

iv. $\vartheta_\varphi(F_A \,\tilde{\cap}\, G_B) \,\tilde{\subseteq}\, \vartheta_\varphi(F_A) \,\tilde{\cap}\, \vartheta_\varphi(G_B)$ (ϑ_φ esnek birebir olduğunda eşitlik sağlanır.)

v. Eğer $F_A \,\tilde{\subseteq}\, G_B$ ise $\vartheta_\varphi(F_A) \,\tilde{\subseteq}\, \vartheta_\varphi(G_B)$

Uyarı: Teorem 2.3.5 iv. de ϑ_φ esnek fonksiyonunu esnek birebir değil ise eşitlik olmaz. Bu durum, aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 2.3.6 $X = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $Y = \{v_1, v_2\}$ nesne kümeleri, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve

$K = \{k_1, k_2, k_3\}$ parametre kümeleri olsun. $\vartheta: X \to Y$ ve $\varphi : E \to K$ fonksiyonları

$\vartheta(u_1) = v_1$ $\quad\quad$ $\varphi(e_1) = k_2$

$\vartheta(u_2) = v_2$ $\quad\quad$ $\varphi(e_2) = k_2$

$\vartheta(u_3) = v_1$ $\quad\quad$ $\varphi(e_3) = k_3$ şeklinde tanımlansın. F_A ve G_B esnek kümeleri

$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2, u_3\})\}$

$G_B = \{(e_2, \{u_1, u_2\}), (e_3, X)\}$

şeklinde olsun. ϑ_φ: $S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek fonksiyonu için

$\vartheta_\varphi(F_A \tilde{\cap} G_B) = \{(k_2, \{v_2\})\}$ ve $\vartheta_\varphi(F_A) \tilde{\cap} \vartheta_\varphi(G_B) = \{(k_2, \{v_1, v_2\})\}$

olduğundan

$$\vartheta_\varphi(F_A \tilde{\cap} G_B) \subsetneq \vartheta_\varphi(F_A) \tilde{\cap} \vartheta_\varphi(G_B)$$

elde edilir.

Teorem 2.3.7 ϑ_φ: $S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek fonksiyon ve $B \subseteq K$ olsun. $F_A, G_B \in S_B(Y, K)$ için

i. $\vartheta_\varphi{}^{-1}(\Phi) \cong \Phi$

ii. $\vartheta_\varphi{}^{-1}(K) \tilde{\subseteq} X_E$

iii. $\vartheta_\varphi{}^{-1}(F_A \tilde{\cap} G_B) = \vartheta_\varphi{}^{-1}(F_A) \tilde{\cap} \vartheta_\varphi{}^{-1}(G_B)$

iv. $\vartheta_\varphi{}^{-1}(F_A \tilde{\cup} G_B) = \vartheta_\varphi{}^{-1}(F_A) \tilde{\cup} \vartheta_\varphi{}^{-1}(G_B)$

v. Eğer $F_A \tilde{\subseteq} G_B$ ise $\vartheta_\varphi{}^{-1}(F_A) \tilde{\subseteq} \vartheta_\varphi{}^{-1}(G_B)$

Teorem 2.3.8 ϑ_φ: $S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek fonksiyon, $A \subseteq E$ ve $B \subseteq K$ olsun. $F_A \in S_B(Y, K)$ için

i. $F_A \tilde{\subseteq} \vartheta_\varphi^{-1}\left(\vartheta_\varphi(F_A)\right)$ (ϑ_φ esnek birebir olduğunda eşitlik sağlanır.)

ii. $\vartheta_\varphi\left(\vartheta_\varphi^{-1}(G_B)\right) \tilde{\subseteq} G_B$ (ϑ_φ esnek örten olduğunda eşitlik sağlanır.)

iii. $\vartheta_\varphi^{-1}(G_B{}^c) \tilde{=} (\vartheta_\varphi^{-1}(G_B))^c$

iv. ϑ_φ esnek birebir örten fonksiyon ise $\vartheta_\varphi(F_A{}^c) \tilde{=} (\vartheta_\varphi(F_A))^c$

2.4 Esnek Nokta ve Esnek Aitlik

Bu bölümde Zorlutuna ve ark. [37] tarafından tanımlanan esnek nokta ve esnek aitlik kavramları hatırlatacaktır. Daha sonra, parametre kümesi ve nesne kümesi sonlu olan bir esnek kümenin, esnek nokta sayısı hesaplanacaktır. Ayrıca, bir esnek kümenin, esnek noktalarının esnek birleşimi olarak yazıldığı gösterilecektir.

Tanım 2.4.1 [37] $F_A \in \mathrm{S}(X,E)$ olsun. Bir $e \in E$ için $F_A(e) \neq \Phi$ ve her $e' \in E \backslash \{e\}$ için

$F_A(e') = \Phi$ ise, F_A esnek kümesine $\mathrm{S_E}(U)$ ‘ da bir esnek nokta denir ve e_{F_A} ile gösterilir.

Tanım 2.4.2 $G_B \in \mathrm{S}(X,E)$ ve $e_{F_A}, \mathrm{S}(X,E)$ da bir esnek nokta olsun. Her $e \in E$ için $F_A(e) \subseteq G_B(e)$ ise e_{F_A} esnek noktası G_B esnek kümesine esnek aittir denir ve $e_{F_A} \in G_B$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.4.3 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. $F_A \in \mathrm{S_E}(U)$ esnek kümesi

$$F_A = \{(e_1, \{u_1, u_4\}), (e_2, \{u_2, u_4\}), (e_3, \{u_1, u_2, u_3\})\}$$

şeklinde tanımlansın. $e = e_1$ olarak verilirse,

$$e_{F_A} = \{(e_1, \{u_1\})\}$$

esnek noktası F_A esnek kümesine esnek aittir ve $e_{F_A} \in F_A$ olur.

$$e_{F'_A} = \{(e_3, \{u_1, u_2\})\}$$

F_A esnek kümesinin 13 tane esnek noktası vardır.

Teorem 2.4.4 E ve X sonlu olsun. $F_A \in S(X,E)$ ve $F_A(e)$ esnek kümesinin eleman sayısı $|F_A(e)|$ olmak üzere, F_A esnek kümesinin bütün esnek noktalarının sayısı

$$\sum_{e \in E} (2^{|F_A(e)|} - 1)$$

toplamına eşittir.

Uyarı 2.4.5 $F_A \in S(X,E)$ olsun. $e \in E$ için $|F_A(e)| > 1$ ise, e parametresi ile birden fazla esnek noktanın oluşturabileceği açıktır. Bu durum aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 2.4.6 Örnek 2.4.3 de e_1 parametresi için

$$\left(e_{1_{F_A}}\right)_1 = (\, e_1, \{u_1\})$$

$$\left(e_{1_{F_A}}\right)_2 = (e_1, \{u_4\})$$

$$\left(e_{1_{F_A}}\right)_3 = (e_1, \{u_1, u_4\})$$

şeklinde üç farklı noktadan biri esnek nokta seçilebilir. Benzer şekilde e_2 parametresi için de üç noktadan biri esnek nokta olabilir.

$$\left(e_{2_{F_A}}\right)_1 = (\, e_2, \{u_2\})$$

$$\left(e_{2_{F_A}}\right)_2 = (e_2, \{u_4\})$$

$$\left(e_{2_{F_A}}\right)_3 = (e_2, \{u_2, u_4\})$$

Ayrıca e_2 parametresi için $2^3 - 1 = 7$ tane noktadan biri esnek nokta olabilir. Bu esnek noktalar

$$\left(e_{3_{F_A}}\right)_1 = (\, e_3, \{u_1\})$$

$$\left(e_{3_{F_A}}\right)_2 = (e_3, \{u_2\})$$

$\left(e_{3_{F_A}}\right)_3 = (e_3, \{u_3\})$

$\left(e_{3_{F_A}}\right)_4 = (e_3, \{u_1, u_2\})$

$\left(e_{3_{F_A}}\right)_5 = (e_3, \{u_1, u_3\})$

$\left(e_{3_{F_A}}\right)_6 = (e_3, \{u_2, u_3\})$

$\left(e_{3_{F_A}}\right)_7 = (e_3, \{u_1, u_2, u_3\})$ şeklindedir.

Uyarı 2.4.7 $F_A \in S(X, E)$ olsun. $e_i, e_j \in E$ olsun. Esnek nokta tanımından $e_{i_{F_A}} = e_{j_{F_A}}$ ancak ve ancak $e_i = e_j$ ve $F_A(e_i) = F_A(e_j)$ dir. $e_i \neq e_j$ için $e_{i_{F_A}} \neq e_{j_{F_A}}$ olduğu açıktır. Buna karşın $e_{i_{F_A}} \neq e_{j_{F_A}}$ olması $e_i \neq e_j$ olmasını gerektirmez. Örnek 3.1.6 da $\left(e_{1_{F_A}}\right)_1 = (e_1, \{u_1\})$ ve

$\left(e_{1_{F_A}}\right)_2 = (e_1, \{u_4\})$ esnek noktaları e_1 parametresi ile yazılmış olmalarına karşın farklıdırlar.

Teorem 2.4.8 Bir esnek küme tüm esnek noktalarının esnek birleşimi olarak yazılabilir.

Örnek 2.4.9 $F_A = \{(e_1, \{ u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2, u_3\})\}$ esnek kümesi verilsin. Bu esnek kümenin tüm esnek tek nokta kümeleri

$\{\left(e_{1_{F_A}}\right)_1\} = \{(e_1, \{u_1\})\}$

$\{\left(e_{1_{F_A}}\right)_2\} = \{(e_1, \{u_2\})\}$

$\{\left(e_{1_{F_A}}\right)_3\} = (e_1, \{u_1, u_2\})\}$

$\{\left(e_{2_{F_A}}\right)_1\} = \{(e_2, \{u_2\})\}$

$\{\left(e_{2_{F_A}}\right)_2\} = \{(e_2, \{u_3\})\}$

$\{\left(e_{2_{F_A}}\right)_3\} = \{(e_2, \{u_2, u_3\})\}$

şeklindedir. Buradan,

$F_A = \bigcup_{i=1}^{2}(\bigcup_{k=1}^{3}\left(\left\{e_{i_{F_A}}\right\}\right)_k)$ olduğu açıktır.

Teorem 2.4.10 $F_A, G_B \in S(X, E)$, $A \subseteq E$ ve $\forall F_{A_i}, F_{A_j} \in S_A(X, E)$ olsun. Her $e_{i_{F_{Ai}}} \in F_A$ için $e_{i_{F_{Ai}}} \in G_B$ ise $F_A \subseteq G_B$ dir.

2.5 Esnek Topolojik Uzaylar

Yukarıda esnek kümenin tanımı ve esnek küme işlemleri verildi. Bu bölümde bunlardan yararlanılarak bir esnek küme üzerinde tanımlanan esnek topolojiyle ilgili temel özelliklere yer verilecektir.

Tanım 2.5.1 [11] $\Phi \neq A \subseteq E$ ve $F_A \in S(X, E)$ olsun. $\tilde{\tau} = \{G_{B_i}\}_{i \in I}$ ile F_A esnek kümenin bir esnek alt kümeler ailesi verilsin. Eğer $\tilde{\tau}$ ailesi aşağıdaki aksiyomları sağlarsa, $\tilde{\tau}$ ya F_A esnek küme üzerinde bir esnek topoloji veya esnek topolojik yapı, $(F_A, \tilde{\tau})$ ikilisine esnek topolojik uzay, $\tilde{\tau}$ nın elemanlarına $(F_A, \tilde{\tau})$ nun esnek açık alt kümeleri denir.

i) $\Phi, F_A \in \tilde{\tau}$
ii) $\{G_{B_i}\}_{i \in I} \subseteq \tilde{\tau}$ ise $\bigcup_{i \in I} G_{B_i} \in \tilde{\tau}$
iii) $\{G_{B_i}\}_{i=1}^{n} \subseteq \tilde{\tau}$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} G_{B_i} \in \tilde{\tau}$

Örnek 2.5.2 Örnek 2.1.4 de tanımlanmış F_A esnek kümesinin esnek alt kümeleri göz önüne alınsın. $\tilde{\tau} = \{\Phi, F_A, F_{A_2}, F_{A_{11}}, F_{A_{13}}\}$ esnek küme ailesi F_A esnek küme üzerinde bir esnek topolojik yapı oluşturur.

Teorem 2.5.3 Her esnek kümenin esnek kuvvet kümesi, o esnek küme üzerinde bir esnek topolojik yapı oluşturur. Bu yapıya F_A esnek kümesi üzerinde oluşturulan ayrık veya en ince esnek topolojik yapı denir ve $\tilde{\tau}^1$ ile gösterilir.

Teorem 2.5.4 $(F_A, \{\Phi, F_A\})$ ikilisi F_A esnek kümesi üzerinde bir esnek topolojik yapıdır. Bu yapıya, F_A esnek kümesi üzerinde oluşturulan ayrık olmayan veya en kaba topolojik yapı denir ve $\tilde{\tau}^0$ ile gösterilir.

Teorem 2.5.5 F_A esnek kümesi üzerinde oluşturulan tüm esnek topolojilerin ailesi $\{\tilde{\tau}_i\}_{i\in I}$ ile gösterilsin. $i, j \in I$ olmak üzere,

$$(\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j) \Leftrightarrow (\forall G_{B_i} \in \tilde{\tau}_i \Rightarrow \forall G_{B_i} \in \tilde{\tau}_j)$$

ile verilen ve "$\leq$" ile gösterilen sıralama bağıntısına "daha kaba olma" bağıntısı denir ve "$\leq$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat: i) $\forall i \in I$ için $\tilde{\tau}_i \subseteq \tilde{\tau}_i$ olduğundan $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_i$ olur. O halde yansıma özelliği sağlanış olur.

ii) $i, j \in I$ için $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j$ ve $\tilde{\tau}_j \leq \tilde{\tau}_i$ olsun. Buradan $\tilde{\tau}_i \subseteq \tilde{\tau}_j$ ve $\tilde{\tau}_j \subseteq \tilde{\tau}_i$ elde edilir.

$\tilde{\tau}_i = \tilde{\tau}_j$ olduğundan ters simetri özelliği sağlanır.

iii) $i, j, k \in I$ için $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j$ ve $\tilde{\tau}_j \leq \tilde{\tau}_k$ olsun. Buradan $\tilde{\tau}_i \subseteq \tilde{\tau}_j$ ve $\tilde{\tau}_j \subseteq \tilde{\tau}_k$ olduğundan $\tilde{\tau}_i \subseteq \tilde{\tau}_k$ bulunur. Buradan $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_k$ elde edildiğinden, geçişme özelliği sağlanır.

Tanım 2.5.6 F_A esnek kümesi üzerinde oluşturulan tüm esnek topolojilerin ailesi $\{\tilde{\tau}_i\}_{i\in I}$ ile gösterilsin. $i, j \in I$ olmak üzere,

i) Eğer $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j$ ise $\tilde{\tau}_j$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_i$ esnek topolojisinden daha incedir denir.
ii) Eğer $\tilde{\tau}_i < \tilde{\tau}_j$ ise $\tilde{\tau}_j$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_i$ esnek topolojisinden kesin daha incedir denir,
iii) Eğer $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j$ veya $\tilde{\tau}_j \leq \tilde{\tau}_i$ ise, $\tilde{\tau}_i$ ve $\tilde{\tau}_j$ esnek topolojilerine karşılaştırılabilir esnek topolojiler denir.

Ayrıca bir esnek küme üzerinde kurulabilecek en basit esnek topoloji $\tilde{\tau}^0$ esnek topolojisidir. Benzer şekilde en ince esnek topoloji de $\tilde{\tau}^1$ esnek topolojisidir.

Örnek 2.5.7 Örnek 2.5.2 de tanımlanan F_A esnek kümesi üzerindeki esnek topolojiler göz önüne alınsın. $\tilde{\tau}^0 \subseteq \tilde{\tau}^1$, $\tilde{\tau}^0 \subseteq \tilde{\tau}$ ve $\tilde{\tau} \subseteq \tilde{\tau}^1$ kapsamaları açıkça görülmektedir. Buradan $\tilde{\tau}^1$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}^0$ dan daha incedir ve $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi de $\tilde{\tau}^0$ dan daha incedir.

Tanım 2.5.8 ($F_A, \tilde{\tau}$) bir esnek topolojik uzay olsun. $G_B \in S_A(X.E)$ için ${G_B}^c \in \tilde{\tau}$ ise G_B esnek kümesine $\tilde{\tau}$ esnek topolojisine göre esnek kapalı küme denir.

$(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayındaki tüm esnek kapalıların kümesi $\tilde{F}$ ile gösterilecektir.

Teorem 2.5.9 Bir esnek topolojik uzayda

i) Evrensel esnek küme, bir esnek kapalı kümedir.
ii) Esnek kapalı kümelerin keyfi esnek kesişimi de esnek kapalı kümedir.
iii) Sonlu sayıda esnek kapalı kümenin esnek birleşimi de esnek kapalı kümedir.

Uyarı 2.5.10 X_E esnek kapalıdır. Çünkü ${X_E}^c = \Phi \in \tilde{\tau}$ dır. Fakat Φ ve F_A esnek kümelerinin esnek kapalı kümeler olması gerekmemektedir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.5.11 Örnek 2.1.4 de tanımlanmış F_A esnek kümesi üzerinde kurulan

$\tilde{\tau} = \{\Phi, F_A, F_{A_2}, F_{A_{11}}, F_{A_{13}}\}$ esnek topolojisi göz önüne alınsın. Burada ${F_A}^c = \{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_1\})\} \notin \tilde{\tau}$ ve $\Phi^c = X_E \notin \tilde{\tau}$ olduğundan F_A ve Φ esnek kapalı küme değildir.

Teorem 2.5.12 $(F_A, \tilde{\tau}_1)$ ve $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik ise $(F_A, \tilde{\tau}_1 \cap \tilde{\tau}_2)$ de bir esnek topolojik uzaydır.

Uyarı 2.5.13 $(F_A, \tilde{\tau}_1)$ ve $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ birer esnek topoloji olmalarına rağmen $(F_A, \tilde{\tau}_1 \cup \tilde{\tau}_2)$ nin de bir esnek topolojik uzay olması gerekmez. Aşağıdaki örnek bu durumu göstermektedir.

Örnek 2.5.14 $X = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere,

$F_{A_1} = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2, u_3\})\}$

$F_{A_2} = \{(e_1, \{u_2\})\}$

$F_{A_3} = (e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_3\})\}$

$F_{A_4} = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2\})\}$

esnek kümeleri için $\tilde{\tau}_1 = \{\Phi, F_{A_1}, F_{A_2}, F_{A_3}, F_{A_4}\}$, F_A esnek kümesi üzerinde bir esnek topolojidir. Eğer

$F_{A_5} = \{(e_1, \{u_1\})\}$

$F_{A_6} = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_2\})\}$

$F_{A_7} = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_3\})\}$ ise

$\tilde{\tau}_2 = \{\Phi, F_{A_1}, F_{A_5}, F_{A_6}, F_{A_7}\}$ de F_A esnek kümesi üzerinde bir esnek topolojidir. Fakat

$(F_A, \tilde{\tau}_1 \cup \tilde{\tau}_2)$ bir esnek topolojik uzay değildir. Çünkü hemen görülebileceği gibi

$F_{A_2} \cup F_{A_5} = \{(e_1, \{u_1, u_2\})\} \notin \tilde{\tau}_1 \cup \tilde{\tau}_2$ dir.

2.6 Esnek Topolojik Uzayın Esnek Bazı

Tanım 2.6.1 [11] $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $\widetilde{\beta} \subseteq \tilde{\tau}$ olsun. Eğer $\tilde{\tau}$ esnek topolojisindeki her esnek açık küme $\widetilde{\beta}$ kümesindeki bazı esnek açık kümelerin esnek birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\widetilde{\beta}$ kümesine $\tilde{\tau}$ esnek topolojisinin bir esnek bazı denir.

$(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $\widetilde{\beta} = \{G_{B_i}\}_{i \in I}$ bu esnek topolojik uzayın bir esnek bazı ise, herhangi bir $H_C \in \tilde{\tau}$ için

$$H_C = \widetilde{\bigcup_{j \in J \subseteq I}} G_{B_j}$$

şeklinde yazılacaktır.

Örnek 2.6.2 Örnek 2.5.2 de tanımlanmış $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi göz önüne alınsın.

$\widetilde{\beta} = \{\Phi, F_{A_2}, F_{A_{11}}, F_{A_{13}}\}$

kümesi $\tilde{\tau}$ esnek topolojisinin bir esnek bazıdır.

Örnek 2.6.3 $(F_A, \tilde{\tau}^1)$ esnek ayrık topolojik uzayı verilsin. Buradan, her $e_i \in A$ parametresi için oluşturulan tüm esnek tek nokta kümelerinin kümesi

$$\widetilde{\beta} = \left\{\left(e_{i_f}\right)\right\}, j \in \Delta$$

olsun. Bu durumda $\widetilde{\beta}, \tilde{\tau}^1$ için bir esnek bazıdır.

Teorem 2.6.4 $(F_A, \tilde{\tau}_1)$ ve $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay olsun. $\tilde{\beta}, \tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri için ayrı ayrı birer esnek baz ise $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2$ dir.

