

**T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAF İZOMORFİZMİ VE KO-SPEKTRAL GRAFLAR**

**Tezi Hazırlayan  
Hatice TOPCU**

**Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı  
Doktora Tezi**

**Mart 2016  
NEVŞEHİR**



**T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAF İZOMORFİZMİ VE KO-SPEKTRAL GRAFLAR**

**Tezi Hazırlayan  
Hatice TOPCU**

**Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı  
Doktora Tezi**

**Mart 2016  
NEVŞEHİR**

Doç. Dr. Sezer SORGUN danışmanlığında **Hatice TOPCU** tarafından hazırlanan "**Graf İzomorfizmi ve Ko-Spektral Graflar**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

18/03/2016

## JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Üye : Doç. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Prof. Dr. Necdet BATIR

Üye : Doç. Dr. Aslıhan KARATEPE

Üye : Doç. Dr. Mustafa BAHŞI

## ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 25.03.2016...tarih ve...14-146... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

24/03/2016  
Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK  
Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Hatice TOPCU

## TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve tezimde en az benim kadar emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan danışmanım Doç. Dr. Sezer SORGUN'a,

Bütün eğitim-öğretim hayatım boyunca hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen sevgili babam İsmet KAMİT'e,

Yol arkadaşım ve kıymetli eşim Volkan TOPCU'ya,

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini hissettiren tüm aileme,

2214-A yurt dışı doktora sırası araştırma burs programı kapsamında yanlarında çalışma fırsatı bulduğum Prof. Dr. Willem H. HAEMERS'a ve Prof. Dr. Edwin R. van DAM'a ve bana bu maddi desteği sağlayan TÜBİTAK'a,

NEÜLÜP 15F/17 kodlu proje kapsamında bu tezin basım ve cilt giderlerinin karşılanması için destek sağlayan Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri birimine

teşekkür ederim.

# GRAF İZOMORFİZMİ VE KO-SPEKTRAL GRAFLAR

(Doktora Tezi)

Hatice TOPCU

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mart 2016

## ÖZET

Bu çalışmada, grafların komşuluk spektrumları ile belirlenebilirliği problemi üzerinde durulmuştur. Döngü graf esas alınarak oluşturulan bazı özel grafların (lolipop graf, güneş graf, kırık güneş graf ve turp graf) spektral belirlenebilirliklerine dair yapılmış olan çalışmalardan hareketle, tam graf esas alınarak oluşturulan uçurtma graf, deniz kestanesi graf, kırık deniz kestanesi graf ve ananas grafin komşuluk spektrumları ile belirlenebilirlikleri araştırılmıştır. Literatürde sıklıkla kullanılan ve spektral yarıçap için ekstremum değerler sağlayan önemli bir graf türü olan uçurtma grafin komşuluk spektrumu ile belirlenebilir olduğu bu çalışmada iddia ve ispat edilmiştir. Deniz kestanesi ve kırık deniz kestanesi grafların komşuluk spektrumları ile belirlenebilir olduklarının ispatı ise yeniden ve daha kısa bir şekilde yapılmıştır. Ananas graf ile ilgili yapılan literatür taraması sonucunda, bu grafin komşuluk spektrumu ile belirlenebilir olduğunun daha önce söylenmiş olduğu fakat bu hipotezin ve hipoteze dair yapılmış olan ispatın doğru olmadığı bu tez çalışmasında tespit edilmiştir. Bu bağlamda, bu graf türünün aslında iddia edilenin aksine komşuluk spektrumu ile her zaman belirlenebilir olmadığını gösteren, yani literatürde var olan teoreme ters örnek teşkil eden graf aileleri üretilmiştir. Bunun yanısıra, bir ananas grafa sarkıt kenar sayısının 3 ten küçük olduğu durumda iddia edilen hipotezin doğru olduğunun ispatı da verilmiştir. Böylece, ananas grafin komşuluk matrisine göre tam bir spektral karakterizasyonunun yapılabilmesine yönelik açık problemler de üretilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** *Spektral karakterizasyon, Ko-spektral graflar, Graf izomorfizmi, Spektrum ile belirlenebilirlik.*

**Tez Danışmanı:** Doç. Dr. Sezer SORGUN

**Sayfa Adeti:** 99

**GRAPH ISOMORPHISM AND CO-SPECTRAL GRAPHS  
(Ph.D. Thesis)**

**Hatice TOPCU**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**March 2016**

**ABSTRACT**

This study is based on the determinability problem of the graphs by using their adjacency spectrum. By the motivation of the foundations from the literature about some special graphs that are containing a cycle as a main part (such as lollipop graph, sun graph, broken sun graph and turnip graph); the determinability of the some special graphs that are containing a complete graph as a main part (kite graph, urchin graph, broken urchin graph and pineapple graph) by using their adjacency spectrum is investigated in this work. Kite graph has been appeared many times in the literature since they provide extremum values for the spectral radius of some graph matrices. The property of the kite graph, that is this graph is determined by its adjacency spectrum, is claimed and proved in this thesis. For the urchin and broken urchin graphs, it is seen that these graphs are already proved to be determined by their adjacency spectrum. But for this situation, a shorter different proof is also given here. Pineapple graph is already said to be determined by its adjacency spectrum in the literature. But, during this work, it is detected that the theorem and the proof about this situation is actually not true. Hence, the counter examples are obtained by generating the families of graphs which show that the pineapple graph is not determined by its adjacency spectrum in general. Moreover, if the number of the pendant edges in the pineapple graph is less than 3, then it is proved that the pineapple graph is determined by its adjacency spectrum. Thus, some open problems about the whole adjacency spectral characterization of pineapple graph are also given here.

***Keywords: Spectral characterization, Co-spectral graphs, Graph isomorphism, Determined by the spectrum.***

**Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezer SORGUN**

**Page Number: 99**



## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLOLAR LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	ix
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xii
1. BÖLÜM	
GİRİŞ .....	1
2. BÖLÜM	
ÖNBİLGİLER .....	8
2.1. Graf Teoride Temel Kavramlar .....	8
2.2 Graf İşlemleri .....	24
2.3. Graf Matrisleri ve Graf Spektrası.....	27
2.3.1. Komşuluk matrisi .....	29
2.3.2. En küçük komşuluk özdeğeri -2 den büyük olan grafların spektral karakterizasyonu.....	36
2.3.3. Laplasyan ve işaretli Laplasyan matris.....	37
2.4. Ko-Spektral Graf İnşası ve İzomorfizm Problemi.....	39
2.4.1 Bilgisayar sonuçları .....	42
2.4.2 Godsil-McKay switching ve Schwenk lemması .....	43
2.5. Bazı Özel Graflar ve Spektral Özellikleri.....	45

### 3. BÖLÜM

UÇURTMA (KITE) GRAFIN KOMŞULUK MATRİSİNE GÖRE SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU.....	54
3.1. Uçurtma Grafin Komşuluk Matrisine Göre Karakteristik Polinomu .....	55
3.2. Kısa Uçurtma (Short Kite) Graf .....	58
3.3. $Kite_p^2$ Graf.....	61
3.4. Uçurtma Grafin Komşuluk Spektrumu ile Belirlenebilirliği .....	67

### 4. BÖLÜM

DENİZ KESTANESİ (URCHIN) VE KIRIK DENİZ KESTANESİ (BROKEN URCHIN) GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSİNE GÖRE SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU.....	77
4.1. $Urchin_p^p$ ve $Urchin_p^q$ Grafların Komşuluk Matrisine Göre Karakteristik Polinomları.....	77
4.2. $Urchin_p^p$ ve $Urchin_p^q$ Grafların Komşuluk Spektrumu ile Belirlenebilirliği	78

### 5. BÖLÜM

ANANAS (PINEAPPLE) GRAFIN KOMŞULUK MATRİSİNE GÖRE SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU.....	82
5.1. Ananas Grafin Komşuluk Matrisine Göre Karakteristik Polinomu .....	83
5.2. Bazı Ananas Graflara Ko-Spektral Olan Graf Aileleri.....	84
5.3. $K_p^2$ Grafinin Komşuluk Spektrumu ile Belirlenebilirliği .....	88

### 6. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	92
KAYNAKLAR.....	95
ÖZGEÇMİŞ.....	99

## TABLULAR LİSTESİ

Tablo 2.1.	Yürüyüş, kapalı yürüyüş, gezi, devir, yol, döngü tanımlarının karşılaştırılması.....	11
Tablo 2.2.	$A(G)$ , $Lap(G)$ ve $Q(G)$ matrislerine göre grafların spektral belirsizliği.....	42

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Petersen graf.....	2
Şekil 2.1. Basit ve karma graf.....	9
Şekil 2.2. İndirgenmiş alt graf.....	9
Şekil 2.3. $G$ ve tümleyen grafi .....	11
Şekil 2.4. Yürüyüş, yol, devir ve döngü .....	12
Şekil 2.5. Döngüsüz graf .....	12
Şekil 2.6. Uzaklık, dışmerkezlilik, yarıçap ve merkez .....	13
Şekil 2.7. Ağaç ve orman.....	14
Şekil 2.8. Hamilton graf .....	15
Şekil 2.9. Çift bir-döngülü graf.....	15
Şekil 2.10. Maksimum klik, üçgen sayısı ve döngüsel uzunluk .....	16
Şekil 2.11. Kesme noktası ve köprü.....	17
Şekil 2.12. İki parçalı graf .....	17
Şekil 2.13. Ayrık kenar kümesi, maksimum bağımsız küme .....	18
Şekil 2.14. Altbölüm grafi .....	19
Şekil 2.15. İzomorf graflar .....	19
Şekil 2.16. Graf otomorfizmleri.....	20
Şekil 2.17. Çizgi graf.....	20
Şekil 2.18. Bir grafa petal eklenmesi .....	21
Şekil 2.19. Çiçek graf.....	21
Şekil 2.20. Genelleştirilmiş çizgi graf.....	22
Şekil 2.21. Genelleştirilmiş çizgi grafların yasaklanmış alt grafları.....	23
Şekil 2.22. Çizgi grafların yasaklanmış alt grafları .....	24
Şekil 2.23. Grafların ayrık birleşimi .....	24

