

**T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAFLARIN CEBİRSEL BAĞLANTISALLIĞI**

**Tezi Hazırlayan  
Hakan KÜÇÜK**

**Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2017  
NEVŞEHİR**



**T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAFLARIN CEBİRSEL BAĞLANTISALLIĞI**

**Tezi Hazırlayan  
Hakan KÜÇÜK**

**Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2017  
NEVŞEHİR**

Doç. Dr. Sezer SORGUN danışmanlığında **Hakan KÜÇÜK** tarafından hazırlanan "**Grafların Cebirsel Bağlantısallığı**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

05/01/2017

### JÜRİ

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Baki YAĞBASAN



Üye : Doç. Dr. Sezer SORGUN



Üye : Yrd. Doç. Dr. Hatice TOPCU



ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun...10/01/2017...tarih ve...02-09... sayılı kararı ile onaylanmıştır.



## TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Hakan KÜÇÜK

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerimi benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezim de büyük emeği olan, aynı zamanda da benimle arkadaş gibi ilgilenerek bana çok şey katan Sayın Hocam Doç. Dr. Sezer SORGUN' a,

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini hissettiren değerli AİLEME,

Desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Hatice TOPCU 'ya,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne, Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, Matematik Bölüm Başkanlığı'na ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne teşekkür ederim.

**GRAFLARIN CEBİRSEL BAĞLANTISALLIĞI**  
**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hakan KÜÇÜK**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Ocak 2017**

**ÖZET**

Bir grafin Laplasyan matrisi ve onun öz değerleri matematiğin çeşitli alanlarında etkin bir biçimde kullanılmaktadır. Bu öz değerlerden özellikle ikinci en küçük öz değeri (cebirsal bağlantısallık) matematiğin yanı sıra bilgisayar bilimlerinde, fizik ve kimya gibi bir çok farklı alanlarda uygulamaları yönünden büyük önem arz etmektedir.

Bu bağlamda tezin ikinci bölümünde graf teori ve graf matrislerinin özelliklerini anlamlandırabilmek için matris teori ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, cebirsal bağlantısallık tanıtılarak bu kavram ile ilgili literatürde yer alan önemli sonuçlar derlenmiştir.

*Anahtar kelimeler: Graf, Laplasyan matris, Cebirsal bağlantısallık.*

**Tez Danışman: Doç. Dr. Sezer SORGUN**

**Sayfa Adeti: 50**

**ALGEBRAIC CONNECTIVITY OF GRAPHS**  
(M. Sc. Thesis)

**Hakan KÜÇÜK**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY**  
**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**January 2017**

**ABSTRACT**

The Laplacian matrix and its eigenvalues are used in various fields of mathematics in an effective manner. These eigenvalues, in particular the second smallest eigenvalue (algebraic connectivity) is of great importance in terms of applications in many different areas such as computer science, physics and chemistry as well as mathematics.

In the second chapter of this thesis, it has been given to basic definitions and concepts in graph theory and matrix theory in order to interpret the properties of the matrices. In the third chapter, the important results in the literature about these concepts by introducing the algebraic connectivity has been compiled.

***Keywords: Graph, Laplacian Matrix, Algebraic Connectivity.***

**Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezer SORGUN**

**Page Number: 50**



## İÇİNDEKİLER

KABÜL VE ONAY SAYFASI .....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER .....	vi
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	ix
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ .....	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR .....	4
2.1. Graf teori .....	4
2.2. Grafların matrislerle temsili .....	15
3. BÖLÜM	
GRAFLARIN CEBİRSEL BAĞLANTISALLIK .....	27
3.1. Cebirsel bağlantısallık .....	27
3.2. Graf işlemlerinde cebirsel bağlantısallık.....	31
3.3 Cebirsel bağlantısallık ile Diğer Bazı Graf Parametreleri Arasında Bağlıntılar .....	38
4. BÖLÜM	
SONUÇ VE ÖNERİLER .....	45

KAYNAKLAR .....	46
ÖZGEÇMİŞ .....	48

## TABLULAR LİSTESİ

Tablo 3.3.1	Bazı özel grafların cebirsel bağlantısallığı.....	33
Tablo 3.3.2	5 noktalı bağlantılı graflar için bazı alt sınırlar.....	43
Tablo 3.3.2.	5 noktalı bağlantılı graflar için bazı üst sınırlar.....	44

## ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 1.1. (2,2,3) Trimetolpentan karbon yapısının yol graf matrisi yoluyla temsili
- Şekil 2.1.1 Çok katlı basit olmayan graf
- Şekil 2.1.2 Yönlü graf, Yönsüz graf, Pseudo graf
- Şekil 2.1.3 İzole noktalı ilmek içeren graf
- Şekil 2.1.4  $K_4$  ve  $K_6$  tam grafları
- Şekil 2.1.5  $C_6$  ve  $W_7$  grafları
- Şekil 2.1.6  $G = (V, E)$  grafi
- Şekil 2.1.7 Bağlantılı ve bağlantısız graf örnekleri
- Şekil 2.1.8 Metan, etan, propan yapılarının graflarla temsili
- Şekil 2.1.9  $H$  grafi  $G$  grafının alt grafi
- Şekil 2.1.10  $H$  grafi  $G$  grafının dallanmış alt grafıdır ama  $S$  grafi sadece alt graftır.
- Şekil 2.1.11 Bağımsızlık noktası ve klik
- Şekil 2.1.12 Bir  $G$  grafi ve tümleyeni
- Şekil 2.1.13 Bir graf ve onun çizgi grafi
- Şekil 2.1.14  $Cb_1, Cb_2$  ve  $Cb_3$  küp graflar
- Şekil 2.1.15  $K_{3,4}$  iki parçalı tam graf
- Şekil 2.1.16  $S_{1,2}, S_{1,3}, S_{1,4}$  yıldız graflar
- Şekil 2.1.17 Petersen graf
- Şekil 2.2.1  $G$  grafi

- Şekil 2.2.2 Şekil 2.2.2 Kenarları ve noktaları etiketlenmiş  $G$  grafi
- Şekil 2.2.3 Öz değerlerin karmaşık düzlemde gösterimi
- Şekil 2.2.4 Matris ağaç teoremi için örnek graf
- Şekil 2.2.5 Dallanmış ağaç
- Şekil 3.1.1 İki grafın kartezyen çarpımı
- Şekil 3.1.2  $G$  grafi ve tümleyen grafi
- Şekil 3.1.3  $G_1 \subset G_2$  olacak şekilde iki graf
- Şekil 3.1.4  $G_1, G_2, G_3$  grafları
- Şekil 3.1.5  $G$  grafi ve bir nokta silinerek oluşturulan  $G_1$  grafi

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$G = (V, E)$	Nokta ve kenarlardan oluşan graf
$V(G)$	Grafa ait noktalar kümesi
$E(G)$	Grafa ait kenarlar kümesi
$e_k = (v_i, v_i)$	İlmeç (loop)
$v_i \sim v_j$	Komşu noktalar
$N(v_i)$	Komşuluk kümesi
$d(v_i)$	Noktanın derecesi
$\Delta(G)$	Grafın maksimum derecesi
$\delta(G)$	Grafın minimum derecesi
$K_n$	Tam graf
$C_n$	Döngü graf
$W_n$	Tekerlek graf
$diam(G)$	Grafın çapı
$T$	Ağaç graf
$\omega(G)$	Klik(Clique) sayısı
$\alpha(G)$	Bağımsızlık sayısı
$\overline{G}$	$G$ Grafının tümleyen grafi
$G_{line}$	$G$ Grafının çizgi grafi
$Cb_m$	M-boyutlu küp graf

$K_{p,q}$	İki parçalı tam graf
$S_n$	Yıldız graf
$P$	Petersen graf
$e(G)$	Kenar bağlantısallık
$v(G)$	Nokta bağlantısallık
$A(G)$	Komşuluk matrisi
$I(G)$	Çakışım matrisi
$I$	Birim matris
$L(G)$	Laplasyan matrisi
$D(G)$	Köşegen matris
$\sigma(M)$	Bir matrisin öz değerler kümesi
$a(G)$	Cebirsel bağlantısallık
$J$	Tüm elemanları birlerden oluşan vektör
$G_1 \times G_2$	İki grafın kartezyen çarpımı
$G_1 \oplus G_2$	İki grafın direkt toplamı

## 1.BÖLÜM

### GİRİŞ

Graf teori Königsburg köprüsü problemine [1], Leonhard Euler'in çarpıcı çözümü ile başladığını söyleyebiliriz. Graf teorisinin bu ilk probleminin çözülmesinden bu yana bu alandaki çalışmaların hızlı bir şekilde arttığını ve uygulamalı matematik anabilim dalının en önemli alt dallarından biri olmaya başladığını görmekteyiz. Graf teori her ne kadar Kombinatori alanıyla birlikte anılsa da uygulamalı matematik, optimizasyon ve bilgisayar bilimleri gibi alt dallarda da çok kullanıma sahiptir. Graf teorisinin geniş uygulama sahalarını daha iyi anlayabilmek için bazı alt disiplinler ile ilgili açıklamalar verelim.

Graflar Üzerinde Optimizasyon problemleri genellikle graf yapılarını (Karayolları ulaşım ağı, haberleşme ağları, internet ağları, vb. yapıların graflar ile temsil edilmesiyle oluşan yapılar) maksimum verimlilik ve minimum maliyet olacak şekilde tasarlanması problemlerinin çözümünde yöntemlerin geliştirilmesi ve sınır değerlerin hesaplanmasında kullanılır.

Topolojik graf teoride, topolojik yüzeyler ( Bir Torusun yüzeyi gibi) üzerine grafların gömülmesi metotları hakkında sorular sorar ve cevaplar arar. Örneğin bir düzlem üzerine, kenarları birbirini kesmeyecek şekilde bir ağ (network) çizebilir miyiz? Gibi problemlere cevaplar arar.

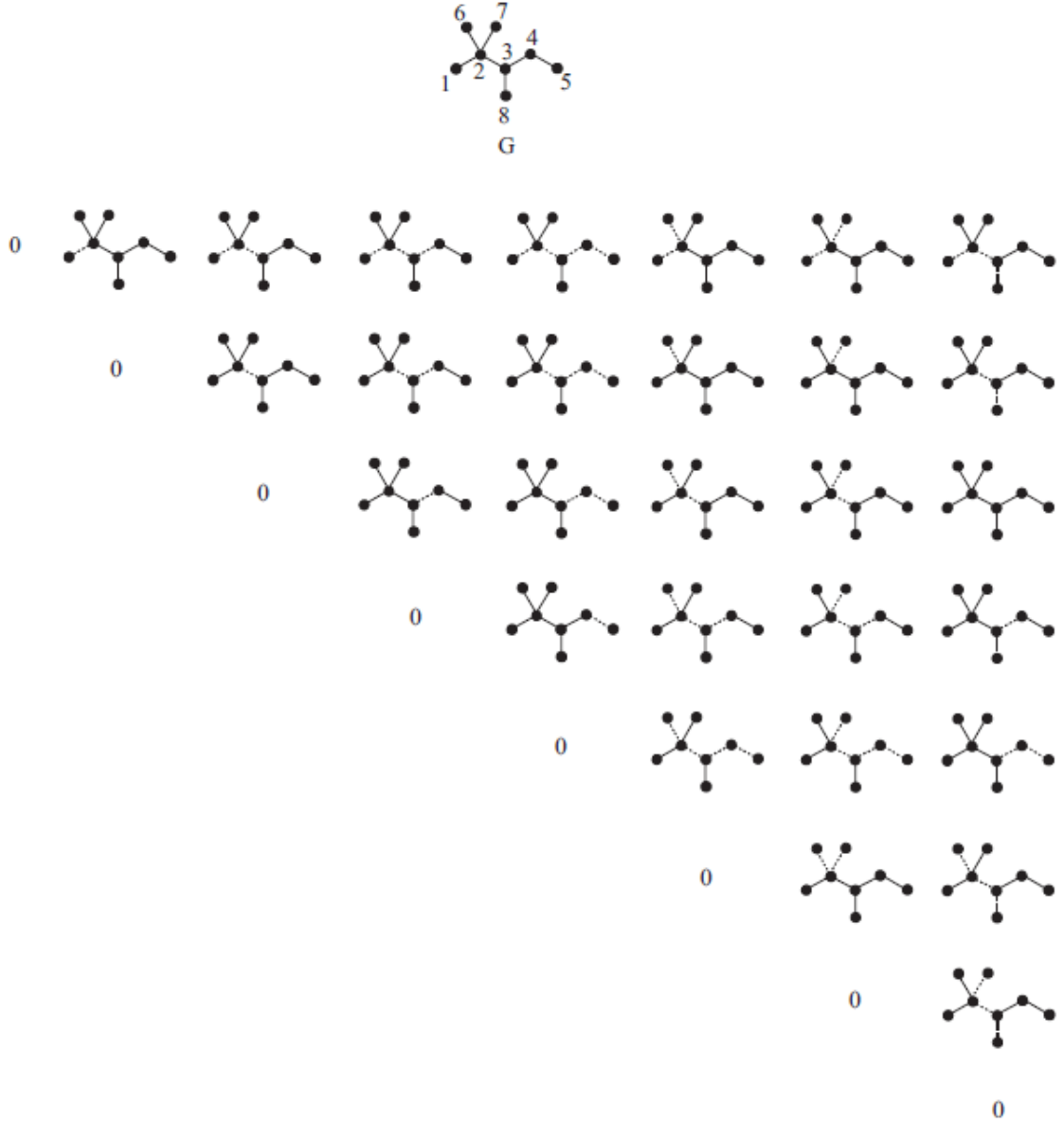
Grafları renklendirme probleminde, bir grafta ki noktaların (veya kenarların) her birini farklı renkler kullanarak işaretleme çalışmalarını optimize etme yöntemleri üzerinde çalışılır bir alan olduğu görülür. Örneğin bir biri ile ilişkili iki nokta farklı olacak şekilde bir grafi boyamak için gerekli olan en az renk problemi gibi.

Cebirsel graf teoride, cebirsel yapıların karakterize edilebilmesi için gerekli olan parametreleri kullanarak önemli sonuçlar elde edilebilir. Özellikle de matris gruplarını graf yapılarına uyarlama problemleri üzerinde çalışan bir alt disiplin olarak da tanımlanabilir.