İspat: Herhangi bir $G_B \in \tilde{\tau}_1$ verilsin. $\tilde{\beta}, \tilde{\tau}_1$ için bir esnek baz olduğundan

$$G_B = \bigcup_{H_{C_i} \in \tilde{\beta}} H_{C_i}$$

olarak yazılır. $\tilde{\beta}$, aynı zamanda $\tilde{\tau}_2$ için de bir esnek baz olduğundan $G_B \in \tilde{\tau}_2$ olur. O halde $\tilde{\tau}_1 \subseteq \tilde{\tau}_2$ elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{\tau}_2 \subseteq \tilde{\tau}_1$ elde edileceğinden $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2$ dir.

Teorem 2.6.5 $(F_A, \tilde{\tau}_1)$ ve $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay olsun. $\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_2$ sırasıyla bu iki esnek topolojik uzayın iki esnek bazı ve $\tilde{\beta}_1 \subseteq \tilde{\beta}_2$ ise $\tilde{\tau}_1 \subseteq \tilde{\tau}_2$ dir.

İspat: $\tilde{\beta}_1 \subseteq \tilde{\beta}_2$ olsun. Herhangi bir $G_B \in \tilde{\tau}_1$ için

$$G_B = \bigcup_{H_{C_i} \in \tilde{\beta}_1} H_{C_i}$$

olarak yazılır. $\tilde{\beta}_1 \subseteq \tilde{\beta}_2$ olduğundan

$$G_B = \bigcup_{H_{C_i} \in \tilde{\beta}_2} H_{C_i}$$

elde edilir. $\tilde{\beta}_2, \tilde{\tau}_2$ için bir esnek baz olduğundan $G_B \in \tilde{\tau}_2$ olur. Dolayısıyla $\tilde{\tau}_1 \subseteq \tilde{\tau}_2$.

Uyarı 2.6.6 $\tilde{\beta}$, F_A esnek kümesi üzerinde bir tek esnek topoloji üretir. Ama esnek topolojik uzayın esnek bazı tek olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu göstermektedir.

Örnek 2.6.7 Örnek 2.1.4 de tanımlanmış F_A esnek kümesinin esnek alt kümeleri göz önüne alınsın. $\tilde{\tau} = \{\Phi, F_A, F_{A_3}, F_{A_4}, F_{A_5}, F_{A_6}, F_{A_{13}}, F_{A_{14}}\}$ esnek küme ailesi F_A üzerinde bir esnek topolojik yapı oluşturur.

$$\tilde{\beta}_1 = \{\Phi, F_A, F_{A_3}, F_{A_4}, F_{A_5}\}$$

$$\tilde{\beta}_2 = \{\Phi, F_A, F_{A_3}, F_{A_4}, F_{A_5}, F_{A_6}\}$$

$$\widetilde{\beta}_3 = \{\Phi, F_A, F_{A_3}, F_{A_4}, F_{A_5}, F_{A_6}, F_{A_{13}}\}$$

$(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayı için birer esnek baz olur.

2.7 Esnek Topolojik Alt Uzay

Bu bölümde, tanımlanmış olan esnek alt uzay topolojisi ile ilgili özellikler verildi. Bir esnek kümenin esnek kapanışı ve esnek içi tanımlandı. Temel özellikleri verilerek, aralarındaki ilişki teoremlerle ispatlandı. Esnek alt uzay ile esnek evrensel uzay arasındaki geçiş, teorem ve örneklerle gösterildi. Bu uzayın, diğer iki üst uzayları ile ilişkisi araştırıldı.

Teorem 2.7.1 [11] $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ olsun.

$$\tilde{\tau}_{G_B} = \{H_C \cap G_B : H_C \in \tilde{\tau}\}$$

kümesi G_B üzerinde bir esnek topolojik uzay ve $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ ikilisi de bir esnek topolojik uzaydır.

Tanım 2.7.2 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ olsun.

$$\tilde{\tau}_{G_B} = \{H_C \cap G_B : H_C \in \tilde{\tau}\}$$

kümesi G_B üzerinde bir esnek alt topoloji ve $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ ikilisine de $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının esnek alt uzayı denir.

Örnek 2.7.3 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ için

$\tilde{\tau} = \tilde{P}(F_A)$ ise $\tilde{\tau}_{G_B} = \tilde{P}(G_B)$ ve

$\tilde{\tau} = \{F_A, \Phi\}$ ise $\tilde{\tau}_{G_B} = \{G_B, \Phi\}$ olur.

Örnek 2.7.4 Örnek 2.5.2 de tanımlanmış $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi göz önüne alınsın.

$G_B = F_{G_B}$ ve $\tilde{\tau}_{G_B} = \{\Phi, F_{A_5}, F_{A_7}, F_{A_9}\}$ için $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$, $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayıdır.

Tanım 2.7.5 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ ve $H_C \subseteq G_B$ olsun. Eğer, bir $M_1 \in \tilde{\tau}$ için $H_C = M_1 \cap G_B$ oluyorsa H_C esnek kümesine, G_B esnek alt uzayında bir esnek açık alt küme denir.

Bu durumda, $\tilde{\tau}_{G_B}$ nin her elemanına $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ alt uzayında esnek açıktır denir.

Teorem 2.7.6 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ ve $H_C \subseteq G_B$ olsun. Eğer, $H_C \in \tilde{\tau}$ ise, $H_C \in \tilde{\tau}_{G_B}$ olur.

Uyarı 2.7.7 Bu teoremin tersi genellikle doğru değildir. Yani, esnek alt uzayda esnek açık olan her esnek alt küme, esnek evrensel uzayda da esnek açık olmak zorunda değildir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.7.8 Örnek 2.7.4 de tanımlanmış $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ esnek topolojisi göz önüne alınsın. $F_{A_5} \in \tilde{\tau}_{G_B}$ olmasına rağmen $F_{A_5} \notin \tilde{\tau}$ dır.

Esnek alt uzayda esnek açık olan esnek alt kümenin, esnek evrensel uzayda da esnek açık olma şartı aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.7.9 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ ve $H_C \tilde{\subseteq} G_B$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermeler denktir;

i) $G_B \in \tilde{\tau}$

ii) $\tilde{\tau}_{G_B} \tilde{\subseteq} \tilde{\tau}$

İspat: (i)⇒(ii): $G_B \in \tilde{\tau}$ olsun. $H_C \in \tilde{\tau}_{G_B}$ alalım. Bu durumda $H_C \cong M_1 \tilde{\cap} G_B$ olacak şekilde en az bir $M_1 \in \tilde{\tau}$ vardır. $G_B \in \tilde{\tau}$, $M_1 \in \tilde{\tau}$ olduğundan $H_C \in \tilde{\tau}$ olur. O halde $\tilde{\tau}_{G_B} \tilde{\subseteq} \tilde{\tau}$.

Teorem 2.7.10 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzayının boştan farklı iki esnek alt uzayı, $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ ve $(H_C, \tilde{\tau}_{H_C})$ olsun. $M_2 \tilde{\subseteq} H_C \tilde{\cap} G_B$ olmak üzere

$$\tilde{\tau}_{N_2} \cong \left(\tilde{\tau}_{G_B}\right)_{N_2} \cong \left(\tilde{\tau}_{H_C}\right)_{N_2} \text{ olur.}$$

İspat: $H_C \cap G_B \tilde{\subseteq} H_C$ olduğundan $\tilde{\tau}_{N_2} = \left(\tilde{\tau}_{H_C}\right)_{N_2}$ ve $H_C \tilde{\cap} G_B \tilde{\subseteq} G_B$ olduğundan

$\tilde{\tau}_{N_2} \cong \left(\tilde{\tau}_{G_B}\right)_{N_2}$ olur. Buradan, $\tilde{\tau}_{N_2} \cong \left(\tilde{\tau}_{G_B}\right)_{N_2} \cong \left(\tilde{\tau}_{H_C}\right)_{N_2}$ dır.

Tanım 2.7.11 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $G_B \tilde{\subseteq} F_A$, $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ ise F_A in bir esnek alt uzayı olsun. Bu alt uzayın bütün esnek kapalı alt kümeler ailesi $\widetilde{F_{G_B}}$ ile gösterilecektir.

Uyarı 2.7.12 $H_C \tilde{\subseteq} G_B \tilde{\subseteq} F_A$ için $H_C \in \widetilde{F_g}$ esnek kapalı kümesinin $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ esnek alt uzayında alınan esnek tümleyeni $(H_C)^c_{G_B}$ ve $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek uzayında alınan esnek tümleyeni $(H_C)^c_{F_A}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.7.13 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $G_B \tilde{\subseteq} F_A$, $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ ise F_A in bir esnek alt uzayı olsun. $H_C \tilde{\subseteq} G_B \tilde{\subseteq} F_A$ için eğer $H_C \in \widetilde{F_g}$ ise $(H_C)^c_{G_B} \in \tilde{\tau}_{G_B}$ dir.

Teorem 2.7.14 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ ve $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$, F_A in bir esnek alt uzayı olsun. $H_C \tilde{\subseteq} G_B \tilde{\subseteq} F_A$ için aşağıdaki önermeler denktir :

i) $H_C \in \widetilde{F_g}$

ii) $H_C \cong K_1 \tilde{\cap} G_B$ olacak şekilde $\exists K_1 \in \tilde{F}$ vardır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) : $H_C \in \widetilde{F_g}$ olsun. Bu durumda $(H_C)^c_{G_B} \in \tilde{\tau}_{G_B}$ olur. O halde

$(H_C)^c_{G_B} = M_2 \tilde{\cap} G_B$ olacak şekilde $\exists\, M_2 \in \tilde{\tau}$ vardır. $H_C = ((H_C)^c_{G_B})^c_{G_B}$ olarak yazabiliriz.

$$\begin{aligned}(M_2 \cap G_B)^c_{G_B} &= G_B \cap (M_2 \cap G_B)^c_{F_A} \\ &= G_B \cap ((M_2)^c_{F_A} \cup (G_B)^c_{F_A})) \\ &= (G_B \cap (M_2)^c_{F_A}) \cup (G_B \cap (G_B)^c_{F_A}) \\ &= G_B \cap (M_2)^c_{F_A}\end{aligned}$$

$M_2 \in \tilde{\tau}$ olduğundan $(M_2)^c_{F_A} \in \tilde{F}$ olur. $(M_2)^c_{F_A} = K_1$ denirse $H_C = K_1 \cap G_B$ olacak şekilde $\exists K_1 \in \tilde{F}$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $H_C = K_1 \cap G_B$ olduğundan $(H_C)^c_{G_B} = (K_1 \cap G_B)^c_{G_B}$ olur.

$$(K_1 \cap G_B)^c_{G_B} = G_B \cap (K_1 \cap G_B)^c_{F_A}$$

$$= G_B \cap \left((K_1)^c_{F_A} \cup (G_B)^c_{F_A}\right)$$

$$= (G_B \cap (K_1)^c_{F_A}) \cup (G_B \cap (G_B)^c_{F_A})$$

$$= G_B \cap (K_1)^c_{F_A}$$

bulunur. Hipotezden $K_1 \in \tilde{F}$ olduğundan $(K_1)^c_{F_A} \in \tilde{\tau}$ olur. Buradan $(H_C)^c_{G_B} \in \tilde{\tau}_{G_B}$ ve $H_C \in \widetilde{F_{G_B}}$ elde edilir.

Teorem 2.7.15 $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ ve $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$, F_A in bir esnek alt uzayı olsun. Eğer $H_C \tilde{\subseteq} G_B, H_C \in \tilde{F}$ ise $H_C \in \widetilde{F_g}$ olur.

İspat: $H_C \tilde{\subseteq} G_B$ olduğundan $H_C = H_C \cap G_B$ yazılabilir. $H_C \in \tilde{F}$ olduğundan Teorem 2.7.14 gereğince $H_C \in \widetilde{F_g}$ bulunur.

Uyarı 2.7.16 Bu teoremin tersi genellikle doğru değildir. Yani, esnek alt uzayda esnek kapalı olan her esnek alt küme, esnek evrensel uzayda da esnek kapalı olmak zorunda değildir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir:

Örnek 2.7.17 Örnek 2.5.2 de tanımlanmış $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi göz önüne alınsın. Burada,

$\tilde{F} = \{\{(e_1, X), (e_2, X)\}, \{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_1\})\}, \{(e_1, \{u_1, u_3\})\}, \{(e_1, \{u_1, u_3\}), (e_1, \{u_1, u_2\})\},$

$\{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\}\}$ olur.

$G_B = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_2, u_3\})\}$ olmak üzere,

$\tilde{\tau}_{G_B} = \{\Phi, G_B, \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_2\})\}, \{(e_2, \{u_3\})\}\}$ ve

$\widetilde{F_g} = \{\{$
$(e_1, X), (e_2, X)\}, \{(e_1, \{u_1, u_3\}), (e_2, \{u_1\})\}, \{(e_2, \{u_1, u_2\})\}, \{(e_1, \{u_1, u_3\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\}\}$

Burada, $H_C = \{(e_1, \{u_2, u_3\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\} \in \widetilde{F_g}$ fakat $H_C \notin \tilde{F}$ olur.

Esnek alt uzayda esnek kapalı olan esnek kümenin, esnek evrensel uzayda da kapalı olma şartı aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 2.7.18 ($F_A, \tilde{\tau}$) bir esnek topolojik uzay, $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ ve $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$, F_A in bir esnek alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i) $G_B \in \tilde{F}$

ii) $\widetilde{F_{G_B}} \tilde{\subseteq} \tilde{F}$

İspat: (i)$\Rightarrow$ (ii) : $G_B \in \tilde{F}$ olsun. $H_C \in \widetilde{F_g}$ alalım. Bu durumda $H_C = K_1 \cap G_B$ olacak biçimde $\exists K_1 \in \tilde{F}$ vardır. Ayrıca $G_B \in \tilde{F}$ olduğundan $H_C \in \tilde{F}$ olur. O halde $\widetilde{F_g} \tilde{\subseteq} \tilde{F}$ dir.

(ii))$\Rightarrow$ (i): $(G_B, \tilde{\tau}_{G_B})$ bir esnek topoloji olduğundan $G_B \in \tilde{F}$ ve $\widetilde{F_g} \tilde{\subseteq} \tilde{F}$ olduğundan $G_B \in \tilde{F}$ bulunur.

Tanım 2.7.19 ($F_A, \tilde{\tau}$) bir esnek topolojik uzayının gerçeklediği bir özellik, bu esnek uzayın tüm esnek alt uzaylarında da varsa, bu özelliğe esnek kalıtsal özellik denir.

Teorem 2.7.20 ($F_A, \tilde{\tau}$) bir esnek topolojik uzay, $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ olsun. Eğer $\tilde{\beta}, \tilde{\tau}$ esnek topolojisinin bir esnek bazı ise

$$\tilde{\beta}_{G_B} = \{ H_{C_i} \cap G_B : H_{C_i} \in \tilde{\beta}, i \in I\}$$

kümesi $\tilde{\tau}_{G_B}$ esnek topolojisi için bir esnek bazdır.

2.8 Esnek Kümenin Esnek İçi ve Esnek Kapanışı

Tanım 2.8.1 ($F_A, \tilde{\tau}$) bir esnek topolojik uzay, $G_B \tilde{\subseteq} F_A$ olsun. G_B tarafından esnek kapsanan bütün esnek açık kümelerin esnek birleşimine G_B esnek kümesinin esnek içi denir ve G_B^o şeklinde gösterilir. Matematiksel olarak G_B esnek kümesinin esnek içi

$$G_B^o = \bigcup_{H_{C_i} \tilde{\subseteq} G_B, H_{C_i} \in \tilde{\tau}} H_{C_i}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.8.2 G_B esnek kümesinin esnek içi, G_B nin esnek olarak kapsadığı en büyük esnek açık küme olarak ifade edilir ve

$$G_B^o = \bigcup \{ H_{C_i} : H_{C_i} \in \tilde{\tau} \ ve \ H_{C_i} \tilde{\subseteq} G_B\}$$

ile gösterilir.

Örnek 2.8.3 ($F_A, \tilde{\tau}^o$) esnek topolojik uzayında herhangi bir $\Phi \neq G_B \subseteq F_A$ için $G_B^o = \Phi$ dir. Ayrıca, $(F_A, \tilde{\tau}^1)$ esnek topolojik uzayında herhangi bir $H_C \subseteq F_A$ için $H_C^o = H_C$ olur.

Örnek 2.8.4 Örnek 2.5.2 de tanımlanmış $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayında tanımlı olan esnek kümelerin, esnek içleri aşağıdaki gibidir:

$$F_{A_1}^o, F_{A_4}^o, \ F_{A_5}^o, \ F_{A_6}^o, \ F_{A_7}^o, \ F_{A_8}^o, \ F_{A_9}^o, F_{A_{16}}^o = \Phi$$

$$F_{A_2}^o, F_{A_3}^o, \ F_{A_{10}}^o = F_{A_2}$$

$$F_{A_{11}}^o, \ F_{A_{12}}^o, F_{A_{14}}^o = F_{A_{11}}$$

$$F_{A_{13}}^o = F_{A_{13}}$$

$$F_{A_{15}}^o = F_A$$

Teorem 2.8.5 ($F_A, \tilde{\tau}$) esnek topolojik uzay olsun. $H_C, G_B \subseteq F_A$ için

i) $G_B^o \subseteq G_B$

ii) G_B esnek açık küme ancak ve ancak $G_B = G_B^o$

iii) $F_A^o = F_A$

iv) $(G_B^o)^o = G_B^o$

v) $G_B \subseteq H_C$ ise $G_B^o \subseteq H_C^o$

vi) $(G_B \cap H_C)^o = G_B^o \cap H_C^o$

vii) $G_B^o \cup H_C^o \subseteq (G_B \cup H_C)^o$

Uyarı 2.8.6 Teorem 2.8.5 de verilen (vii) özelliğinin tersi genellikle doğru değildir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.8.7 Örnek 2.8.4 den

$F_{A_2}^o \cup F_{A_5}^o = F_{A_2}$ dir. $F_{A_2} \cup F_{A_5} = F_{A_{11}}$ ve $F_{A_{11}}^o = F_{A_{11}}$ olur.

$(F_{A_2} \cup F_{A_5})^o \not\subseteq F_{A_2}^o \cup F_{A_5}^o$ olduğundan eşitlik sağlanmaz.

Tanım 2.8.8 ($F_A, \tilde{\tau}$) esnek topolojik uzay ve $G_B \in S(X,E)$ olsun. G_B esnek kümesini esnek kapsayan bütün esnek kapalı kümelerinin esnek kesişimin G_B esnek kümesinin esnek kapanışı denir ve $\overline{G_B}$ şeklinde gösterilir. Matematiksel olarak G_B esnek kümesinin esnek kapanışı

$$\overline{G_B} = \bigcap_{G_B \tilde{\subseteq} H_{C_i}, H_{C_i}^c \in \tilde{\tau}} H_{C_i}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.8.9 G_B esnek kümesinin esnek kapanışı, G_B tarafından esnek kapsanan en dar esnek kapalı küme olarak ifadesi edilir ve

$\overline{G_B}$ $=\bigcap_{i\in I}$ $\{H_{C_i}: H_{C_i}^c \in \tilde{\tau}$ ve $G_B \tilde{\subseteq} H_{C_i}\}$

ile gösterilir.

Örnek 2.8.10 Örnek 2.5.2 de tanımlanmış ($F_A, \tilde{\tau}$) esnek topolojik uzayının esnek kapalılar ailesi,

$\tilde{F} = \{\{(e_1, X), (e_2, X)\}, \{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_1\})\}, \{(e_1, \{u_1, u_3\})\}, \{(e_1, \{u_1, u_3\}), (e_1, \{u_1, u_2\})\},$

$\{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\}\}$

şeklindedir.

Teorem 2.8.11 [11] ($F_A, \tilde{\tau}$) esnek topolojik uzay olsun. $G_B, H_C \in S(X,E)$ için,

i) $\bar{\bar{E}} \cong \bar{E}$
ii) $G_B \tilde{\subseteq} \overline{G_B}$
iii) G_B esnek kapalıdır ancak ve ancak $G_B \cong \overline{G_B}$
iv) $\overline{\overline{G_B}} \cong \overline{G_B}$
v) $G_B \tilde{\subseteq} H_C$ ise $\overline{G_B} \tilde{\subseteq} \overline{H_C}$
vi) $\overline{G_B \cup H_C} \cong \overline{G_B} \tilde{\cup} \overline{H_C}$
vii) $\overline{G_B \cap H_C} \tilde{\subseteq} \overline{G_B} \tilde{\cap} \overline{H_C}$

Teorem 2.8.12 Bir $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay olsun. $G_B \in S_E(U)$ için,

i) $(\overline{G_B})^c \cong (G_B^c)^o$

ii) $(G_B^o)^c \cong \overline{(G_B^c)}$

Teorem 2.8.13 Bir $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay olsun. $G_B \in S(X,E)$ için,

i) $G_B \in \tilde{\tau}$ ise $G_B \tilde{\subseteq} \overline{(G_B^o)}$

ii) $G_B^c \in \tilde{\tau}$ ise $\overline{(G_B^o)} \tilde{\subseteq} G_B$

Teorem 2.8.14 Bir $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay olsun. $G_B, H_C \in S(X,E)$ ise

$G_B^o \cup H_C^o \tilde{\subseteq} (\overline{G_B \cup H_C})^o$ dır.