Şekil 2.24. Grafların birleştirilmesi.....	25
Şekil 2.25. Bir graf üzerindeki koni.....	25
Şekil 2.26. Grafların kaynaştırılması.....	26
Şekil 2.27. Grafların koronası.....	26
Şekil 2.28. Bir grafın diğerine eklenmesi.....	27
Şekil 2.29. Bir grafın uzaklık matrisi.....	28
Şekil 2.30. Bir grafın derece matrisi.....	28
Şekil 2.31. Spektrum örneği.....	29
Şekil 2.32. Karakteristik polinom ve öz uzay örneği.....	32
Şekil 2.33. $G$ grafi ve iki eşit parçalanışı.....	34
Şekil 2.34. Çizgi graflar için $F_1-F_{11}$ grafları.....	35
Şekil 2.35. Genelleştirilmiş çizgi graflar için $F_1-F_{10}$ ve $F_{12}-F_{14}$ grafları.....	36
Şekil 2.36. Bir grafın Laplasyan matrisi.....	38
Şekil 2.37. Bir grafın işaretli Laplasyan matrisi.....	38
Şekil 2.38. Saltire ikilisi.....	40
Şekil 2.39. Ko-spektral fakat izomorf olmayan bağlantılı graf çifti.....	41
Şekil 2.40. Ko-spektral fakat izomorf olmayan bağlantılı graf üçlüsü.....	41
Şekil 2.41. Godsil-McKay switching uygulaması.....	44
Şekil 2.42. $\Gamma$ ağacı.....	44
Şekil 2.43. $\Gamma$ ve $\Delta$ nın farklı noktalardan kaynaştırılması.....	45
Şekil 2.44. $P_2, P_3, P_4$ ve $P_5$ .....	45
Şekil 2.45. $C_3, C_4$ ve $C_5$ .....	46
Şekil 2.46. $K_1 - K_6$ .....	46
Şekil 2.47. $r \geq 6$ için $K_r$ -free graf.....	47
Şekil 2.48. $K_{1,1,3,3}$ grafi.....	48

Şekil 2.49. $K_{2,5}$ .....	48
Şekil 2.50. $S_3, S_4$ ve $S_5$ .....	49
Şekil 2.51. $CP(3)$ .....	49
Şekil 2.52. Smith graflar.....	50
Şekil 2.53. $T(1,1,1,1,1,1,2,4)$ .....	50
Şekil 2.54. Lolipop graf.....	51
Şekil 2.55. $Sun_7$ .....	51
Şekil 2.56. $BrokenSun_{9,3}$ ve $BrokenSun_{6,4}$ .....	52
Şekil 2.57. Turp graf .....	52
Şekil 2.58. $T'$ ağacı.....	53
Şekil 3.1. $Kite_4^5$ grafi.....	54
Şekil 3.2. $G_1$ ve $G_2$ grafları .....	64
Şekil 3.3. $E, F, A_1-A_6$ grafları.....	71
Şekil 3.4. $\tau_1-\tau_4$ grafları.....	72
Şekil 3.5. $\tau_5-\tau_{10}$ grafları.....	73
Şekil 4.1. $H_1-H_5$ ve $W_5$ grafları .....	78
Şekil 4.2. $Urchin_4^3$ ve izomorf olmayan ko-spektral eşi .....	80
Şekil 5.1. $K_5^3$ grafi.....	82
Şekil 5.2. $K_4^4$ grafi ve izomorf olmayan ko-spektral eşi .....	86
Şekil 5.3. $K_4^4$ grafi ve izomorf olmayan diğer ko-spektral eşi .....	88
Şekil 5.4. $U$ ve $F$ grafları .....	90

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$G = (V, E)$	Nokta kümesi $V$ , kenar kümesi $E$ olan bir $G$ grafi
$a \sim b$	$a$ ve $b$ noktalarının birbirine komşu olması
$N(a)$	$a$ noktasına komşu olan noktaların kümesi
$d(a)$	$a$ noktasının derecesi
$\varepsilon(a)$	$a$ noktasının dışmerkezliği
$tr(A)$	$A$ matrisinin izi
$\overline{G}$	$G$ grafinin tümleyeni
$\Delta(G)$	$G$ grafinin maksimum derecesi
$\delta(G)$	$G$ grafinin minimum derecesi
$diam(G)$	$G$ grafinin çapı
$r(G)$	$G$ grafinin yarıçapı
$c(G)$	$G$ grafinin merkezi
$\omega(G)$	$G$ grafinin maksimum klik genişliği
$g(G)$	$G$ grafinin döngüsel uzunluğu
$t(G)$	$G$ grafinin üçgen sayısı
$t_5(G)$	$G$ grafindaki 5 uzunluklu kapalı yürüyüşlerin sayısı
$match(G)$	$G$ grafinin maksimum ayırık kenar sayısı
$indep(G)$	$G$ grafinin maksimum bağımsızlık sayısı
$Subd(G)$	$G$ grafinin alt bölüm grafi
$Aut(G)$	$G$ grafinin otomorfizm grubu
$L(G)$	$G$ grafinin çizgi grafi
$\hat{G}$	$G$ grafinin çiçeklenmiş grafi

$L(\hat{G})$	$G$ grafinin genelleştirilmiş çizgi grafi
$\text{char}(M(G))(x)$	$G$ grafinin $M(G)$ matrisine göre karakteristik polinomu
$\text{spec}(M(G))$	$M(G)$ matrisinin spektrumu
$U(G)$	$G$ grafinin uzaklık matrisi
$D(G)$	$G$ grafinin derece matrisi
$A(G)$	$G$ grafinin komşuluk matrisi
$\rho(G)$	$G$ grafinin komşuluk spektral yarıçapı
$Lap(G)$	$G$ grafinin Laplasyan matrisi
$Q(G)$	$G$ grafinin işaretli Laplasyan matrisi
$\lambda_i(A(G))$	$A(G)$ matrisinin en büyük $i$ . özdeğeri
$\lambda_1(A(G))$	$A(G)$ matrisinin en büyük özdeğeri
$\lambda_n(A(G))$	$A(G)$ matrisinin en küçük özdeğeri
$\xi(\lambda)$	$\lambda$ özdeğerinin öz uzayı
$d_G$	$G$ grafinin diskriminantı
$B_k$	Petal sayısı $k$ olan çiçek grafi
$s_k$	$k$ -ıncı spektral moment
$B_\pi$	$\Pi$ parçalanışına göre bölüm matrisi
$G \cong H$	$G$ ve $H$ graflarının birbirine izomorf olması
$G \dot{\cup} H$	$G$ ve $H$ graflarının ayrık birleşimi
$G \nabla H$	$G$ ve $H$ graflarının birleştirilmesi
$G \cdot H$	$G$ ve $H$ graflarının kaynaştırılması
$G \ H$	$G$ ve $H$ graflarının koronası
$G \overset{v}{+} \overset{v'}{+} H$	$G$ ve $H$ graflarının $v$ ve $v'$ noktalarından eklenmesi
$P_n$	$n$ noktalı yol graf
$C_n$	$n$ noktalı döngü graf



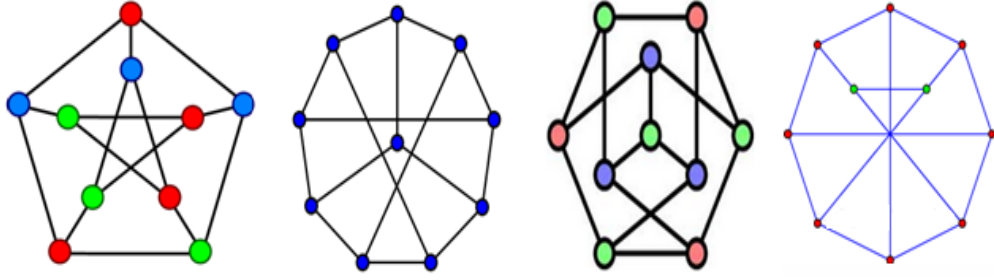
$K_n$	$n$ noktalı tam graf
$K_{m_1 \dots m_n}$	Çok parçalı tam graf
$S_n$	$n$ noktalı yıldız graf
$CP(n)$	$2n$ noktalı kokteyl parti graf
$T(l_1, \dots, l_\Delta)$	Maksimum derecesi $\Delta$ olan yıldızsal ağaç
$H_{n,p}$	Döngüdeki nokta sayısı $p$ olan $n$ noktalı lolipop graf
$Sun_p$	Döngüdeki nokta sayısı $p$ olan güneş graf
$BrokenSun_{p,q}$	Döngüdeki nokta sayısı $p$ olan kırılmış güneş graf
$Turnip_{p,m}$	Döngüdeki nokta sayısı $p$ olan turp graf
$Kite_p^q$	Klikteki nokta sayısı $p$ olan (genel) uçurtma graf
$DK(p, q)$	Klikteki nokta sayısı $p$ olan çift uçurtma graf
$Kite_p^1$	Klikteki nokta sayısı $p$ olan kısa uçurtma graf
$Urchin_p^q$	Klikteki nokta sayısı $p$ olan kırık deniz kestanesi graf
$K_p^q$	Klikteki nokta sayısı $p$ olan ananas graf

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaştığımız birçok durum ya da problem, graflarla temsil edilerek çok daha kolay şekilde çözümlenebilmektedir. Örneğin bir lojistik şirketi, noktalarla teslimat yaptığı şehirleri, kenarlar ile de bu şehirler arasında yapılan direkt transferleri gösteren bir grafi kullanabilir; ya da bir kimyasal molekülde atomlar noktalarla, kimyasal bağlar ise kenarlarla temsil edilerek; bu molekülün sanki bir graf gibi düşünülmesiyle birçok özelliği Graf Teori yardımıyla çok daha detaylı incelenebilir. Hatta bir sosyolog, bir grup insanın birbirlerine karşı davranış ve etkileşimlerini bir graf olarak modelleyebilir. Dolayısıyla Graf Teori, oldukça geniş bir yelpazede kullanım olanağı olan, multidisipliner bir uygulama alanına sahiptir. Spektral Graf Teori ise, Graf Teori'nin bir alt branşıdır ve graflara ilişkin matrislerin spektral özellikleri ile graf yapısı arasındaki ilişkileri incelemeye ve anlamlandırmaya çalışmaktadır. Günümüz bilim ve teknoloji dünyası için hatırı sayılır öneme sahip bir branştır. Örneğin, medyada "Google Guys" olarak bilinen Sergey Brin ve Lawrence Page, 1998'de bir çalışma yapmışlardır [1]. Bu çalışmada, World Wide Web'deki sayfalar arasında bulunan direkt linklerin temsil edilmesi için web-graf kullanılmaktadır. Bir web-graf yönlü bir graftır ve bu graftaki noktalar web sayfalarını, yönlü kenarlar ise birinden diğerine hiperlink bulunan sayfalar arasındaki bağlantıyı göstermektedir. Dolayısıyla herhangi bir iletişim ağı (network) bu şekilde temsil edilebilir. Brin ve Page, bu graf için Google matrisi olarak adlandırılan matrisi tanımlamış ve "PageRank" sistemini kurmuşlardır. PageRank, internet kullanıcılarının davranışlarını gösteren bir model olarak düşünülebilir. Yaptıkları bu hesaplamalar, geliştirdikleri bu fikir onların Google gibi dev bir şirketin kurucusu olmalarını sağlamıştır. Spektral Graf Teori, buna benzer birçok uygulamayı içinde barındıran bir branştır.