Tabi ki graf teorisinin analitik graf teori, kimyasal graf teori, vb. uygulama alanları yukarıda bahsetmeye çalıştığımız alanlardan çok daha fazladır. Tezin ana konusu cebirsel bağlantısallık olmasına rağmen grafları ve alt uygulamaları daha iyi anlayabilmek için



graf matrislerinden bahsetmek gerekmektedir. Grafları temsil etmek için çok çeşitli matrisler oluşturulmuştur. Komşuluk matrisi, kenar bağlantılı matris, nokta bağlantılı matris, çakışım matrisi, Laplasyan matrisi, genelleştirilmiş Laplasyan matrisi, yol matrisi, döngü matrisi, Seidel matrisi, Randić matrisi, Hückel matrisi vb. matrisler içerisinde en çok çalışılan ve en kapsamlı sonuçlar edinilen matris komşuluk matrisidir ama grafları karakterize etmede en önemlisi Laplasyan matrisidir. Laplasyan matrisine kaynakların bazılarında Kirchhoff matrisi de denilmektedir. Laplasyan matrisinin önemi ile ilgili bazı çalışmalardan bahsetmekte fayda vardır. Laplasyan matrisi kimyasal uygulamalarda kendini göstermektedir. Örneğin kimyasal ağaç tanımları yapılarak metan, bütan, izobütan, metilpropan vb. alkanların moleküler grafları aracılığı ile bazı sonuçlara ulaşılmıştır [2].



Şekil 1.1 (2,2,3) Trimetolpentan karbon yapısının yol graf matrisi yoluyla temsili

Diğer bir uygulama olarak, proteinlerin yapısını ve evrimini anlamada bu proteinlerin 3 boyutlu yapılarını belirlemede Laplasyan matrisi önemli yer tutmaktadır. Grafların özellikleri ve spektrumları proteinlerin yapıları hakkında bazı bilgiler verir. Alfa-Heliks yapılarını temsil etmede bağlantılı graflar kullanılır, bağlantılı grafların noktaları ikincil yapıları, bağlantılı grafların kenarları ise heliksler arasında ki bağlantıyı temsil eder [3].

Laplasyan öz değerleri, sıvı akış davranışlarının kinematikiini belirlemede de kullanılmaktadır. Grafların noktaları kaynak nokta, grafların kenarları ise sıvı akışını sağlayan noktalar olarak dūřunūlebilir. Akışın temel davranışını belirleyen en önemli parametre Laplasyan matrisinin ikinci en kūçük öz değeridir [4]. Bu ikinci en kūçük öz değere cebirsel bağlantısallık denir.

Laplasyan matrisi ve onun öz değerlerinin (özellikle cebirsel bağlantısallık); DNA yapıları, hava yolları taşımacılığı güvenliği [5], Alzheimer hastalığı ile beyin ağı direnci arasındaki bağlantıları ortaya koymakta kullanılır [6].

Tezin ikinci bölümünde graf teori ve graf matrislerinin özelliklerini anlamlandırabilmek için matris teori ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, cebirsel bağlantısallık tanıtılarak bu kavram ile ilgili literatürde yer alan önemli sonuçlar derlenmiştir.

## 2.BÖLÜM

### TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

#### 2.1 Graf Teori

Bu bölümde tez konusunun daha iyi anlaşılması için graf teorisinin ön bilgilerine yer verilecektir. Gerekli görülen teoremler için ispatlar yapılarak bazı kavramlara örnekler verilecektir. Bu bölümdeki temel tanım ve kavramlar için [7-16] referans numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

**Tanım 2.1.1**  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$  ile noktalar (tepe noktaları) kümesini  $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  ile de bu noktaların birbirleri ile bağlanmasıyla oluşan kenarlar (bağlantılar ya da yaylar) kümesini gösterelim.  $G = (V, E)$  ikili yapısına graf denir ve genelde kısaca  $G = (V, E)$  ile gösterilir. Bu tez çalışmasında bazı gösterimler kullanacağız örneğin  $V(G)$  ile grafın noktalar kümesini  $E(G)$  ile grafın kenarlar kümesini,  $k, i, j \in \mathbb{N}$  için  $e_k = (v_i, v_j)$  kenar ikilisini göstereceğiz.

**Tanım 2.1.2**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere  $V(G) = \emptyset$  ise bu grafa boş (null) graf denir. Eğer  $V(G) = \{v\}, E(G) = \emptyset$  ise bu grafa da aşıkâr (trival) graf denir.

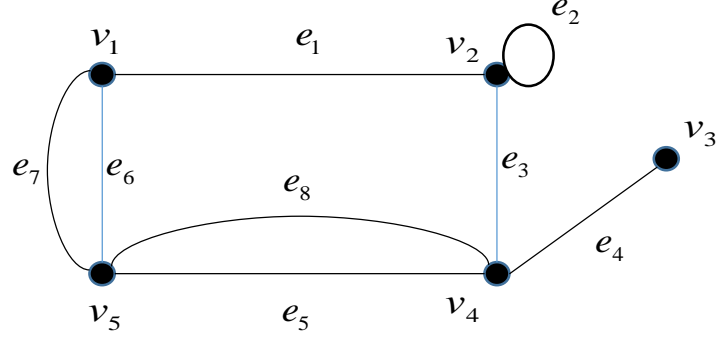
**Tanım 2.1.3**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere eğer  $e_k = (v_i, v_i)$  ise bu kenara ilmek (loop) denir.

**Tanım 2.1.4**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere  $e_k = (v_i, v_j)$  ve  $e_m = (v_i, v_j)$  şeklinde kenarlar oluşuyorsa bu kenarlara katlı kenarlar (paralel kenarlar) denir. Ayrıca bir graf içerisinde iki nokta arasında ikiden fazla kenar da oluşturulabilir.

**Tanım 2.1.5**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere  $k, i, j \in \mathbb{N}$  için  $e_k = (v_i, v_j)$  kenarı ise  $v_i, v_j$  noktalarına komşu noktalar denir ve  $v_i \sim v_j$  ile gösterilir. Benzer şekilde  $k, l, i, j, m \in \mathbb{N}$  için  $e_k = (v_i, v_j)$  ve  $e_l = (v_j, v_m)$  kenarlarına komşu kenarlar denir. Yani iki kenarın bir ortak noktası var ise bu kenarlar komşu kenarlardır.

**Tanım 2.1.6**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere grafda ki bir noktaya komşu olan noktaların kümesine o noktanın komşuluk kümesi denir ve  $N(v_i)$  ile gösterilir. Yani  $v_i \in V(G)$  olmak üzere komşuluk kümesi  $N(v_i) = \{v_j : v_i \sim v_j\}$  biçiminde tanımlanır.

Aşağıda şeklini vereceğimiz graf üzerinde verdiğimiz kavramların bazılarını görebiliriz.



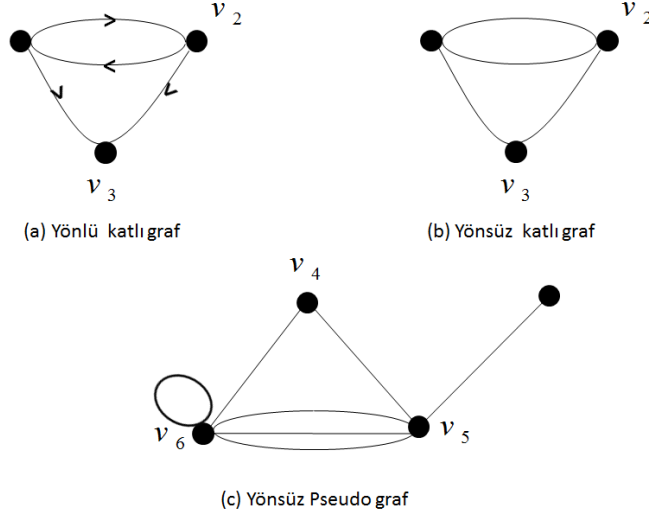
Şekil 2.1.1 Çok katlı basit olmayan graf

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  kümesi  $G$  grafının noktalar kümesi,  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$  kümesi  $G$  grafının kenarlar kümesi,  $e_2$  kenarı ilmek,  $e_6, e_7$  ve  $e_5, e_8$  kenar çiftleri de katlı kenarlar ayrıca her hangi bir noktanın komşuluk kümesini yazalım. Örneğin,  $N(v_4) = \{v_2, v_3, v_5\}$  biçimindedir.

**Tanım 2.1.7**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere grafta ki bütün noktalar yönlendirilmişse (orientation) bu grafa yönlü graf (directed) denir. Yönlü olmayan graflara da yönsüz graf (undirected) denir. Bu tez çalışmasında ağırlıklı olarak yönsüz graflar üzerinde bilgiler verecektir.

**Tanım 2.1.8**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere  $G$  grafı katlı kenar içeriyor ama ilmek içermiyorsa  $G$  grafına katlı graf (multigraph) denir.

**Tanım 2.1.9**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere  $G$  grafı hem katlı kenar hem de ilmek içeriyorsa  $G$  grafına pseudo graf denir.

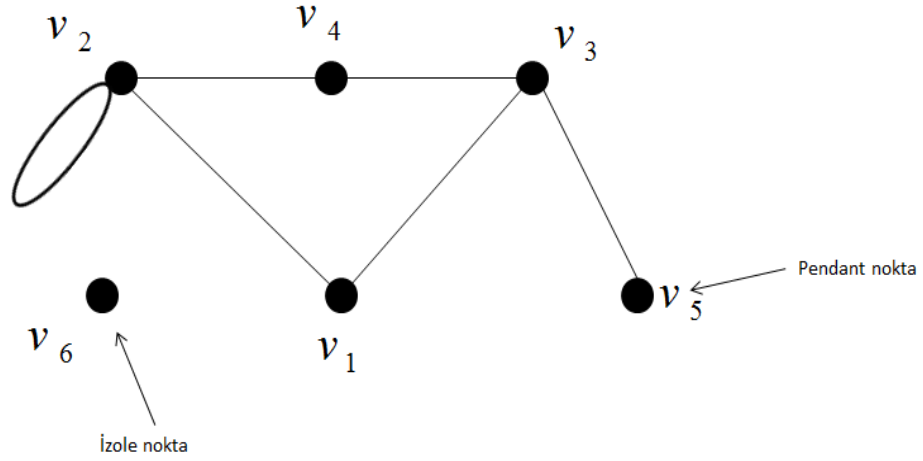


Şekil 2.1.2 Yönlü graf, Yönsüz graf, Pseudo graf

**Tanım 2.1.10**  $G = (V, E)$  grafı ilmek ve katlı kenar içermiyorsa bu  $G$  grafına basit graf denir. Bu tez çalışmasının ilerleyen bölümde basit graflar üzerinde çalışmalara yer verilecektir.

**Tanım 2.1.11**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere  $v_i \in V(G)$  noktasına bağlı kenarların sayısına  $v_i$  noktasının derecesi denir ve  $\deg_G(v_i)$ ,  $\deg(v_i)$  ya da kısaca  $d(v_i)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.12**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere  $v_i \in V(G)$  noktası için  $d(v_i) = 0$  ise yani hiç bir kenar oluşturmuyorsa  $v_i$  noktasına izole nokta (isolated vertex) denir. Eğer  $v_i$  noktası için  $d(v_i) = 1$  ise bu durumda  $v_i$  noktasına pendant nokta denir.



Şekil 2.1.3 İzole noktalı ilmek içeren graf

Şekil 2.1.3 de bulunan grafın tüm noktaları için dereceleri  $d(v_1)=2$ ,  $d(v_2)=4$  olup burada dikkat edilmeli ki  $v_2$  noktasına bağlı bir ilmek olduğu için bu ilmeği iki kenar olarak hesaplanır.  $d(v_3)=3$ ,  $d(v_4)=2$ ,  $d(v_5)=1$ ,  $d(v_6)=0$

**Lemma 2.1.13** [16]  $G = (V, E)$  yönsüz bir graf olmak üzere

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

dir. Bu lemma kaynaklarda el sıkışma lemması (Handshaking Lemma) olarak da ifade edilir.

**Teorem 2.1.14** [17]  $G = (V, E)$  n noktalı yönsüz ve basit bir graf olmak üzere her hangi bir noktanın derecesi  $n-1$  i geçemez. Yani;

$$\forall v \in V(G) \text{ için } 0 \leq d(v) \leq n-1$$

**Tanım 2.1.15**  $G = (V, E)$  n noktalı bir graf ve bu grafın noktalarının derecelerinin artmayan dizisine grafın derece dizisi denir.

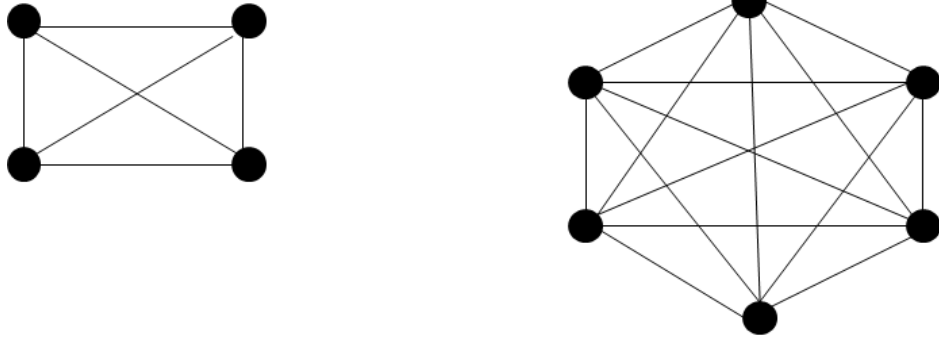
**Tanım 2.1.16**  $G = (V, E)$  n noktalı bir graf olmak üzere derece dizisindeki en büyük elemana maksimum derece, en küçük elemana minimum derece denir ve sırasıyla  $\Delta(G)$ ,  $\delta(G)$  ile gösterilir. Yani;

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg(v)$$

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg(v)$$

**Tanım 2.1.17**  $G = (V, E)$   $n$  noktalı bir graf olmak üzere her noktanın derecesi aynı ise bu grafa düzenli (regular) graf denir.

**Tanım 2.1.18**  $G = (V, E)$   $n$  noktalı grafının tüm dereceleri  $(n-1)$  ise bu grafa tam graf denir ve  $K_n$  ile gösterilir. Bir  $n$  noktalı tam grafın kenar sayısı  $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{2}$  ile hesaplanır. Tam graflar  $(n-1)$  düzenlidir.