Teorem 2.8.15 Bir $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay olsun. $G_B, H_C \in S(X,E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır;

i) $G_B \in \tilde{\tau}$ ve $H_C^o \subseteq G_B \subseteq H_C$ ise $H_C^o = G_B$

ii) $H_C \in \tilde{F}$ ve $G_B \subseteq H_C \subseteq \overline{G_B}$ ise $\overline{G_B} = H_C$

İspat: $G_B, H_C \in S(X,E)$ olsun. Buradan,

i) $G_B \subseteq H_C$ olduğundan $G_B^o \subseteq H_C^o$ ve $G_B \in \tilde{\tau}$ olduğundan $G_B^o = G_B$ olur. Buradan $G_B \subseteq H_C^o$ dir. $H_C^o \subseteq G_B$ olduğundan

$$H_C^o = G_B$$

elde edilir.

ii) $G_B \subseteq H_C$ ve $H_C \in \tilde{F}$ olduğundan $\overline{G_B} \subseteq \overline{H_C} = H_C$ olur. $H_C \subseteq \overline{G_B}$ olduğundan

$$\overline{G_B} = H_C$$

elde edilir.

2.9 Esnek Sürekli Fonksiyonlar

Bu bölümde, esnek açık küme ve esnek kapalı kümelerle tanımlanan, esnek sürekli fonksiyonun özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.9.1 $(F_A,\widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B,\widetilde{\tau_2})$ iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi: S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer $H_C \in \widetilde{\tau_2}$ için ϑ_φ^{-1} $(H_C) \in \widetilde{\tau_1}$ ise ϑ_φ esnek fonksiyonuna esnek sürekli fonksiyon denir.

Burada $A \subseteq E$ ve $B \subseteq K$ için $F_A \in S_A(X,E)$ ve $G_B \in S_B(Y,K)$ esnek kümeleri üzerinde sırasıyla $\widetilde{\tau_1}$ ve $\widetilde{\tau_2}$ esnek topolojileri tanımlanmıştır. Tezin bundan sonraki bölümlerinde de bu tanım kullanılacaktır.

Tanım 2.9.2 $(F_A,\widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B,\widetilde{\tau_2})$ iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi : S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun. F_A esnek kümesinin tüm esnek kapalı esnek alt kümelerinin kümesi $\widetilde{F_1}$, G_B esnek kümesinin tüm esnek kapalı esnek alt kümelerinin kümesi $\widetilde{F_2}$ olmak üzere, eğer her $H_C \in \widetilde{F_2}$ için $\vartheta_\varphi^{-1}(H_C) \in \widetilde{F_1}$ ise ϑ_φ esnek fonksiyonuna esnek sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.9.3 $(F_A,\widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B,\widetilde{\tau_2})$ iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi : S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir:

i) $\forall H_C \in \widetilde{\tau_2}$ için ϑ_φ^{-1} $(H_C) \in \widetilde{\tau_1}$

ii) $\forall H_C \in \widetilde{F_2}$ için ϑ_φ^{-1} $(H_C) \in \widetilde{F_1}$

İspat: "$\Rightarrow$" : $\forall H_C \in \widetilde{F_2} \Leftrightarrow (H_C)^c_{G_B} \in \widetilde{\tau_2}$

$$\Leftrightarrow \vartheta_\varphi^{-1}((H_C)^c_{G_B}) \in \widetilde{\tau_1}$$
$$\Leftrightarrow \vartheta_\varphi^{-1}((H_C))^c_{F_A} \in \widetilde{\tau_1}$$
$$\Leftrightarrow \vartheta_\varphi^{-1}(H_C) \in \widetilde{F_1}$$

"$\Leftarrow$": $\forall H_C \in \widetilde{\tau_2} \Leftrightarrow (H_C)^c_{G_B} \in \widetilde{F_2}$

$$\Leftrightarrow \vartheta_\varphi^{-1}((H_C)^c_{G_B}) \in \widetilde{F_1}$$
$$\Leftrightarrow \vartheta_\varphi^{-1}((H_C))^c_{F_A} \in \widetilde{F_1}$$
$$\Leftrightarrow \vartheta_\varphi^{-1}(H_C) \in \widetilde{\tau_1}$$

Esnek sürekliliğin yeni bir karaktarizasyonu aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.9.4 $(F_A,\widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B,\widetilde{\tau_2})$ iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi : S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i) ϑ_φ esnek süreklidir.

ii) Her $H_C \subseteq F_A$ için $\vartheta_\varphi\,(\overline{H_C}\,) \subseteq \overline{\vartheta_\varphi\,(H_C)}$

İspat: (i)⇒(ii) : ϑ_φ esnek sürekli olsun. $\overline{\vartheta_\varphi(H_C)} \in \widetilde{F_2}$ dir. Buradan, $\vartheta_\varphi^{-1}\ (H_C) \in \widetilde{F_1}$ olur. Ayrıca,

$$H_C \subseteq \vartheta_\varphi^{-1}\left(\vartheta_\varphi(H_C)\right) \subseteq \vartheta_\varphi^{-1}(\overline{\vartheta_\varphi(H_C)})$$

olduğundan ve $\overline{H_C}$, H_C yi içeren esnek kapalıların en küçüğü olduğundan,

$$\overline{H_C} \subseteq \vartheta_\varphi^{-1}(\overline{\vartheta_\varphi(H_C)})$$

ve buradan da,

$\vartheta_\varphi\ ((\overline{H_C}\,) \subseteq \vartheta_\varphi(\vartheta_\varphi^{-1}(\overline{\vartheta_\varphi(H_C)})) \subseteq \overline{\vartheta_\varphi(H_C)}$

elde edilir.

(ii)⇒ (i) $\vartheta_\varphi\ (\overline{H_C}\,) \subseteq \overline{\vartheta_\varphi(H_C)}$ ve $K_1 \in \widetilde{F_2}$ olsun. Bu durumda $K_1 = \overline{K_1}$ dir. $H_C = \vartheta_\varphi^{-1}(K_1)$ olsun.

$\vartheta_\varphi\ (\overline{H_C}\,) \subseteq \overline{\vartheta_\varphi(H_C)} = \vartheta_\varphi(\overline{\vartheta_\varphi^{-1}(K_1)}) \subseteq \overline{K_1} = K_1$

elde edilir. Buradan,

$\overline{H_C} \subseteq \vartheta_\varphi^{-1}(\varphi_\psi(\overline{H_C}\,)) \subseteq \vartheta_\varphi^{-1}(K_1) = H_C$

bulunur. $H_C \subseteq \overline{H_C}$ olduğundan $H_C = \overline{H_C}$ dır ve böylece H_C, F_A içinde esnek kapalıdır. O halde ϑ_φ esnek süreklidir.

Teorem 2.9.5 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2})$ iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi : S(X, E) \rightarrow S(Y, K)$ bir esnek fonksiyon olsun. $\widetilde{\beta_1}$ ile $\widetilde{S_1}, F_A$ esnek uzayının ve $\widetilde{\beta_2}$ ile $\widetilde{S_2}, G_B$ esnek uzayının sırasıyla esnek baz ve esnek alt bazı olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

i) ϑ_φ esnek süreklidir.

ii) $\forall S_2 \in \widetilde{S_2}$ için $\vartheta_\varphi^{-1}(S_2) \in \widetilde{\tau_1}$

iii) $\forall B_2 \in \widetilde{\beta_2}$ için $\vartheta_\varphi^{-1}(B_2) \in \widetilde{\tau_1}$

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) : $\widetilde{S_2} \subseteq \widetilde{\tau_2}$ olduğundan Tanım 4.5.1 den açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\forall B_2 \in \widetilde{\beta_2}$ esnek kümesinin $\widetilde{S_2}$ esnek alt bazının elemanlarının sonlu esnek kesişimi olarak yazıldığını biliyoruz; yani $\widetilde{\mu_2} \subseteq \widetilde{S_2}$ sonlu olmak üzere,

$$B_2 = \bigcap_{S_2 \in \widetilde{\mu_2}} S_2$$

Hipotezden , $\forall S_2 \in \widetilde{\mu_2}$ için $\vartheta_\varphi^{-1}(S_2) \in \widetilde{\tau_1}$ dir. Esnek açıklar aksiyomundan

$$\bigcap_{S_2 \in \widetilde{\mu_2}} \vartheta_\varphi^{-1}(S_2) = \vartheta_\varphi^{-1}(B_2) \in \widetilde{\tau_1}$$

elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : $\forall H_C \in \widetilde{\tau_2}$ alalım. $\widetilde{\mu'} \subseteq \widetilde{\beta_2}$ olmak üzere

$$H_C = \bigcup_{B_2 \in \widetilde{\mu'}} B_2$$

şeklinde yazılabilir. $\forall B_2 \in \widetilde{\mu'}$ için hipotezden $\vartheta_\varphi^{-1}(B_2) \in \widetilde{\tau_1}$ dir ve esnek açıklar aksiyomu gereğince,

$$\bigcup_{B_2 \in \widetilde{\mu'}} \vartheta_\varphi^{-1}(B_2) = \vartheta_\varphi^{-1}(H_C) \in \widetilde{\tau_1}$$

elde edilir ki, bu da ϑ_φ fonksiyonunun esnek sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 2.9.6 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2})$ iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi : S(X,E) \rightarrow S(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

i) ϑ_φ esnek süreklidir.

ii) $\forall H_C \subseteq G_B$ için $\vartheta_\varphi^{-1}(H_C^o) \subseteq [\vartheta_\varphi^{-1}(H_C)]^o$

iii) $\forall H_C \subseteq G_B$ için $\vartheta_\varphi^{-1}(\overline{H_C}) \supseteq \overline{[\vartheta_\varphi^{-1}(H_C)]}$

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) : $H_C^o \subseteq G_B$ esnek açık bir alt kümedir ve ϑ_φ^{-1}esnek sürekli olduğundan $\vartheta_\varphi^{-1}(H_C^o) \subseteq F_A$ esnek açık alt kümedir. Diğer taraftan,

$$H_C^o \subseteq H_C \Rightarrow \vartheta_\varphi^{-1}(H_C^o) \subseteq \vartheta_\varphi^{-1}(H_C) \Rightarrow [\vartheta_\varphi^{-1}(H_C^o)]^o \subseteq [\vartheta_\varphi^{-1}(H_C)]^o$$

elde edilir ki, burada $\vartheta_\varphi^{-1}(H_C^o) \subseteq F_A$ esnek açık olduğundan

$$[\vartheta_\varphi^{-1}(H_C^o)]^o = \vartheta_\varphi^{-1}(H_C^o)$$

olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\forall (H_C)_{G_B}^c \subseteq G_B$ için hipotezden,

$$\vartheta_\varphi^{-1}\left((H_C)_{G_B}^c\right)^o \subseteq [\vartheta_\varphi^{-1}((H_C)_{G_B}^c)]^o$$

Her iki tarafın esnek tümleyeni alınırsa,

$$[\,\vartheta_\varphi^{-1}\left((H_C)_{G_B}^c\right)^o]_{F_A}^c \supseteq [[\,\vartheta_\varphi^{-1}\left((H_C)_{G_B}^c\right)]^o]_{F_A}^c$$

elde edilir. Buradan,

$$\vartheta_\varphi^{-1}\left(\overline{(H_C)_{G_B}^c}\right)]_{F_A}^c \supseteq \overline{\left[\vartheta_\varphi^{-1}\left((H_C)_{G_B}^c\right)\right]}_{F_A}^c$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\vartheta_\varphi^{-1}(\overline{H_C}) \supseteq \overline{\left[\vartheta_\varphi^{-1}(H_C)\right]}$$

elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : $\forall H_C \subseteq G_B$ esnek kapalı için $\vartheta_\varphi^{-1}(H_C) \subseteq F_A$ esnek kapalı olduğu gösterilmelidir. Bunun için, hipotezden,

$$\vartheta_\varphi^{-1}(\overline{H_C}) \supseteq \overline{\left[\vartheta_\varphi^{-1}(H_C)\right]}$$

ve H_C ın esnek kapalılığından $H_C = \overline{H_C}$ dır. Buradan,

$$\vartheta_\varphi^{-1}(H_C) \supseteq \overline{\left[\vartheta_\varphi^{-1}(H_C)\right]}$$

Diğer yandan, esnek bir kümenin esnek kapanışı, o esnek kümenin üst kümesi olduğundan,

$$\vartheta_{\varphi}^{-1}(H_C) \tilde{\subseteq} \overline{[\vartheta_{\varphi}^{-1}(H_C)]}$$

dır. O halde,

$$\vartheta_{\varphi}^{-1}(H_C) = \overline{[\vartheta_{\varphi}^{-1}(H_C)]}$$

elde edilir ki, bu da $\vartheta_{\varphi}^{-1}(H_C) \tilde{\subseteq} F_A$ in esnek kapalı olduğunu belirtir.

2.10 Esnek Açık, Esnek Kapalı Fonksiyonlar ve Esnek Homeomorfizm

Bu bölümde, iki esnek topolojik uzay arasında tanımlanan esnek açık, esnek kapalı ve esnek homeomorfizm dönüşümlerinin temel özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 2.10.1 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2}), X$ ve Y üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_{\varphi} : S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun.

i) Her $H_C \in \widetilde{\tau_1}$ için $\vartheta_{\varphi}(H_C) \in \widetilde{\tau_2}$ ise, φ_{ψ} esnek fonksiyonuna esnek açık fonksiyon denir.

ii) Her $K_1 \in \widetilde{F_1}$ için $\vartheta_{\varphi}(K_1) \in \widetilde{F_2}$ ise, φ_{ψ} esnek fonksiyonuna esnek kapalı fonksiyon denir.

Örnek 2.10.2 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2}), X$ ve Y üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_{\varphi} : S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer $\widetilde{\tau_2} = \tilde{\tau}^1$ ise, ϑ_{φ} esnek fonksiyonlarının hepsi hem esnek kapalı hem de esnek açık fonksiyonlardır. Gerçekten, her $H_C \in \widetilde{\tau_1}$ için $\vartheta_{\varphi}(H_C) \in \widetilde{\tau_2}$ ve her $K_1 \in \widetilde{F_1}$ için $\vartheta_{\varphi}(K_1) \in \widetilde{F_2}$ olacaktır.

Teorem 2.10.3 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2}), X$ ve Y üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_{\varphi} : S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer ϑ_{φ} esnek açık ise her $H_C \in S(X,E)$ için $\vartheta_{\varphi}(H_C^o) \tilde{\subseteq} (\vartheta_{\varphi}(H_C))^o$ dir.

Teorem 2.10.4 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2}), X$ ve Y üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_{\varphi}: S(X,E) \to S(Y,K)$ bir esnek fonksiyon ve $\tilde{\beta}$ de $\widetilde{\tau_1}$ esnek topolojisi için bir esnek baz olsun. φ_{ψ} esnek açık ise her $H_C \in \tilde{\beta}$ için $\vartheta_{\varphi}(H_C) \in \widetilde{\tau_2}$ dir.

Tanım 2.10.5 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2}), X$ ve Y üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi : S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek birebir örten fonksiyon olsun. Eğer ϑ_φ ve ϑ_φ^{-1} esnek sürekli fonksiyonlar

ise, ϑ_φ esnek fonksiyonuna esnek homeomorfizm denir. Bu durumda $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2})$ iki esnek topolojik uzaylarına esnek homeomorf uzaylar denir.

Örnek 2.10.6 $\widetilde{\tau_1} = \tilde{P}(F_A)$ ve $\widetilde{\tau_2} = \tilde{P}(G_B)$ olmak üzere, her $\vartheta_\varphi : S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek birebir örten fonksiyon $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2})$ esnek topolojik uzayları için esnek homeomorfizmdir.

Teorem 2.10.7 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2}), X$ ve Y üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi : S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek homeomorfizm ise ϑ_φ esnek fonksiyonu esnek açık fonksiyondur.

Teorem 2.10.8 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2}), X$ ve Y üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi : S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek homeomorfizm ise ϑ_φ esnek fonksiyonu esnek kapalı fonksiyondur.

Teorem 2.10.9 $(F_A, \widetilde{\tau_1})$ ve $(G_B, \widetilde{\tau_2}), X$ ve Y üzerinde iki esnek topolojik uzay ve $\vartheta_\varphi : S(X, E) \to S(Y, K)$ esnek homeomorfizm olsun. Her $H_C \in S(X, E)$ için, $\vartheta_\varphi(\overline{H_C}) = (\overline{\vartheta_\varphi(H_C})$.

BÖLÜM 3

ESNEK SÜZGEÇLER

Bu bölümde, esnek yakınsaklık yapılarını tanımlamak için kullanacağımız esnek süzgeç kavramı ve bununla ilgili özellikleri inceleyeceğiz. Burada temel olarak Şahin ve Küçük[32] ün çalışmaları esas alınmıştır.

3.1 Esnek Süzgeç Tanımı

Tanım 3.1 [32] $S(X, E), X$ üzerindeki tüm esnek kümelerinin sınıfı olmak üzere, $\mathcal{F} \subseteq S(X, E)$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa X üzerinde bir esnek süzgeç olarak adlandırılır.

1) Eğer $F_A \in \mathcal{F}$ ve $F_A \subseteq G_B$ ise $G_B \in \mathcal{F}$,

2) Eğer $F_A \in \mathcal{F}$ ve $G_B \in \mathcal{F}$ ise $F_A \cap G_B \in \mathcal{F}$,

3) $\Phi \notin \mathcal{F}$.

Eğer β, X in boştan farklı esnek alt kümelerinin boştan farklı bir sınıfı ve sonlu kesişim altında kapalı oluyorsa $\{H_C : G_B \supseteq H_C \subseteq X : \exists G_B \in \beta\}$ esnek sınıfı β tarafından üretilen bir esnek süzgeçtir ve $[G_B]$ ile gösterilir. Özellikle eğer F_A, X in boştan farklı esnek alt kümesi ise $\{G_B : F_A \subseteq G_B \subseteq X\}$ bir esnek süzgeçtir ve $[F_A]$ ile gösterilir. Bu da F_A tarafından üretilen esnek atomik süzgeçtir.

Tanım 3.2 [32] Eğer $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ $ise\, \mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$ dan daha kabadır veya $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}$ den daha incedir denir. Bir esnek ultra süzgeç, diğer hiçbir esnek süzgeçten daha kaba olmayan esnek süzgeçtir. Esnek nokta süzgeci olmayan esnek ultra süzgeçlere esnek serbest süzgeç denir.

Örnek 3.3 Eğer $X = \{x_1, x_2, x_3\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\mathcal{F} = \{X, (F_A)_1, (F_A)_2, (F_A)_3, (F_A)_4\}$ esnek süzgeci olsun. $\mathcal{F}$ nin X üzerindeki esnek kümeleri ise,

$(F_A)_1 = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \emptyset), (e_3, \{x_1, x_3\})\}$,

$(F_A)_2 = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_2, x_3\}), (e_3, \{x_1, x_3\})\}$,

$(F_A)_3 = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \emptyset), (e_3, \{x_1, x_3\})\}$,

$(F_A)_4 = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\}), (e_3, \{x_1, x_3\})\}$. Ancak $\emptyset \in \mathcal{F}_{e_1}$ olduğundan $\mathcal{F}_{e_1}, X$ üzerinde süzgeç değildir. Ama $\mathcal{F}_{e_3} = \{\{x_1, x_3\}, X\}$ süzgeçtir.

Örnek 3.4 $X = \{x_1, x_2, x_3\}, E = \{e_1, e_2\}$ ve $\mathcal{F} = \{X, (F_A)_1, (F_A)_2, (F_A)_3, (F_A)_4\}$ esnek süzgeci olsun. $\mathcal{F}$ nin X üzerindeki esnek kümeleri ise,

$(F_A)_1(e_1) = \{x_2\}$ $\quad$ $(F_A)_1(e_2) = \{x_1\}$

$(F_A)_2(e_1) = \{x_2, x_3\}$ $\quad$ $(F_A)_2(e_2) = \{x_1, x_2\}$

$(F_A)_3(e_1) = \{x_1, x_2\}$ $\quad$ $(F_A)_3(e_2) = \{x_1, x_2\}$

$(F_A)_4(e_1) = \{x_2\}$ $\quad$ $(F_A)_4(e_2) = \{x_1, x_3\}$

$\mathcal{F}_{e_1} = \{X, \{x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2\}\ \}$ ve $\mathcal{F}_{e_2} = \{X, \{x_1\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2\}\}, X$ üzerinde süzgeçtir. Fakat esnek $\mathcal{F}$ esnek süzgeç değildir. Çünkü $(F_A)_2 \tilde{\cap} (F_A)_3 = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$ olup $(e_1, \{x_2\})$ ve $(e_2, \{x_1, x_2\}) \notin \mathcal{F}$.

Örnek 3.5 $\mathcal{F} = \{X\}$ ailesi, X üzerinde bir esnek süzgeçtir.

Örnek 3.6 $X = \{x_1, x_2\}, E = \{e_1, e_2\}$ olsun.

$[(e_1, \{x_1\})] =$
$\{(e_1, \{x_1\}), (e_1, X), \{(e_1, \{x_1\}, (e_2, \{x_1\})\}, \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}, \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, X)\}, X\}$
süzgeci $(e_1, \{x_1\})$ esnek noktasında esnek atomik süzgeçtir.