Herhangi iki grafın belli bir  $M$  matrisine göre spektrumları aynı ise bu graflara  $M$  ko-spektral graflar denir. Özel olarak, komşuluk matrislerinin spektrumu aynı ise bu graflara kısaca ko-spektral graflar denir [2]. İki grafın izomorf olması, sadece çizim stillerinin ve noktaları ile kenarlarına yapılan isimlendirmenin farklı olması demektir. Yani aslında aynı yapıya sahip graflardır. Örneğin, literatürde Petersen Grafı olarak bilinen grafın dört farklı çizimi Şekil 1.1. de resmedilmiştir.



Şekil. 1.1: Petersen grafi

Şekil 1.1. deki dört graf, çizim olarak her ne kadar farklı görünüyor olsalar da, aslında nokta ve kenar sayılarının yanı sıra noktalar arasındaki komşuluk ilişkileri de aynı olan graflardır. Gerekli etiketlemeler yapılarak bu graflar arasında bir izomorfizm kolayca kurulabilir. İzomorf graflarda komşuluk kesinlikle korunduğu için, ko-spektral oldukları aşıkardır. Fakat bunun tersi, yani ko-spektral graflar için izomorf olma durumu her zaman mümkün olmayabilir. Tersinin mümkün olduğu ispatlandığı takdirde bu tür bir grafa spektrumu ile belirlenebilen graf denir [2]. Bir graf için oldukça zor söylenebilen önemli bir özelliktir.

"Hangi graflar spektrumları ile belirlenebilir?" sorusu bu çalışmada incelenecek olan problemlerin temelini oluşturmaktadır. Günümüzde kullanılan birçok bilgisayar programı yardımıyla, sonlu sayıda noktaya sahip grafların spektrumlarını hesaplayabilmek mümkün olabilmektedir. Fakat bu problem, bu durumun tam tersinin mümkün olup olmadığını ya da hangi koşullar altında mümkün olabileceğini sormaktadır. Yani bir grafın sadece spektrumu bilindiğinde, "Bu spektruma sahip şekilde çizilebilecek graf işte budur!" diyebilmenin mümkün olup olmadığını sorgulamaktadır. Bu soru, yaklaşık yarım yüzyıl önceki bazı kimya çalışmalarına dayanır. 1956'da Günthard ve Primas çalışmalarında Spektral Graf Teori ile kimyadaki Hückel Teorisini ilişkilendirmiş ve bu soru ortaya çıkmıştır [3]. İlk etapta neredeyse her grafın spektrumu ile belirlenebilir olduğu düşünülmüş fakat daha sonra Collatz ve Sinogowitz, ko-spektral bir ağaç çifti sunarak bu durumun doğru olmadığını göstermiştir [4]. Bu durum Harary tarafından da hipotez olarak verilmiştir [5]. Diğer bir uygulama, 1966'da Fisher tarafından yapılmıştır [6]. Fisher, Kac tarafından [7] de verilen "Bir davulun şekli duyulabilir mi?" sorusunu incelemiş ve davul şeklini bir graf olarak modellemiştir. Daha sonra da bu şekildeki bir davulun çıkaracağı sesi, elde edilen grafın özdeğerlerine bağlı olarak karakterize etmiştir. Dolayısıyla [6] ve [7] de incelenen soru aslında "Hangi graflar spektrumu ile belirlenebilir?" sorusuyla eşdeğer durumdadır.

1967'den sonra birçok ko-spektral graf örneği bulunmuştur. Bu sonuçlardan en çarpıcı olanı Schwenk'in "Hemen hemen tüm ağaçlar spektrumu ile belirlenebilir değildir" ifadesidir [8]. Bu sonucun elde edilmesinden sonra grafların spektrumları ile belirlenebilir olup olmadığı konusunda genel bir fikir birliğine varılamamıştır. Hemen hemen tüm graflar spektrumları ile belirlenebilir midir? Belirlenebilir değil midir? Ya da her iki sonuç da doğru değil midir? Her ne kadar günümüzde hemen hemen tüm grafların spektrumları ile belirlenebilir olduğu sonucuna daha sıcak bakılsa da, bu konuda yapılan birçok çalışmaya rağmen bu sorular halen tam olarak cevaplanamamış durumdadır [5-30].

Belli özelliklere sahip ko-spektral grafların izomorf olmadıkları yani spektrumları ile belirlenebilir olmadıkları durumlarda örnek vermek (mesela Şekil 2.38 deki Saltire ikilisi gibi) ispat için yeterli iken, izomorf olduklarını göstermek hayli zordur. Haemers ve van Dam, "Which graphs are determined by their spectrum?" isimli bir çalışma yapmışlardır [31]. Bu çalışma, sordukları sorunun çeşitli graf matrisleri için hangi durumlarda cevaplanabilmiş olduğunu inceleyen bir derleme niteliğindedir. Yine aynı çalışmada belirtildiği üzere, grafların spektrumları ile belirlenebilir olduklarını göstermek için literatürde genel olarak iki metot kullanılmıştır. Bunlardan birincisi bilgisayar yardımıyla belli nokta sayısına sahip ko-spektral grafların üretilip listelenmesi ve izomorf olup olmadıklarının kontrol edilmesidir. Fakat bu yöntem, nokta sayısı en fazla 11 olan graflara uygulanabilmiştir [32]. İkincisi ise grafin yapısal özelliklerinin, spektrum kullanılarak karakterize edilebilmesidir. Fakat spektrum sayesinde elde edilen graf yapısına dair bilgiler de ispat için her zaman yeterli olmamaktadır. Haemers ve van Dam'ın bu çalışmasının yayınlanmasından sonra Spektral Graf Teori alanında çalışan araştırmacıların dikkati bu soru üzerine daha da yoğunlaşmıştır [10-17, 33-39]. Dolayısıyla Haemers ve van Dam bir önceki derleme çalışmalarına paralel nitelikte olan yeni bir çalışma daha yapmışlardır [18]. Wang ve Xu, ko-spektral grafların izomorf olup olmadıklarını gösterebilmek için önemli ve daha öncekilerden farklı olan yeni bir metot geliştirmişlerdir [34-36]. Bu metottaki ana fikir; ko-spektral iki  $G_1$  ve  $G_2$  grafinin komşuluk matrisleri  $A(G_1)$  ve  $A(G_2)$  nin benzer olması gerektiğinden  $Q^T(A(G_1))Q = A(G_2)$  eşitliğini sağlayacak ve  $Q^TQ = I$  olacak biçimde bir  $Q$  matrisinin var olması zorunluluğuna dayanır. Eğer bu  $Q$  matrisi bir permütasyon matrisi ise graflar izomorftur. Böylece,  $Q^T(A(G_1))Q$  matrisini köşegen üzerindeki tüm bileşenleri 0' a eşit ve diğer tüm bileşenleri sadece 0 ve 1 den ibaret olan bir matris yapacak şekilde tüm  $Q$  matrisleri üretilerek, bütün bu matrislerin permütasyon matrisi olup olmadığına bakılır.

Eğer cevap evet ise grafların izomorf olduğu yani grafin spektrumu ile belirlenebilir olduğu açıktır. Bunun yanı sıra, literatürde grafların spektral yarıçapına dayanan ve bu yarıçapın bazı özel koşulları sağladığı durumlarda grafin spektrumu ile belirlenebilir olup olmadığını direkt olarak belirten sonuçlar da elde edilmiştir [9, 37-38]. Örneğin, Smith  $n \geq 4$  iken  $D_n$  ve  $E_6$  haricinde, spektral yarıçapı en fazla 2 olan tüm bağlantılı grafların spektrumları ile belirlenebilir olduğunu söylemiştir [9]. Grafların başka çeşitli özellikleriyle de, örneğin regüler olmasıyla, spektrumu ile belirlenebilir olması ilişkilendirilmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda, 10 dan daha az noktaya sahip tüm regüler grafların spektrumları ile belirlenebilir olduğu sonucu elde edilmiştir [31,40]. Yukarıda da söylendiği üzere, Schwenk, oldukça dikkat çeken bir ispat yaparak ağaçların (döngü içermeyen bağlantılı grafların) neredeyse tamamının spektrumları ile belirlenebilir olmadığını söylemiştir [8]. Dolayısıyla bu sonuç, "Acaba spektrumları ile belirlenebilir olan ağaçlar hangileridir?" sorusunu doğurmuştur. Bu sorunun cevabı ile ilgili yapılan bir çalışmada, Zhou ve çalışma arkadaşları bir hidrokarbonun moleküler grafına benzer yapıda olan tırtıl (caterpillar) grafları incelemiş ve bunların belli koşullar altında Laplasyan ve işaretli Laplasyan matrislerine göre spektrumları ile belirlenebilir özellikte ağaçlar olduğunu göstermiştir [24].