Şekil 2.1.4  $K_4$  ve  $K_6$  tam grafları

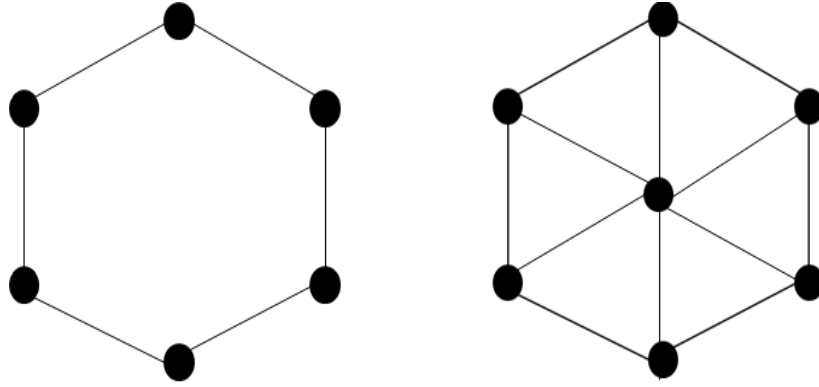
**Tanım 2.1.19**  $n \geq 3$  olmak üzere  $n$  noktalı bir grafa kenarlar kümesi

$$E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$$

şeklinde ise bu grafa döngü graf (cycle) denir ve  $C_n$  ile gösterilir.

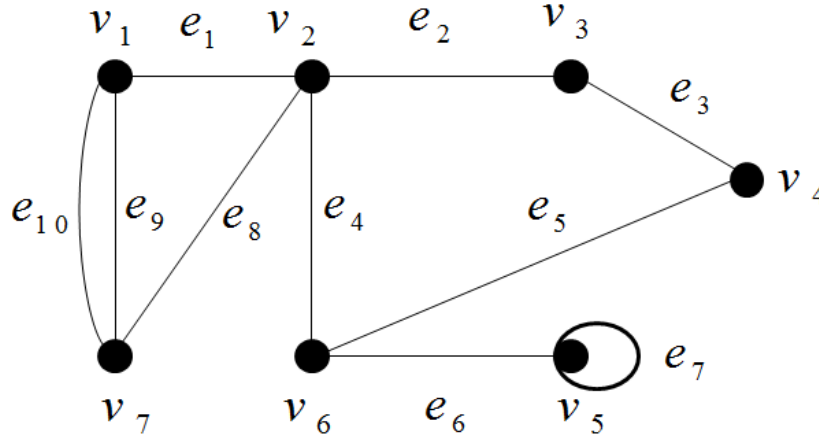
**Tanım 2.1.20** Bir döngü graf ve döngü graftaki bütün noktalarla bağlantılı bir noktanın oluşturduğu grafa tekerlek (wheel) graf denir ve  $W_n$  ile gösterilir.





Şekil 2.1.5 Sırasıyla  $C_6$  ve  $W_7$  grafları

**Tanım 2.1.21**  $G = (V, E)$  bir graf ve  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(G)$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_n \in E(G)$  olmak üzere  $v_1$  ve  $v_n$  noktaları arasında  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n$  şeklinde yazılan  $n$ -uzunluklu noktaların ve kenarların oluşturduğu sonlu diziye yürüme (walk) denir. Bir yürüyüşteki kenar sayısına o yürümenin uzunluğu denir. Hiçbir kenarın tekrarlanmadığı yürümeye gezi (trail) ve hiçbir noktanın tekrarlanmadığı yürümeye yol (path) denir. Başlangıç noktasıyla bitiş noktası aynı olan yola kapalı yol (closed path) veya dolaşım (circuit) denir.

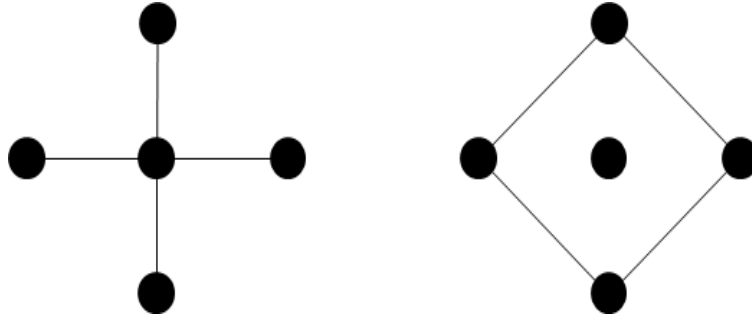


Şekil 2.1.6  $G = (V, E)$  grafi

Şekil 2.1.6 de bulunan graf için;  $v_5, e_7, v_5, e_6, v_6, e_5, v_4$  açık yürüme,  $v_1, e_9, v_7, e_8, v_2, e_1, v_1$  kapalı yürüme (burada kapalılığı ve açıklığı başlanılan noktaya tekrar gelip gelmemek

belirliyor),  $v_1, e_1, v_2, e_4, v_6, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2$  gezi ,  $v_6, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2$  yol ,  $v_2, e_4, v_6, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2$  ise dolaşımdır.

**Tanım 2.1.22**  $G = (V, E)$  boştan farklı bir graf olmak üzere  $G = (V, E)$  nin herhangi iki noktası bir yol (path) oluşturuyorsa  $G = (V, E)$  ye bağlantılı (connected) graf denir. Bağlantılı olmayan grafa bağlantısız graf denir.



Şekil 2.1.7 Bağlantılı ve bağlantısız graf örnekleri

**Tanım 2.1.23.**  $G = (V, E)$  grafında alınan herhangi iki nokta çifti arasındaki en büyük uzaklığa grafın çapı (diameter) denir ve  $diam(G)$  biçiminde gösterilir.

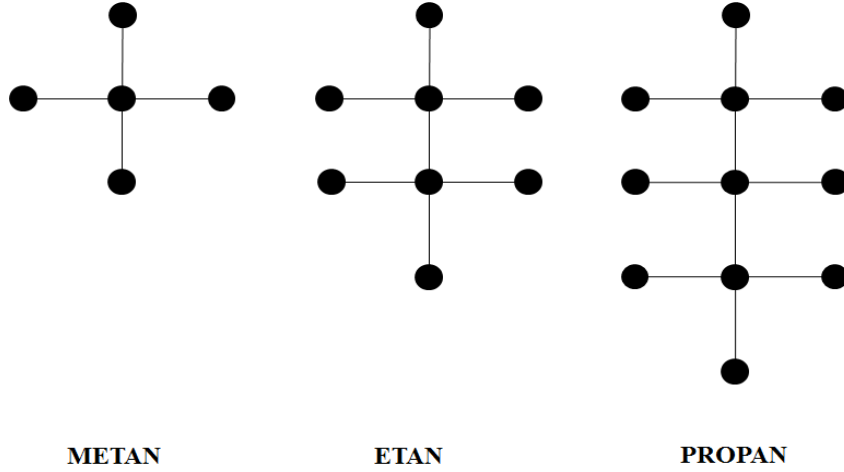
**Tanım 2.1.24.**  $G = (V, E)$  grafında noktaların ve kenarların tekrar edilmediği kapalı yürümeye döngü (cycle) denir.

**Tanım 2.1.25**  $G = (V, E)$  grafında hiçbir döngü yok ise bu grafa döngüsüz (acyclic) graf denir.

**Tanım 2.1.26**  $G = (V, E)$  grafında tek döngü var ise bu grafa tek döngülü (unicyclic) graf denir. Açıkta ki nokta sayısı kenar sayısına eşittir.

**Tanım 2.1.27** Hiçbir döngü içermeyen bağlantılı grafa ağaç (tree) denir ve  $T$  ile gösterilebilir. Açıkta ki kenar sayısı nokta sayısının bir eksiğine eşittir.

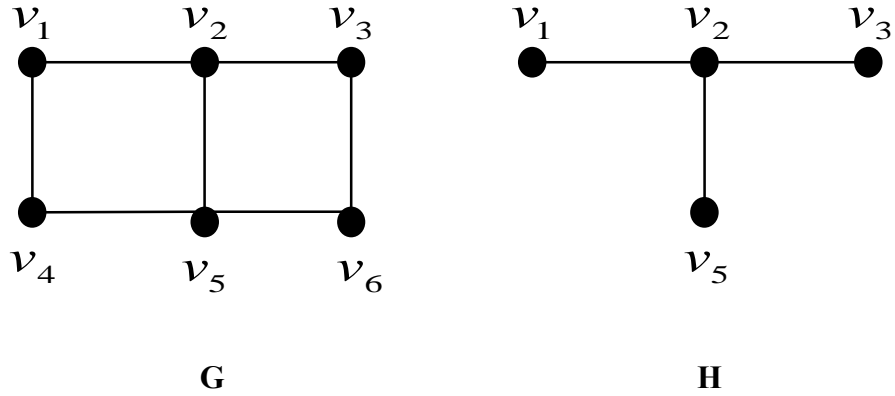
**Tanım 2.1.28** Bileşenleri ağaç olan graflara orman (forest) denir.



Şekil 2.1.8 Metan, etan, propan yapılarının graflarla temsili

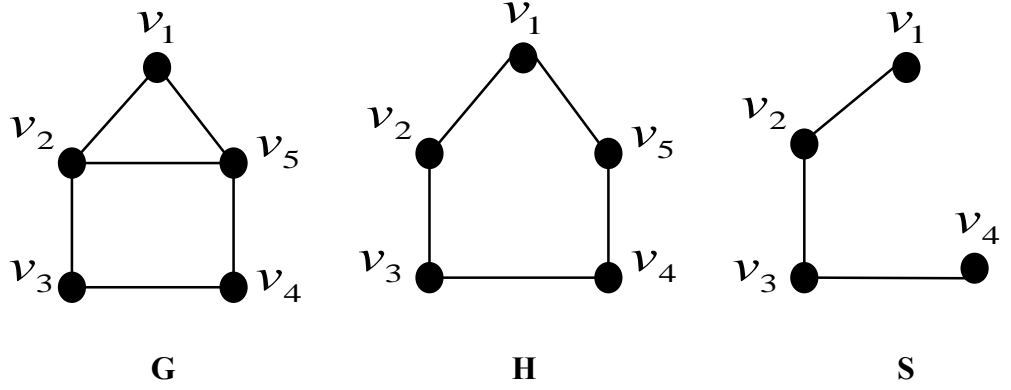
Şekil 2.1.8 de gösterilen metan, etan, propan kimyasal yapıları birer ağaç, bu üç bileşenle oluşan grafa orman denir.

**Tanım 2.1.29**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere  $V(H) \subseteq V(G)$  ve  $E(H) \subseteq E(G)$  olacak şekilde  $H = (V, E)$  grafı var ise bu grafa  $G = (V, E)$  grafının alt grafı (subgraph) denir.



Şekil 2.1.9  $H$  grafı  $G$  grafının alt grafı

**Tanım 2.1.30** Bir  $G = (V, E)$  grafının tüm noktalarını içeren alt grafa dallanmış altgraf (spanning subgraph) denir.



Şekil 2.1.10 H grafi G grafinin dallanmış alt grafidir ama S grafi sadece alt graftır.

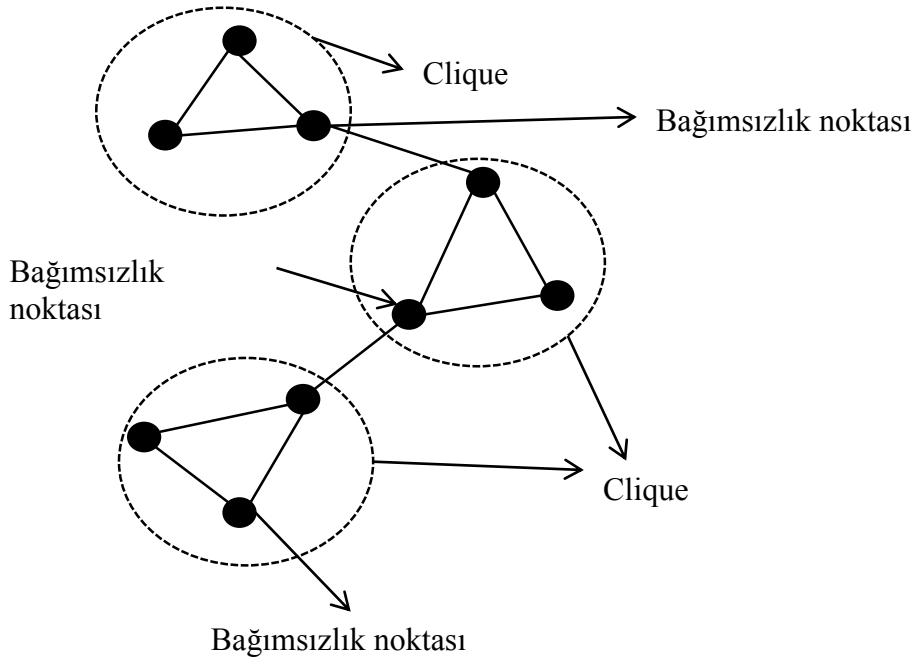
**Tanım 2.1.31** Bir graftan sadece noktalar silinerek oluşturulan alt grafa indirgenmiş alt graf (induced subgraph) denir. Burada önemli olan silinen noktanın bağlı olduğu kenarları silmektir diğer kenarların silinmemesi gereklidir.

**Tanım 2.1.32**  $G = (V, E)$  grafinin tam olan alt grafin noktalar kümesine klik (clique) denir. Yani öyle bir alt graf ki tüm noktalar birbirleri ile kenar oluşturur.

**Tanım 2.1.33**  $G = (V, E)$  bir graf olmak üzere birbirleriyle kenar oluşturmayan noktaların kümesine bağımsız küme (independent set) denir.

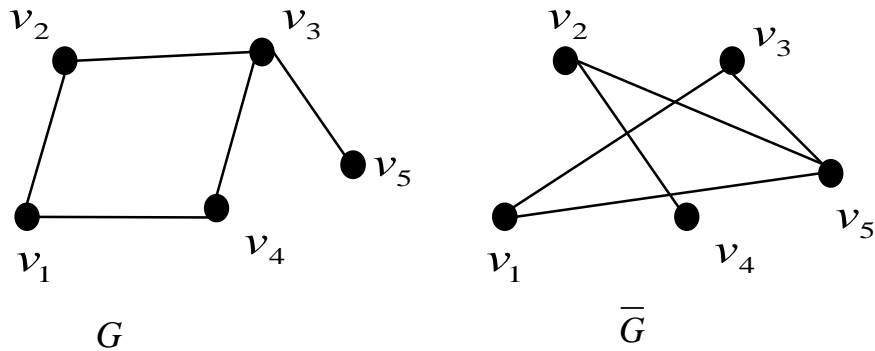
**Tanım 2.1.34**  $G = (V, E)$  grafindaki en geniş klik kümesinin eleman sayısına (nokta sayısı) grafin klik sayısı denir ve  $\omega(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.35**  $G = (V, E)$  grafinda ki en büyük bağımsız kümenin eleman sayısına (nokta sayısı) grafin bağımsızlık sayısı (independent number) denir ve  $\alpha(G)$  ile gösterilir.