X bir sonsuz esnek küme olmak üzere, X üzerindeki X in tümleyeni sonlu tüm esnek alt kümelerinin sınıfı esnek Frechet süzgeci olarak adlandırılır. Her esnek serbest süzgeç esnek Frechet süzgecini içerir. Serbest esnek süzgeçlerin varlığı açık değildir. Esnek serbest süzgeçlerin varlığını göstermek için her esnek süzgecin bir esnek ultra süzgeç tarafından kapsandığını göstereceğiz.

Örnek 3.7 X bir sonsuz esnek küme olsun. X üzerindeki Frechet süzgeci X in sonlu tüm esnek alt kümelerinin topluluğudur. Her esnek serbest süzgeç esnek Frechet süzgecini içerir.

Önerme 3.8 Her esnek süzgeç bir esnek ultra süzgeç tarafından kapsanır.

İspat: $\mathcal{F}, X$ üzerinde bir esnek süzgeç ve P_X esnek süzgeçlerin sınıfı olup $\mathcal{F}$ yi içersin. Ayrıca içerme bağıntısı P_X de bir kısmi sıralama bağıntısı olup **C**, P_X de bir zincir olsun. Öncelikle $\bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C$ nin X üzerinde bir esnek süzgeç olduğunu göstereceğiz. X esnek kümesi X üzerindeki her esnek süzgecin bir elemanı olduğundan $X \in \bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C$ ve $\Phi \notin \bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C$ olur. Çünkü aksi halde en az bir $C \in \boldsymbol{C}$ için $\Phi \in C$ olurdu.

Eğer $F_A \in \bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C$ ve $F_A \subseteq F_A^{'}$ ise en az bir $C \in \boldsymbol{C}\ için\ F_A \in C$ olduğundan $F_A \in C$ olur. Buradan $F_A^{'} \in \bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C$ elde edilir. Eğer $F_A\ ve\ F_A^{'} \in \bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C\ ise\ F_A \in C$ ve $F_A^{'} \in D$ olacak şekilde $\bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C$ nin içerisinde $C\ ve\ D$ esnek süzgeçleri vardır. $\boldsymbol{C}$ bir zincir olduğundan ya $C \subseteq D$ ya da $D \subseteq C$ dir. Birinci durumda $F_A \cap F_A^{'} \in D$, ikinci durumda $F_A \cap F_A^{'} \in C$ olur. Sonuç olarak $F_A \cap F_A^{'} \in \bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C$ dir. Her $D \in C$ için $D \subseteq \bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C$ olduğundan $\bigcup_{C\in\boldsymbol{C}} C$ sınıfı **C** için bir üst sınırdır. Zorn Lemma'dan dolayı P_X bir U maksimal elemanına sahiptir. Sonuç olarak $U,\ \mathcal{F}$ esnek süzgecini içeren bir esnek ultra süzgeçtir.

Önerme 3.9 Her sonsuz X esnek kümesi için X üzerinde bir $\mathcal{F}$ esnek serbest süzgeci vardır.

İspat: Önerme 3.8 den X üzerinde $\mathcal{F}$ Frechet süzgeci içeren bir $\mathcal{F}^{'}$ esnek ultra süzgeci vardır. Her bir $x \in X$ için $X\backslash\{x\} \in \mathcal{F}$ ve böylece $\mathcal{F}^{'}$ esnek serbest süzgeçtir, aynı zamanda $\mathcal{F}^{'}$ esnek nokta süzgeci de değildir.

Esnek süzgeç tanımının 2. şartından dolayı esnek süzgeçler arasındaki alt küme bağıntısının sık kullanılan bir özelliğini elde ederiz.

Önerme 3.10 $\mathcal{F}\ ve\ \mathcal{G},\ X$ üzerinde iki esnek süzgeç olsun. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Leftrightarrow F_A \in \mathcal{F}$ için

$G_B \subseteq F_A$ olacak şekilde en az bir $G_B \in \mathcal{G}$ vardır.

İspat: $\Rightarrow$) Eğer $F \in \mathcal{F}$ ise hipotezden $G_B \in \mathcal{G}$ var öyle ki $G_B \subseteq F_A$ olduğundan $F_A \in \mathcal{G}$ dir. Böylelikle $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ dir.

$\Leftarrow$) Eğer $F_A \in \mathcal{F}$ ise hipotezden $F_A \in \mathcal{G}$ dir. $\mathcal{G}$ boştan farklı olduğundan en az bir $G_B \in \mathcal{G}$ vardır. Böylece $F_A \cap G_B$ olup $\mathcal{G}$ nin elemanıdır.

Önerme 3.11 F_A ve G_B, X in birer esnek alt kümesi olmak üzere, $[\ F_A\ ] \subseteq [G_B] \Leftrightarrow G_B \subseteq F_A$.

İspat: $\Leftarrow$) $H_C \in [\ F_A\ ]$ ve $F_A \subseteq G_B$ ise hipotezden $G_B \subseteq H_C$ dir. Böylelikle $H_C \in [\ G_B\ ]$.

$\Rightarrow$)Diğer taraftan hipotezden, $H_C \in [\ G_B\ ]$ öyle ki $H_C \subseteq F_A$ dır. Bu da $H_C \in [\ G_B\ ]$ için

$G_B \subseteq H_C$ olduğundan $G_B \subseteq F_A$ dır.

Tanım 3.12 $\vartheta_\varphi: X \to Y$ esnek fonksiyon, $F_A \subseteq X$ ve $G_B \subseteq Y$, $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}, X$ ve Y üzerinde sırasıyla iki esnek süzgeç olsun. ϑ_φ altında F_A nın görüntüsü,

$\vartheta_\varphi(F_A) = \{\vartheta_\varphi(a): a \in F_A\}, \mathcal{F}$ nin ϑ_φ altındaki görüntüsü

$\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) = [\vartheta_\varphi\ (F): F \in \mathcal{F}\ ]$ esnek süzgeç olarak gösterilir. Benzer şekilde G_B nın ϑ_φ altındaki ters görüntüsü $\vartheta_\varphi^{-1}(G_B) = \{\ x: \vartheta_\varphi(x) \in G_B\}$, $\mathcal{G}$ nin ϑ_φ altındaki ters görüntüsü

$\vartheta_\varphi^{-1}(\mathcal{G}) = [\vartheta_\varphi^{-1}(G): F \in \vartheta_\varphi^{-1}(\mathcal{G})]$ esnek süzgeci olarak tanımlanır.

Önerme 3.13 $\mathcal{F} \in P_X$ olmak üzere $\vartheta_\varphi: X \to Y$ ve $\vartheta'_{\varphi'}: Y \to Z$ esnek fonksiyonlar olsun.

$(\vartheta_\varphi\ o\ \vartheta'_{\varphi'})(\mathcal{F}) = \vartheta_\varphi\left(\vartheta'_{\varphi'}(\mathcal{F})\right)$

İspat: $K_X \in (\vartheta_\varphi\ o\ \vartheta'_{\varphi'})(\mathcal{F})$ olsun. $K_X \supseteq (\vartheta_\varphi\ o\ \vartheta'_{\varphi'})(\ H_C) = \vartheta_\varphi\left(\vartheta'_{\varphi'}(\ H_C)\right)$, $H_C \in \mathcal{F}$

$\vartheta'_{\varphi'}(\ H_C) \in \vartheta'_{\varphi'}(\mathcal{F}) \Rightarrow \vartheta_\varphi\left(\vartheta'_{\varphi'}(\ H_C)\right) \in \vartheta_\varphi\left(\vartheta'_{\varphi'}(\mathcal{F})\right)$ elde edilir. Çünkü esnek süzgeçler kapsayan kümeler altında kapalı olduğundan $K_X \in \vartheta_\varphi\left(\vartheta'_{\varphi'}(\mathcal{F})\right)$ dır. Böylelikle $(\vartheta_\varphi\ o\ \vartheta'_{\varphi'})(\mathcal{F}) \subseteq \vartheta_\varphi\left(\vartheta'_{\varphi'}(\mathcal{F})\right)$ olur. Diğer taraftan,

$K_X \in \vartheta_\varphi\left(\vartheta'_{\varphi'}(\mathcal{F})\right)$, $H_C \in \vartheta'_{\varphi'}(\mathcal{F})$ olup $K_X \supseteq \vartheta_\varphi(\ H_C)$. Yani $F \in \mathcal{F}$ için $H_C \supseteq \vartheta'_{\varphi'}(\mathcal{F})$ ve $K_X \supseteq (\vartheta_\varphi\ o\ \vartheta'_{\varphi'})(\mathcal{F})$ dır. Buradan ve $K_X \in (\vartheta_\varphi\ o\ \vartheta'_{\varphi'})(\mathcal{F})$ dır ve sonuç olarak

$\vartheta_{\varphi}\left(\vartheta'_{\varphi'}(\mathcal{F})\right) \subseteq (\vartheta_{\varphi}\ o\ \vartheta'_{\varphi'})(\mathcal{F})$ olur.

Esnek kümeler üzerindeki esnek süzgeçlerden esnek kümelerin Kartezyen çarpımı üzerindeki esnek süzgecini elde edebiliriz.

Tanım 3.14 Her $i \in I$ için, (X_i) esnek kümeler ailesi, $(\mathcal{F}_i)$ de esnek süzgeçler ailesi ve $(\mathcal{F}_i) \in P_{X_i}$ olmak üzere $\prod X_i$ *üzerindeki* $(\mathcal{F}_i)$ lerin esnek çarpım süzgeci

$\prod \mathcal{F}_i = [\ \prod F_i : F_i \in \mathcal{F}_i\ ]$ dir.

Topolojide genellikle verilen bir süzgecin bazı noktalara yakınsayıp yakınsamadığı incelenir. Yakınsak yapılar içerme işlemi altındadır. Bu yapılardan iki tanesini veriyoruz.

Önerme 3.15 $\mathcal{F}$ *ve* $\mathcal{G}, X$ üzerinde iki esnek süzgeç olsun. Her $\mathcal{F}$ elemanı ile her $\mathcal{G}$ elemanı kesişirse, $\mathcal{H} = \{ F_A \cap G_B : F_A \in \mathcal{F} \wedge G_B \in \mathcal{G} \}$ esnek ailesi $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ den daha ince esnek süzgeçtir.

İspat: $\mathcal{H}$ esnek süzgecinin X i içerip, $\emptyset$ yi içermediği açıktır. H_C ve H'_C, $\mathcal{H}$ a ait iki esnek küme olsun. O zaman F_A ve $F_A{}'$, G_B *ve* $G_B{}'$ vardır öyle ki $H_C = F_A \cap G_B$ ve $H_C{}' = F_A{}' \cap G_B{}'$ dir.

$F_A \cap F_A{}' \in \mathcal{F}$ ve $G_B \cap G_B{}' \in \mathcal{G}$ ise $H_C \cap H_C{}' = (F_A \cap G_B) \cap (F_A{}' \cap G_B{}')$

$= \left(F_A \cap F_A{}'\right) \cap (G_B \cap G_B{}') \in \mathcal{H}$ dır.

Eğer $H_C \in \mathcal{H}$ ve $H_C \subseteq K_1$ ise $F_A \in \mathcal{F}$ ve $G_B \in \mathcal{G}$ için $F_A \cap G_B \subseteq K_1$ dır.

$K_1 \cup F_A \in \mathcal{F}$ ve $K_1 \cup G_B \in \mathcal{G}$ var öyle ki $K_1 = (K_1 \cup F_A) \cup (K_1 \cup G_B) \in \mathcal{H}$ dir. Böylelikle $\mathcal{H}$ esnek süzgeçtir. Eğer $F_A \in \mathcal{F}$ *ise* $F_A \subseteq H_C$ olduğundan $F_A = F_A \cap X \in \mathcal{F}$ dir. Benzer şekilde $G_B \subseteq H_C$ için de bu yapılır.

Önerme 3.16 $\mathcal{F}, X$ üzerinde bir esnek süzgeç ve $F'_A \subseteq X$ olsun. Eğer $F'_A \notin \mathcal{F}$ *ise*

$\mathcal{G} = \left\{ G_B : G_B \supseteq F_A - F'_A \wedge F_A \in \mathcal{F} \right\}$ esnek süzgeci $\mathcal{F}$ den daha ince bir süzgeçtir.

İspat: $F_A - F_A' = \Phi$ ve $F \subseteq F_A'$ $olsun.$ $\mathcal{F}$ esnek süzgeç olduğundan $F_A' \in \mathcal{F}$ hipotezimiz ile çelişir. O yüzden $\Phi \notin \mathcal{G}$. Aynı şekilde $X \in \mathcal{G}$ dir. $G_1 \in \mathcal{G}$ ve $G_1 \subseteq G_2$ ise bazı $F_A \in \mathcal{F}$

için $F_A - F_A' \subseteq G_1 \subseteq G_2$ olduğundan $G_2 \in \mathcal{G}$ dir. G_1 ve $G_2, \mathcal{G}$ ye ait olup bazı $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ için $G_1 \supseteq F_1 - F_A'$ ve $G_2 \supseteq F_2 - F_A'$ olup,

$G_1 \cap G_2 \supseteq (F_1 - F_A') \cap (F_2 - F_A') = (F_1 \cap F_2) - F_A' \in \mathcal{G}$ dir.

Böylelikle $\mathcal{G}$ esnek süzgeçtir. Sonuç olarak, $F_A' \in \mathcal{F}, F_A - F_A' \subseteq F_A$ olduğundan

$F_A \in \mathcal{G}$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ den daha incedir.

Önerme 3.17 S, X in esnek alt kümelerinin boştan farklı bir esnek alt ailesi olsun. Eğer S nin her sonlu esnek alt sınıfının kesişimi sonsuz ise X üzerinde S yi içerecek şekilde en az bir esnek serbest süzgeç vardır.

İspat: $\mathcal{F}, X$ üzerinde Frechet süzgeci olsun. $\tilde{T} = \{ \cap S' : \Phi \neq S' \in S \}$ esnek kümeler sınıfı, Önerme 3.15 den $\mathcal{G} = \{F_A \cap T_S : F_A \in \mathcal{F} \wedge T_S \in \tilde{T} \}$ esnek süzgeci $\mathcal{F}$ ve $\tilde{T}$ den daha incedir. Önerme 3.8 den dolayı $\mathcal{G}$ den ince bir $\boldsymbol{U}$ esnek ultra süzgece sahiptir. Her $x \in X$ için $X - \{x\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ olup $\boldsymbol{U}$ esnek nokta süzgeci değil, bir esnek serbest süzgeçtir.

Önerme 3.18 $\mathcal{F}$ esnek süzgeç, $\boldsymbol{U}$ da X üzerinde bir esnek ultra süzgeçtir ancak ve ancak her $F_A \subseteq X$ için ya $F_A \in \boldsymbol{U}$ ya $X - F_A \in \boldsymbol{U}$ dur.

İspat: $\boldsymbol{U}$ **,** X üzerinde bir esnek ultra süzgeç olsun. Varsayalım ki $F_A \subseteq X$ ve $F_A \notin \boldsymbol{U}$ olsun. Önerme 3.16 den $\boldsymbol{V} = \{ \mathrm{V} : \mathrm{V} \supseteq \mathrm{U} - F_A \wedge \mathrm{U} \in \boldsymbol{U} \}$ esnek süzgeci $\boldsymbol{U}$ dan daha incedir. $\boldsymbol{U}$ esnek ultra süzgeç olduğundan $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}$ dir. $X \in \mathbf{U}$ olduğundan sonuç olarak $X - F_A \in \boldsymbol{U}$ dur.

Diğer taraftan, her $F_A \subseteq X$ için ya $F_A \in \boldsymbol{U}$ ya $X - F_A \in \boldsymbol{U}$ olsun. O zaman $\boldsymbol{U}$**,** X üzerinde bir esnek süzgeç olur. Eğer $\boldsymbol{U}$**,** $\boldsymbol{V}$ içinde olacak şekilde $\mathrm{V} \in \boldsymbol{V}$ var öyle ki $V \notin \boldsymbol{U}$ dur. Hipotezden $X - V \in \boldsymbol{U}$ ve $X - V \in \boldsymbol{V}$ olur ama $(X - V) \cap V = \emptyset$ dir. Bu nedenle, $\boldsymbol{U}$ nun herhangi bir esnek süzgecin içinde bulunmadığı sonucuna varılır. O yüzden $\boldsymbol{U}$ da X üzerinde bir esnek ultra süzgeçtir.

Bir esnek ultra süzgeç sonlu kümeler birleşimini içeriyorsa genel olarak, bu esnek kümelerden en az birini içermelidir; esnek kümeler ayrık ise o zaman esnek ultra süzgeç tam olarak bu esnek kümelerden birini içerir. Benzer şekilde esnek ultra süzgeçlerin sonlu kesişim dışında herhangi bir ince esnek süzgeç bunlardan biri ile aynıdır.

Önerme 3.19 $\boldsymbol{U}$**,** X üzerinde bir esnek ultra süzgeç ve $i \in I$ için $(S_i), X$ in esnek alt kümelerinin bir sonlu sınıfı olsun. Eğer $\bigcup S_i \in \boldsymbol{U}$ ise en az bir $i \in I$ için $S_i \in \boldsymbol{U}$ olur.

İspat: Tümevarım yöntemi ile ispatımızı yapalım. S_0 ve S_1, $\boldsymbol{U}$ ya ait değilse $X - S_0$ ve $X - S_1 \in \boldsymbol{U}$ olur. Dolayısıyla $X - (S_0 \cup S_1) = (X - S_0) \cap (X - S_1) \in \boldsymbol{U}$ olup, $S_0 \cup S_1 \in \boldsymbol{U}$ hipotezi ile çelişir. O yüzden $|I| = 2$ için doğrudur. $n \geq 2$ olmak üzere $|I| = n + 1$ için doğruluğuna bakalım. $|I| = n$ ise $(S_1 \cup ... \cup S_n) \in \boldsymbol{U}$ dur. O zaman $|I| = n + 1$ için hipotezden

$(S_1 \cup ... \cup S_n) \cup S_{n+1} \in \boldsymbol{U}$ dur. Eğer $S_{n+1} \notin \boldsymbol{U}$ ise $(S_1 \cup ... \cup S_n) \in \boldsymbol{U}$ olur. Dolayısıyla tümevarımdan en az bir $1 \leq k \leq n$ için $S_k \in \boldsymbol{U}$ olur.

Önerme 3.20 $(\mathrm{U_i})$, X üzerinde esnek süzgeçlerin bir sonlu ailesi olsun. Eğer $\boldsymbol{V}$**,** $\bigcap_{i \in I} \mathrm{U}_i$ den daha ince esnek ultra süzgeç ise en az bir $i \in I$ için $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U_i}$ dir.

İspat: Eğer her $i \in I$ için $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{U_i}$ ise her $i \in I$ için $X - \mathrm{U}_i \in \boldsymbol{V}$ olacak şekilde en az bir $\mathrm{U}_i \in \boldsymbol{U_i}$ vardır.

$X - \cup\, \mathrm{U}_i = \cap\, (X - \mathrm{U}_i) \in \boldsymbol{V}$, bundan dolayı da $\cup\, \boldsymbol{U_i} \notin \boldsymbol{V}$ olur. Ama her $i \in I$ için $\cup\, \mathrm{U}_i \in \boldsymbol{U_i}$ olduğundan $\cup\, \mathrm{U}_i \in \cup\, \boldsymbol{U_i} \subseteq \boldsymbol{V}$ olur. Bu durum $\cap\, \boldsymbol{U_i} \notin \boldsymbol{V}$ olması ile çelişir. O halde en az bir $i \in I$ için $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U_i}$ dir.

$X = \{a, b, c, d\}$ olduğunda, X üzerindeki esnek ultra süzgeçler sadece esnek nokta süzgeçleridir. Diğer tüm esnek süzgeçler esnek atomik süzgeçtir. Bu X in bir özelliği değil, daha ziyade bütün sonlu kümeler için de geçerlidir.

Önerme 3.21 $\boldsymbol{U}$ esnek ultra süzgeç olsun. Eğer $\boldsymbol{U}$ bir sonlu esnek küme içeriyor ise $\boldsymbol{U}$ bir esnek nokta süzgecidir.

İspat: F_A, $\boldsymbol{U}$ içinde en küçük sonlu esnek küme olsun. Eğer $G_B \subseteq F_A$ ise $G_B \notin \boldsymbol{U}$ dir. Buradan,

$\boldsymbol{V} = \{V: V \supseteq U - G_B \wedge U \in \boldsymbol{U}\}$ esnek süzgeci, $\boldsymbol{U}$ dan daha ince bir esnek süzgeçtir. $\boldsymbol{U}$ esnek ultra süzgeç olduğundan $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}$ dir. Özellikle $F_A - G_B \in \boldsymbol{U}$ dur. Ama

$|F_A - G_B| = |F_A| - |G_B| < |F_A|$, bu F_A in $\boldsymbol{U}$ içinde en küçük sonlu esnek küme kabul etmemizle ters düştü. Böylelikle F_A ya boş esnek ya da tek elemanlı esnek kümedir. F_A boş esnek olamayacağından F_A tek elemanlı esnek kümedir ve bu nedenle $\boldsymbol{U}$ esnek nokta süzgeçtir.

Önerme 3.22 Sonlu bir esnek küme de, her esnek ultra süzgeç bir esnek nokta süzgeçtir.

İspat: $\boldsymbol{U}, X$ sonlu esnek kümesi üzerinde bir esnek ultra süzgeç olsun. $X \in \boldsymbol{U}$ ve Önerme 3.16 den $\boldsymbol{U}$ bir esnek nokta süzgeçtir.