Bu tür genel özelliklere dayanan yaklaşımların yanı sıra, son yıllarda özel tür graflar üzerine yoğunlaşarak bunların spektrumları ile belirlenebilir olup olmadığını söyleyebilmek üzerine çalışmalar yapılmıştır [10-17, 19-30]. Örneğin döngü kullanılarak tanımlanan lolipop graf, güneş (sun) graf, kırık güneş (broken sun) graf ve turp (turnip) graf ile ilgili çalışmalar literatürde oldukça ilgi görmüştür. Bir döngü grafin bir noktasına bir yol grafin bağlanmasıyla elde edilen lolipop grafin spektrumu ile belirlenebilir olup olmadığı incelenmiştir [11-13, 20, 23]. Öncelikle, döngüdeki nokta sayısı tek olan lolipop grafin komşuluk spektrumu ile belirlenebilir olduğu ve Laplasyan matrisine göre ise herhangi bir koşul olmaksızın lolipop grafin spektrumu ile belirlenebilir olduğu söylenmiştir [11]. Daha sonra Boulet ve Jouve bu graf türünün komşuluk matrisi için durumu genelleştirmiş ve lolipop grafin döngüdeki nokta sayısına bakılmaksızın komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğunu göstermiştir [12]. Ayrıca lolipop grafin işaretli Laplasyan spektrumu ile de belirlenebildiği gösterilmiştir [13]. Fakat bu çalışmaya Hamidzade ve Kiani tarafından bir düzeltme yapılarak ifadenin doğru fakat ispatın hatalı olduğu söylenmiş, yeniden hatasız bir ispat yapılmıştır [20]. Lolipop grafin çizgi grafi ve cebirsel bağlantılılığı üzerine de çalışmalar mevcuttur [22-23]. Güneş graf, bir döngünün tüm noktalarına birer

adet sarkıt (pendant) kenar eklenmesiyle oluşan bir graftır. Kırık güneş graf ise bir döngünün bazı noktalarına sarkıt kenar eklenmesiyle oluşur. Güneş ve kırık güneş grafların spektrumları ile belirlenebilir olup olmadıkları incelenmiştir [14]. Bir döngünün belirli bir noktasına istenilen sayıda sarkıt kenar eklenmesiyle elde edilen grafa turp graf denir. Turp grafın Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir olduğu ve döngüdeki nokta sayısı tek iken komşuluk spektrumuna göre de belirlenebilir olduğu gösterilmiştir [16]. Döngü graf baz alınarak elde edilen bu graflarda döngü yerine tam graf (diğer bir deyişle klik) konulduğunda elde edilen özel graflar sırasıyla uçurtma (kite) graf, deniz kestanesi (urchin) graf, kırık deniz kestanesi (broken urchin) graf ve ananas (pineapple) graftır. Bu tez çalışmasında bu üç graf türünün komşuluk spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadıkları araştırılmıştır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, öncelikle çalışma boyunca kullanılacak olan Graf Teori'deki bazı temel kavramlara ve bu kavramlar arasındaki çeşitli bağıntılara yer verilmiştir. Birden fazla graf üzerinde tanımlanan, grafların ayrık birleşimi, birleştirilmesi, kaynaştırılması, koronası, v.b. gibi çeşitli graf işlemleri anlatılmıştır. Daha sonra ise literatürde var olan graf parametrelerine ait bazı matrislerin tanımlarına ve spektral özellikleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. Bu tez çalışmasında esas alınan graf matrisi olan komşuluk matrisi üzerinde daha fazla durularak, bu matris ile ilgili diğer bölümlerde yapılan çalışmalar için ihtiyaç duyulan gerekli tüm teorik bilgi bu bölümde verilmiştir. Sonrasında, ko-spektral graf inşası için kullanılan bazı metotlardan bahsedilmiş, graf izomorfizm problemi kısaca tekrar anlatılmış ve bu probleme dair bilgisayar yardımıyla yapılmış olan hesaplamaların sonucunu içeren bir tablo verilmiştir. Ayrıca, bu tez çalışması boyunca kullanılacak olan bazı özel graf türlerinin tanımlarından ve çeşitli spektral özelliklerinden bahsedilerek sonraki bölümlerde yapılacak olan ispatlara ön hazırlık oluşturması amacıyla yol grafın komşuluk spektrumu ile belirlenebilir olduğunun ispatına yer verilmiştir. Bu ispat sonraki bölümlerde yer alan ispatlara bir tür ön hazırlık niteliğindedir.

Üçüncü bölümde, literatürde sıklıkla kullanılmış bir graf türü olan uçurtma grafın komşuluk matrisine göre spektral karakterizasyonu incelenmiştir. Öncelikle uçurtma grafa ait literatür bilgisi verilmiş ve bu grafın komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu hesaplanmıştır. Bu polinomdan yararlanarak aynı spektruma sahip iki uçurtma grafın izomorf olması gerektiği gösterilmiştir. Daha sonra bu grafların iki özel hali için komşuluk spektrumlarına göre belirlenebilir olduklarının ispatı literatürdeki bazı teoremler yardımıyla elde edilmiştir. Uçurtma grafın genel formunun komşuluk spektrumu ile belirlenebilir olduğunun ispatı için

iki özel halinde kullanılan ispat metotları ile sonuç elde edilemediğinden farklı bir yöntem uygulanmaya çalışılmıştır. Dolayısıyla, bu graf türünün aslında belli koşulları sağlayan bir yıldızsal ağacın çizgi grafi olduğu görülerek bu özelliğinden yararlanılmak istenmiştir. Yıldızsal ağaçların çizgi grafları ile ilgili gerekli literatür taramasının sonucunda elde edilen lemma ve teoremler yardımıyla, öncelikle uçurtma grafin bağlantılı graflar arasında komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu gösterilmiştir. Daha sonra ise bir uçurtma graf ile aynı spektruma sahip herhangi bir grafin bağlantılı graf olması gerektiği graf özdeğerlerinden ve bu özdeğerlerin grafin yapısına dair verdiği bilgilerden yararlanılan bir teknik kullanılarak ispatlanmıştır. Böylece, uçurtma grafin herhangi bir koşul olmaksızın komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu söylenmiştir. Bu sonuç, literatürde sıklıkla kullanılan bir graf türü olan uçurtma graf için oldukça önemlidir.

Dördüncü bölümde, güneş ve kırık güneş graf tanımlarına paralel şekilde tanımlanmış olan, deniz kestanesi ve kırık deniz kestanesi grafların komşuluk matrislerine göre spektral karakterizasyonu incelenmiştir. Öncelikle bu grafların komşuluk matrislerinin karakteristik polinomları hesaplanmıştır. Bu hesaplama sonucunda bu tür grafların en küçük özdeğerleri için  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  değerinin bir sınır oluşturduğu görülmüştür. Stevanovic ve Cvetkovic komşuluk matrislerinin en küçük özdeğeri en az  $-\sqrt{3}$  olan grafların spektral karakterizasyonuna dair bir çalışma yapmıştır [41]. Dolayısıyla bu çalışma, deniz kestanesi ve kırık deniz kestanesi grafların komşuluk matrislerine göre spektral karakterizasyonunu da kapsamaktadır. Bu tez çalışmasında ise bu tür grafların komşuluk spektrumlarına göre belirlenebilir oldukları sonucu farklı bir metotla daha kısa bir biçimde ispatlanmıştır. Bu ispatın sonucunda en küçük özdeğeri  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 'e eşit ya da büyük olan grafların spektral karakterizasyonu direkt olarak elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuç Stevanovic ve Cvetkovic'in [41] deki ifadesiyle benzerdir.

Beşinci bölümde ise, turp grafa benzer biçimde,  $p$  noktalı bir kliğin sabit bir noktasına  $q$  adet sarkıt kenar eklenmesiyle elde edilen ananas grafin komşuluk matrisine göre spektral karakterizasyonu incelenmiştir. Öncelikle bu graf türünün komşuluk matrisine göre spektral karakterizasyonu ile ilgili literatür taraması yapılmış; Zhang ve Zhang'ın, bu grafin komşuluk ve Laplasyan spektrumları üzerinde durduğu ve bu tür spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadıklarını inceledikleri görülmüştür [16]. Zhang ve Zhang, bu çalışmalarında verdikleri teoremden, ananas grafin tüm  $p$  ve  $q$  pozitif tamsayıları için komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğunu söylemiş ve ispatlamışlardır. Fakat

yapılmış olan ispatta hata bulunduğu ve elde edilen sonucunda doğru olmadığı bu tez çalışması için yapılan araştırmalar esnasında tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu graf türü üzerine çalışılmaya devam edilmiştir. Öncelikle bu graf türünün komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu yeniden hesaplanmış ve [16] da verilen polinomla kıyaslanarak benzer oldukları görülmüştür. Yani Zhang ve Zhang'ın çalışmasındaki polinom hesabının doğru yapıldığı fakat iddia edilen ifadenin ve yapılan ispatın hatalı olduğu görülmüştür. Buradan hareketle, ananas grafin aslında her zaman komşuluk spektrumu ile belirlenebilir olmadığını ispat için ters örnek teşkil eden graf aileleri üretilmiştir. Üretilen bu ailelerdeki grafların, belli koşulları sağlayan ananas graflar ile ko-spektral oldukları fakat izomorf olmadıkları gösterilmiştir. Bu sonuçla ilgili örnekler verilmiştir. Aynı zamanda  $q \leq 2$  iken, ananas grafin komşuluk matrisine göre spektral karakterizasyonu incelenmiş ve spektrumuna göre belirlenebilir olduğu da ispat edilerek, bu graf türüne ait olumlu bir sonuca da ulaşılmıştır. Fakat burada yapılan çalışma, literatürde var olan hatayı kısmen telafi etse de ananas grafin komşuluk spektrumuna göre tam karakterizasyonunu vermemektedir. Dolayısıyla, ananas grafin komşuluk spektrumuna göre tamamen karakterize edilebilmesi üzerine açık problemler de ortaya konmuştur. Böylece, bu tez çalışması esnasında yeni açık problemler de üretilmiştir.

Tez çalışmasının son bölümü olan altıncı bölümde, diğer tüm bölümlerde yer alan çalışmalara dair genel sonuçlar verilmiştir. Yapılan çalışmanın literatüre yaptığı katkılara değinilmiştir. Ayrıca beşinci bölümde elde edilen problemler ile ilgili daha geniş bilgiye yer verilmiştir.



## 2. BÖLÜM

### ÖNBİLGİLER

Bu bölümde verilen temel bilgiler genel olarak [2, 40, 42-50] kaynaklarından alınmıştır.

#### 2.1 Graf Teoride Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1.**  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  noktalar kümesini ve  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  kenarlar kümesini oluşturmak üzere bir  $G$  grafi,  $G = (V, E)$  sıralı ikilisi şeklinde tanımlanır. Burada  $E$  kümesindeki bir kenar,  $V$  kümesindeki noktaların bir sıralı ikilisidir.  $|V| = n$  ve  $|E| = m$  ise  $G$ 'ye  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir graf denir. Nokta sayısına kısaca  $G$ 'nin *mertebesi* de denir.

**Tanım 2.1.2.**  $G = (V, E)$  grafına;  $V = \emptyset$  ise *boş graf*,  $|V| = 1$  ise *aşık graf*,  $E = \emptyset$  ise *null graf* denir.

**Tanım 2.1.3.** Bir grafın tüm kenarları, bu kenarları oluşturan noktalardan biri çıkış noktası diğeri varış noktası olacak biçimde yönlendirilmiş ise bu grafa *yönlü graf* ya da *digraf* denir. Yönlü bir grafın kenarlarına *yönlü kenar* denir. Yönlü kenar içermeyen bir grafa *yönsüz graf* denir. Kenarlarının bir kısmı yönlü, bir kısmı yönsüz olan bir grafa ise *karma graf* denir.