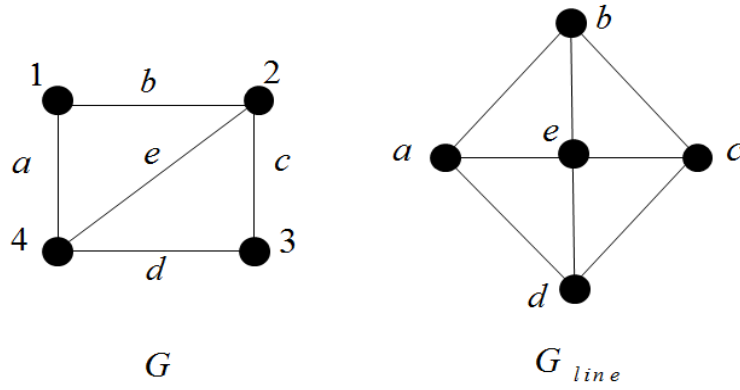
Şekil 2.1.11 Bağımsızlık noktası ve klik

**Tanım 2.1.36**  $G = (V, E)$  basit graf olmak üzere  $e = \{v_i, v_j\} \in \bar{E}(\bar{G}) \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \notin E(G)$  olacak biçimde  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  grafına  $G = (V, E)$  grafının tümleyenidir denir. Yani kenar oluşturmayan noktaların kenar oluşturmasıyla oluşan yeni graf  $G = (V, E)$  grafının tümleyenidir. Örneğin, tam grafların tümleyeni boş graftır.



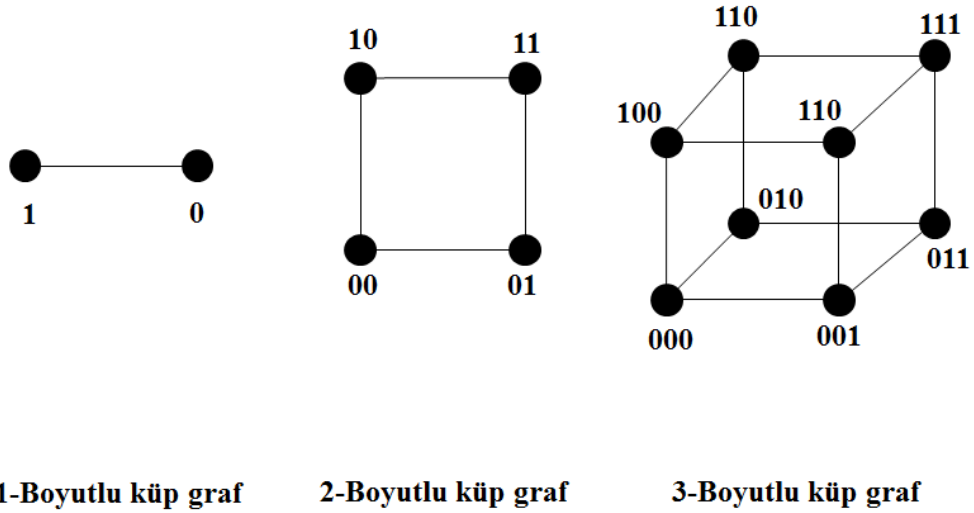
Şekil 2.1.12 Bir G grafi ve tümleyeni

**Tanım 2.1.37**  $G = (V, E)$  grafında ki noktaları kenar, kenarları da nokta olarak belirlenen yeni grafa  $G$  grafının çizgi grafi denir ve  $G_{line}$  sembolü ile gösterebiliriz.



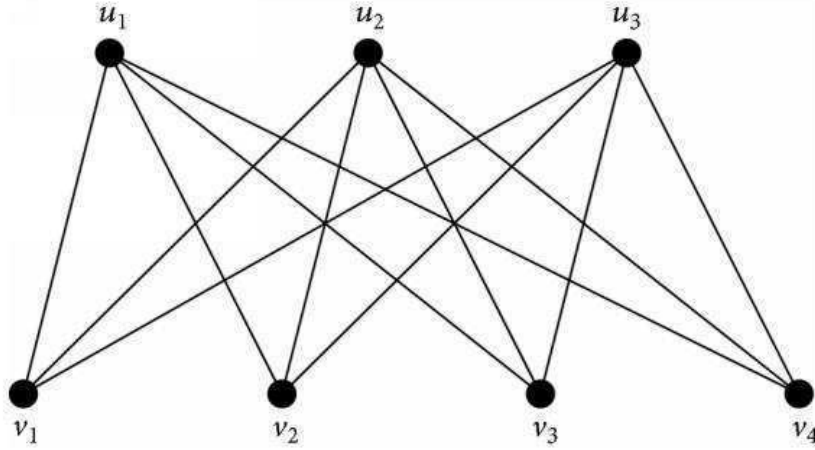
Şekil 2.1.13 Bir graf ve onun çizgi grafi

**Tanım 2.1.38**  $2^n$  noktadan ve  $n \cdot 2^{n-1}$  kenardan oluşan grafa  $m$  boyutlu küp graf denir ve  $Cb_m$  sembolü ile gösterebiliriz.  $M$  boyutlu küp graf için komşuluğu ikili sistemde ki sıfır ve birler kullanılarak oluşturulur.



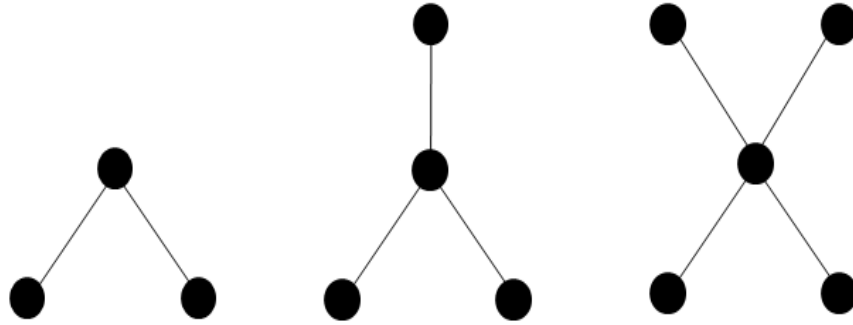
Şekil 2.1.14  $Cb_1, Cb_2$  ve  $Cb_3$  küp graflar

**Tanım 2.1.39**  $G$  grafi birbirine komşu olmayan  $|V_1| = p, |V_2| = q$  biçiminde iki farklı nokta kümesinden oluşan bir graf olmak üzere eğer  $V_1$  kümesinde ki her nokta  $V_2$  kümesinde ki her nokta ile komşu ise  $G$  grafına iki parçalı tam graf denir ve  $K_{p,q}$  sembolü ile gösterebiliriz.



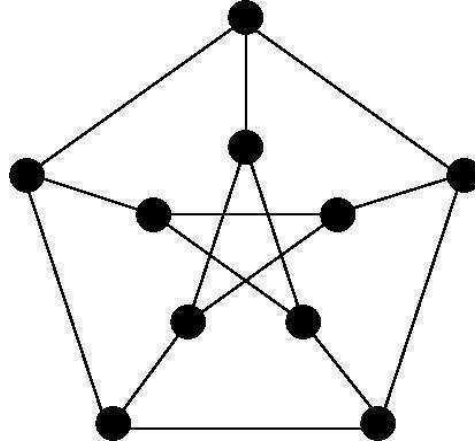
Şekil 2.1.15  $K_{3,4}$  iki parçalı tam graf

**Tanım 2.1.40**  $G = (V, E)$   $n$  noktalı bir graf olmak üzere bir noktanın derecesi  $n-1$  ve  $n-1$  noktanın derecesi bir olan ağaca yıldız (star) graf denir.  $S_n$  sembolü ile gösterebiliriz. Dikkat edilirse  $S_n = K_{1,n-1}$  dir.



Şekil 2.1.16  $S_{1,2}, S_{1,3}, S_{1,4}$  yıldız graflar

**Tanım 2.1.41** Noktalarının derecesi 3 olan 10 noktalı ve 15 kenarlı düzenli grafa Petersen graf denir. Özel bir graf olduğu için genelde  $P$  ile gösterilir.



Şekil 2.1.17 Petersen graf

**Tanım 2.1.42** Bağlantılı bir grafi bağlantısız yapan minimum kenar sayısına kenar bağlantısallık, grafi bağlantısız yapan minimum nokta sayısına da nokta bağlantısallık denir ve sırasıyla  $e(G)$  ve  $v(G)$  ile gösterebiliriz. Temel nitelikte ki kaynaklarda kenar bağlantısallık  $\lambda(G)$ , nokta bağlantısallık  $k(G)$  sembolleri ile de gösterilir.

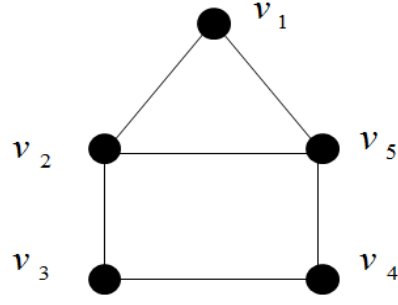
## 2.2 Grafların Matrislerle Temsili

Graf teoride grafları matrislerle gösterme fikri her zaman için başvurulan bir yöntem olmuştur. Bunun sebebi matrislerle temsil etmenin uygunluğundan ziyade bu matrislerin grafları karakterize etmede ve matris özelliklerinin graflar hakkında kullanışlı bilgiler vermesidir. Tabi ki bu tez çalışmasında cebirsel bağlantısallık üzerine durulacaktır ama cebirsel bağlantısallığın tam anlaşılması için Laplasyan matrisinin ve diğer matrislerin özellikleri anlaşılmalıdır.

**Tanım 2.2.1**  $G$ , noktaları  $1, 2, \dots, n$  olacak şekilde etiketlenirilmiş  $n$  noktalı bir graf olmak üzere Komşuluk matrisi  $A(G) = (a_{ij})$ ,  $n \times n$  tipinde aşağıda ki koşulu sağlayan bir matristir.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : i \sim j \\ 0 & : d.d \end{cases}$$





Şekil 2.2.1  $G$  grafi

Örnek 2.2.2 Şekil 2.2.1 de verilen grafin komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Komşuluk matrisine bakıldığında, köşegen elemanlarının ‘0’ olduğu, köşegende bulunmayan elemanlar için  $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow a_{ji} = 1$  olması gerektiği, bu matrisi simetrik matris olduğu ve her bir satır veya sütundaki ‘1’lerin sayısının etiketlenmiş noktanın derecesini verdiğini kolaylıkla görebiliriz.

Komşuluk matrisinin kuvvetlerini aldığımızda ise graf ile ilgili çok önemli bilgilere ulaşabiliriz.

**Teorem 2.2.3** [17]  $G$ , noktaları  $v_1, v_2, \dots, v_n$  olacak şekilde etiketlenirilmiş  $n$  noktalı bir graf olmak üzere ve komşuluk matrisi  $A(G) = (a_{ij})$  için  $A(G)^k = (a_{ij}^k)$  matrisinde  $i$ . satır ve  $j$ . sütunda bulunan eleman,  $G$  grafında  $v_i - v_j$  noktaları arasında uzunluğu  $k$  olan yürüyüşleri verir.

İspat: Tümevarım yöntemini ile  $k=1$  için  $A(G)^1 = A(G)$  olur ve eğer  $v_i \sim v_j$  ise  $a_{ij}^1$  elemanı '1' olur yani  $v_i - v_j$  noktaları arasında uzunluğu 1 olan bir tane yol vardır. Benzer şekilde  $v_i$  ve  $v_j$  noktaları komşu değilse  $a_{ij}^1$  elemanı '0' olur yani  $v_i - v_j$  noktaları arasında uzunluğu 1 olan yol sayısı '0' olur. Bu şekilde tümevarımın temel aşaması tamamlanmış olur. Tümevarım hipotezinden  $k \in \mathbb{Z}^+$  için  $v_i - v_j$  noktaları arasında uzunluğu  $k$  olan yürüyüş sayısı  $a_{ij}^k$  olduğunu kabul edelim. Matris çarpımını kullanarak;

$$a_{ij}^{k+1} = \sum_{s=1}^n a_{is}^k a_{sj} = a_{i1}^k a_{1j} + a_{i2}^k a_{2j} + \dots + a_{in}^k a_{nj} \quad (2.1)$$

$G$  grafında her  $v_i - v_j$  noktaları arasında uzunluğu  $k+1$  olan yürüyüş sayısı,  $v_j$  noktasına komşu olan bazı  $v_s$  noktaları için  $G$  grafında uzunluğu  $k$  olan yürüyüş sayıları ile üretilir.

$a_{sj} = 1 \Leftrightarrow v_s \sim v_j$  noktasına komşudur. (1) eşitliğini kullanarak uzunluğu  $k+1$  olan  $v_i - v_j$  noktaları arasındaki yürüyüş sayısı  $a_{ij}^{k+1}$  ile temsil edilir.

Örnek 2.2.4 Şekil 2.2.1 de verilen graf örneğini alalım, bu grafın komşuluk matrisinin 2. ve 3. Dereceden kuvvetlerini gözlemleyelim

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A(G)^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Örneğin  $a_{2,4}^2 = 2$  elemanı  $v_2 - v_4$  noktaları arasında uzunluğu 2 olan 2 tane yol vardır. Yani,  $v_2, v_3, v_4$  ve  $v_2, v_5, v_4$  yollarını gözlemleyebiliriz. Ayrıca  $a_{3,2}^3 = 5$  elemanı  $v_3 - v_2$  noktaları arasında uzunluğu 3 olan 5 tane yol vardır. Yani  $v_3, v_4, v_5, v_2; v_3, v_2, v_3, v_2; v_3, v_2, v_5, v_2; v_3, v_4, v_3, v_2; v_3, v_2, v_1, v_2$  şeklinde yazılabilecek 5 farklı yol vardır.

Komşuluk matrisinin 2.dereceden kuvvetinin köşegen elemanları  $G$  grafına ait noktaların derecelerini vermektedir. Bunun sebebini şu şekilde düşünebiliriz; uzunluğu iki olan  $v_i, v_j, v_i$  yolu keyfi ( $v_i$  noktasına komşu olan)  $v_j$  noktaları için tanımlı olur. Buradan da diyebiliriz ki köşegen üzerinde bulunan elemanlar  $G$  grafının derece dizisini verir.