Önerme 3.23 Sonlu bir esnek küme de, her esnek süzgeç bir esnek atomik süzgeçtir.

İspat: X sonlu esnek kümesi üzerinde $\mathcal{F}$ bir esnek süzgeç olsun. F_A, $\mathcal{F}$ içinde en küçük esnek küme olsun. Eğer $G_B \in \mathcal{F}$ ama $F_A \not\subset G_B$ değil ise $|F_A \cap G_B| < |F_A|$ olur. Dolayısıyla $F_A \cap G_B \in \mathcal{F}$ olur. Bu durum F_A nın en küçük küme olmasıyla çelişir. Böylece $F_A \subseteq G_B$ olur.Sonuç olarak $\mathcal{F} = [F_A]$ dır.

Her esnek süzgeç onu içeren tüm esnek ultra süzgeçlerin kesişimidir. Sonuç olarak sonsuz bir küme üzerindeki tüm esnek serbest süzgeçlerin kesişimi esnek Frechet süzgeçtir.

Önerme 3.24 Her esnek süzgeç onu içeren tüm esnek ultra süzgeçlerin kesişimidir.

İspat: $\mathcal{F}$, X üzerinde esnek süzgeç ve her $i \in I$ için $(\boldsymbol{U_i})$, $\mathcal{F}$ yi içeren tüm esnek ultra süzgeçlerin ailesi olsun. Burada $\cap \boldsymbol{U_i} \subseteq \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. Aksine olarak $\cap \boldsymbol{U_i} \not\subset \mathcal{F}$ ise o zaman en az bir $U \in \cap \boldsymbol{U_i}$ vardır ama herhangi bir $F_A \in \mathcal{F}$ yi içermez. O halde $\mathcal{G} = \{ G_B : G_B \supseteq F_A - U \wedge F_A \in \mathcal{F} \}$ kümesi $\mathcal{F}$ den daha ince esnek süzgeçtir. Eğer **$\boldsymbol{V}$,** $\mathcal{G}$ den daha ince ise $\mathcal{F}$ den de daha ince esnek bir ultra süzgeç olduğundan en az bir $i \in I$ için $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U_i}$ dir. Ama $F_A - U$ nun ve U , $\boldsymbol{U_i}$ nin elemanı olduğundan bu durum mümkün değildir. O yüzden $\cap \boldsymbol{U_i} \subseteq \mathcal{F}$ dir.

Önerme 3.25 Eğer X bir sonsuz esnek küme ise X üzerindeki tüm esnek serbest süzgeçlerin kesişimi esnek Frechet süzgeçtir.

İspat: $i \in I$ için $(\boldsymbol{Ui})$, X üzerinde tüm esnek serbest süzgeçlerinin ailesi ve $\mathcal{F}$ esnek Frechet süzgeç olsun. İlk önce $\mathcal{F} \subseteq \cap \boldsymbol{U_i}$ yi gösterelim. Aksine olarak bazı $i \in I$ için $\mathcal{F} \not\subset \boldsymbol{U_i}$ olduğunu kabul edersek en az bir $F_A \in \mathcal{F}$ esnek kümesi $\boldsymbol{U_i}$ nin elemanı değildir. Dolayısıyla $X - F_A \in \boldsymbol{U_i}$ dir. Ancak $X - F_A$ sonlu olduğundan $\boldsymbol{U_i}$ nin esnek nokta süzgeci olmasını gerektirir. Bu durum $\boldsymbol{U_i}$ nin esnek serbest olma kabulü ile çelişir. Sonuç olarak $\mathcal{F} \subseteq \cap \boldsymbol{U_i}$ dir**.**

Diğer taraftan, $\cap \boldsymbol{U_i} \subseteq \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. Aksine olarak eğer $\cap \boldsymbol{U_i} \not\subset \mathcal{F}$ ise, her bir $\boldsymbol{U_i}$ nin en az bir U elemanı vardır ki $U \notin \mathcal{F}$ dir. O halde, $\mathcal{G} = \{ G_B : G_B \supseteq F_A - U \wedge F_A \in \mathcal{F} \}$ kümesi $\mathcal{F}$ den daha ince esnek süzgeçtir. Eğer **V,** $\mathcal{G}$ den daha ince esnek bir ultra süzgeç ise $\mathcal{F}$ den daha incedir. Dolayısıyla $\mathcal{F}$ bir serbest süzgeçtir. O halde en az bir $i \in I$ için $\mathbf{V} = \mathbf{U_i}$ elde edilir. Buradan $U \in \mathbf{V}$ olur**.** Bu durum mümkün değildir. Çünkü $X - U \in \mathbf{V}$ dir. Sonuç olarak $\cap \boldsymbol{U_i} \subseteq \mathcal{F}$ dir.

BÖLÜM 4

ESNEK YAKINSAKLIK UZAYLARI

Cartan'ın[9] süzgeçleri tanımlamasından 10 yıl sonra Choquet[10] bu kavramı yakınsaklık uzaylarını geliştirmek için kullandı. Topolojik uzaylardan farklı olarak yakınsaklık uzayları Kartezyen kapalı kategori oluştururlar ve topolojik uzaylar yakınsaklık uzayların bir dolgun alt kategorisidirler.

Bir esnek küme üzerindeki esnek yakınsaklık uzayı, her bir esnek noktanın bir esnek süzgeçler sınıfı ile eşleştirilmesidir öyle ki bu sınıflardan her biri ters içerme ve sonlu esnek kesişim altında kapalı olup esnek nokta süzgecini içerir.

4.1 Esnek Yakınsaklık Tanımı

Tanım 4.1 X bir esnek küme olsun. Bir esnek yakınsaklık yapısı X üzerindeki tüm esnek süzgeçler ile X arasında bir $\downarrow : P_X \rightarrow X$ bağıntısıdır öyle ki her $x \in X,\ \mathcal{F}\ ve\ \mathcal{G} \in P_X$ için

1. $[x] \downarrow x,$
2. $\mathcal{F} \downarrow x\ ve\ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\ ise\ \mathcal{G} \downarrow x,$
3. $\mathcal{F} \downarrow x\ ve\ \mathcal{G} \downarrow x\ \ ise\ \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \downarrow x.$

şartları sağlanır. Bir X esnek kümesi ve bir $\downarrow$ esnek yakınsaklık yapısının oluşturduğu $(X, \downarrow)$ sıralı ikilisine bir esnek yakınsaklık uzayı denir. Karıştırma durumu yoksa $(X, \downarrow)$ esnek yakınsaklık yapısını X olarak göstereceğiz. $\mathcal{F} \downarrow x$ ifadesini de $\mathcal{F}$, x e esnek noktasına esnek yakınsıyor diye okuruz.

Pek çok esnek yakınsaklık yapı kavramı vardır. Mesela, esnek yakınsaklık yapısının sonlu esnek kesişim özelliğini sağlaması gerekmiyor. Bu sonlu esnek kesişim özelliği sağlaması gerekmeyen uzaylara esnek genelleştirilmiş yakınsaklık uzayı denir.

Örnek 4. 2 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ esnek evrensel küme, $E = \{e_1\}$ parametrelerin kümesi olsun. (X, E) üzerindeki esnek süzgeçlerin sınıfı P_X,

$$P_X = \{[\{(e_1, \{x_1\})\}] = \mathcal{F}_1, [\{(e_1, \{x_2\})\}] = \mathcal{F}_2, [\{(e_1, \{x_3\})\}] = \mathcal{F}_3, \{X\}$$
$$= \mathcal{F}_4, \{(e_1, \{x_1, x_2\}), X\} = \mathcal{F}_5, \{(e_1, \{x_1, x_3\}), X\} = \mathcal{F}_6, \{(e_1, \{x_2, x_3\}), X\}$$
$$= \mathcal{F}_7\}$$

X üzerindeki esnek yakınsaklık yapısı aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde olsun.

$$\mathcal{F} \downarrow (e_1, \{x_1\}) \Leftrightarrow \{(e_1, \{x_1, x_2\})\} \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} \downarrow (e_1, \{x_2\}) \Leftrightarrow \{(e_1, \{x_2, x_3\})\} \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} \downarrow (e_1, \{x_3\}) \Leftrightarrow \{(e_1, \{x_3\})\} \in \mathcal{F}$$

$\{X\}$ ve $[(e_1, \{x_1, x_3\})]$ esnek süzgeçleri esnek yakınsak değildir.

Örnek 4.3 Reel alışılmış esnek topolojik uzayı düşünelim. Her $x \in \mathbb{R}$ için U_x, x in tüm esnek komşuluklarının kümesi olsun. $\mathbb{R}$ esnek yakınsaklık yapısına eşdeğer $\mathcal{F} \downarrow x \Leftrightarrow \mathcal{F} \supseteq U_x$.

4.2 Esnek Süreklilik ve Esnek Limit

Esnek sürekli fonksiyonlar yapıyı korurlar. Mesela $\mathbb{R}$ de bir esnek fonksiyon bir noktada esnek süreklidir ancak ve ancak bu esnek fonksiyon açık aralıkları korur. Yani bir esnek noktanın görüntüsünü içeren her esnek açık aralık için tanım kümesinde bir esnek açık aralık vardır öyle ki bu aralığın görüntüsü esnek fonksiyon altındaki değer kümesindeki açık aralığın içine düşer ve noktayı içerir. Esnek topolojik uzayın açık kümeleri $\mathbb{R}$ nin esnek açık aralıklarını genelleştirdiğinden esnek topolojik uzay arasındaki bir esnek fonksiyon bir noktada esnek süreklidir ancak ve ancak bu esnek fonksiyon açık kümeleri korur. Başka bir deyişle bir esnek noktanın görüntüsünü içeren her esnek açık küme için tanım kümesinde bir açık küme vardır öyle ki bu esnek fonksiyon bu kümeyi değer kümesindeki açık kümenin içine götürür ve esnek noktayı içerir. Esnek yakınsaklık uzayı arasındaki esnek sürekli fonksiyonlar da yapıyı korumalarına rağmen bu durum ters görüntüyle olmaz. Bir esnek sürekli fonksiyon altında yakınsak süzgecin görüntüsü yine bir esnek yakınsak süzgeç olur.

Tanım 4.2.1 X ve Y esnek yakınsaklık uzayları ve $x \in X$ olsun. $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek fonksiyonu x noktasında esnek süreklidir ancak ve ancak X üzerindeki her $\mathcal{F}$ esnek süzgeci için $\mathcal{F} \downarrow x$ iken Y de $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$ e esnek yakınsar.

Teorem 4.2.2 X ve Y esnek yakınsaklık uzayları olsun. $\vartheta_\varphi : X \to Y$ fonksiyonu esnek süreklidir ancak ve ancak $x \in X$ e esnek yakınsayan her $\mathcal{F}$ esnek süzgeci için Y de $\vartheta_\varphi(x)$ e esnek yakınsayan en az bir $\mathcal{G}$ esnek süzgeci vardır öyle ki $\mathcal{G}$ nin her G_B elemanı için $\mathcal{F}$ de bir F_A elemanı vardır öyle ki $\vartheta_\varphi(F_A) \subseteq G_B$ dir.

İspat: $\Rightarrow$) $x \in X$ e esnek yakınsayan her $\mathcal{F}$ esnek süzgeci için Y de $\vartheta_\varphi(x)$ e esnek yakınsayan en az bir $\mathcal{G}$ esnek süzgeci vardır öyle ki $\mathcal{G}$ nin her G_B elemanı için $\mathcal{F}$ de bir F_A elemanı vardır öyle ki $\vartheta_\varphi(F_A) \subseteq G_B$ dir.

$G_B \in \mathcal{G}$, en az bir $F_A \in \mathcal{F}$ için $\vartheta_\varphi(F_A) \subseteq G_B$ olduğundan $\vartheta_\varphi(F_A) \in \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ öyle ki $G_B \in \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ dir. Böylelikle $\mathcal{G} \subseteq \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ ve bu nedenle Y de $\vartheta_\varphi(\mathcal{F})$, $\vartheta_\varphi(x)$ e esnek yakınsar. O yüzden ϑ_φ esnek süreklidir.

$\Leftarrow$) $x \in X$ e esnek yakınsayan her $\mathcal{F}$ esnek süzgeci olsun ve Y de $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}), \vartheta_\varphi(x)$ e esnek yakınsasın. Ayrıca $G_B \in \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ olduğundan istediğimiz gibi $\vartheta_\varphi(F_A) \subseteq G_B$ olur.

Önerme 4.2.3 X, Y ve Z esnek yakınsaklık uzayları olsun. $\vartheta_\varphi : X \to Y$ ve $\vartheta_\theta : X \to Z$ esnek fonksiyonları esnek sürekli ise $\vartheta_\theta \, o \, \vartheta_\varphi$ de esnek süreklidir.

İspat: X üzerinde $\mathcal{F} \downarrow x$ olsun. Hipotezden $Y\, de\; \vartheta_\varphi(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$ dir. Bu yüzden $Z\, de$

$\vartheta_\theta(\vartheta_\varphi(\mathcal{F})) \downarrow \vartheta_\theta(\vartheta_\varphi(x))$ olur. Buna eşdeğer $Z\, de\; (\vartheta_\theta o \vartheta_\varphi)(F) \downarrow \left(\vartheta_\theta o \vartheta_\varphi\right)(x)$ dir. Böylelikle $\vartheta_\theta o\, \vartheta_\varphi$ de esnek süreklidir.

Tanım 4.2.4 $X\; ve\; Y$ esnek yakınsaklıklık uzayları olsun. $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek fonksiyonu bir esnek homeomorfizmadır ancak ve ancak ϑ_φ birebir, örten, esnek sürekli ve $\vartheta_\varphi{}^{-1}$ de esnek sürekli olmasıdır. Bu esnek uzaylar kendileri homeomorfik ise aralarında bir esnek homeomorfizma vardır. Bir esnek otomorfizma, bir esnek yakınsaklıklık uzayından kendisine tanımlı esnek homeomorfizmdir ve X esnek yakınsaklık uzayı üzerindeki bütün esnek otomorfizmaların kümesi $Aut(X)$ ile gösterilir. Eğer bir esnek yakınsaklık uzayı üzerinde birim fonksiyondan farklı esnek otomorfizmler de varsa bu esnek uzaya esnek homojen uzay denir.

Önerme 4.2.5 X ve Y esnek yakınsaklık uzayları ve $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek fonksiyonu birebir, örten olsun. ϑ_φ bir esnek homeomorfizmdir ancak ve ancak $X\ de\ \mathcal{F} \downarrow x$ iken $Y\ de\ \vartheta_\varphi\ (\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi\ (x)$ dir.

İspat: $\Leftarrow$) X de $\mathcal{F} \downarrow x$ iken Y de $\vartheta_\varphi\ (\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi\ (x)$ olduğundan ϑ_φ esnek süreklidir. Y de $\vartheta_\varphi\ (\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi\ (x)$ iken X de $\mathcal{F} \downarrow x$ olduğundan Y de $\vartheta_\varphi\left(\vartheta_\varphi{}^{-1}(\mathcal{F})\right) = \mathcal{F}$,

$x = \vartheta_\varphi\left(\vartheta_\varphi{}^{-1}(x)\right)$ olduğundan $\vartheta_\varphi{}^{-1}(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi{}^{-1}(x)$ olur. Böylece ϑ_φ ve $\vartheta_\varphi{}^{-1}$ esnek sürekli, birebir örten olduğundan $\vartheta_\varphi{}^{-1}(x)$ olur. ϑ_φ esnek homeomorfizmdir .

$\Rightarrow$) ϑ_φ esnek sürekli olduğundan $X\ de\ \mathcal{F} \downarrow x$ iken $Y\ de\ \vartheta_\varphi\ (\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi\ (x)$ olur. Tersinden $\vartheta_\varphi{}^{-1}$ esnek sürekli olduğundan $Y\ de\ \mathcal{F} \downarrow x$ ise X de $\vartheta_\varphi{}^{-1}(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi{}^{-1}(x)$ dir. Buradan $Y\ de\ \vartheta_\varphi\ (\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi\ (x)$ iken X de $\mathcal{F} = \vartheta_\varphi{}^{-1}\left(\vartheta_\varphi\ (\mathcal{F})\right), \vartheta_\varphi{}^{-1}\left(\vartheta_\varphi\ (x)\right) = x$ noktasına esnek yakınsar.

Tanım 4.2.6 $X\ ve\ Y$ esnek yakınsaklık uzayları , $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek kısmi fonksiyon ve p $\in X$ olsun. ϑ_φ nin p noktasındaki esnek limiti $l \in Y$ öyle ki $\vartheta_{\varphi\ p \to l} : X \to Y$ tanımlarsak

$$\vartheta_{\varphi\ p \to l}(x) = \begin{cases} l, & eğer\ x = p \\ \vartheta_\varphi\ (x)\ , & diğer\ durumlar \end{cases} \qquad p \text{ de esnek sürekli}$$

$l = \lim_{x \to p} f(x)$ her zaman tektir ve diğer durumlarda ise $l \in \lim_{x \to p} \vartheta_\varphi\ (x)$ dir.

4.3 Esnek Açık Küme ve Esnek Kapalı Küme

Bir topolojik uzayın temel nesneleri esnek açık kümelerdir. Buna karşın bir esnek yakınsak uzay hakkında bilgi verebilmek için esnek süzgeçlerin hangi noktaya esnek yakınsadığına bakmalıyız. Bunun sonucunda esnek yakınsak uzaylarla ilgili çalışmalarda esnek süzgeçler esnek açık kümelerin önemini geride bırakır. Bununla birlikte esnek komşulukların özel bir hali olan esnek açık kümeler pretopolojik uzayları incelerken önemlidir. Esnek kapalı kümeler de mereoloji kavramı için önemlidir.

Tanım 4.3.1 X bir esnek yakınsaklık uzayı olsun. Her $x \in X$ için esnek komşuluk süzgeci

$$\widetilde{N_x} = \cap \{\mathcal{F} \in P_X : \mathcal{F} \downarrow x\}$$

Her $\widetilde{N_x}$, x in bir esnek komşuluğudur. Bir küme esnek açıktır ancak ve ancak o küme her bir elemanının bir esnek komşuluğudur.

Tanım 4.3.2 X bir esnek yakınsaklık uzayı olsun. X in bir $F_A^{'}$ alt kümesinin esnek kapanışı

$$cl\left(F_A^{'}\right) = \left\{x \in X : (\exists \mathcal{F})\left(\mathcal{F} \downarrow x \; ve \; F_A^{'} \in \mathcal{F}\right)\right\}$$

kümesidir. Bir $F_A^{'}$ kümesi esnek kapalıdır ancak ve ancak $cl\left(F_A^{'}\right) = F_A^{'}$.

Eğer esnek yakınsaklık uzayı topolojik uzay ise Tanım 4.3.1 ve 4.3.2 bilinen esnek topolojik kavramlarla çakışır. Tanım 4.3.2 verilmiş olan esnek kapanış tanımı, Kuratowski esnek kapanış aksiyomlarının tamamını sağlamaz. Özellikle bu kapanış eş güçlü değildir. Bunun sonucunda bazı yazarlar bir alt kümenin esnek kapanışı farklı şekilde ifade etmişlerdir. Önerme 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5 de Kuratowski aksiyomlarının sağlandığını gösterir. Örnek 4.3.6 de bu esnek kapanışın eş güçlü olmadığını gösterir.

Önerme 4.3.3 Esnek boş küme esnek kapalıdır.

İspat: Eğer $x \in cl(\Phi)$ olsaydı en az bir Φ yi içeren, x e esnek yakınsayan esnek süzgeç olurdu. Fakat hiçbir esnek süzgeç Φ yi içermez. O yüzden $x \notin cl(\Phi)$ $ve\; cl(\Phi) = \Phi$ dir.

Önerme 4.3.4 X bir esnek yakınsaklık uzayı olmak üzere, eğer $F_A^{'} \subseteq X$ ise $F_A^{'} \subseteq cl\left(F_A^{'}\right)$ dır.

İspat: Eğer $x \in F_A^{'}$ ve $F_A^{'} \in [x]$, bu $[x]$ esnek nokta süzgeci x e esnek yakınsar. Böylece $x \in cl(F_A^{'})$ dır.

Önerme 4.3.5 Eğer $F_A^{'}$ ve $G_B^{'}$ esnek kümeleri X esnek yakınsaklık uzayının esnek alt kümeleri ise

$$cl(F_A' \cup G_B') = cl(F_A') \cup cl(G_B')$$

İspat: Eğer $x \in cl(F_A' \cup G_B')$ ve $F_A' \cup G_B'$ yi içeren $\mathcal{F}$ esnek süzgeci x e esnek yakınsasın. Eğer $F_A' \in \mathcal{F}$ ise $x \in cl(F_A') \subseteq cl(F_A') \cup cl(G_B')$ olur.

Eğer $F_A' \notin \mathcal{F}$ ise $\mathcal{G} = \{G_B : G_B \supseteq F_A - F_A' \wedge F_A \in \mathcal{F}\}$ esnek süzgeci $\mathcal{F}$ den daha ince bir esnek süzgeçtir.