**Tanım 2.1.4.** İki nokta arasında birden fazla kenar var ise bu kenarlara *katlı kenar* (*multiple edge*) denir. Aynı nokta üzerinde başlayıp biten bir kenara ise *ilmek* (*loop*) denir.

**Tanım 2.1.5.** Katlı kenar ve ilmek içermeyen yönsüz bir grafa *basit graf* denir.

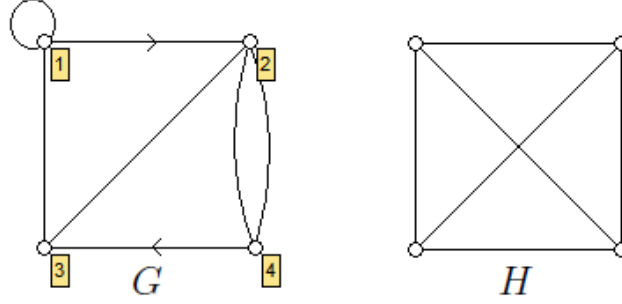
*Not :* Çalışmanın devamında kullanılan tüm graflar, aksi belirtilmediği sürece, basit graftır ve kısaca graf denilmiştir.

**Tanım 2.1.6.**  $e = \{u, v\}$  kenarı oluşturan  $u$  ve  $v$  noktalarına  $e$  kenarının *uç noktaları* ya da kısaca *uçları* denir.

**Tanım 2.1.7.**  $v \in V$  noktası  $e_1, e_2 \in E$  kenarlarının ortak bir ucu ise  $e_1$  ve  $e_2$ 'ye *birbirine değen kenarlar* denir ve  $e_1 \cap e_2 = \{v\}$  ile gösterilir. Eğer  $e_1$  ve  $e_2$  kenarlarının ortak bir ucu yok ise yani bu kenarlar birbirine değmiyorsa  $e_1 \cap e_2 = \emptyset$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.8.** Bir grafın noktalarının isimlendirilmesi işlemine *etiketleme*; noktaları isimlendirilmiş bir grafa ise *etiketlenmiş graf* denir.

**Örnek 2.1.1.** Aşağıdaki şekilde verilen  $G$  grafi 4 noktalı ve 7 kenarlı etiketlenmiş karma bir graftır. Burada  $\{1, 1\}$  kenarı bir ilmektir. 2 ve 4 noktaları arasında iki-katlı kenar vardır.  $\{1, 2\}$  ve  $\{3, 4\}$  kenarları ise yönlü kenarlardır.  $H$  grafi ise 4 noktalı ve 6 kenarlı etiketlenilmemiş basit bir graftır.



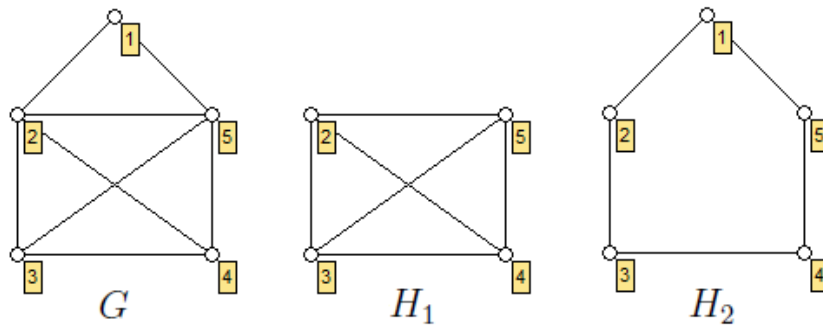
Şekil. 2.1: Basit ve karma graf

**Tanım 2.1.9.**  $G = (V, E)$  grafi için  $V' \subseteq V$  ve  $E' \subseteq E$  olmak üzere,  $S = (V', E')$  grafına  $G$ 'nin bir *alt grafi* denir ve  $S \subseteq G$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.10.**  $S = (V', E')$  grafi,  $G = (V, E)$  grafının bir alt grafi ve  $V' = V$ ,  $E' = E$  ise  $S$  ve  $G$  graflarına *eş graflar* denir.

**Tanım 2.1.11.**  $G$  grafının noktalarından bazılarının ve bu noktalara değen tüm kenarların silinmesiyle elde edilen alt grafa  $G$ 'nin *nokta indirgenmiş alt grafi* denir. Bazı kenarlarının (uç noktaları sabit bırakılarak) silinmesiyle elde edilen alt grafa ise  $G$ 'nin *kenar indirgenmiş alt grafi* denir. Nokta-indirgenmiş alt grafa kısaca *indirgenmiş alt graf* da denir.

**Örnek 2.1.2.** Aşağıdaki şekilde verilen  $H_1$  grafi  $G$  grafından 1 noktasının silinmesiyle elde edilen indirgenmiş alt graftır.  $H_2$  grafi ise  $G$  grafından  $\{\{2, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}$  kenarlarının silinmesiyle elde edilen kenar indirgenmiş alt graftır.



Şekil. 2.2: İndirgenmiş alt graf

**Tanım 2.1.12.**  $G = (V, E)$  grafının,  $H = (V', E')$  grafını alt graf olarak içermesi mümkün değil ise  $H$  grafına  $G$  nin bir *yasaklanmış (forbidden) alt grafi* denir.

**Tanım 2.1.13.**  $G = (V, E)$  grafının keyfi iki noktası  $v_1, v_2 \in V$  olmak üzere, bu iki nokta arasında bir kenar var ise bu noktalara birbirine *komşudur* denir ve  $v_1 \sim v_2$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.14.**  $G = (V, E)$  grafında herhangi bir  $v_1 \in V$  noktasının *komşuluk kümesi*  $N(v_1) = \{v \in V : v_1 \sim v\}$  biçiminde tanımlanır.

**Tanım 2.1.15.**  $G = (V, E)$  grafında  $v_1 \in V$  noktasının komşuluk kümesindeki eleman sayısına  $v_1$  noktasının *derecesi* denir ve  $d(v_1)$  ile gösterilir. Yani  $d(v_1) = |N(v_1)|$  olur.

**Tanım 2.1.16.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $\bar{E} = \{e = \{x, y\} : x, y \in V \text{ ve } \{x, y\} \notin E\}$  olmak üzere  $G$  grafının *tümleyen grafi* aynı nokta kümesi üzerinde tanımlı olan  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  grafıdır. Kısaca  $\bar{E} = \{V \times V\} - E$  biçiminde de yazılabilir.

**Tanım 2.1.17.**  $G = (V, E)$  grafında  $v_1 \in V$  noktası için  $d(v_1) = 0$  ise  $v_1$ 'e *izole nokta* denir.  $d(v_1) = 1$  ise  $v_1$  noktasına *sarkıt nokta (pendant vertex)*, bu noktaya bağlanan kenara ise *sarkıt kenar (pendant edge)* denir.

**Tanım 2.1.18.** Bir  $G$  grafının noktalarının derecelerinin en büyüğüne grafın *maksimum derecesi*; en küçüğüne ise *minimum derecesi* denir. Sırasıyla  $\Delta(G)$  ve  $\delta(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.19.** Bir grafın tüm noktalarının derecelerinin oluşturduğu artmayan diziye, grafın *derece dizisi* denir.

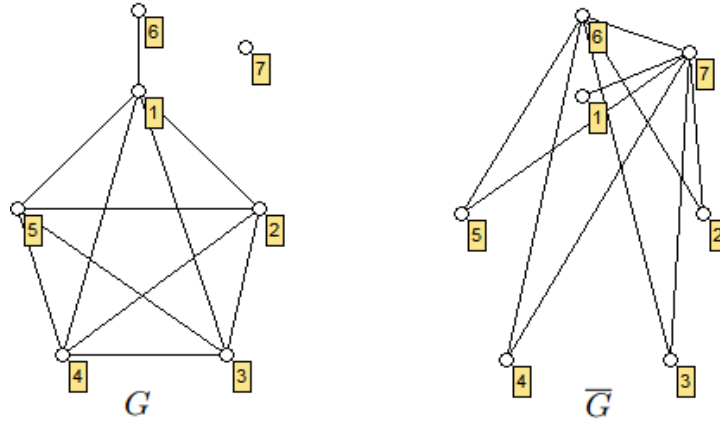
**Teorem 2.1.1.** [40]  $G = (V, E)$  grafi verilsin ve  $|E| = m$  olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m \quad (2.1)$$

*eşitliği sağlanır.*

**Tanım 2.1.20.**  $G = (V, E)$  grafında,  $\forall v \in V$  için  $d(v) = d$  ise  $G$ 'ye *d-regüler graf* denir.

**Örnek 2.1.3.** Şekil 2.3. te verilen  $G$  grafi için; 7 noktası izole noktadır çünkü  $d(7) = 0$  dır.  $d(6) = 1$  olduğundan 6 noktası sarkıt nokta ve  $\{1, 6\}$  kenarı sarkıt kenardır.  $G$  grafının derece dizisi  $(5, 4, 4, 4, 4, 1, 0)$  dır. Dolayısıyla maksimum ve minimum dereceler sırasıyla  $\Delta(G) = 5$  ve  $\delta(G) = 0$  olur. Derecelerin hepsi aynı olmadığından,  $G$  grafi regüler graf değildir. Fakat  $G$ 'den 6 ve 7 noktalarının silinmesiyle elde edilen indirgenmiş alt grafa  $H$  dersek,  $H$  4-regüler bir graf olur.  $G$  grafının tümleyeni  $\bar{G}$  de şekilde gösterilmiştir.



Şekil. 2.3: G ve tümleyen grafi

**Tanım 2.1.21.** Bir  $G = (V, E)$  grafının keyfi noktaları  $v_{k_0}, \dots, v_{k_i} \in V$  olmak üzere  $v_{k_0}$  noktasında başlayıp  $v_{k_i}$  noktasında biten keyfi bir yürüyüş,

$$v_{k_0}, \{v_{k_0}, v_{k_1}\}, v_{k_1}, \{v_{k_1}, v_{k_2}\}, v_{k_2}, \dots, \{v_{k_{i-1}}, v_{k_i}\}, v_{k_i}$$

şeklinde yazılan nokta ve kenarlardan oluşan sonlu bir dizidir. Bir yürüyüşteki kenar sayısı yürüyüş uzunluğudur. Herhangi bir yürüyüşte aynı nokta veya kenar birden fazla defa yer alabilir.