Komşuluk matrisinin 3.dereceden kuvvetine daha yakından bakarsak yine köşegen elemanları graf hakkında kullanışlı bilgiler verecektir. Örneğin  $A^3$  matrisinin köşegen elemanı daha öncekilere benzer olarak uzunluğu 3 olan döngü sayısını verecektir yani  $a_{1,1}^3 = 2$  bunun anlamı  $v_1$  noktasından başlayıp yine  $v_1$  noktasında biten uzunluğu 3 olan döngü sayısı 2 olur.

Grafları temsil etmede kullanılabilen diğer bir matris ise Çakışım (Incidence) matrisidir. Komşuluk matrisinin aksine Çakışım matrisinde satırlar grafın noktalarını, sütunlar ise grafın kenarlarını temsil eder. Gaftaki her kenar iki noktayla çakışır, bunlara  $v_a, v_b$  diyelim. Tabi ki bu noktalar isteğe bağlı olarak seçilir, ama geleneksel olarak etiket numarası küçük olanı  $v_a$ , diğerini  $v_b$  olarak seçelim burada bir yönlendirme yapalım.  $(v_a, e)$  nokta-kenar ikilisi '1' ve  $(v_b, e)$  nokta kenar ikilisi '-1' olsun diğer durumları '0' olarak alalım. Şimdi bu matrisin matematiksel tanımını verelim.

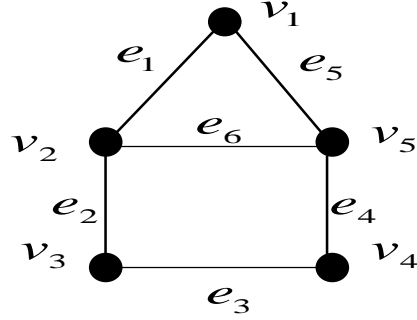
**Tanım 2.2.5**  $G$  grafi noktaları  $v_1, v_2, \dots, v_n$  şeklinde etiketlenmiş  $n$  noktalı ve kenarları  $e_1, e_2, \dots, e_m$  şeklinde etiketlenmiş  $m$  kenarlı bir graf olmak üzere; Graf yukarıda bahsedildiği gibi yönlendirilmiş ise

$$I(G) = \begin{cases} 1 & \text{:Eğer } (v_a, e_i) \text{ ikilisi çakışık ise} \\ -1 & \text{:Eğer } (v_b, e_i) \text{ ikilisi çakışık ise} \\ 0 & \text{:Diğer durumlarda} \end{cases}$$

Eğer graf yönlendirilmiş değilse daha kısa olarak Çakışım matrisini aşağıda olduğu gibi tanımlayabiliriz.

$$I(G) = \begin{cases} 1 & \text{:Eğer } (v_i, e_j) \text{ ikilisi çakışık ise} \\ 0 & \text{:Diğer durumlarda} \end{cases}$$

Örnek 2.2.6 Daha önce verdiğimiz örnek graf (Şekil 2.2.1) üzerinde nokta ve kenarlar için etiketleme işlemi yapalım ve bu graf üzerinden Çakışım matrisini oluşturalım.



Şekil 2.2.2 Kenarları ve noktaları etiketlenmiş  $G$  grafi

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	
$v_1$	1	0	0	0	1	0	Yani matris olarak $I(G) =$
$v_2$	-1	1	0	0	0	1	
$v_3$	0	-1	1	0	0	0	
$v_4$	0	0	-1	1	0	0	
$v_5$	0	0	0	-1	-1	-1	

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrisin her bir kolonu tam olarak 2 tane sıfır olmayan elemana sahiptir. Bu elemanlar kenarı oluşturan komşu noktalara karşılık gelir.

Verilen bir graf için Komşuluk matrisi ve Çakışım matrisi arasındaki ilişkiyi gösteren bir lemma aşağıda verilmiştir.

**Lemma 2.2.7** [18]  $G$ ,  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir graf olmak üzere;

$$A(G_{Line}) = |I(G)^T I(G) - 2I|$$

Eşitliği sağlanır.

**Tanım 2.2.8**  $G$  grafi noktaları  $v_1, v_2, \dots, v_n$  şeklinde etiketlenmiş  $n$  noktalı bir graf olmak üzere  $L(G) = (\ell_{i,j})$  elemanları

$$\ell_{i,j} = \begin{cases} d_i & : i = j \\ -1 & : i \sim j \\ 0 & : d.d \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlı matris Laplasyan matrisi denir. Ayrıca bazı kaynaklarda Kirchhoff matrisi olarak da bilinir.

Laplasyan matrisi aşağıdaki önermeleri sağlar [19].

- i. Laplasyan matrisi simetrik pozitif yarı tanımlı matristir.
- ii. Laplasyan matrisinin satır ve sütun toplamları sıfırdır.
- iii. Laplasyan matrisine ait iki elemanın kofaktörü eşittir.
- iv. Grafın bağlantılı bileşen sayısı  $k$  olmak üzere Laplasyan matrisinin rankı  $(n-k)$  olur.
- v. Herhangi bir  $x$  vektörü için

$$x^T L(G)x = \sum_{i \sim j} (x_i - x_j)^2 \text{ eşitliği sağlanır.}$$

Örnek 2.2.9 Şekil 2.2.2 de verdiğimiz graf örneği üzerinden Laplasyan matrisini oluşturalım

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Laplasyan matrisi tezin sonraki aşamalarında üzerinde sürekli durulacak çok önemli bir matristir. İlk bakışta bu matrisin diğer matrislerle ilişkisine verilebilecek ilk örnek  $L(G) = D(G) - A(G)$  eşitliğidir. Burada  $D(G)$  elemanları grafın derece dizisine eşit olan köşegen matris. Diğer yandan Laplasyan matrisi Çakışım matrisi türünden de ifade edilebilir yani  $L(G) = I(G)I(G)^T$ .

Sonra ki vereceğimiz teorem Laplasyan matrisinin Çakışım matrisiyle olan ilişkisini veren ilginç bir teoremdir.

**Teorem 2.2.10** [18]  $L(G), I(G)$  sırasıyla  $G$  grafına ait Laplasyan matris ve Çakışım matrisini göstermek üzere;

$L(G) = I(G)I(G)^T$  ve  $Q = I(G)^T I(G)$  matrisleri aynı öz değerlere (Negatif olmayan ) sahiptir.

**Teorem 2.2.11 (Gersgorin Disk Teoremi)** [18]  $M, n \times n$  tipinde kare matris olsun ve  $\sigma(M)$  de bu matrisin öz değerlerinin kümesini göstermek üzere

$$\sigma(M) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ r \in \mathbb{C} : |a_{i,j} - r| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{i,k}| \right\}$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki  $\lambda, M_{n \times n}$  matrisinin bir öz değeri ve bu öz değere karşılık gelen öz vektör de  $x$  olsun. Yani  $Ax = \lambda x$  eşitliği sağlansın. Ayrıca  $x_i$ , tüm öz vektörleri gösterebiliriz. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k = \lambda x_i$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten hareketle

$$(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{i,k} x_k$$

benzer bir eşitliği yazabiliriz. Üçgen eşitsizliğinden

$$|\lambda - a_{i,i}| |x_i| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{i,k}| |x_k|$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi eşitsizliğin iki tarafını da  $|x_i|$  ' e böler ve  $x_i = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$  olmak üzere

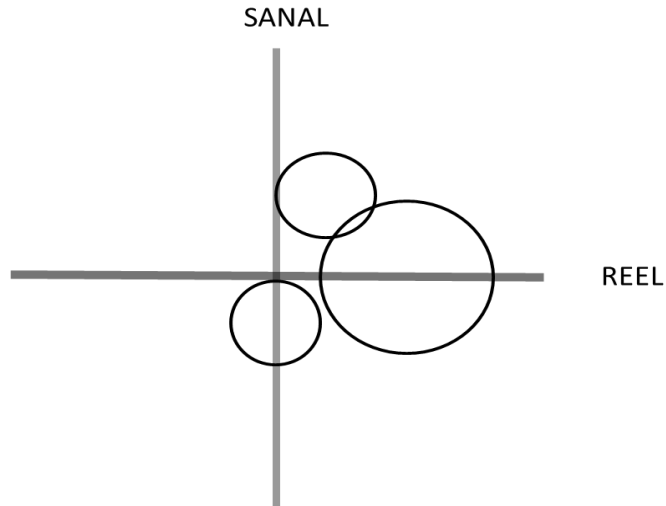
$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{i,k}| \frac{|x_k|}{|x_i|} \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{i,k}|$$

dir.

Örnek 2.2.12 Aşağıdaki matrisin öz değerlerini kullanarak diskler oluşturalım

$$M = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & i & -i \end{bmatrix}$$

M matrisinin öz değerlerini ve Gersgorin disk teoremini kullanarak üç tane disk oluşturacağız. Bu matrisin spektrumu  $(3.1+0.2i, 1.1+2.1i, -0.2-1.3i)$  dir. İlk diskin merkezi  $1+2i$  ve yarıçapı 1, ikinci diskin merkezi 3 ve yarıçapı 2, üçüncü diskin merkezi  $-i$  ve yarıçapı 2 olur. Bu üç diskin birleşimi bize matrisin tüm öz değerlerinin bulunduğu bölgeyi gösterir.



Şekil 2.2.3 Öz değerlerin karmaşık düzlemde gösterimi

**Teorem 2.2.13** [18]  $M$  , $n \times n$  tipinde reel simetrik matris ise tüm öz değerleri reeldir.

İspat:  $x$  vektörünün eşlenik transpozunu  $x^H$ ,  $M$  matrisinin eşlenik transpozunu  $M^H$  ile gösterelim. Eğer  $\lambda$  kompleks sayı ise  $\lambda = a + bi$  ve  $\lambda^H = a - bi$  şeklinde yazılır.  $M$  matrisi reel simetrik matris olduğu için  $M = M^H$  eşitliği yazılabilir. Benzer şekilde  $\lambda = \lambda^H$  eşitliğini gösterirsek ispat tamamlanır.  $x^H x = 1$  eşitliğini kullanarak ve  $\lambda = x^H Ax = x^H A^H x = (x^H Ax)^H = \lambda^H$  geçişleri sağlanarak ispat tamamlanır.

**Teorem 2.2.14 (Rayleigh-Ritz)** [18]  $A \in M_{n \times n}$  simetrik matris ise aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

- i.  $x \in \mathfrak{R}^n$  için  $\lambda_1 x^T x \leq x^T Ax \leq \lambda_n x^T x$
- ii.  $\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} = \max_{x^T x=1} x^T Ax$
- iii.  $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x} = \min_{x^T x=1} x^T Ax$

İspat:

i)  $A \in M_{n \times n}$  matrisi simetrik olduğu için  $A = UDU^T$  olacak şekilde  $U \in M_{n \times n}$  birim matris ve  $D(G) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  köşegen matris vardır. Matris öz değer ilişkisini kullanarak her

bir  $\left| (U^T x)_i \right|^2$  negatif olmayan terim olacak biçimde

$$x^T Ax = x^T UDU^T x = (U^T x)^T D(U^T x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left| (U^T x)_i \right|^2$$

eşitliğini elde ederiz. Bu durumda

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n \left| (U^T x)_i \right|^2 \leq x^T Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left| (U^T x)_i \right|^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n \left| (U^T x)_i \right|^2$$

elde edilir.  $U \in M_{n \times n}$  birimsel olduğundan

$$\sum_{i=1}^n \left| (U^T x)_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n \left| x^T U U^T x \right| = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = x^T x$$

ve böylece



$$\lambda_1 x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_n x^T x \quad (2.2)$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) İkinci kısmın ispatı için (2.1) eşitsizliğin her iki tarafını  $x^T x$  bölersek

$$\lambda_1 \leq \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_n$$

eşitsizliğini elde ederiz.  $x$  vektörünü  $\lambda_n$  öz değerine karşılık gelen bir öz vektör alırsak

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{\lambda_n x^T x}{x^T x} = \lambda_n$$

ve buradan

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_n \text{ eşitliğini elde ederiz. Sonuç olarak eğer } x \neq 0 \text{ ise}$$

olduğu için  $\max_{x^T x=1} x^T A x = \lambda_n$  eşitliği yazılarak ispat tamamlanır.

iii) Benzer olarak (ii)' den görülebilir

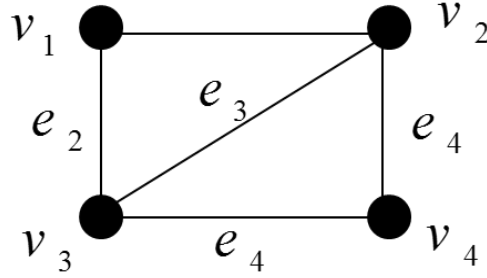
Şimdi Teorem 2.2.14 de verdiğimiz teoremin genelleştirilmiş hali olan Courant-Fischer teoremini verelim.

**Teorem 2.2.15 (Courant-Fischer Teoremi )** [18]  $A \in M_{n \times n}$  simetrik matris ve  $k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq n$  olmak üzere

$$\lambda_k = \min_{w_1, w_2, \dots, w_{n-k} \in \mathfrak{R}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathfrak{R}^n \\ x \perp w_1, w_2, \dots, w_{n-k}}} \frac{x^T A x}{x^T x} \quad \lambda_k = \max_{w_1, w_2, \dots, w_{n-k} \in \mathfrak{R}^n} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathfrak{R}^n \\ x \perp w_1, w_2, \dots, w_{n-k}}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

**Teorem 2.2.16 (Matris Ağaç Teoremi)** [18]  $G$  grafi noktaları  $v_1, v_2, \dots, v_n$  şeklinde etiketlenmiş  $n$  noktalı bir graf olmak üzere;  $G$  grafının dallanmış ağaç (spanning trees) sayısı Laplasyan matrisinin her hangi bir  $(n-1) \times (n-1)$  boyutlu alt matrisinin determinantının mutlak değerine eşittir.