$(F_A' \cup G_B') - F_A' \subseteq G_B'$ olduğundan $G_B' \in \mathcal{G}$ dir. $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ ise $\mathcal{G} \downarrow x$ olur ve bu yüzden $x \in cl(G_B') \subseteq cl(F_A') \cup cl(G_B')$ dir. Dolayısıyla $cl(F_A' \cup G_B') \subseteq cl(F_A') \cup cl(G_B')$

Diğer taraftan $x \in cl(F_A') \cup cl(G_B')$ olduğunu kabul edelim. Eğer $x \in cl(F_A')$ ise F_A' esnek kümesini içeren ve x e yakınsayan en az bir $\mathcal{F}$ esnek süzgeci vardır. $F_A' \subseteq F_A' \cup G_B'$ olduğundan $F_A' \cup G_B' \in \mathcal{F}$ dir. Böylece $x \in cl(F_A' \cup G_B')$ elde edilir. Benzer olarak $x \in cl(G_B')$ içinde bu böyledir. O halde $x \in cl(F_A' \cup G_B')$ olur. Dolayısıyla $cl(F_A') \cup cl(G_B') \subseteq cl(F_A' \cup G_B')$ olduğundan $cl(F_A' \cup G_B') = cl(F_A') \cup cl(G_B')$ dir.

Örnek 4.3.6 $Y = \{x_1, x_2, x_3\}$ esnek evrensel küme, $E = \{e_1\}$ parametrelerin kümesi olsun. (Y, E) üzerindeki esnek yakınsaklık yapısı

$$\mathcal{F} \downarrow (e_1, \{x_1\}) \Leftrightarrow \{(e_1, \{x_1, x_2\})\} \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} \downarrow (e_1, \{x_2\}) \Leftrightarrow \{(e_1, \{x_2, x_3\})\} \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} \downarrow (e_1, \{x_3\}) \Leftrightarrow \{(e_1, \{x_3\})\} \in \mathcal{F}$$

şartlarını sağlayacak şekilde olsun. Bu uzayın basit olmayan hiç esnek açık ve esnek kapalı kümesi yoktur. $cl(cl(\{(e_1, \{x_1\})\})) = cl(\{(e_1, \{x_1, x_3\})\}) = Y$, Tanım 4.3.2 de verilen kapanış operatörü Katetov kapanış operatörü olarak adlandırılır ve esnek topolojik uzaylarındaki Kuratowski operatörü ile farklıdır.

Esnek topolojik uzaylarda olduğu gibi bir esnek yakınsaklık uzayının bir açık esnek alt kümesinin tümleyeni esnek kapalıdır ve bir esnek kapalı kümenin tümleyeni esnek açıktır. Ayrıca, boş küme ve esnek yakınsaklık uzayı hem esnek açık hem de esnek kapalıdır.

Önerme 4.3.7 Eğer X bir esnek yakınsaklık uzayı ise $F_A^{'} \subseteq X$ esnek açıktır ancak ve ancak $X - F_A^{'}$ esnek kapalıdır.

İspat: $\Leftarrow$) Biz $F_A^{'}$ esnek açık küme değilse $X - F_A^{'}$ esnek kapalı olmadığını göstereceğiz. Eğer $F_A^{'}$ esnek açık değilse en az bir $x \in F_A^{'}$ ve $\mathcal{F} \in P(X)$ esnek süzgeci için $\mathcal{F} \downarrow x$ ama $F_A^{'} \notin \mathcal{F}$ elde edilir. Böylelikle

$\mathcal{G} = \{ G_B : G_B \supseteq F_A - F_A^{'} \wedge F_A \in \mathcal{F}\}$ esnek süzgeci $X - F_A^{'}$ yı içeren ve $\mathcal{F}$ den daha ince olan bir esnek süzgeçtir. $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ den daha ince olduğu için x e esnek yakınsar. Böylece $x \in cl(X - F_A^{'})$ dır. $x \notin cl(X - F_A^{'})$ olduğundan $X - F_A^{'}$ esnek kapalı değildir.

$\Rightarrow$)Eğer $y \in cl\big(X - F_A^{'}\big)$ ise $X - F_A^{'}$ yı içeren ve y ye esnek yakınsayan bir $\mathcal{F}$ esnek süzgeci vardır. O halde $F_A^{'} \notin \mathcal{F}$ olur. Aksi halde $\Phi = (X - F_A^{'}) \cap F_A^{'} \in \mathcal{F}$ olurdu. Hipotezden $y \notin F_A^{'}$ olduğundan $y \in X - F_A^{'}$ elde edilir. Dolayısıyla $X - F_A^{'}$esnek kapalıdır.

Önerme 4.3.8 Eğer X bir esnek yakınsaklık uzayı ise Φ ve X hem esnek kapalı hem esnek açıktır.

İspat: Önerme 4.3.3 den boş küme esnek kapalıdır ve Önerme 4.3.7 den ise X esnek açıktır.

Esnek boş kümenin hiçbir elemanı olmadığından her elemanının bir komşuluğu olduğu açıktır. Dolayısıyla esnek boş küme açıktır ve Önerme 4.3.7 den de X kapalıdır.

Esnek açık ve kapalı kümeler gibi, esnek komşuluk ve kapanış kavramları da tümleyen kavramıyla ilişkilidir. Bir noktanın esnek komşulukları tümleyeninin kapanışı o noktayı içermeyen esnek kümelerdir.

Önerme 4.3.9 Bir X esnek yakınsaklık uzayı ve $\widetilde{N} \subseteq X$ olsun. $\widetilde{N}, x \in X$ in bir esnek komşuluğudur ancak ve ancak $x \notin cl(X - \widetilde{N})$.

İspat: $\Leftarrow$) Karşıt ters yöntemini kullanalım. Eğer $\widetilde{N}, x$ in bir esnek komşuluğu değil ise, en az bir x e esnek yakınsayan fakat $\widetilde{N}$ yi içermeyen bir Ƒ esnek süzgeci vardır.

Ɠ = { G_B: $G_B \supseteq F_A - \widetilde{N} \wedge F_A \in \mathcal{F}$}, $\mathcal{F}$ den daha ince bir esnek süzgeç olduğundan Ɠ $\downarrow x$ dir. $X - \widetilde{N} \in$ Ɠ olduğundan $x \in cl(X - N)$ olur.

$\Rightarrow$)Karşıt ters yöntemiyle ispatlayalım. Eğer $x \in cl(X - \widetilde{N})$ ise, en az bir x e esnek yakınsayan ve $X - \widetilde{N}$ içiren bir Ƒ esnek süzgeci vardır.$\widetilde{N} \cap (X - \widetilde{N}) = \Phi$ olduğundan $\widetilde{N} \notin \mathcal{F}$. Böylelikle $\widetilde{N}, x$ in bir esnek komşuluğu değildir. $x \in cl(X - \widetilde{N})$ iken $\widetilde{N}, x$ in bir esnek komşuluğu değildir. Bu yüzden istediğimizi ispatlamış oluruz.

Normalde esnek topolojik uzaylarda $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek süreklidir ancak ve ancak Y deki her açığının esnek ters görüntüsü de X de açıktır. Ancak esnek yakınsaklık uzaylarda açıklığın esnek ters görüntü altında korunması esnek süreklilik için gerekli şarttır ama yeterli şart değildir.

Önerme 4.3.10 X ve Y esnek yakınsaklık uzayları olsun. $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek sürekli ise Y deki her esnek U açığı için $\vartheta_\varphi{}^{-1}(U), X$ de esnek açıktır.

İspat: $x \in \vartheta_\varphi{}^{-1}(U)$ ise $\vartheta_\varphi(x) \in \vartheta_\varphi(\vartheta_\varphi{}^{-1}(U)) \subseteq U$. X de Ƒ $\downarrow x$, hipotezden $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$. U, Y de esnek açık ise $U \in \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ olur. Bu da öyle bir $V \in \mathcal{F}$ vardır ki $\vartheta_\varphi(V) \subseteq U$ dur. Böylelikle $V \subseteq \vartheta_\varphi{}^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ olur. O zaman $X\ de\ \vartheta_\varphi{}^{-1}(U)$ esnek açıktır.

Önerme 4.3.11 $X\ ve\ Y$ esnek yakınsaklık uzayı olsun. $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek sürekli, $\vartheta_\varphi{}^{-1}(V), X$ de esnek kapalı ise V , Y içinde esnek kapalıdır.

İspat: Varsayalım ki V , Y içinde esnek kapalı olsun. $Y - V, Y$ içinde esnek açık ve $X - \vartheta_\varphi{}^{-1}(V) = \vartheta_\varphi{}^{-1}(Y - V), X$ içinde esnek açıktır. Böylece $\vartheta_\varphi{}^{-1}(V), X$ de esnek açıktır.

Örnek 4.3.12 Önerme 4.3.11 in tersi doğru değildir. Örnek 4.3.6 daki Y esnek yakınsaklık uzayının boştan farklı esnek açık kümesi kendisidir. (0,1) de tanımlanan $\vartheta_\varphi : Y \to Y$ yi dikkate alalım. ϑ_φ in altındaki her görüntü de esnek açıktır. Bu esnek fonksiyon $[0] \downarrow 2$ iken esnek sürekli değildir ama $\vartheta_\varphi([0]) = [1]$ iken 2 ye esnek yakınsak değildir. Y de toplam 6 tane esnek sürekli fonksiyon ve esnek özdeşlik fonksiyonu olarak (0,1,2) ve (0,2,1) vardır. Bu fonksiyonların son 3 ünde esnek otomorfizma vardır ve böylelikle Y esnek homojen alandır.

Önerme 4.3.13 $\vartheta_{\varphi} : X \to Y$ esnek sürekli, her $F_A' \subseteq X$ için $\vartheta_{\varphi}\left(cl(F_A')\right) \subseteq cl(\vartheta_{\varphi}\left(F_A'\right))$

İspat: $y \in \vartheta_{\varphi}\left(cl(F_A')\right), x \in cl(F_A')$ için $\vartheta_{\varphi}(x) = y$ dir. $x \in cl(F_A')$, F_A' da Ƒ süzgeci x e yakınsar. Böylelikle $\vartheta_{\varphi}\left(F_A'\right) \in \vartheta_{\varphi}(\mathcal{F})$ ve hipotezden $\vartheta_{\varphi}(\mathcal{F}) \downarrow y$ olur. Böylece $y \in cl(\vartheta_{\varphi}\left(F_A'\right))$ dır.

Şimdi bazı bilinen esnek yakınsaklık yapısı tiplerinden bahsedeceğiz. İlk olarak, esnek başlangıç yakınsaklık yapısı ve bunun özel hali olan esnek alt uzay ve esnek çarpım yakınsaklık yapılarından bahsedeceğiz. Daha sonra da, esnek topolojik, esnek pretopolojik ve esnek pseudotopolojik uzayları inceleyeceğiz. Bunlar birbirleriyle yakından ilişkili uzaylardır. Çünkü her esnek topolojik uzay esnek pretopolojik uzay ve her esnek pretopolojik uzayda bir esnek pseudotopolojik uzaydır. Esnek pseudotopolojik uzaylar özellikle ilginçtir. Son olarak, esnek ayrık ve esnek ayrık olmayan yakınsaklık yapılarını inceleyeceğiz.

4.4 Esnek Başlangıç Yakınsaklık Yapısı

Tanım 4.4.1 X bir esnek küme, $(X_i)_{i\in I}$ esnek yakınsaklık uzayların sınıfı ve $\vartheta_{\varphi_i} : X \to X_i$ ise esnek fonksiyonların bir ailesi olsun. ϑ_{φ_i} lere göre X üzerindeki esnek başlangıç yakınsaklık yapısı,

$$Ƒ \downarrow x \Leftrightarrow \vartheta_{\varphi_i}(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_{\varphi_i}(x),\ i \in I$$

şeklinde tanımlanır.

Bir esnek fonksiyon ailesi tarafından üretilmiş esnek başlangıç yakınsaklık uzayına tanımlı esnek fonksiyonun esnek sürekli olabilmesi için fonksiyon ile bu ailenin elemanlarının bileşkesinin esnek sürekli olması yeterlidir.

Önerme 4.4.2 $(X_i)_{i\in I}$ esnek yakınsaklık uzaylarının sınıfı ve $\vartheta_{\varphi_i} : X \to X_i$ ise esnek fonksiyonların ailesi , X esnek başlangıç yakınsaklık yapısı $(\vartheta_{\varphi_i})_{i\in I}$ esnek fonksiyonlarından elde edilmiş olsun. Bir $\vartheta_\theta : Y \to X$ esnek fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak her $i \in I$ için $\vartheta_{\varphi_i} o\, \vartheta_\theta$ esnek fonksiyonu da süreklidir.

İspat: $\Leftarrow$)Eğer Y de $\mathcal{F} \downarrow y$ ise her bir $i \in I$ için X_i de $\left(\vartheta_{\varphi_{i_i}} o\, \vartheta_\theta\right)(\mathcal{F}) \downarrow \left(\vartheta_{\varphi_i} o\, \vartheta_\theta\right)(y)$ dir. Buna denk olarak $\vartheta_{\varphi_i}\left(\vartheta_\theta(\mathcal{F})\right) \downarrow \vartheta_{\varphi_i}(\vartheta_\theta(y))$ dir. $X, (f_i)_{i\in I}$ esnek fonksiyonlarından elde edilmiş esnek başlangıç yakınsaklık yapısına sahip olduğundan $\vartheta_\theta(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\theta(y)$ dir. Böylece ϑ_θ esnek süreklidir.

$\Rightarrow$)Her bir ϑ_{φ_i} esnek sürekli ise $\vartheta_{\varphi_i} o \vartheta_\theta$ de esnek süreklidir.

Esnek alt uzay yakınsaklık yapısı ve esnek çarpım yakınsaklık yapısı, esnek başlangıç yakınsaklık yapılarının iki türüdür. Esnek alt uzay yakınsaklık yapısı bir esnek yakınsaklık uzayının bir alt esnek kümesine tanımlı içerme fonksiyonunu esnek sürekli yapan en kaba esnek yakınsaklık yapısıdır. Aynı şekilde, esnek çarpım yakınsaklık yapısı, esnek yakınsaklık uzaylarının Kartezyen çarpımları üzerinde izdüşüm fonksiyonlarını esnek sürekli yapan en kaba esnek yakınsaklık yapısıdır.

Tanım 4.4.3 X bir esnek yakınsaklık uzayı ve $Y \subseteq X$ olsun. Y üzerindeki esnek alt uzay yakınsaklık yapısı, Y üzerinde $\iota : Y \to X$ esnek içerme fonksiyonuna göre esnek başlangıç yakınsaklık yapısıdır.

Tanım 4.4.4 $(X_i)_{i\in I}$ esnek yakınsaklık uzaylarının bir sınıfı olsun. $\prod_{i\in I} X_i$ üzerindeki esnek çarpım yakınsaklık yapısı $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ izdüşüm fonksiyonlarına göre $\prod_{i\in I} X_i$ üzerindeki esnek başlangıç yakınsaklık yapısıdır.

Bazı durumlarda bir esnek uzayı başka bir esnek uzayın içine yerleştirmek isteriz. Bu isteği gerçekleştirmek için aldığımız esnek uzayın diğerinin bir esnek alt uzayına esnek homeomorfik olduğunu göstermemiz gerekir. Bu esnek homeomorfizme esnek gömme adı verilir.

Tanım 4.4.5 Bir $e : X \to Y$ esnek fonksiyonu birebirdir ancak ve ancak X ve $e(X)$ esnek homeomorfik iken $e : X \to Y$ esnek fonksiyonu birebirdir.

Bir X esnek yakınsaklık uzayından Y esnek yakınsaklık uzayına ϑ_{φ_i} esnek gömmeler ailesi verildiğinde $\prod_I X \to \prod_I Y$ şeklinde bir örten gömme inşa edilebilir.

Önerme 4.4.6 X ve Y bir esnek yakınsaklık uzayları, I indeks kümesi ve

$\pi_i : \prod_{i\in I} X \to X$ ve $\rho_i : \prod_{i\in I} Y \to Y$ izdüşüm fonksiyonları olsun. Her $i \in I$ için eğer $\vartheta_{\varphi_i} : X \to Y$ bir esnek gömme ise her $i \in I$ ve $p \in \prod_I X$ için $\vartheta_\varphi : \prod_I X \to \prod_I Y$ esnek fonksiyonu $\rho_i\left(\vartheta_\varphi(p)\right) = \vartheta_{\varphi_i}(\pi_i(p))$ şeklinde tanımlanan bir esnek gömmedir.

İspat: ϑ_φ nin birebir olduğunu gösterelim. Varsayalım ki bazı $p, q \in \prod_I X$ için

$\vartheta_\varphi(p) = \vartheta_\varphi(q)$. Bunun üzerine $\vartheta_{\varphi_i}(\pi_i(p)) = \rho_i\left(\vartheta_\varphi(p)\right) = \rho_i\left(\vartheta_\varphi(q)\right) = \vartheta_{\varphi_i}(\pi_i(q))$. Her bir ϑ_{φ_i} birebir olduğundan $\pi_i(p) = \pi_i(q)$ olur ve dolayısıyla $p = q$ olur.

ϑ_φ nin esnek sürekli olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\mathcal{F}$, $\prod_I X$ de p ye esnek yakınsasın. Böylece her $i \in I$ için $\pi_i(\mathcal{F}), X$ de $\pi_i(p)$ e esnek yakınsar. Her bir ϑ_{φ_i} esnek sürekli olduğundan her $i \in I$ için $\rho_i\left(\vartheta_\varphi(\mathcal{F})\right) = \vartheta_{\varphi_i}\left(\pi_i(\mathcal{F})\right)$ esnek süzgeci $\vartheta_{\varphi_i}(\pi_i(p)) = \rho_i\left(\vartheta_\varphi(p)\right)$ e esnek yakınsar. Böylelikle $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}), \vartheta_\varphi(p)$ ye esnek yakınsar.

$\vartheta_\varphi{}^{-1}$ nin esnek sürekli olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\mathcal{G}$, $\vartheta_\varphi(\prod_I X)$ de q noktasına esnek yakınsasın. O zaman her $i \in I$ için $\rho_i(\mathcal{G})$, Y de $\rho_i(q)$ ya esnek yakınsar. Görülüyor ki her $i \in I$ için

$$\pi_i\left(\vartheta_\varphi{}^{-1}(q)\right) = \vartheta_{\varphi_i}{}^{-1}(\vartheta_{\varphi_i}\left(\pi_i(\vartheta_\varphi{}^{-1}(q)\right))) = \vartheta_{\varphi_i}{}^{-1}(\,\rho_i(\vartheta_\varphi\left(\vartheta_\varphi{}^{-1}(q)\right)))$$
$$= \vartheta_{\varphi_i}{}^{-1}(\,\rho_i(q))$$

Her $\vartheta_{\varphi_i}{}^{-1}$ esnek sürekli olduğundan her $i \in I$ için $\pi_i\left(\vartheta_\varphi{}^{-1}(\mathcal{G})\right) = \vartheta_{\varphi_i}{}^{-1}\left(\,\rho_i(\mathcal{G})\right)$ esnek süzgeci

$\vartheta_{\varphi_i}{}^{-1}\left(\,\rho_i(q)\right) = \pi_i\left(\vartheta_\varphi{}^{-1}(q)\right)$ esnek noktasına esnek yakınsar. Sonuç olarak $\vartheta_\varphi{}^{-1}(\mathcal{G}), \vartheta_\varphi{}^{-1}(q)$ a esnek yakınsar.

Sonuç olarak Önerme 4.4.6 dan H esnek homojen olduğundan $\prod_I H$ da esnek homojendir.

Önerme 4.4.7 Eğer H esnek homojen uzay ve I indeks kümesi ise $\prod_I H$ da esnek homojen uzaydır.

İspat: Eğer $x, y \in \prod_I H$ ise her $i \in I$ için $\vartheta_{\varphi_i}: H \to H$ bir esnek otomorfizm dönüşümü vardır öyle ki $\vartheta_{\varphi}(\pi_i(x)) = (\pi_i(y))$. Önerme 4.4.6 dan bir her $i \in I$ ve $p \in \prod_I X$ için $\vartheta_{\varphi}: \prod_I H \to \prod_I H$ olmak üzere $\pi_i(\vartheta_{\varphi}(p)) = \vartheta_{\varphi_i}(\pi_i(p))$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir esnek gömmedir. Her ϑ_{φ_i} bir esnek otomorfizm olduğundan ϑ_{φ} de bir esnek otomorfizmdir. Her $i \in I$ için $\pi_i(\vartheta_{\varphi}(x)) = \vartheta_{\varphi_i}(\pi_i(x)) = \pi_i(y)$ olduğundan $\vartheta_{\varphi}(x) = y$ dir. Böylece ϑ_{φ}, x den y ye bir esnek otomorfizm dönüşümüdür. O halde $\prod_I H$ da esnek homojendir.

Sürekli esnek homojen yapılarının ilginç bir özelliği de değer kümesine esnek homeomorf olan bir esnek alt uzaya sahip olmasıdır.

Önerme 4.4.8 Eğer X ve Y bir esnek yakınsaklık uzayları ise $C(X,Y), Y$ de esnek gömülüdür.

İspat: Her $y \in Y$ için $\bar{y} : X \to Y$ esnek fonksiyonu her $x \in X$ için $\bar{y}(x) = y$ şeklinde tanımlansın. $\theta: Y \to C(X,Y)$ esnek fonksiyonu $\theta(y) = \bar{y}$ tanımlansın. θ nin birebir olduğu açıktır. Şimdi $Y\ ve\ \theta(Y)$ in esnek homeomorfik olduğunu göstereceğiz.