**Tanım 2.1.22.** Kenar tekrarlamayan bir yürüyüşe *gezi*; nokta tekrarlamayan bir yürüyüşe ise *yol* denir.

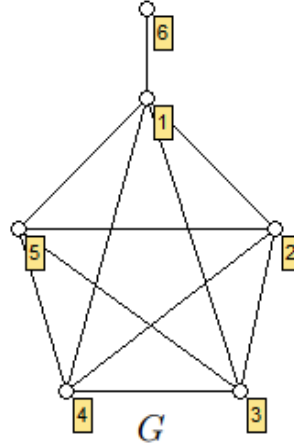
**Tanım 2.1.23.** Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan bir yürüyüşe *kapalı yürüyüş* denir. Kenar tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe *devir*; nokta tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe ise *döngü* denir.

Aşağıdaki tablo ve örnekle bu tanımlar daha anlaşılır hale getirilmek istenmiştir.

Tablo 2.1. Yürüyüş, kapalı yürüyüş, gezi, devir, yol, döngü tanımlarının karşılaştırılması

	Tekrarlama kısıtlaması yok	Kenar tekrarlamama	Nokta tekrarlamama
Keyfi noktada başlayıp biten	YÜRÜYÜŞ	GEZİ	YOL
Aynı noktada başlayıp biten	KAPALI YÜRÜYÜŞ	DEVİR	DÖNGÜ

**Örnek 2.1.4.** Aşağıdaki şekilde verilen  $G$  grafında 6-uzunluklu bir yürüyüş;  $6, \{6, 1\}, 1, \{1, 2\}, 2, \{2, 3\}, 3, \{3, 4\}, 4, \{4, 5\}, 5, \{5, 1\}, 1$  olur.  $G$  basit graf olduğundan kısaca  $6 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$  biçiminde de yazılabilir. Bu yürüyüş, kenar tekrarlanmadığı için, aynı zamanda bir gezidir. Fakat 1 noktasından iki kez geçildiği için bir yol değildir. Başlangıç ve bitiş noktaları farklı olduğundan kapalı yürüyüş değildir. Dolayısıyla devir ya da döngü değildir.  $1 - 2 - 5 - 1$  yürüyüşü ise 3-uzunluklu bir döngüdür.

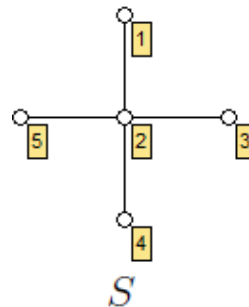


Şekil. 2.4: Yürüyüş, yol, devir ve döngü

**Tanım 2.1.24.** Bir  $G$  grafındaki 3-uzunluklu herhangi bir kapalı yürüyüş, bu grafın 3-uzunluklu bir döngüsüdür. Bu şekildeki bir döngüye  $G$  grafının bir *üçgeni* denir.  $G$  grafının kapsadığı birbirinden farklı tüm 3-uzunluklu döngülerin sayısına ise  $G$ 'nin *üçgen sayısı* denir ve  $t(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.25.** Herhangi bir alt grafı döngü oluşturmayan grafa *döngüsüz graf* denir.

**Örnek 2.1.5.** Şekil 2.4'te verilen  $G$  grafındaki  $1 - 2 - 5 - 1$  döngüsü 3-uzunluklu olduğundan  $G$ 'nin bir üçgenidir. Aynı zamanda  $t(G) = 10$  olur. Ayrıca aşağıdaki şekilde verilen  $S$  grafı döngüsüz bir graf olur.



Şekil. 2.5: Döngüsüz graf

**Tanım 2.1.26.** Bir  $G = (V, E)$  grafında, keyfi  $v_i, v_j \in V$  noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğu bu iki nokta arasındaki *uzaklık* olarak tanımlanır ve  $dist(v_i, v_j)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.27.** Bir  $G = (V, E)$  grafının *çapı*,

$$diam(G) = \max_{v_i, v_j \in V} \{dist(v_i, v_j)\}$$

biçiminde tanımlanır.

**Tanım 2.1.28.** Bir  $G = (V, E)$  grafında keyfi bir  $u \in V$  noktasının *dışmerkezliği*,

$$\varepsilon(u) = \max_{v \in V} \{dist(u, v)\}$$

biçiminde tanımlanır.

**Tanım 2.1.29.** Bir  $G = (V, E)$  grafının *yarıçapı*,

$$r(G) = \min_{u \in V} \{\varepsilon(u)\}$$

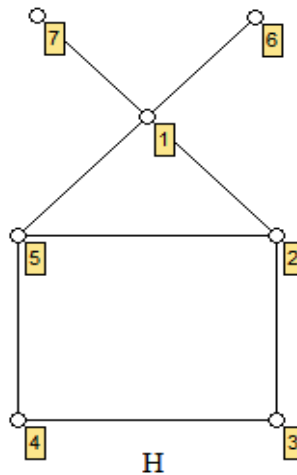
biçiminde tanımlanır.

**Tanım 2.1.30.** Bir  $G = (V, E)$  grafının *merkezi*,

$$c(G) = \{u \in V : \varepsilon(u) = r(G)\}$$

biçiminde tanımlanır.

**Örnek 2.1.6.** Aşağıda verilen  $H$  grafi için, 7 ve 3 noktaları arasındaki uzaklık,  $dist(7, 3) = 3$  olur çünkü bu iki nokta arasındaki en kısa yol  $7 - 1 - 2 - 3$  tür. Bu grafın noktalarının dışmerkezlikleri  $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(5) = 2$  ve  $\varepsilon(3) = \varepsilon(4) = \varepsilon(6) = \varepsilon(7) = 3$  olur. Ayrıca  $diam(H) = 3$ ,  $r(H) = 2$  ve  $c(H) = \{1, 2, 5\}$  olur.



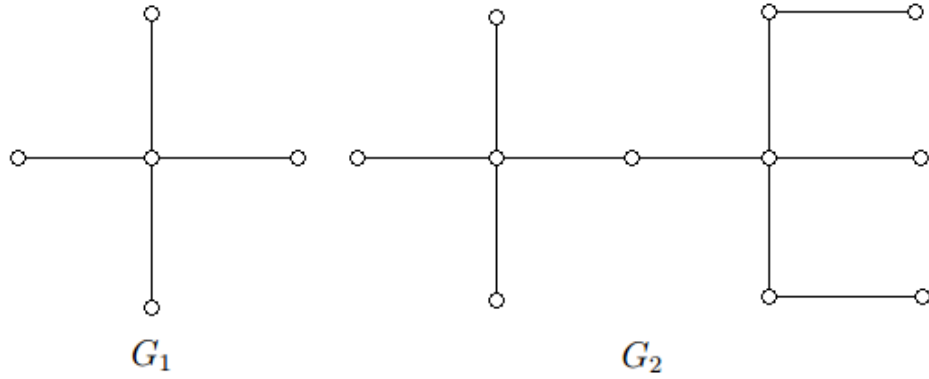
Şekil. 2.6: Uzaklık, dışmerkezlik, yarıçap ve merkez

**Tanım 2.1.31.** Herhangi iki noktası arasında en az bir yol bulunabilen bir grafa *bağlantılı graf* denir.

**Tanım 2.1.32.** Bir grafın bağlantılı olan ve başka bir bağlantılı alt grafi tarafından kapsanmayan her bir alt grafına, grafın bir *bileşeni* denir. Bir  $G$  grafının bileşenleri  $H_1, \dots, H_r$  ise  $G = H_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} H_r$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.33.** Döngü içermeyen, bağlantılı basit bir grafa *ağaç* denir. Bileşenlerinin hepsi ağaç olan bir grafa ise *orman* denir.

**Örnek 2.1.7.** Aşağıdaki şekilde verilen  $G_1$  ve  $G_2$  grafları sırasıyla; 5 noktalı, 4 kenarlı ve 13 noktalı, 12 kenarlı birer ağaçtır.  $G = G_1 \dot{\cup} G_2$  grafi ise iki bileşenli bağlantısız bir graftır ve aynı zamanda bir ormandır.



Şekil. 2.7: Ağaç ve orman

**Teorem 2.1.2.** [45]  $G = (V, E)$  grafi bir ağaçtır ancak ve ancak  $\forall u, v \in V$  için  $u$  ve  $v$  arasında yalnızca bir yol vardır.

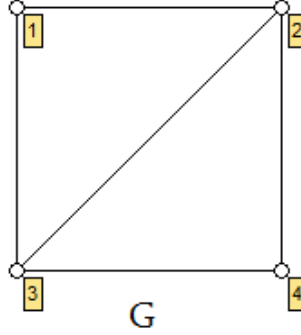
*İspat:*  $\Rightarrow$ :  $G$  bir ağaç ve  $u, v$  noktaları arasında birbirinden farklı iki yol olsun. Bu iki yolun kenarlarından en az birer tanesi farklı olacağından bu durum  $G$ 'de bir döngü oluşmasına yol açar. Bu da  $G$ 'nin bir ağaç olmasıyla çelişir.

$\Leftarrow$ :  $\forall u, v \in V$  için  $u$  ve  $v$  arasında bir tek yol var ise  $G$ 'nin döngü içermediği ve bağlantılı olduğu açıktır. Yani  $G$  bir ağaç olur.

**Teorem 2.1.3.** [45]  $G = (V, E)$  grafi bir ağaçtır ancak ve ancak kenar sayısı mertebesinin bir eksikğine eşittir.

**Tanım 2.1.34.**  $G$  nin tüm noktalarını kapsayan bir alt grafi döngü oluşturuyorsa, bu alt grafa  $G$  nin bir *Hamilton döngüsü* denir. Hamilton döngüsü içeren bir grafa ise *Hamilton graf* denir.

**Örnek 2.1.8.** Aşağıda verilen  $G$  grafi bir Hamilton graftır çünkü  $\{1, 2, 3, 4\}$  noktalarının tamamını kapsayan en az bir döngü içermektedir.