Örnek 2.2.17 Aşağıdaki örneği kullanarak Teorem 2.2.16 yı daha yakından inceleyelim



Şekil 2.2.4 Matris ağaç teoremi için örnek graf

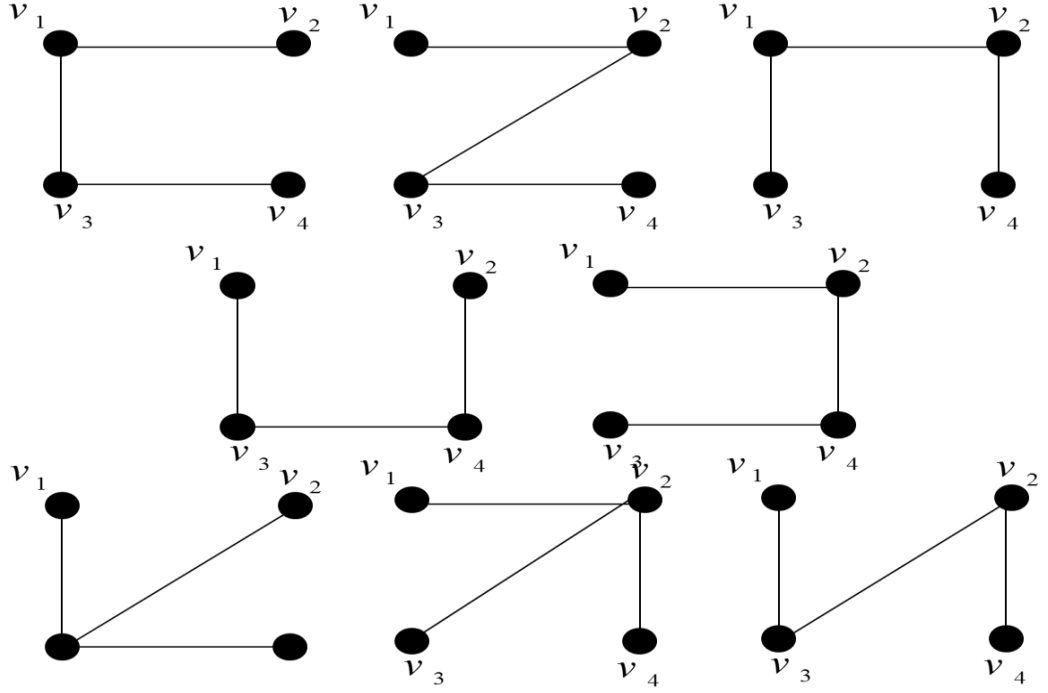
Verilen grafın Laplasyan matrisi

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu matrisin herhangi bir satır ve sütununu silerek oluşturacağımız alt matrisin determinantının mutlak değeri 8 dir. Yani 2.satır ve 3.sütun silindiğinde

$$L(\overline{2,3}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ şeklinde bir matris elde etmiş oluruz. Yani determinantı } -8$$

olacaktır. Özetle diyebiliriz ki verilen grafın 8 tane dallanmış ağacı bulunmaktadır. Bu ağaçları şekil 2.2.5 de görebiliriz..



Şekil 2.2.5 Dallanmış ağaç

Komşuluk matrisinin aksine Laplasyan matrisi grafin bileşenleri ile ilgili çok önemli bilgiler verir.

**Teorem 2.2.18** [20]  $L(G)$  matrisinin öz değerlerindeki sıfır sayısı  $G$  grafında ki bileşen (component) sayısına eşittir.

**Teorem 2.2.19** [20]  $G$  grafi noktaları  $v_1, v_2, \dots, v_n$  şeklinde etiketlenmiş  $n$  noktalı bir graf olmak üzere ve  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$  grafin Laplasyan matrisinin öz değerleri olsun Eğer grafin derece dizisi  $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_n$  şeklinde ise

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{i=1}^k d_i (k = 1, 2, \dots, n)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik durumu  $k = n$  durumunda sağlanır.

### 3.BÖLÜM

#### GRAFLARIN CEBİRSEL BAĞLANTISALLIĞI

Laplasyan matrisi ve onun öz değerleri matematiğin çeşitli alanlarında etkin bir şekilde kullanılmaktadır. Bunun dışında ayrık matematik, sayısal optimizasyon, fizik ve kimya gibi alanlarında da kullanıma sahiptir. Komşuluk matrisi ve onun öz değerleri, Laplasyan matrisi ve onun öz değerlerinden daha fazla çalışılmasına rağmen seçkin matematikçi Bojor MOHAR 'a göre Laplasyan matrisi ve onun öz değerleri daha önemli ve daha kullanışlıdır [21]. Bu tez çalışmasını yapmamızda ki ana sebep Laplasyan öz değerlerinin grafları karakterize etmedeki tartışılmaz üstünlüğüdür.

Laplasyan matrisi ve öz değerleri hakkında temel bilgiler ikinci bölümde verildi. Tezin bu bölümünde ise Laplasyan matrisinin en meşhur öz değeri (ikinci en küçük öz değer) olan cebirsel bağlantısallığı tanımlayarak temel teoremler, sınır değerleri, diğer graf değişmezleri ile ilişkileri ve son güncel çalışmalar ile ilgili temel bilgilere yer verilecektir.

Cebirsel bağlantısallığın detaylı incelemesine başlamadan önce neden önemli olduğu ile ilgili birkaç yoruma yer verelim. Cebirsel bağlantısallık grafları ölçme ve grafların morfolojik ilişkileri hakkında çok önemli bilgi verir. Bu ilişkiyi kısaca şöyle ifade edebiliriz. Eğer bir grafın cebirsel bağlantısallığı sıfır ise graf bağlantısızdır. Ayrıca cebirsel bağlantısallığın ağaç grafların yorumlanmasında, mutlak cebirsel bağlantısallıkta, izometrik sayı hesaplanmalarında ve de ağırlıklı grafların yorumlanmasında ki rolü bu üne kavuşmasına sebep olmuştur.

#### 3.1 Cebirsel Bağlantısallık

**Tanım 3.1.1**  $G$   $n$ -noktalı bir graf olmak üzere;  $G$  grafının Laplasyan matrisine ait öz değerleri  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$  şeklinde sıralayabiliriz.  $\lambda_2$  öz değerine (En küçük öz değeri sıfır olduğu için en küçük ikinci öz değeri)  $G$  grafının cebirsel bağlantısallığı denir ve  $a(G)$  ile gösterilir. Ayrıca bu öz değere karşılık gelen öz vektörde Fiedler öz vektörü denir.

Bu tezde cebirsel bağlantısallık (algebraic connectivity) kavramı, Miroslav Fiedler' in 1973 yılında yayınladığı makalesinde ki tanımlamasına uygun olarak kullanılmıştır [22].

**Teorem 3.1.2** [23]  $G$   $n$  noktalı bir graf

$$S = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\} \quad (3.1)$$

ve  $L(G)$  de bu grafın Laplasyan matrisi olmak üzere

$$a(G) = \min_{x \in S} \sum_{(i,k) \in E} (x_i - x_k)^2$$

ya da

$$a(G) = \min_{x \in S} x^T L(G) x \text{ dir.}$$

İspat: Bu teoremin ispatı çok iyi bilinen Courant teoreminden (Teorem 2.2.15) görülebilecek açıklıktadır. Çünkü matrisinin öz değerlerinin en küçüğü sıfırdır ve bu öz değere karşılık gelen öz vektör  $j$  (tüm elemanları 1'lerden oluşan vektör) dir. Buradan hareketle  $S$  vektörü,  $j$  vektörüne dik olan birim vektörlerden oluşur ki bunun anlamı da  $L(G)$  matrisinin ikinci en küçük öz değeri  $S$  kümesi üzerinden  $x^T L(G) x$  ifadesinin minimumuna eşit olduğunu gösterir.

**Teorem 3.1.3** [23]  $G$  bir graf olmak üzere  $a(G) = 0$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$  nin bağlantısız bir graf olmasıdır.

İspat:  $\Rightarrow$  : Laplasyan matrisi pozitif yarı tanımlı bir matris olduğundan  $a(G) \geq 0$  olduğu açıktır. Kabul edelim ki  $G$  grafi bağlantısız graf olsun.  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G$  grafının bir bileşeni ve  $G = (V_1, E_1)$  grafi da  $G$  grafının bileşen içermeyen hali yani bağlantılı bir graf

olsun. Her  $i \in V_1$  için  $w_i = |V_1|$  ve  $w_1 = |V_1|$  olmak üzere  $y_i = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \sqrt{\frac{w_1}{w_1}}$  vektörünü ve her

$i \in v_1$  için  $y_i = -(1/\sqrt{n}) \sqrt{\frac{w_1}{w_1}}$  vektörünü alalım. Böylece

$$y^T L(G)y = 0$$

dir. Bu ise  $a(G) = 0$  olduğunu verir.

$\Leftarrow$  Tersine  $a(G) = 0$  olsun. Bu durumda (3.1) de verilen küme için  $y \in S$  olacak şekilde öyle bir vektör vardır ki  $y^T L(G)y = 0$  eşitliğini sağlayan,  $y_k, y \in S$  vektörünün sıfır olmayan ilk bileşeni olmak üzere  $y \neq 0$  için  $k$  tane vektör vardır. Noktalar kümesi  $V_1 \neq V \neq \emptyset$  olduğu için  $V_1$  noktalar kümesinde ki herhangi bir nokta ile  $V_1$  noktalar kümesi arasında hiç bir kenar yoktur. Sonuç olarak  $G$  grafi bağlantısızdır.

**Teorem 3.1.4** [22]  $n \geq 2$  olsun ve  $K_n$  tam grafi göstermek üzere  $K_n$  grafının cebirsel bağlantısallığı nokta sayısına eşittir. Yani,  $a(G) = n$  dir. Üstelik  $G$  bağlantılı bir graf olmak üzere

$$a(G) \leq a(K_n)$$

dir. Yani, tüm graflar içerisinde cebirsel bağlantısallığı en büyük olan graf tam graftır. Burada  $K_1$  grafi için cebirsel bağlantısallık '1' kabul edilir.

İspat :  $K_n$  grafının Laplasyan matrisini  $L(K_n)$  olmak üzere bu matrisin karakteristik matrisi

$$(L(K_n) - \lambda I) = \begin{pmatrix} n-1-\lambda & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1-\lambda & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1-\lambda & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1-\lambda \end{pmatrix}$$

şeklindedir. İlk sütunu diğer sütunlardan çıkartırsak

$$(L(K_n) - \lambda I) = \begin{pmatrix} n-1-\lambda & -n+\lambda & -n+\lambda & \cdots & -n+\lambda \\ -1 & n-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & n-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n-\lambda \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Şimdi de ilk satırı diğer satırlara ekler isek

$$(L(K_n) - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & n-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & n-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n-\lambda \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Böylece

$$\det(L(K_n) - \lambda I) = |L(K_n) - \lambda I| = -\lambda \cdot (n - \lambda)^{n-1}$$

Bulunur ki bu ise  $L(K_n)$  matrisinin karakteristik polinomunu verir. Böylece tam grafların Laplasyan spektrumu  $\{0, n, n, \dots, n\}$  dir. Buradan  $a(G) = n$  ve  $\lambda_n(G) = n$  olduğu açıkça görülmektedir. Bu ise cebirsel bağlantısallığı en büyük olan grafin tam graf olduğunu ispat eder.

**Lemma 3.1.5** [23] Keyfi bir ağırlıksız  $G$  grafi için

$$a(G) \geq 2 \cdot e(G) \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \quad (3.2)$$

eşitsiliği sağlanır.

**Teorem 3.1.6** [23]  $n \geq 2$  olsun ve  $P_n$  yol grafi göstermek üzere  $P_n$  grafinin cebirsel bağlantısallığı

$$a(P_n) = 2 \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$$

dir. Üstelik  $G$  keyfi bağlantılı graf olmak üzere

$$a(P_n) \leq a(G)$$

dir. Yani,  $P_n$  grafi tüm graflar içerisinde cebirsel bağlantısallığı en küçük olan graftır.

İspat:  $P_n$  grafinin karakteristik polinomu kullanılarak spektrumu şu şekilde verilebilir

$k = 2, 3, \dots, n$  için

$$\lambda_k = 2 \cdot (1 - \cos \frac{(k-1)\pi}{n})$$

ve  $k = 2$  alınırsa

$$a(P_n) = \lambda_2 = 2 \cdot (1 - \cos \frac{\pi}{n})$$

elde edilir. (3.2) eşitsizliği ve  $e(P_n) = 1$  olduğundan  $a(P_n)$  değerinin minimum olduğu kolayca görülür.

Bazı özel grafların cebirsel bağlantısallığı ile ilgili bir tablo verelim.

Tablo 3.1.1 Özel grafların cebirsel bağlantısallığı

<b>GRAF</b>	<b>CEBİRSEL BAĞLANTISALLIK</b>
Tam Graf	$a(K_n) = n$
Yol Graf	$a(P_n) = 2 \cdot (1 - \cos \frac{\pi}{n})$
Döngü Graf	$a(C_n) = 2 \cdot (1 - \cos \frac{2 \cdot \pi}{n})$
İki Parçalı Tam Graf	$a(K_{p,q}) = \min \{ p, q \}$
Yıldız Graf	$a(S_n) = 1$
m-Boyutlu Küp Graf	$a(Cb_m) = 2$
Petersen Graf	$a(P) = 2$



### 3.2 Graf İşlemlerinde Cebirsel Bağlantısallık

Graf değişmezlerinin (maksimum/minimum derece, cebirsel bağlantısallık, spektral yarıçap, grafin çapı, vb ) belirlenmesinde graflar üzerinde yapılan işlemler kullanışlı teknikler olmuştur. Bu teknikler grafin tümleyeni, graftan bir kenar eklemek veya silmek, grafların kenar birleşimi, grafların kartezyen çarpımı, grafların direkt toplamı vb. işlemlerdir.

**Tanım 3.2.1** [23]  $G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafları için  $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, E)$  kartezyen çarpımı,  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in E$  için hem  $u_1 = v_1$  ve  $(u_2, v_2) \in E_2$  hem de  $(u_1, v_1) \in E_1$  ve  $u_2 = v_2$  olacak biçimde tanımlanır.

**Teorem 3.2.2** [23]  $G_1$  ve  $G_2$  grafları için

$$a(G_1 \times G_2) = \min(a(G_1), a(G_2))$$

eşitliği sağlanır.

İspat:  $G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafları için

$$L(G_1 \times G_2) = L(G_1) \times I_2 + I_1 \times L(G_2)$$

biçiminde yazılır.  $\lambda_n \geq \dots \geq \lambda_2 \geq \lambda_1 = 0$  ve  $\lambda'_n \geq \dots \geq \lambda'_2 \geq \lambda'_1 = 0$  öz değerleri sırasıyla  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının Laplasyan öz değerleri olmak üzere  $L(G_1 \times G_2)$  matrisinin öz değerleri  $\lambda + \lambda'$  formunda olacak şekilde sıralanır. Böylece hem  $a(G_1) + 0$  hem de  $0 + a(G_2)$ ,  $L(G_1 \times G_2)$  matrisinin öz değeri olur. Bu öz değerlerden hangisi ikinci en küçük öz değer ise o  $G_1 \times G_2$  grafinin cebirsel bağlantısallığı olur. Yani,

$$a(G_1 \times G_2) = \min(a(G_1), a(G_2))$$

olduğu görülür.