θ nin esnek sürekli olduğunu gösterelim. Varsayalım ki Y de A , y noktasına esnek yakınsasın ve X de B, x esnek noktasına esnek yakınsasın. Eğer $F_A' \in$ A ise her $G_B' \in$ B için $F_A' = \theta(F_A') \cdot G_B' \in \theta$(A)$\cdot$ G_B' olur. Dolayısıyla A $\subseteq \theta$(A) $\cdot$B olduğundan θ(A) $\cdot$B süzgeci $y = \bar{y}(x) = (\theta(y))(x)$ esnek noktasına esnek yakınsar. Sonuç olarak θ(A) esnek süzgeci $\theta(y)$ esnek noktasına esnek yakınsar.

Şimdi θ^{-1} nin esnek sürekli olduğunu göstermek için Ƒ esnek süzgecinin $\theta(Y)$ de $\bar{y}$ esnek noktasına esnek yakınsadığını kabul edelim. Eğer Ǧ esnek süzgeci x esnek noktasına esnek yakınsıyorsa $\mathcal{F} \cdot \check{G}$, $Y\ de\ \bar{y}(x) = y$ esnek noktasına esnek yakınsar. Ayrıca eğer $H_C \in \mathcal{F} \cdot \check{G}$ ise $F_A \in \mathcal{F}$ ve $G_B \in \check{G}$ vardır öyle ki

$F_A \cdot G_B \subseteq H_C$ olur. $F_A \cdot G_B = \theta^{-1}(F_A) \in \theta^{-1}(\mathcal{F})$ olduğundan $H_C \in \theta^{-1}(\mathcal{F})$ olup

$\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}\subseteq\theta^{-1}(\mathcal{F})$ olur. Sonuç olarak $\theta^{-1}(\mathcal{F})$ esnek süzgeci, $y=\theta^{-1}(\bar{y})$ esnek noktasına esnek yakınsar.

4.5 Esnek Topolojik Yakınsaklık Yapısı

Tanım 4.5.1 (X ,$\tilde{T}$) bir esnek topolojik uzay olsun. Her $x\in X$ ve U_x ise x in tüm esnek topolojik komşulukların sınıfı olsun. X üzerindeki esnek topolojik yakınsaklık yapısı şöyle tanımlanır;

$$\mathcal{F}\downarrow x \Leftrightarrow \mathcal{F}\supseteq U_x \ .$$

Bir esnek yakınsaklık uzayı esnek topolojiktir ancak ve ancak esnek topolojik yakınsaklık yapısına sahiptir. Her esnek topolojik uzay bir esnek topolojik yakınsaklık uzaydır. Bunu göstermek için eğer (X **,** $\tilde{T}$) bir esnek topolojik uzay ve $(X,\downarrow)$ buna karşılık gelen esnek topolojik yakınsaklık uzayı ise $U\in\tilde{T}$ ancak ve ancak U esnek açıktır; yani (X , $\tilde{T}$) nun ve ($X,\downarrow$) un esnek açık kümeleri aynıdır. Böylece, bir esnek topolojik yakınsaklık uzayı elde edilmesine yol açan esnek topolojinin açıkları tarafından tanımlanır.

Örnek 4.5.2 Bir esnek yakınsaklık uzayının esnek topolojik uzay olması gerekmez. Örnek 4.3.6 daki Y esnek yakınsaklık uzayının bir esnek topolojik yakınsaklık uzayı olduğunu kabul edelim. Yani $\downarrow$ esnek yakınsaklık yapısını verecek şekilde bir $\tilde{T}$ esnek topolojisinin varlığını kabul edelim. Buradan

$U_0=[\{(e_1,\{x_1,x_2\})\}]$ ve $U_1=[\{(e_1,\{x_2,x_3\})\}]$ olur. Böylece $\{(e_1,\{x_1,x_2\})\}$ ve $\{(e_1,\{x_2,x_3\})\}$ esnek kümeleri $\tilde{T}$ ya ait olmalıdır. Dolayısıyla $\{(e_1,\{x_2\})\}$ esnek kümesi de $\tilde{T}$ ya ait olmalıdır. O halde $\{(e_1,\{x_2\})\}\in U_1$ olur; ama $\{(e_1,\{x_2\})\}\notin [\{(e_1,\{x_2,x_3\})\}]$. Bundan dolayı Y esnek topolojik yakınsaklık uzayı değildir.

Tanım 4.2.1 in esnek sürekliliği genelleştirdiğini doğrulayacağız.

Önerme 4.5.3 X ve Y esnek topolojik yakınsaklık uzayları olsun. Bir $\vartheta_\varphi : X\rightarrow Y$ esnek fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak U,Y de esnek açık olduğundan ${\vartheta_\varphi}^{-1}(U)$ da X de esnek açıktır.

İspat: $\Rightarrow$) İstenilen sonuç Önerme 2.47 den açıktır.

$\Leftarrow$)Eğer $\mathcal{F} \downarrow x$ ise $\mathcal{F} \supseteq U_x$ dir. Eğer $U \in U_{\vartheta_\varphi(x)}$ ise U, Y de bir V esnek açığını kapsar ve $\vartheta_\varphi(x)$ i içerir. Hipotezden dolayı $X\, de\ \vartheta_\varphi{}^{-1}(V)$ esnek açıktır. $\vartheta_\varphi(x) \in V$ olduğundan $x \in \vartheta_\varphi{}^{-1}(V)$ dir. Buradan da $\vartheta_\varphi{}^{-1}(V) \in U_x$ olur. Çünkü $\vartheta_\varphi{}^{-1}(V) \subseteq \vartheta_\varphi{}^{-1}(U)$ olur. Buradan $\vartheta_\varphi{}^{-1}(U) \in U_x$ elde edilir. $\vartheta_\varphi(\vartheta_\varphi{}^{-1}(U)) \subseteq U$ olduğundan $U \in \vartheta_\varphi(U_x) \subseteq \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ sonucuna varırız; böylece $U_{\vartheta_\varphi(x)} \subseteq \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ ve $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$ dir. Sonuç olarak ϑ_φ esnek süreklidir.

Esnek topolojik yakınsaklık yapısı esnek homeomorfizmler tarafından korunur.

Önerme 4.5.4 Bir esnek topolojik uzaya esnek homeomorf olan her esnek yakınsaklık uzayı esnek topolojik yakınsaklık uzayıdır.

İspat: X esnek yakınsaklık uzayı, Y esnek topolojik uzayı ve $\vartheta_\varphi : X \to Y$ bir esnek homeomorfizm olsun. X üzerinde $(\mathcal{F}, \downarrow)$ ancak ve ancak $\mathcal{F} \supseteq U_x$ olacak şeklinde bir $\tilde{T}$ esnek topolojisinin var olduğunu göstermeliyiz.

$U \in \tilde{T}$ ancak ve ancak $\vartheta_\varphi(U)$, Y de bir esnek açık küme tarafından kapsanır. Önce, $\tilde{T}$ nun X üzerinde bir esnek topoloji olduğunu göstereceğiz. $\vartheta_\varphi(X) = Y$, Y de esnek açık olduğundan $X \in \tilde{T}$ olur; benzer şekilde $\vartheta_\varphi(\Phi) = \Phi$, Y de esnek açık olduğundan $\Phi \in \tilde{T}$ olur. Her $i \in I$ için V_i, $\tilde{T}$ nun bir elemanı olsun. $\vartheta_\varphi(\bigcup_i V_i) = \bigcup_i \vartheta_\varphi(V_i)$, Y de esnek açık olduğundan $\vartheta_\varphi(\bigcup_i V_i) \in \tilde{T}$ dur. V ve V', $\tilde{T}$ nun elemanları olsun. O zaman

$\vartheta_\varphi(V \cap V') \subseteq \vartheta_\varphi(V) \cap \vartheta_\varphi(V')$ ve $\vartheta_\varphi(V) \cap \vartheta_\varphi(V')$, Y de esnek açık olduğundan $V \cap V' \in \tilde{T}$ elde edilir.

Şimdi $\mathcal{F} \downarrow x\ ise\ \mathcal{F} \supseteq \tilde{U}_x$ olduğunu göstereceğiz.

$\Leftarrow$) $U, \vartheta_\varphi(x)$ in bir esnek komşuluğu ise $\vartheta_\varphi{}^{-1}(U)$ da x in bir esnek komşuluğu olur. Hipotezden $F \in \mathcal{F}$ vardır öyle ki $F \subseteq \vartheta_\varphi{}^{-1}(U)$ olur. Buradan $\vartheta_\varphi(F) \subseteq U$ elde edilir. Dolayısıyla $\tilde{U}_{\vartheta_\varphi(x)} \subseteq \vartheta_\varphi(F)$ ve $\vartheta_\varphi(F) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$ olur. O halde $\mathcal{F} \downarrow x$ dir.

$\Rightarrow$) Eğer $V \in \vartheta_\varphi(\tilde{U}_x)$ ise $\exists U \in \tilde{U}_x$ vardır öyle ki $\vartheta_\varphi(U) \subseteq V$. Buradan $\vartheta_\varphi(U) \in \tilde{U}_{\vartheta_\varphi(x)}$ olur. Dolayısıyla $V \in \vartheta_\varphi(\tilde{U}_x)$ ve bu yüzden $\vartheta_\varphi(\tilde{U}_x) \subseteq \tilde{U}_{\vartheta_\varphi(x)}$ elde edilir. ϑ_φ

esnek sürekli ve $\mathcal{F} \downarrow x$ dan $\vartheta_{\varphi}(F) \downarrow \vartheta_{\varphi}(x)$. Dolayısıyla $\widetilde{U}_{\vartheta_{\varphi}(x)} \subseteq \vartheta_{\varphi}(F)$. Böylece $\vartheta_{\varphi}(\widetilde{U}_x) \subseteq \vartheta_{\varphi}(F)$ ve

$$\widetilde{U}_x = \vartheta_{\varphi}^{-1}\left(\vartheta_{\varphi}(\widetilde{U}_x)\right) \subseteq \vartheta_{\varphi}^{-1}\left(\vartheta_{\varphi}(\mathcal{F})\right) = \mathcal{F}.$$

Eğer bir esnek uzay esnek topolojik uzaylarının bir sınıfına tanımlı esnek fonksiyonlar ailesinden elde edilmiş esnek başlangıç yakınsaklık uzayı ise esnek topolojik uzaydır.

Önerme 4.5.6 $(X_i)_{i\in I}$ esnek yakınsak uzayların bir sınıfı, $(\vartheta_{\varphi_i}: X \to X_i)$ ise bir esnek fonksiyonlar ailesi ve X, ϑ_{φ_i} lerden elde edilen esnek başlangıç yakınsaklık yapısına sahip olsun. Eğer her bir (X_i) esnek topolojik ise X de esnek topolojiktir.

İspat: Önceki önermeye benzer şekilde yapılır. Yani X üzerinde $(\mathcal{F}, \downarrow)$ ancak ve ancak $\mathcal{F} \supseteq U_x$ olacak şekilde $\tilde{T}$ nun topoloji olduğunu göstermek yeterlidir.

$V \in \tilde{T}$ ancak ve ancak her $x \in V$ ve $i \in I$ için X_i de U_i açığı var öyle ki $x \in \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i) \subseteq V$.

İlk X üzerinde $\tilde{T}$ nun esnek topolojik olduğunu gösterelim. X_i açık ve $X \in \tilde{T}$ ise

$X = \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(X_i)$; aynı şekilde $\Phi \in \tilde{T}$, X_i de esnek boş küme açık ve $\Phi = \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(\Phi)$. Varsayalım ki bazı $\propto$ indeksi için $V_{\propto}, \tilde{T}$ da açık olsun. $x \in V_{\propto}$, $x \in \bigcup_{\propto} V_{\propto}$ $ve\ her\ i \in I\ için$ X_i de U_i açığı var öyle ki $x \in \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i) \subseteq V_{\propto} \subseteq \bigcup_{\propto} V_{\propto}$. Böylece $\bigcup_{\propto} V_{\propto} \in \tilde{T}$. Varsayalım ki $V\ ve\ V' \in \tilde{T}$ olsun. O zaman $x \in V \cap V'$, $her\ i \in I$ için X_i de U_i açığı var öyle ki $x \in \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i) \subseteq V$ ve X_j de U_i' açığı var öyle ki $x \in \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i') \subseteq V'$. X_i de $U_i\ ve\ U_i'$ açığı var iken X_i de $U_i \cap U_i'$ açık ; dahası $x \in \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i) \cap \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i') = \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i \cap U_i')$ ve $\vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i \cap U_i') = \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i) \cap \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U_i') \subseteq V \cap V'$. Böylece $V \cap V' \in \tilde{T}$.

$\mathcal{F} \downarrow x\ ise\ \mathcal{F} \supseteq U_x$ olduğunu gösterelim.

$\Leftarrow$) $U \in \widetilde{U}_{\vartheta_{\varphi_i}(x)}$, açık V kümesinde U vardır ve $\vartheta_{\varphi_i}(x)$ i içerir. Hipotezden $\vartheta_{\varphi_i}^{-1}(V)$

esnek açık ve x i içerir ve $\vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U) \in U_x$. $\vartheta_{\varphi_i}(\vartheta_{\varphi_i}^{-1}(U)) \subseteq U$ ise $U \in \vartheta_{\varphi_i}(\widetilde{U}_x)$. Böylece $\widetilde{U}_{\vartheta_{\varphi_i}(x)} \subseteq \vartheta_{\varphi_i}(\widetilde{U}_x) \subseteq \vartheta_{\varphi_i}(\mathcal{F})$, $\vartheta_{\varphi_i}(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_{\varphi_i}(x)$. Dolayısıyla $\mathcal{F} \downarrow x$.

$\Rightarrow$) Esnek açık V kümesinde, x i içeren bir $U \in \widetilde{U}_x$ vardır ve x i içerir. Her $i \in I$ için X_i de W_i açığı var öyle ki $x \in \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(W_i) \subseteq V \subseteq U$. $\mathcal{F} \downarrow x$ iken $\vartheta_{\varphi_i}(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_{\varphi_i}(x)$ ve $W_i \in \widetilde{U}_{\vartheta_{\varphi_i}(x)} \subseteq \vartheta_{\varphi_i}(\mathcal{F})$. Böylece, $F \in \mathcal{F}$ öyle ki $\vartheta_{\varphi_i}(\mathcal{F}) \subseteq W_i$, $F \subseteq \vartheta_{\varphi_i}^{-1}(W_i) \subseteq U$. Böylece $\widetilde{U}_x \subseteq \mathcal{F}$.

4.6 Esnek Pretopolojik Yakınsaklık Yapısı

Tanım 4.6.1 Bir X esnek yakınsaklık uzayı esnek pretopolojiktir ancak ve ancak her $x \in X$ için $\widetilde{N}_x \downarrow x$.

Bu tanımı esnek yakınsaklık yerine esnek komşuluk süzgeçlerinin içerilmesi şeklinde vermek daha kullanışlıdır.

Önerme 4.6.2 Eğer X bir esnek pretopolojik uzay ve $x \in X$ ise $\mathcal{F} \downarrow x$ ancak ve ancak

$\mathcal{F} \supseteq \widetilde{N}_x$

İspat: $\Leftarrow$) X bir esnek pretopolojik uzay olduğundan $\widetilde{N}_x \downarrow x$ ve dolayısıyla $\mathcal{F} \downarrow x$.

$\Rightarrow$) Eğer $N \in \widetilde{N}_x$ ise $\widetilde{N}, x$ in bir esnek komşuluğudur. Dolayısıyla $\widetilde{N} \in \mathcal{F}$ dir.

Önerme 4.6.2 den her esnek topolojik uzay bir esnek pretopolojik uzaydır. Ancak her esnek pretopolojik uzay, esnek topolojik uzay olmak zorunda değildir. Örnek 4.3.6 daki Y esnek yakınsaklık uzayı, bir esnek pretopolojik uzay ama esnek topolojik uzay değildir. Örnek 4.3.12 dan da anlaşılacağı üzere Önerme 4.5.3 esnek pretopolojik uzaylarda doğru değildir. Fakat esnek pretopolojik uzaylarda esnek fonksiyonlar için esnek süreklilik esnek komşuluklar ya da esnek komşuluklar süzgeci ile ifade edilebilir.

Önerme 4.6.3 Eğer X bir esnek yakınsaklık uzayı ve Y bir esnek pretopolojik uzay ise $\vartheta_\varphi : X \rightarrow Y, x \in X$ esnek noktasında esnek süreklidir ancak ve ancak $\vartheta_\varphi(x)$ in her V esnek komşuluğu için x in bir U esnek komşuluğu var öyle ki $\vartheta_\varphi(U) \subseteq V$.

İspat: $\Leftarrow$) $\digamma \downarrow x$ olsun, hipotezden her $V \in \widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)}$ için $\exists U \in \widetilde{N}_x \subseteq \mathcal{F}$ vardır öyle ki $\vartheta_\varphi(U) \subseteq V$ dir. Böylece $V \in \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ ve $\widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)} \subseteq \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ olup $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$ elde edilir.

$\Rightarrow$) $\widetilde{N}, \vartheta_\varphi(x)$ in bir esnek komşuluğu olsun. Eğer X de $\digamma \downarrow x$ ise hipotezden $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$. Y esnek pretopolojik olduğundan $V \in \vartheta_\varphi(\mathcal{F})$ olur. Buradan $\exists F \in \mathcal{F}$ için $F \subseteq \vartheta_\varphi{}^{-1}(V)$ dir. Buradan $\vartheta_\varphi{}^{-1}(V) \in \mathcal{F}$ dir. $\vartheta_\varphi{}^{-1}(V)$ esnek kümesi x e esnek yakınsayan her esnek süzgecin elemanı olduğundan $\vartheta_\varphi{}^{-1}(V), x$ in esnek komşuluğudur.

Önerme 4.6.4 Eğer X ve Y esnek pretopolojik uzaylar ise $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek süreklidir ancak ve ancak her $x \in X, \widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)} \subseteq \vartheta_\varphi(\widetilde{N}_x)$.

İspat: $\Leftarrow$) Y esnek pretopolojik uzayı ise her $x \in X$ için $\vartheta_\varphi(\widetilde{N}_x) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$ dir. O yüzden ϑ_φ esnek süreklidir.

$\Rightarrow$) X esnek pretopolojik uzay olduğundan $\widetilde{N}_x \downarrow x$ dir ve hipotezden $\vartheta_\varphi(\widetilde{N}_x) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$. Dolayısıyla $\widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)} \subseteq \vartheta_\varphi(\widetilde{N}_x)$ dir.

Önerme 4.6.5 Eğer X ve Y esnek pretopolojik uzaylar ise $\vartheta_\varphi : X \to Y$ birebir örten esnek fonksiyonu bir esnek homeomorfizmdir ancak ve ancak her $x \in X$ *için* $\widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)} = \vartheta_\varphi(\widetilde{N}_x)$ dir.

İspat: $\Leftarrow$) Önerme 2.67 den ϑ_φ esnek süreklidir. Eğer $y \in Y$ *ise* $\exists\, x \in X$ için $y = \vartheta_\varphi(x)$ dir. Hipotezden $\vartheta_\varphi(\widetilde{N}) \subseteq \widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)}$ olur. Dolayısıyla $\widetilde{N}_{\vartheta_\varphi{}^{-1}(y)} = \widetilde{N}_x \subseteq \vartheta_\varphi{}^{-1}\left(\widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)}\right) = \vartheta_\varphi{}^{-1}(\widetilde{N}_y)$ dir. Buradan $\vartheta_\varphi{}^{-1}(\widetilde{N}_y) \downarrow \vartheta_\varphi(y)$ dir. Dolayısıyla $\vartheta_\varphi{}^{-1}$ esnek süreklidir.

$\Rightarrow$) Eğer $x \in X$ ise $\exists y \in Y$ vardır öyle ki $x = \vartheta_\varphi{}^{-1}(y)$ dir. $\vartheta_\varphi{}^{-1}$ esnek sürekli olduğundan $\widetilde{N}_{\vartheta_\varphi{}^{-1}(y)} \subseteq \vartheta_\varphi{}^{-1}(\widetilde{N_y})$ dır. Buradan $\vartheta_\varphi(\widetilde{N_x}) = \vartheta_\varphi\left(\widetilde{N}_{\vartheta_\varphi{}^{-1}(y)}\right) \subseteq \mathbf{N}_y = \widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)}$ elde edilir. Önerme 2.67 den $\widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)} \subseteq \vartheta_\varphi(\widetilde{N_x})$. O zaman $\widetilde{N}_{\vartheta_\varphi(x)} = \vartheta_\varphi(\widetilde{N_x})$.

Esnek pretopolojiler, esnek topolojilerde olduğu gibi esnek homeomorfizm tarafından korunur.

Önerme 4.6.6 Bir esnek pretopolojik uzaya esnek homeomorfik olan her esnek yakınsaklık uzayı pretopolojiktir.