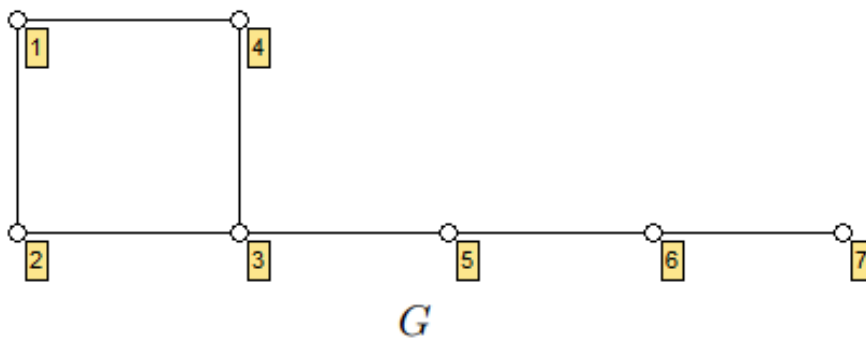


Şekil. 2.8: Hamilton graf

**Tanım 2.1.35.** Yalnız bir tane döngü içeren bağlantılı bir grafa *bir-döngülü (unicyclic) graf* denir. Döngüdeki nokta sayısının çift ya da tek olmasına göre *çift bir-döngülü (even unicyclic) graf* ya da *tek bir-döngülü (odd unicyclic) graf* olarak adlandırılır.

**Teorem 2.1.4.** [45] *Bir-döngülü bir grafin mertebesi  $n$  ve kenar sayısı  $m$  ise  $n = m$  dir.*

**Örnek 2.1.9.** Aşağıdaki şekilde verilen  $G$  grafi yalnızca bir tane döngü içerdiğinden bir-döngülü bir graftır. Döngüdeki nokta sayısı 4 olduğundan çift bir-döngülü graf olur. Mertebesi 7, kenar sayısı 7 dir.



Şekil. 2.9: Çift bir-döngülü graf

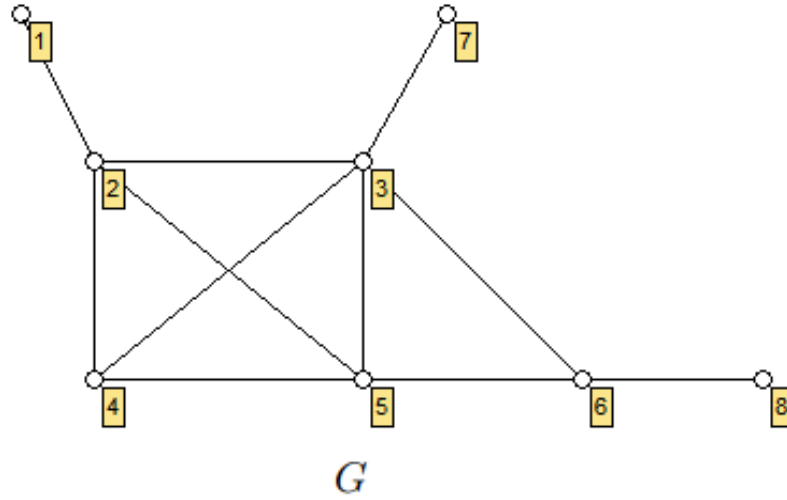
**Tanım 2.1.36.**  $G = (V, E)$  grafinin  $H = (V', E')$  alt grafinde  $\forall v_i, v_j \in V'$  için  $v_i \sim v_j$  ise  $H$  alt grafinde  $G$  grafinin ait bir *klik* denir. Bir *kliğin mertebesi* klikteki nokta sayısıdır.

**Tanım 2.1.37.** Bir  $G$  grafinin en büyük mertebeli kliğine,  $G$ 'deki *maksimum klik* denir. Maksimum kliğin mertebesine ise grafin *maksimum klik genişliği* denir ve  $w(G)$  ile gösterilir.



**Tanım 2.1.38.** Bir  $G$  grafindaki en kısa döngü uzunluğuna,  $G$ 'nin *döngüsel uzunluğu* (*girth*) denir ve  $g(G)$  ile gösterilir. Bu uzunluğun tek ya da çift sayı olmasına göre  $G$  grafına, *tek döngüsel uzunluklu* (*odd girth*) *graf* ya da *çift döngüsel uzunluklu* (*even girth*) *graf* denir.

*Örnek 2.1.10.* Aşağıdaki şekilde verilen  $G$  grafinda sadece bir tane maksimum klik vardır ve bu kliğin noktaları  $\{2, 3, 4, 5\}$  tir. Dolayısıyla  $G$  nin maksimum klik genişliği  $w(G) = 4$  olur. Ayrıca,  $t(G) = 5$  olur.  $G$  de üçgenler bulunduğundan  $g(G) = 3$  olur. Yani  $G$  tek döngüsel uzunluklu bir graftır.

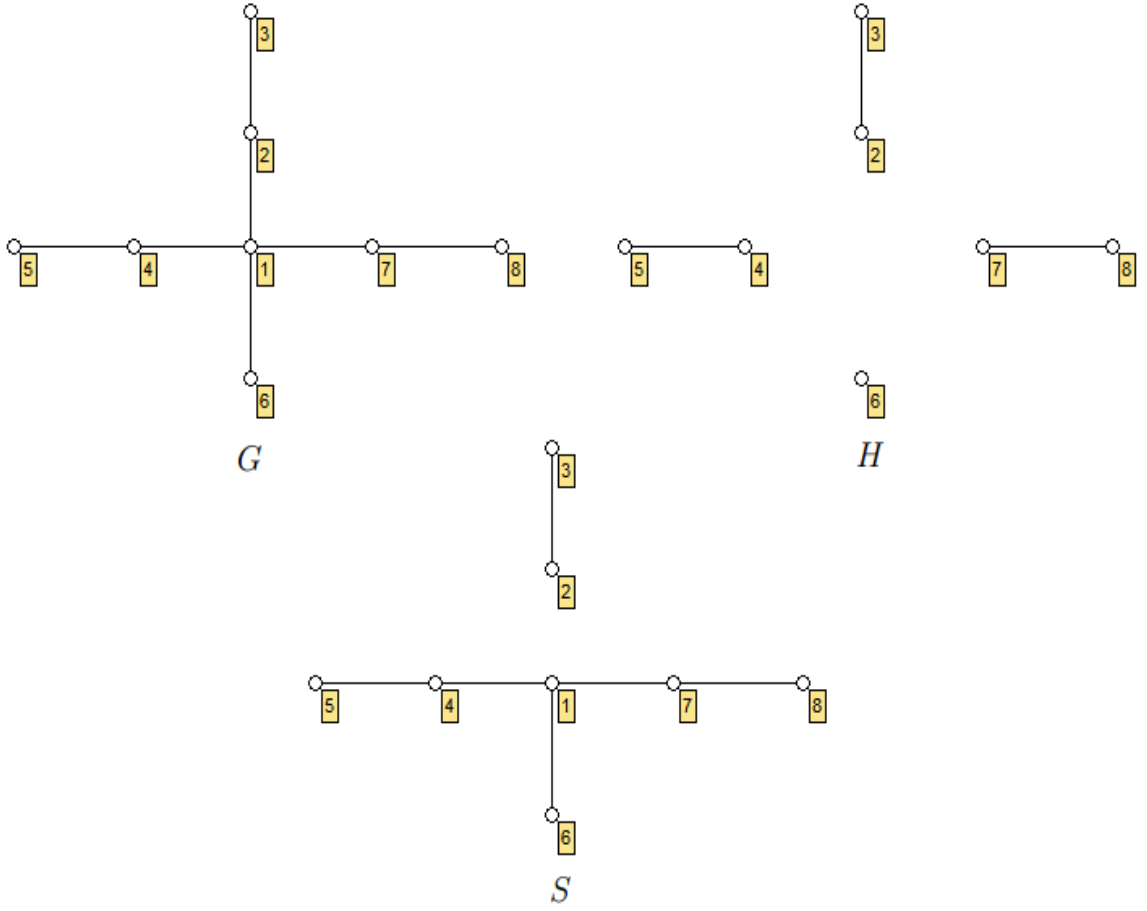


Şekil. 2.10: Maksimum klik, üçgen sayısı ve döngüsel uzunluk

**Tanım 2.1.39.**  $G = (V, E)$  bağlantılı bir graf ve  $v \in V$  olsun. Eğer  $G$  grafindan  $v$  noktasının silinmesiyle elde edilen  $G - v$  indirgenmiş alt grafi bağlantısız bir graf oluyorsa,  $v$  noktasına  $G$  grafının bir *kesme noktası* denir.

**Tanım 2.1.40.**  $G = (V, E)$  bağlantılı bir graf ve  $e \in E$  olsun.  $G$  grafindan  $e$  kenarının silinmesiyle elde edilen  $G - e$  kenar-indirgenmiş alt grafi bağlantısız bir graf oluyorsa,  $e$  kenarına  $G$  grafının bir *köprüsü* denir.

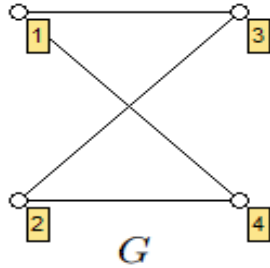
*Örnek 2.1.11.* Şekil 2.11 de  $G$ ,  $H$  ve  $S$  grafları verilmiştir.  $G$  grafindan 1 noktasının silinmesiyle oluşan  $H$  grafi bağlantısız bir graf olduğundan, 1 noktası  $G$  grafi için bir kesme noktasıdır.  $G$  nin diğer kesme noktaları  $\{2, 4, 7\}$  olur.  $\{1, 2\}$  kenarının silinmesiyle oluşan  $S$  grafi de yine bağlantısız bir graf olduğundan  $\{1, 2\}$  kenarı  $G$  grafi için bir köprü olur.  $G$  nin diğer tüm kenarlarının da köprü oluşturdukları şekil yardımıyla kolayca görülür.



Şekil. 2.11: Kesme noktası ve köprü

**Tanım 2.1.41.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$  olmak üzere  $V$  kümesi;  $V_i \cap V_j = \emptyset$ ,  $\bigcup_{i=1}^k V_i = V$  ve  $\forall u, v \in V_i$  için  $u \not\sim v$  olacak biçimde parçalara ayrılabilirse  $G$ 'ye  $k$ -parçalı ( $k$ -partite) graf denir. Özel olarak  $k = 2$  iken  $G$ 'ye iki parçalı (bipartite) graf denir.

**Örnek 2.1.12.**  $G = (V, E)$  grafi için  $V = \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4\}$  birleşiminde  $\{1, 2\}$  ve  $\{3, 4\}$  kümeleri kendi içlerinde kenar oluşturmadığından  $G$  grafi iki parçalı bir graftır.