**Teorem 3.2.3** [23]  $G, \bar{G}$  sırasıyla  $n$  elemanlı bir graf ve onun tümleyeni (complement) olmak üzere  $\lambda_n \geq \dots \geq \lambda_2 \geq \lambda_1 = 0$  öz değerleri  $L(G)$  matrisine ait,  $\lambda'_n \geq \dots \geq \lambda'_2 \geq \lambda'_1 = 0$  öz değerleri de  $L(\bar{G})$  matrisinin öz değerleri olmak üzere  $k = 2, \dots, n$

$$\lambda'_k = n - \lambda_{n+2-k}$$

eşitliği sağlanır. Üstelik,  $\lambda'_k$  e karşılık gelen  $L(\overline{G})$  matrisinin öz vektörleri ve  $\lambda_{n+2-k}$  e karşılık gelen  $L(G)$  matrisinin öz vektörleri çakışıktır.

İspat: Tümlleyen tanımından hareketle  $G + \overline{G} = K_n$  grafları bir bütün olarak düşünürsek tam graf olduğunu söyleyebiliriz. Benzer şekilde

$$L(G) + L(\overline{G}) = L(K_n)$$

eşitliğini matris teoriden yazabiliriz. Açıktır ki  $k = 2, \dots, n$  için tam grafın spektrumundan

$$\lambda'_k + \lambda_{n+2-k} = n \text{ elde ederiz.}$$

**Teorem 3.2.4** [22]  $G_1 = (V, E_1)$ ,  $G_2 = (V, E_2)$  ve  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  ise

$a(G_1) + a(G_2) \leq a(G_3)$  olacak şekilde bir  $G_3 = (V, E_1 \cup E_2)$  grafi vardır.

İspat:  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  olduğu için  $L(G_3) = L(G_1) + L(G_2)$  yazabiliriz ve  $a(G) = \min_{x \in S} x^T L(G)x$  eşitliğini kullanarak;

$$a(G_3) = \min_{x \in S} (x^T L(G_1)x + x^T L(G_2)x)$$

$$\geq x^T L(G_1)x + x^T L(G_2)x$$

$$= a(G_1) + a(G_2) \text{ elde ederiz.}$$

**Teorem 3.2.5** [23]  $G_1 = (V, E_1)$  ve  $G_2 = (V, E_2)$  olmak üzere  $E_1 \subset E_2$  ise

$$a(G_1) \leq a(G_2) \tag{3.3}$$

dir.

İspat:  $G_1 = (V, E_1)$  ve  $G_2 = (V, E_2)$  grafları aynı noktalar kümesine sahip olduğundan iki durum söz konusudur. Birinci olarak  $G_1 = G_2$  olur ki bu durumda ispat kolayca görülür.

Yani,  $a(G_1) = a(G_2)$  eşitlik sağlanır. İkinci olarak  $G_1 \subset G_2$  olsun. Bu durumda  $L(G_2) = L(G_1) + L(G_*)$  olacak şekilde bir  $G_*$  (nokta sayısı aynı olan) alt grafının olmasını gerektirir. Bu eşitlik den hareketle ve Teorem 3.2.4' den  $a(G_1) + a(G_*) \leq a(G_1 \cup G_*) = a(G_2)$  eşitliğini yazabiliriz. Sonuç olarak

$$a(G_1) \leq a(G_2)$$

eşitsizliğini görebiliriz.

**Teorem 3.2.6** [23]  $G = (V, E)$  bir graf ve  $G_1 = (V - \{k\}, E - \{i, j\})$  grafi  $G = (V, E)$  grafının bir noktası çıkarılarak (noktaya bağlı kenarlarda silinecek) elde edilen bir graf olsun. Bu durumda

$$a(G_1) \geq a(G) - k \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:  $k = 1$  alalım.  $G$  grafından bir nokta silerek oluşacak yeni graf  $G_1$  olsun bu noktayı  $\ell = 1, \dots, n$  olmak üzere  $\ell$  .olarak alalım. Bu nokta ile  $G$  grafındaki diğer bütün noktaları tamamlayarak yeni bir  $\hat{G}$  grafi oluşturalım ve Teorem 3.2.5' i kullanarak

$$a(G) \geq a(G)$$

eşitsizliğini yazarız. Diğer taraftan  $\hat{J} = (1, 1, \dots, 1)$   $n-1$  elemanlı bir vektör olmak üzere

$$L(G) = \begin{pmatrix} L(G_1) + I & -J \\ -J^T & n-1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

blok matrisini yazabiliriz. (3.1) deki tanımlı kümeye uygun olarak  $\hat{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$  vektörü için

$$L(G_1)\hat{v} = a(G_1)\hat{v} \quad (3.6)$$

öz değer eşitliğini alalım.  $v = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ 0 \end{bmatrix}$  için (3.5) ve (3.6) kullanılarak

$$\begin{aligned}
L(G)v &= \begin{pmatrix} L(G_1) + I & -J \\ -J^T & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (L(G_1) + I)\hat{v} - J^T \hat{v} \\
&= (a(G_1) + 1)v
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak

$$a(G) \leq a(G_1) + 1 \quad (3.7)$$

dir. (3.7) ve (3.3) den

$$a(G) \leq a(G) \leq a(G_1) + 1$$

yazılır. Böylece  $k=1$  için doğru olduğu gösterilmiş olup tümevarım kullanarak bütün  $k$  değerleri için doğrudur. Bu teoremden hareketle aşağıda ki sonuçları verebiliriz.

**Sonuç 3.2.7** [22]  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  grafının  $G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$  indirgenmiş alt grafları için

$$a(G) \leq \min \{a(G_1) + |V_2|, a(G_2) + |V_1|\}$$

eşitsizliği sağlanır.

**Sonuç 3.2.8** [22]  $G = (V, E)$  bir graf ve  $G_e = (V, E + e)$  ise  $G = (V, E)$  grafına bir kenar eklenerek oluşturulan bir graf olsun. Bu durumda

$$a(G) \leq a(G_e) \leq a(G) + 2$$

eşitsizliği sağlanır.

**Tanım 3.2.9** [15]  $G_1 = (V, E_1)$ ,  $G_2 = (V, E_2)$  iki graf olmak üzere  $G = G_1 \oplus G_2$  grafi  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$

ve

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) - E(G_1) \cap E(G_2)$$

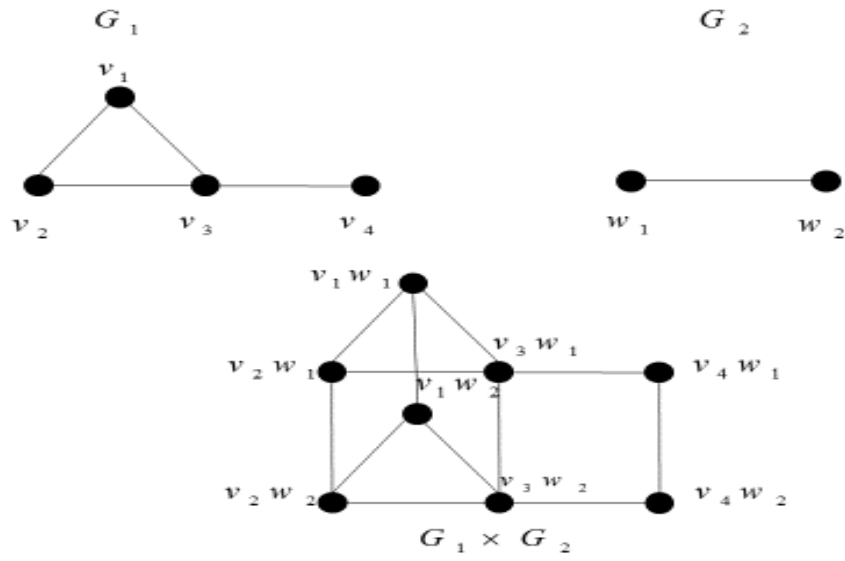
biçimindedir ve grafların direkt toplamı olarak tanımlanır.

**Teorem 3.2.10** [15]  $G = G_1 \oplus G_2$  olacak şekilde grafları için

$$a(G_1) + a(G_2) \leq a(G_1 \oplus G_2)$$

eşitsizlik sağlanır.

**Örnek 3.2.11** Teorem 3.2.2 için bir örnek verelim



Şekil 3.1.1 İki grafın kartezyen çarpımı

Şekil 3.1.1 de verilen graf örneklerinden hareketle Laplasyan matris

$$L(G_1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur ve Laplasyan öz değerleri  $0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$  olarak sıralanır. Benzer şekilde

$L(G_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  olur ve Laplasyan öz değerleri  $0 \leq 2$  şeklinde sıralanır. Ayrıca

$$L(G_1 \times G_2) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

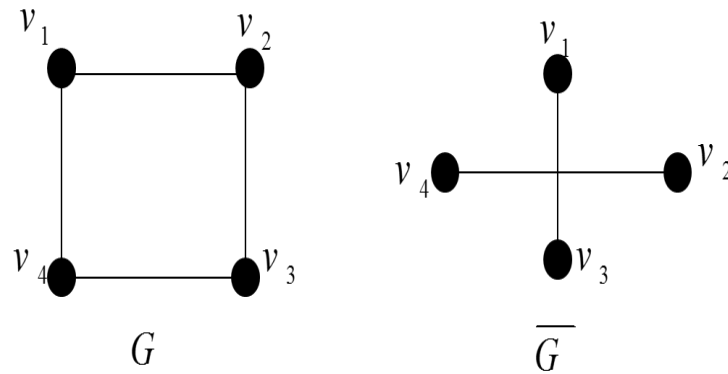
Laplasyan matrisini oluşturabiliriz.

Bu matrisin öz değerleri ise

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6$$

şeklinde sıralayabiliriz. Açıkça görülür ki  $a(G_1) = 1$  ve  $a(G_2) = 2$  olur bu değerlerin minimumu ise 1 dir. Sonuç olarak  $a(G_1 \times G_2) = 1$  olur.

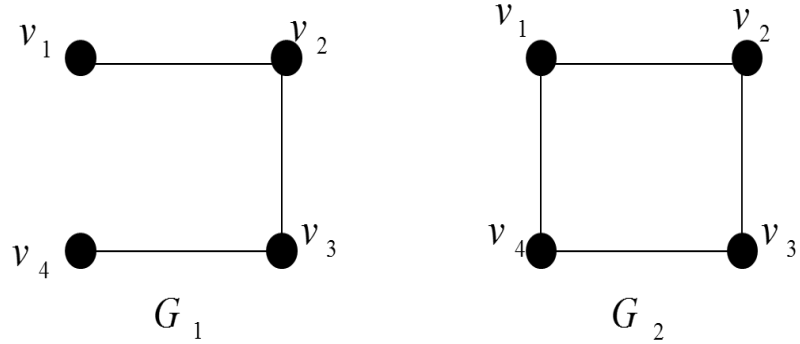
**Örnek 3.2.11** Teorem 3.2.3 için bir örnek verelim.



Şekil 3.1.2 G grafi ve tümleyen grafi

Şekil 3.1.2 de verilen graf örneklerinden hareketle Laplasyan öz değerlerini sırasıyla  $0 \leq 2 \leq 2 \leq 4$  ve  $0 \leq 0 \leq 2 \leq 2$  şeklinde sıralayabiliriz. Açıkça ki  $\lambda'_2 = 4 - \lambda_4, \lambda'_3 = 4 - \lambda_3, \lambda'_4 = 4 - \lambda_2$  eşitlikleri sağlanır.

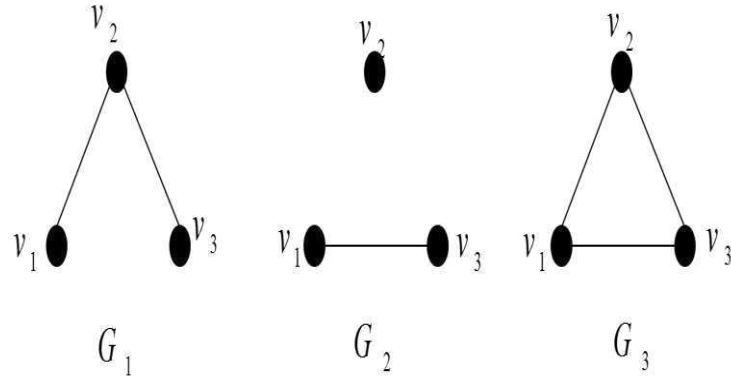
**Örnek 3.2.12** Teorem 3.2.5 için bir örnek verelim



Şekil 3.1.3  $G_1 \subset G_2$  olacak şekilde iki graf

Yukarıda verilen grafların cebirsel bağlantısallıkları sırasıyla  $a(G_1) = 1$  ve  $a(G_2) = 2$  dır.

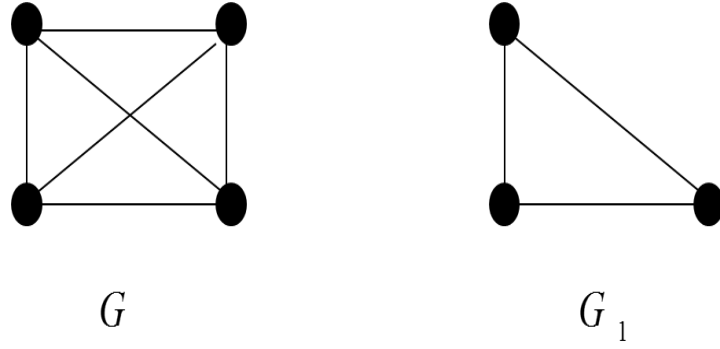
**Örnek 3.2.13** Teorem 3.2.4 için bir örnek verelim



Şekil 3.1.4  $G_1, G_2, G_3$  grafları

Şekil 3.1.4 de verilen graflar için  $a(G_1) = 1$  ve  $a(G_2) = 0$  ayrıca  $a(G_3) = 3$  olur.

**Örnek 3.2.14** Teorem 3.2.6 için bir örnek verelim



Şekil 3.1.5  $G$  grafi ve bir nokta silinerek oluşturulan  $G_1$  grafi

Şekil 3.1.5 de verilen graf için  $a(G_1) = 3$  ve  $a(G) = 4$  olur ki teorem sağlanır.