İspat: X bir esnek yakınsaklık uzayı, Y bir esnek pretopolojik uzay ve $\vartheta_{\varphi}: X \to Y$ bir esnek homeomorfizm olsun. $\mathcal{F} \supseteq \widetilde{N_x}$ olduğunu kabul edelim. Eğer $N \in \widetilde{N}_{\vartheta_{\varphi}(x)}$ ise $\exists\, M \in \widetilde{N_x}$ vardır öyle ki $\vartheta_{\varphi}(M) \subseteq N$ dir. Dolayısıyla $\widetilde{N}_{\vartheta_{\varphi}(x)} \subseteq \vartheta_{\varphi}(\mathcal{F})$ dir. Bundan dolayı $\vartheta_{\varphi}(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_{\varphi}(x)$ ve $\mathcal{F} = \vartheta_{\varphi}{}^{-1}\left(\vartheta_{\varphi}(\mathcal{F})\right)$ esnek süzgeci $\vartheta_{\varphi}{}^{-1}\left(\vartheta_{\varphi}(x)\right) = x$ noktasına esnek yakınsar.

Önerme 4.6.7 $(X_i)_{i \in I}$ esnek yakınsak uzayların sınıfı, $\vartheta_{\varphi_i}: (X \to X_i)$ ise esnek fonksiyonların ailesi ve X, $(\vartheta_{\varphi_i})_{i \in I}$ lerden elde edilen esnek başlangıç yakınsaklık yapısına sahip olsun. Eğer her bir $(X_i)_{i \in I}$ esnek pretopolojik ise X esnek pretopolojiktir.

İspat: Eğer $V \in \widetilde{N}_{\vartheta_{\varphi_i}(x)}$ ise ϑ_{φ_i} esnek sürekli olduğundan $\exists U \in \widetilde{N_x}$ vardır öyle ki $\vartheta_{\varphi_i}(U) \subseteq V$ olur. Buradan $V \in \vartheta_{\varphi_i}(\widetilde{N_x})$ olup $N_{\vartheta_{\varphi_i}(x)} \subseteq \vartheta_{\varphi_i}(\widetilde{N_x})$ olur. Dolayısıyla

$\vartheta_{\varphi_i}(\widetilde{N_x}) \downarrow \vartheta_{\varphi_i}(x)$. O yüzden her $i \in I$ için doğru olduğundan $\widetilde{N_x} \downarrow x$.

Teorem 4.6.8 Her sonlu esnek yakınsaklık uzayı bir esnek pretopolojik uzaydır.

İspat: X bir sonlu esnek yakınsaklık uzayı ve $x \in X$ olsun. Varsayalım ki $\widetilde{N}$, x in en küçük esnek komşuluğu olsun. x in esnek komşuluk süzgecini $[\widetilde{N}]$ ile gösterelim. Ayrıca $y \in \widetilde{N}$ için $[y]$ nin x e esnek yakınsamadığını düşünelim. O zaman, $[F_A] \downarrow x$ ama $\widetilde{N} - \{y\} \notin [F_A]$. Dolayısıyla $F_A \not\subset \widetilde{N} - \{y\}$ olduğundan varsayımla çelişki oluşur. $\widetilde{N} \in [F_A]$ olduğundan $F_A \subseteq \widetilde{N}$ olup $F_A \cap \{y\} \neq \Phi$. Böylece $y \in F_A$ ve $[F_A] \subseteq [y]$ olduğundan $[y] \downarrow x$ olur ki bu da önceki varsayımla çelişki oluşturur. Dolayısıyla x e esnek yakınsayan her esnek süzgeç $\widetilde{N} - \{y\}$ i içermelidir. Dolayısıyla $\widetilde{N} - \{y\}, x$ in bir esnek komşuluğudur. Buradan $\widetilde{N} - \{y\} \in [\widetilde{N}]$ ve $\widetilde{N} \subseteq \widetilde{N} - \{y\}$ olduğunu söyler. Bu ise bizim istediğimiz sonuç değildir. Bu durumda her $y \in \widetilde{N}$ için $[y] \downarrow x$. $[\widetilde{N}] = \bigcap_{y \in N}[y]$ ve $\widetilde{N}$ sonlu olup $[\widetilde{N}] \downarrow x$ olur. Böylece X esnek pretopolojiktir.

4.7 Esnek Pseudotopolojik Yakınsaklık Yapısı

Tanım 4.7.1 X esnek yakınsaklık uzayı, esnek pseudotopolojik uzaydır ancak ve ancak eğer Ƒ den daha ince olan her esnek ultra süzgeç x e yakınsıyorsa Ƒ de x e yakınsar.

Bazı yazarlar esnek pseudotopolojik uzayına esnek Choquet uzay derler. Bir esnek pseudotopolojik uzay üzerinde esnek yakınsaklık uzayını tanımlamak için, her esnek ultra süzgecin esnek yakınsak olduğunu ve esnek ultra süzgeçlerin tanım 4.1 de ki şartlara uyması gerektiğini ifade etmeliyiz.

Teorem 4.7.2 X bir esnek küme olsun ve P_X ile X arasındaki $\downarrow$ bağıntısı esnek pseudotopolojik yapıdır ancak ve ancak her $x \in X$ ve X üzerindeki her $\mathcal{F}$ esnek süzgeci için;

1. $[x] \downarrow x$
2. $[\mathcal{F}] \downarrow x$ ancak ve ancak Ƒ den daha ince olan her esnek ultra süzgeç de x e esnek yakınsar.

İspat: $\Leftarrow$) İlk önce varsayalım ki $[\mathcal{F}] \downarrow x$ ve Ƒ $\subseteq$ Ǵ olsun. Eğer G_1, Ǵ daha ince esnek ultra süzgeç ise $G_1 \supseteq$ Ƒ ve $G_1 \downarrow x$. Böylece $[\mathcal{G}] \downarrow x$. İkinci olarak, varsayalım ki $[\mathcal{F}] \downarrow x$ ve $[\mathcal{G}] \downarrow x$ olsun.

Eğer G_1, $\mathcal{F} \cap$ Ǵ daha ince esnek ultra süzgeç ise $\mathcal{F}$ veya Ǵ den daha ince olan tüm esnek ultra süzgeçlerin esnek kesişiminden de daha ince olur. Böylece G_1, $\mathcal{F}$ ve Ǵ den de daha incedir ve G_1 , x e esnek yakınsar. Buradan $\mathcal{F} \cap$ Ǵ de x e esnek yakınsar.

$\Rightarrow$) Tanım 4.1 ve 4.7.1 den açıktır.

Teorem 4.7.3 X bir esnek yakınsaklık uzayı ve Y bir esnek pseudotopolojik uzayı olsun. Bir $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek fonksiyonu esnek süreklidir ancak ve ancak eğer X üzerinde her $\mathcal{G}$ esnek ultra süzgeci için $\mathcal{G} \downarrow x$ iken $\vartheta_\varphi(\mathcal{G}) \downarrow \vartheta_\varphi(x)$ dır.

İspat: $\Leftarrow$) Varsayalım ki $\mathcal{F} \downarrow x$ olsun. $\mathcal{G}$**,** $\vartheta_{\varphi}(\mathcal{F})$ den ince ise $\mathcal{F}$ den ince en az bir H esnek ultra süzgeci vardır öyle ki ϑ_{φ}(H)= $\mathcal{G}$ olur. H $\downarrow x$ olduğundan ϑ_{φ}(H) $\downarrow \vartheta_{\varphi}(x)$ dir. Böylece $\mathcal{G} \downarrow \vartheta_{\varphi}(x)$ olur. Hipotezden Y bir esnek pseudotopolojik uzay olduğundan $\vartheta_{\varphi}(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_{\varphi}(x)$ elde edilir. Dolayısıyla ϑ_{φ} esnek süreklidir.

$\Rightarrow$) Bu esnek sürekliliğin tanımından ispat açıktır.

Esnek topolojik uzaylarda ve esnek pretopolojik uzaylarda olduğu gibi esnek pseudotopolojik uzaylarda esnek homeomorfizma altında korunur.

Önerme 4.7.4 Bir esnek pseudotopolojik uzaya esnek homeomorf olan her esnek yakınsaklık uzayı da esnek pseudotopolojiktir.

İspat: X esnek yakınsaklık uzayı ve Y esnek pseudotopolojik uzay, $\vartheta_{\varphi}: X \to Y$ esnek fonksiyonu esnek homeomorfizm olsun. Varsayalım ki $\mathcal{F}$ den ince her esnek ultra süzgeç x e yakınsasın. Eğer $\mathcal{F}, x$ e esnek yakınsamıyor ise $\vartheta_{\varphi}(\mathcal{F})$ de $\vartheta_{\varphi}(x)$ e esnek yakınsamaz. Böylece $\vartheta_{\varphi}(\mathcal{F})$ den ince en bir H esnek ultra süzgeci vardır ve $\vartheta_{\varphi}(x)$ e esnek yakınsamaz. Dolayısıyla $\mathcal{F}$ den ince en az bir $\mathcal{G}$ esnek ultra süzgeci var öyle ki $\vartheta_{\varphi}(\mathcal{G})$ = H olur. Ama hipotezden $\mathcal{G} \downarrow x$ ve H $\downarrow \vartheta_{\varphi}(x)$ olduğundan H, $\vartheta_{\varphi}(x)$ e esnek yakınsamaz. Bu sonuç bizi çelişkiye düşürür. Böylece $\mathcal{F} \downarrow x$ olur.

Önerme 4.7.5 $(X_i)_{i\in I}$ esnek yakınsak uzayların kümesi, $(\vartheta_{\varphi_i}: X \to X_i)$ ise esnek fonksiyonların ailesi ve $X, (\vartheta_{\varphi_i})_{i\in I}$ elde edilen esnek başlangıç yakınsaklık yapısına sahip olsun. Her bir $(X_i)_{i\in I}$ bir esnek pseudotopolojik ise X esnek pseduotopolojiktir.

İspat: Varsayalım ki $\mathcal{F}$ den ince her esnek ultra süzgeç x e esnek yakınsasın. H **,** $\vartheta_{\varphi_i}(\mathcal{F})$ den ince esnek ultra süzgeci, $\mathcal{G}$ ise Ƒ den daha ince bir esnek ultra süzgeci vardır öyle ki $\vartheta_{\varphi_i}(\mathcal{G}) =$ H olur. ϑ_{φ_i} esnek sürekli olduğundan H $\downarrow \vartheta_{\varphi_i}(x)$ olup $\vartheta_{\varphi_i}(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_{\varphi_i}(x)$ olur. O yüzden her $i \in I$ için Ƒ $\downarrow x$ dir.

Her esnek pretopolojik uzay, esnek pseudotopolojik uzaydır; fakat bunun tersi doğru değildir.

Önerme 4.7.6 Her esnek pretopolojik uzay bir esnek pseudotopolojik uzaydır.

İspat: X bir esnek pretopolojik uzay olsun. Varsayalım ki X üzerinde bir $\mathcal{F}$ esnek süzgecinden daha ince olan her $\mathcal{G}$ esnek ultra süzgeci vardır öyle ki $\mathcal{G} \downarrow x$. $\mathcal{F}, x$ e esnek yakınsamasın. Hipotezden $\mathcal{F}$, $\widetilde{N_x}$ den daha ince değildir ve $N \in \widetilde{N_x}$ için $N \notin \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}$ den ince her $\mathcal{G}$ esnek ultra süzgeci için $X - N \in \mathcal{G}$ elde edilir. Fakat, x e yakınsayan her $\mathcal{G}$ esnek ultra süzgeci N yi içerir. $\mathcal{G}$ esnek ultra süzgeci $\Phi = N \cap (X - N)$ yi içermiş olur ve bu olmaması gereken bir durumdur. O yüzden kabulümüz yanlıştır, $\mathcal{F} \downarrow x$ olmalıdır.

4.8 Esnek Ayrık ve Esnek Ayrık Olmayan Yakınsaklık Yapıları

Tanım 4.8.1 X bir esnek yakınsaklık uzayı olsun. X üzerindeki esnek ayrık yakınsaklık yapısı şöyle tanımlanır;

$\mathcal{F} \downarrow x$ ancak ve ancak $\mathcal{F} = [x]$. X üzerindeki esnek ayrık olmayan yakınsaklık yapısı ise her $\mathcal{F}$ esnek süzgeci için $\mathcal{F} \downarrow x$ olarak tanımlarız.

Esnek ayrık yakınsaklık uzayı, esnek ayrık topolojik uzaydır; aynı şekilde her esnek ayrık olmayan yakınsaklık yapısı da esnek ayrık olmayan topolojik uzaydır. Bu esnek uzaylar basit olmasına rağmen sık sık karşımıza çıkmaktadır.

Önerme 4.8.2 X bir esnek ayrık uzay olsun.

1. Eğer $x \in X$ ise $\widetilde{N_x} = [x]$
2. X bir esnek topolojik uzaydır.
3. X in her alt kümesi hem açık hem kapalıdır.
4. Eğer Y bir esnek yakınsaklık uzayı ise $\vartheta_\varphi : X \to Y$ esnek fonksiyonu esnek süreklidir.
5. X e esnek homeomorf olan her esnek yakınsaklık uzayı aynı zamanda esnek ayrıktır.

İspat:

1. x noktasına esnek yakınsayan tek esnek süzgeç x deki esnek noktasal süzgeçtir.

Dolayısıyla $\widetilde{N_x} = [x]$.

2. X esnek ayrık yakınsaklık uzayı olsun. Eğer $\tilde{T}$, X üzerinde esnek ayrık topoloji her $x \in X$ için $U_x = [x]$. Hipotezden $\mathrm{F} \downarrow x$ ancak ve ancak $\mathrm{F} = U_x$. Böylece X bir esnek topolojik uzaydır.

3. $F_A \subseteq X$ olsun. Eğer $x \in F_A$ ise $F_A \in [x] = \widetilde{N_x}$. F_A , her bir elemanın esnek komşuluğu olduğundan esnek açıktır. Benzer şekilde $X - F_A$ esnek açık olduğundan F_A esnek kapalıdır.

4. Eğer $\mathcal{F}, x \in X$ e esnek yakınsıyor ise $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) = [\vartheta_\varphi(x)]$ de $\vartheta_\varphi(x)$ e esnek yakınsar.

5. Y esnek yakınsaklık uzayı ve $f: Y \to X$ bir esnek homeomorfizm olsun. Eğer $\mathrm{F} \downarrow y$ ise $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) \downarrow \vartheta_\varphi(y)$ ve buradan $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) = \left[\vartheta_\varphi(y)\right]$ olur. $\exists F_A \in \mathcal{F}$ var öyle ki $\vartheta_\varphi(\mathcal{F}) = \left\{\vartheta_\varphi(y)\right\} = \vartheta_\varphi(\{y\})$ olur. ϑ_φ birebir ve örten olduğundan $F_A = \{y\}$. Sonuç olarak $\mathcal{F} = [y]$.

BÖLÜM 5

TARTIŞMA-SONUÇ VE ÖNERİLER

Esnek küme teorisi birçok farklı alandaki belirsizlik problemlerini çözmek için ortaya atılmıştır. Geçen zaman içerisinde bilgisayar bilimleri, tıp, bankacılık, mühendislik, bilgi depolama ve bilgi analizi gibi pek çok alanda kullanabileceği gösterilmiştir. Ayrıca çok fazla matematiksel kavramlar esnek kümelerle yeniden karakterize edilmiştir.

Bu çalışmada daha önce tanımlanış olan esnek süzgeç kavramından yararlanılarak esnek başlangıç, topolojik, pretopolojik, pseudotopolojik, ayrık ve ayrık olmayan yakınsaklık yapıları tanımlanmış ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bunlarla ilgili bazı örnekler, teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

İleriki çalışmalarda yakınsaklık uzaylarındaki kompaktlık, ayırma aksiyomları gibi topolojik özellikleri incelenebilir. Ayrıca bu elde edilen teorik sonuçların, esnek kümelerin kullanıldığı diğer alanlarda uygulaması çalışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Aktaş, H. and Çağman, N., "Soft sets and soft groups", *Information Sciences*, 177, 2726-2735, 2007.
2. Ali, M.I., Feng, F., Liu, X.Y., Min, W.K., Shabir, M., "On some new operations in soft set theory", *Computers and Math. with Applications*, 57, 1547-1553, 2009.
3. Aygünoğlu, A., Aygün, H., "Some notes on soft topological spaces" , *Neural Comput & Applic*, 21, 113-119, 2012.
4. Aygünoglu, A., "Esnek Topolojik Uzaylar", *Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, Kocaeli, 2011.
5. Babitha, K.V., Sunil, J.J., "Soft set relations and functions", *Computers and Mathematics with Applications* 60, 1840-1849. 2010.
6. Bourbaki, N.,, "General Topology", Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
7. Chen, D., Tsang, E.C.C. and Yeung, D.S., "Some notes on the parameterization reduction of the sets", *International Conference on Machine Learning and Cybernetics,* 3, 1442-1445, 2003.
8. Chen, D., "The parameterization reduction of soft sets and its applications", *Computers and Mathematics with Applications, 4*9, 757-763, 2005.
9. Cartan, H., " Theorie des filtres", *C. R. Acad. Sci., Paris* 205, 595–598, 1937.
10. Choquet, G., " Convergences", *Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.)*, 23, 57-112, 1948.
11. Çağman, N., Karatas, S. and Enginoglu, S., "Soft topology" , *Computers and Mathematics with Applications* 62, 351-358. 2011.
12. Enginoğlu, S., "Esnek Kümeler ve Esnek Karar Verme Metotları", *Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi, Tokat, 2008.
13. Feng, F., Jun, Y.B., Zha, X.Z., "Soft semirings", *Computers and Mathematics with Applications* 56, 2621-2628. 2008.
14. Jena, S.P., Ghosh, S.K., Tripathy, B.K., "On the theory of bags and lists", *Information Sciences* 132, 241-254, 2001.

15. Koçak, M., “Genel topolojiye giriş ve çözümlü alıştırmalar”, *Kampüs yayıncılık*, Eskişehir, 2011.
16. Kong, Z., Gao, L., Wang, L. and Li, S., “ The normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algoritm”, *Computers and Mathematics with Applications*, 56(1), 3029-3027, 2008.
17. Konkov, D.V., Kolbanov, V.M. and Molodtsov, D.A., “Soft Sets Theory-Based Optimization”, *Journal of Computer and Systems Sciences International,* 46(6), 872-880, 2007.
18. Molodtsov, D., “Soft set theory-first results” , *Computers and Mathematics with Applications,* 37, 19-31, 1999.
19. Molodtsov, D., Leonov, V.Y., Konkov, D.V., “Soft sets technique and its application”, *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya,* 1(1), 8-39, 2006.
20. Molodtsov, D., “The theory of soft sets (in Russian)”, *URSS Publishers*, Moscow, 2004.
21. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, R., “Soft set theory”, *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562, 2003.
22. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, R., “Fuzzy soft sets” , *Journal of Fuzzy Mathematics,* 9(3), 589-602, 2001.
23. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, R., “An application of soft sets in a decision making problem”, *Computers and Mathematics with Applications,* 44, 1077-1083, 2002.
24. Morris. S.A., “Topology Without Tears”, University of New England. Dept. of Mathematics, Statistics and Computing Science, 139, 1989.
25. Mucuk, O., “Topoloji ve kategori”, *Nobel yayın dağıtım*, Ankara, 2010.
26. Munkres, James R., “Topology (Second Edition)”, Prentice Hall. 537, 2000.
27. Mushrif, M.M., Sengupta, S. and Ray, A.K., “Texture Classification Using a Novel”, Soft-Set Theory Based Classification, Algoritm. Lecture Notes In Computer Science, 3851 246-254, 2006.
28. Osmanoğlu, İ., “Esnek Çoklu Kümeler ve Topolojik Uzaylar” , *Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir, 2013.
29. Patten, D.R., “Problems in the theory of convergence spaces”, Syracuse University, PhD Dessertation, New York, 2014.
30. Pei, D. and Miao, D., “From Soft Sets to Information Systems”, *Granular Computing IEEE Inter. Conf.*, 617-621, 2005.

31. Shabir, M., Naz, M., “On soft topological spaces”,*Computers and Mathematics with Applications*, 61, 1786-1799, 2011.
32. Sahin, R., Kuçuk. A., “Soft filters and their convergence properties”, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6(3), 529-543, 2013.
33. Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. and Ye, S., “Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets”, *In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed: J.Chen), IEEE*, 2, 1104-1106, 2005
34. Yager, R.R., “On the theory of bags”, *International Journal General System* 13, 23- 37, 1986.
35. Yüksel, S., Tozlu, N., Güzel Ergül, Z., “Soft filter”, *Math. Sci.*, 8(119), 1-6, 2014.
36. Zou, Y. And Xiao, Z., “Data analysis approaches of soft sets under incomplete information”, *Knowledge-Based Systems*, 21(1), 941-945, 2008.
37. Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W.K. and Atmaca, S., “Remarks on soft topological spaces” , *Ann. Fuzzy Math. Inform*ation 3(2), 171-185, 2012.

ÖZGEÇMİŞ

Gizem MENEKŞE 1991 yılında Nevşehir’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Nevşehir’de tamamladı. 2010 yılında kazandığı Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2014 de mezun oldu. Aynı yıl içerisinde hem dershane de çalışıp hem de Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesinde formasyon sertifikası aldı. Sonraki yılda ise Nevşehir’deki çeşitli okullarda matematik öğretmenliği yaptı. Aynı zamanda 2014 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Nevşehir Kardelen Kolejinde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

Adres : Güzelyurt Mahallesi, Doktorlar Sitesi No:22 NEVŞEHİR

Telefon : 0 544 748 55 35

E- posta : gizem.mm66@hotmail.com