### 3.3 Cebirsel Bağlantısallık ile Diğer Bazı Graf Parametreleri Arasındaki Bağlılıklar

Graf teoride graf çeşitlerin çok sayıda olması ve keyfi çoklukta uygulamaları olduğu için çoğu grafın en küçük ikinci öz değerini belirlemek çok zorlaşmaktadır. Bu durumda matematikçiler graf parametrelerini kullanarak grafları karakterize etmede cebirsel bağlantısallık ile ilgili alt ve üst sınır değer çalışmalarına yönelmişlerdir. Biz burada bu sınırların bazılarına yer vererek bunların bağlantılı graflar için karşılaştırmalarını yapacağız. Bu sınır değerlerini karşılaştırmmanın önemi ve bu tez çalışmasının üzerinde durduğu gerçek şudur ki grafları maksimize etmede ve yeni sınır değer çalışmalarında bu karşılaştırmalar bize çok önemli ipuçları verecektir.

**Lemma 3.3.1** [24]  $M = (m_{ik})$  matrisi  $e$  standart birim vektör olmak üzere  $Me = 0$  olacak biçimde pozitif yarı tanımlı simetrik matris olsun.  $M$  matrisinin en küçük ikinci öz değeri  $\lambda_2$  alalım. Bu durumda

$$\lambda_2 \leq \left( \frac{n}{n-1} \right) \min_i m_{ii} \quad (3.8)$$

eşitsizliği sağlanır.



İspat: Laplasyan matrisi simetrik ve pozitif yarı tanımlı matris olduğu için  $I(G)$  birim matris ve  $J(G)$  bütün elemanları 1 olan matrisi olmak üzere

$$L(G) = L(G) - \lambda_2 \cdot (I(G) - \frac{1}{n} J(G))$$

biçiminde tanımlı matris de simetrik ve pozitif yarı tanımlı olur.  $e \in \mathbb{R}^n$  standart birim vektör olmak üzere  $W = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T x = 1, x^T e = 0\}$  kümesini alalım. Diğer taraftan

$$\lambda_2 = a(G) = \min_{x \in W} x^T L(G) x \quad (3.9)$$

dir.  $y \in \mathbb{R}^n$  vektörü  $x \in W$  olmak üzere  $y = c_1 e + c_2 x$  formunda olsun.  $L(G)e = 0$  olduğundan (3.8) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} y^T \tilde{L}(G) y &= c_2^2 x^T \tilde{L}(G) x \\ &= c_2^2 (x^T L(G) x - \lambda_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $\tilde{L}(G)$  matrisinin köşegen elemanları negatif değildir ve

$$\lambda_2 \leq \left( \frac{n}{n-1} \right) \cdot \min_i m_{ii}$$

olup ispat tamamlanır.

**Teorem 3.3.2** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için

$$a(G) \leq \frac{n}{n-1} \cdot \delta(G) \quad (3.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:  $G$  grafi bağlantısız ise  $a(G) = 0$  ve  $\delta(G) = 0$  olup (3.8) den eşitsizlik tamamlanır.

$G$  bağlantılı ise  $\delta(G) \geq 1$  dir. Laplasyan matrisi tanımı ve yine (3.8) eşitliğinden üst sınır kolayca elde edilir.

**Teorem 3.3.3** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için

$$2.\delta(G) - n + 2 \leq a(G) \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.3.4** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için

$$a(G) \leq v(G) \leq e(G) \leq \delta(G) \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.3.5** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için

$$2.e(G).(1 - \cos \frac{\pi}{n}) \leq a(G) \quad (3.13)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.3.6** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için

$$2.(\cos(\frac{\pi}{n} - \cos 2.\frac{\pi}{n}))e(G) - 2.\cos \frac{\pi}{n}(1 - \cos \frac{\pi}{n}).\Delta(G) \leq a(G) \quad (3.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Sonuç 3.3.7** (3.14) deki alt sınırın (3.13)'deki alt sınırdan iyi olması için gerek ve yeter koşul  $2e(G) > \Delta(G)$  olmasıdır.

**Teorem 3.3.8** [24]  $G \neq K_n$  olmak üzere

$$a(G) \leq \lfloor -1 + \sqrt{1 + 2.m} \rfloor \quad (3.15)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.3.9** [24]  $T$  bir ağaç olmak üzere

$$a(G) \leq 2.(1 - \cos(\frac{\pi}{diam(T) + 1})) \quad (3.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.3.10** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için  $\alpha(G)$  bağımsızlık sayısı olmak üzere

$$a(G) \leq n - \alpha(G) \quad (3.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.3.11** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için

$$diam(G) \leq 2 \cdot \left\lceil \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta(G)}{a(G)}} \log_2^n \right\rceil \quad (3.18)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.3.12** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için

$$diam(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log \frac{\lambda_n + a(G)}{\lambda_n - a(G)}} \ln(n-1) \right\rceil \quad (3.19)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.3.13** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için

$$\frac{4}{diam(G) \cdot n} \leq a(G) \quad (3.20)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.3.14** [24] Herhangi bir  $G$  grafi için

$$diam(G) \leq 2 \cdot \left\lceil \frac{\Delta(G) + a(G)}{4 \cdot a(G)} \ln(n-1) \right\rceil \quad (3.21)$$

Eşitsizliği sağlanır.

Bölüm 3.3 de verilen bazı sınır değerlerinin yorumlanmasında faydalı olabilecek iki tablo verelim.

Tablo 3.3.1 5 noktalı bağlantılı bağlantılı graflar için bazı alt sınırlar

Cebirsel Bağlantısalılık	(3.11) Alt Sınır	(3.13) Alt Sınır	(3.20) Alt Sınır
1.0000000000000000	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.4000000000000000
0.518805695907984	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.2666666666666667
1.0000000000000000	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.4000000000000000
0.829913513373966	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.2666666666666667
0.697224362268005	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.2666666666666667
1.0000000000000000	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.4000000000000000
2.0000000000000000	1.0000000000000000	0.763932022500210	0.4000000000000000
2.0000000000000000	1.0000000000000000	0.763932022500210	0.4000000000000000
0.381966011250105	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.2000000000000000
0.518805695907984	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.2666666666666667
1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.763932022500210	0.4000000000000000
1.381966011250111	1.0000000000000000	0.763932022500210	0.4000000000000000
1.381966011250111	1.0000000000000000	0.763932022500210	0.4000000000000000
1.58578643762691	1.0000000000000000	0.763932022500210	0.4000000000000000
0.829913513373966	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.2666666666666667
1.0000000000000000	-1.0000000000000000	0.381966011250105	0.4000000000000000
2.0000000000000000	1.0000000000000000	0.763932022500210	0.4000000000000000
2.0000000000000000	1.0000000000000000	0.763932022500210	0.4000000000000000
3.0000000000000000	3.0000000000000000	1.14589803375032	0.4000000000000000
3.0000000000000000	3.0000000000000000	1.14589803375032	0.4000000000000000
5.0000000000000000	5.0000000000000000	1.52786404500042	0.8000000000000000

Tablo 3.3.1 de cebirsel bağlantısallığın bazı sınır değerleri ile karşılaştırmaları verilmiştir. Tablodan anlaşılacağı üzere son satırda ki değerler tam grafa aittir ve (3.11) alt sınırı bazı noktalar için eşitlik koşulunu sağlar. Ayrıca bu üç alt sınır içerisinde en iyi sınırın hangisi olduğu sorusuna kesin cevap verilememektedir.

Tablo 3.3.2 5 noktalı bağlantılı graflar için bazı üst sınırlar

CebirselBağlantısallık	(3.10) Üst Sınır	(3.15) Üst Sınır	(3.17) Üst Sınır
1.0000000000000000	1.2500000000000000	2	1
0.518805695907984	1.2500000000000000	2	2
1.0000000000000000	1.2500000000000000	2	2
0.829913513373966	1.2500000000000000	2	2
0.697224362268005	1.2500000000000000	2	2
1.0000000000000000	1.2500000000000000	2	2
2.0000000000000000	2.5000000000000000	2	2
2.0000000000000000	2.5000000000000000	2	2
0.381966011250105	1.2500000000000000	2	2
0.518805695907984	1.2500000000000000	2	3
1.0000000000000000	2.5000000000000000	2	3
1.38196601125011	2.5000000000000000	2	3
1.38196601125011	2.5000000000000000	2	3
1.58578643762691	2.5000000000000000	2	3
0.829913513373966	1.2500000000000000	2	3
1.0000000000000000	1.2500000000000000	2	3
2.0000000000000000	2.5000000000000000	3	3
2.0000000000000000	2.5000000000000000	2	3
3.0000000000000000	3.7500000000000000	3	3
3.0000000000000000	3.7500000000000000	3	3
5.0000000000000000	5.0000000000000000	3	4

Benzer şekilde Tablo 3.3.2 de 5 noktalı bütün bağlantılı graflar için sınır değerler görülebilir. Eşitlik durumu ise yine tam graf için geçerlidir. Tabloya dikkatli bir şekilde bakılırsa cebirsel bağlantısallığın nokta sayısı ve bağlantılı kenarların artmasından etkilenmediği görülebilir. Bu bize cebirsel bağlantısallığın karakterizasyonunun son derece farklı olduğunu ifade eder. Tabiki bu üç üst sınır içerisinde en iyi sınırın hangisi olduğu sorusuna yine kesin bir cevap verilememektedir.

## 4.BÖLÜM

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde graf matris uygulamaları yönünden önemli bir yere sahip olan Laplasyan matrisi ve onun özellikleri hakkında iyi bilinen sonuçlar yer almaktadır. Özellikle öz değerleri içinde önemli bir yere sahip ikinci en küçük öz değer (ki literatürde buna cebirsel bağlantısallık denir) çalışmaları amaçlanmıştır.

Cebirsel bağlantısallığının matematiğın yanı sıra kimya, fizik, bilgisayar bilimleri vb. alanlarda da etkin bir biçimde görülmektedir. Örneğın, DNA yapıları, hava yolları taşımacılığın güvenliğı, Alzheimer hastalığı ile beyin ağı direnci arasındaki bağıntıları ortaya koymak için kullanılabilir. Burada amacın bir yapının direnci cebirsel bağlantısallığın aldığı değere göre değışmektedir. Bu kapsamda, diğeri bir çok disiplinlerde farklı yapılarıdaki bağıntıları açıklamak için cebirsel bağlantısallıktan yararlanılabilir.

Sonuç olarak bu tez çalışmasında literatürde cebirsel bağlantısallık ile ilgili elde edilmiş bulgular derlenmiştir.

## KAYNAKLAR

1. İnternet: Mathematical Association of America  
<http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/leonard-eulers-solution-to-the-konigsberg-bridge-problem>
2. Nikolić, S. , Miličević, A. ,Trinajstić, N. “Graphical matrices in chemistry”  
*Croatica Chemica Acta* 78, 241–250, 2005.
3. Vishveshwara, S., Brinda, K., V., Kannan, N. “Protein Structures: Insights from Graph Theory”, *Journal of Theoretical and Computational Chemistry*, Vol 1, No 1, World Scientific Pupliching Company, 2002.
4. Mass, C., “Transportation in Graphs and the Admittance Spectrum”, *Discrete Applied Mathematics* 16, p31-49, 1987.
5. Wei, P. Sun, D., “Weighted algebraic connectivity: an application to air transportation network”, *The 18th IFAC World Congress*, Milan, Italy, 2011.
6. Daianu, M., Jahanshad,N., Nir Talia., M., Leonardo, CD.,Weiner, M, “Algebraic connectivity of brain networks shows patterns of segregation leading to reduced network robustness in Alzheimer’s disease”, *MICCAI CDMRI*. Boston, USA, 2014.
7. Biggs, N.; Lloyd, E.; Wilson, R. , “Algebraic Graph Theory”, *Oxford University Press*. 1974.
8. Bondy, J.A.; Murty, U.S.R., “Graph Theory”, *Springer*, 2008.
9. Bollobás, B., “Modern Graph Theory”, *Springer*, 1998.
10. Gross, J.T., Yellen, J. “Graph Theory And Its Applications”, *CRC Press*, 2006.
11. Harary, F., “Graph Theory” , *Addison-Wesley Pupliching Company*, 1969.
12. Hartsfield, N., Ringel, G., “Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction 2nd ed.” *Dover Publications*, 2003.
13. Tutte, W.,T., “Graph Theory as I Have Known It”, *Oxford University Press*, 1998.
14. West, D., B., “Introduction to Graph Theory, 2nd ed”, *Prentice-Hall*, 2000.
15. Gross, J. , Yellen, J., “Handbook of Graph Theory”, *CRC Press*, 2003.
16. Vasudev, C., “Graph Theory with Applications”,*New Age International Publishers*, 2006.
17. Harris, J., M., Hirst, J., L., Mossinghoff, M., J., “Combinatorics and Graph Theory Second Edition”, *Springer*, 2008.

18. Molitierno, J., J., “Applications of Combinatorial Matrix Theory to Laplacian Matrices of Graphs”, *CRC Press*, 2012
19. Bapat, R.B. “Graphs and Matrices”, *Hindustan Book Agency*, 2011
20. Cvetković, D., Rowlinson, P., Simić, S, “An Introduction to the Theory of Graph Spectra”, *Cambridge University Press*, 2009
21. Mohar, B., “The Laplacian spectral of graphs”, *Graph Theory Combinatorics and Applications*, vol. 2, pp. 53–64, 1991.
22. Fiedler, M., “Algebraic Connectivity of Graphs”, *Czechoslovak Math. J.* , 23, 298–305, 1973.
23. Fiedler, M., “Laplacian of graphs and algebraic connectivity”, *Combinatorics and Graph Theory*, 25, 57-70, 1989.
24. N. Abreu, “Old and new results on algebraic connectivity of graphs”, *Linear Algebra Applications*. 423 (1) 53–73 2007



## ÖZGEÇMİŞ

Hakan KÜÇÜK 1979 yılında Kayseri’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri ili Pınarbaşı ilçesinde tamamladı. 1998’de kazandığı Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2002 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kars ili Akyaka ilçesinde öğretmenliğe başladı.2012 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. Halen Kayseri ili Talas ilçesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Adres: Mevlana mahallesi Anayurt caddesi Anaşehir sitesi Kınaş C/16 Kat 8 No  
29 Talas/KAYSERİ

Telefon: 0 505 818 85 32

e-posta : hakankucuk1979@gmail.com