Şekil. 2.12: İki parçalı graf

**Tanım 2.1.42.**  $G = (V, E)$  bir graf ve  $E' \subseteq E$  olsun. Eğer  $E'$  kümesindeki herhangi iki kenar ortak bir uç noktasına sahip değilse, bu kümeye  $G$ 'nin bir *ayrık kenar kümesi* (*matching set*) denir. Ayrık kenar kümelerinden eleman sayısı en fazla olana  $G$ 'nin *maksimum ayrık kenar kümesi* denir.  $G$  grafının *maksimum ayrık kenar sayısı* (*matching number*),

$$match(G) = \max\{|E'| : E' \subseteq E \text{ ve } E' \text{ ayrık kenar kümesi}\}$$

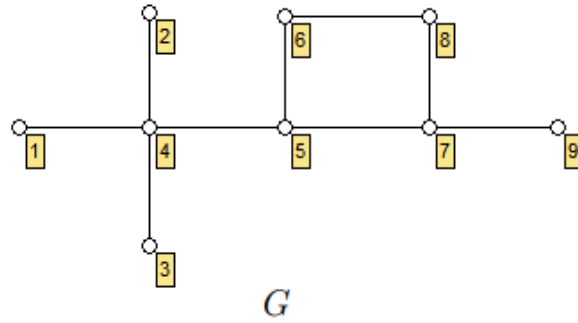
biçiminde tanımlanır.

**Tanım 2.1.43.**  $G = (V, E)$  bir graf ve  $V' \subseteq V$  olsun.  $\forall u, v \in V'$  için  $u \approx v$  ise  $V'$  kümesine  $G$ 'nin bir *bağımsız nokta kümesi* ya da kısaca *bağımsız kümesi* (*independent set*) denir. Bağımsız nokta kümelerinden eleman sayısı en fazla olana  $G$ 'nin *maksimum bağımsız nokta kümesi* denir.  $G$  grafının *maksimum bağımsızlık sayısı* (*independence number*),

$$indep(G) = \max\{|V'| : V' \subseteq V \text{ ve } V' \text{ bağımsız küme}\}$$

biçiminde tanımlanır.

**Örnek 2.1.13.** Şekil 2.13'teki grafta  $E' = \{(1, 4), (5, 6), (7, 9)\}$  bir ayrık kenar kümesi olur. Ayrıca  $match(G) = 3$  olur.  $V' = \{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$  bir maksimum bağımsız küme olur ve buradan  $indep(G) = 6$  olur.

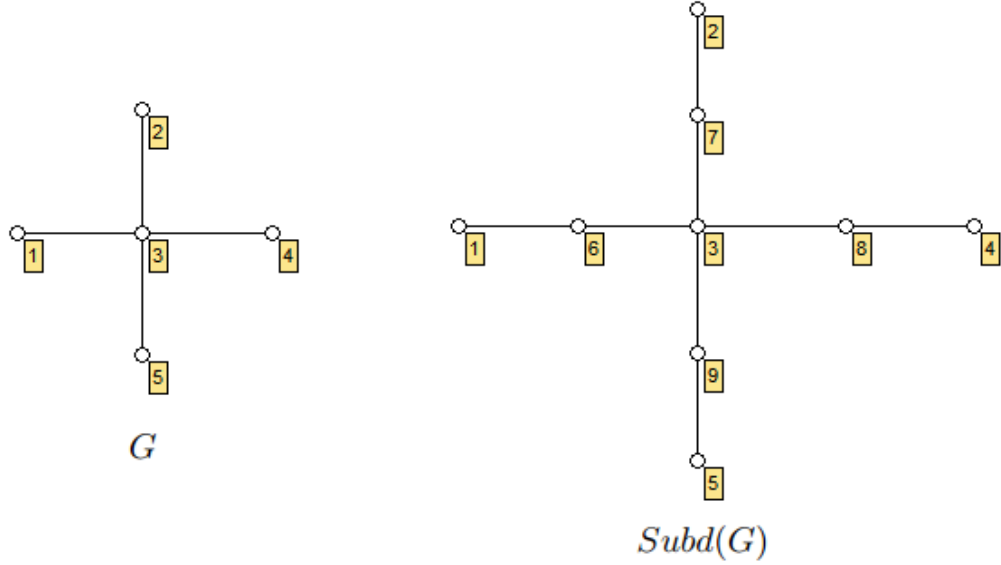


Şekil. 2.13: Ayrık kenar kümesi, maksimum bağımsız küme

**Tanım 2.1.44.**  $G = (V, E)$  grafında  $E$  kümesindeki her bir kenarın içine birer tane nokta yerleştirilerek elde edilen grafa  $G$ 'nin *alt bölüm grafi* denir ve bu graf  $Subd(G)$  ile gösterilir.

**Teorem 2.1.5.** [40]  $G$  grafi,  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir graf ise  $Subd(G)$ 'nin mertebesi  $n + m$  ve kenar sayısı  $2m$  olur.

**Örnek 2.1.14.** Aşağıdaki şekilde  $G$  grafi ve onun altbölüm grafi  $Subd(G)$  verilmiştir.  $G$ , 5 noktalı ve 4 kenarlı bir graftır.  $Subd(G)$  ise 9 noktalı ve 8 kenarlı bir graftır.



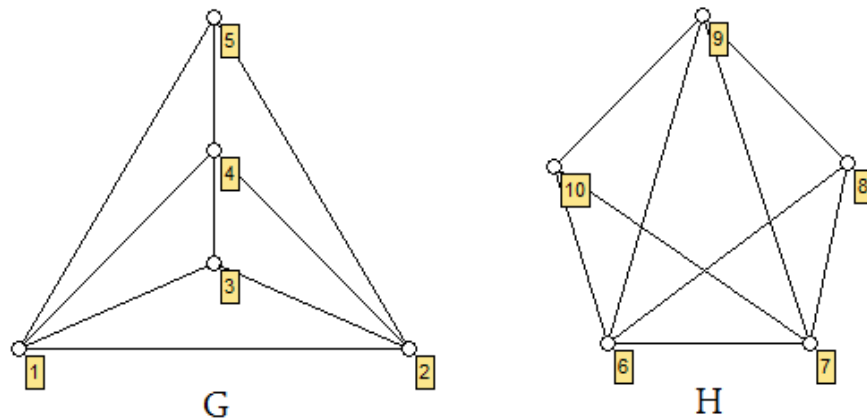
Şekil. 2.14: Altbölüm grafi

**Tanım 2.1.45.**  $G = (V, E)$  ve  $G' = (V', E')$  grafları için birebir ve örten bir  $f : V \rightarrow V'$  dönüşümü aşağıdaki koşulu sağlıyorsa, bu dönüşüme  $G$  ve  $G'$  arasında bir *izomorfizma* denir.

$$\forall u, v \in V \text{ için } u \sim v \Leftrightarrow f(u), f(v) \in V' \text{ ve } f(u) \sim f(v)$$

Aralarında en az bir izomorfizmanın tanımlı olduğu herhangi iki  $G$  ve  $G'$  grafinin, *izomorf graflar* denir ve  $G \cong G'$  ile gösterilir.

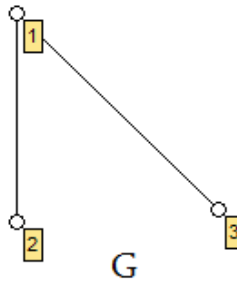
**Örnek 2.1.15.**  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  öyle ki  $f(x) = x + 5$  ile tanımlı  $f$  dönüşümü bir izomorfizmadır. Dolayısıyla  $G \cong H$  olur.



Şekil. 2.15: İzomorf graflar

**Tanım 2.1.46.**  $G = (V, E)$  grafi için  $\pi : V \rightarrow V$  permütasyonu  $\forall u, v \in V$  için " $u \sim v \Leftrightarrow \pi(u) \sim \pi(v)$ " koşulunu sağlıyorsa, bu permütasyona  $G$  grafinin bir *otomorfizması* denir. Bir  $G$  grafinin otomorfizmaları, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba  $G$ 'nin *otomorfizm grubu* denir ve  $Aut(G)$  ile gösterilir.

**Örnek 2.1.16.**  $V(G)$  üzerinde tanımlı birim permütasyon  $I$  ve  $\pi_1, \pi_2 : V(G) \rightarrow V(G)$  olmak üzere,  $\pi_1 = I$  ve  $\pi_2 = (23)$  permütasyonları  $G$  nin otomorfizmleridir. Yani  $Aut(G) = \{I, \pi_2\}$  olur.



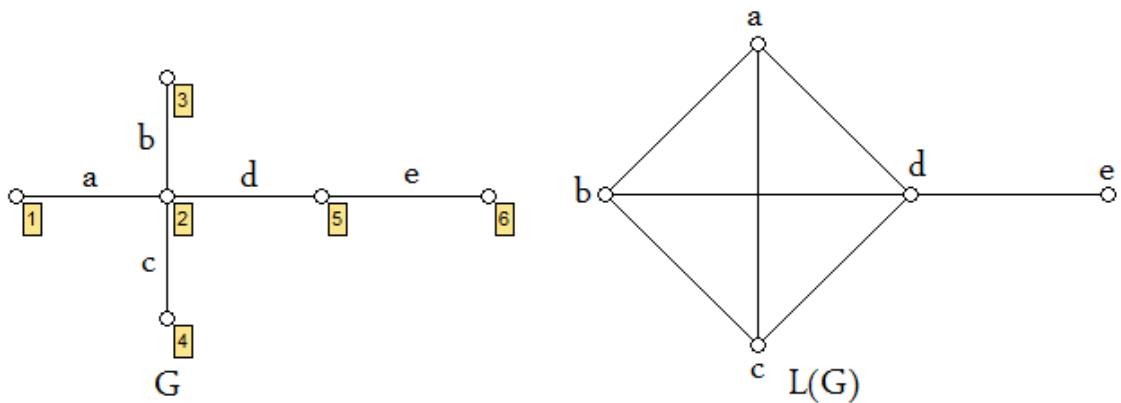
Şekil. 2.16: Graf otomorfizmleri

**Tanım 2.1.47.**  $G = (V, E)$  grafinin kenarlarını nokta kabul eden ve

" $G = (V, E)$  grafında  $\forall e_1, e_2 \in E$  için  $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G) = (E, E')$  grafında  $e_1 \sim e_2$ "

koşulunu sağlayan  $L(G) = (E, E')$  grafına,  $G$  grafinin *çizgi grafi* denir.  $G$  grafına ise  $L(G)$  grafinin *kök grafi* denir. Yani bir çizgi grafin noktaları, kök grafin kenarlarını temsil etmektedir ve çizgi grafta herhangi iki noktanın birbirine komşu olması için gerek ve yeter koşul temsil ettikleri kenarların kök grafta birbirine değmesidir.

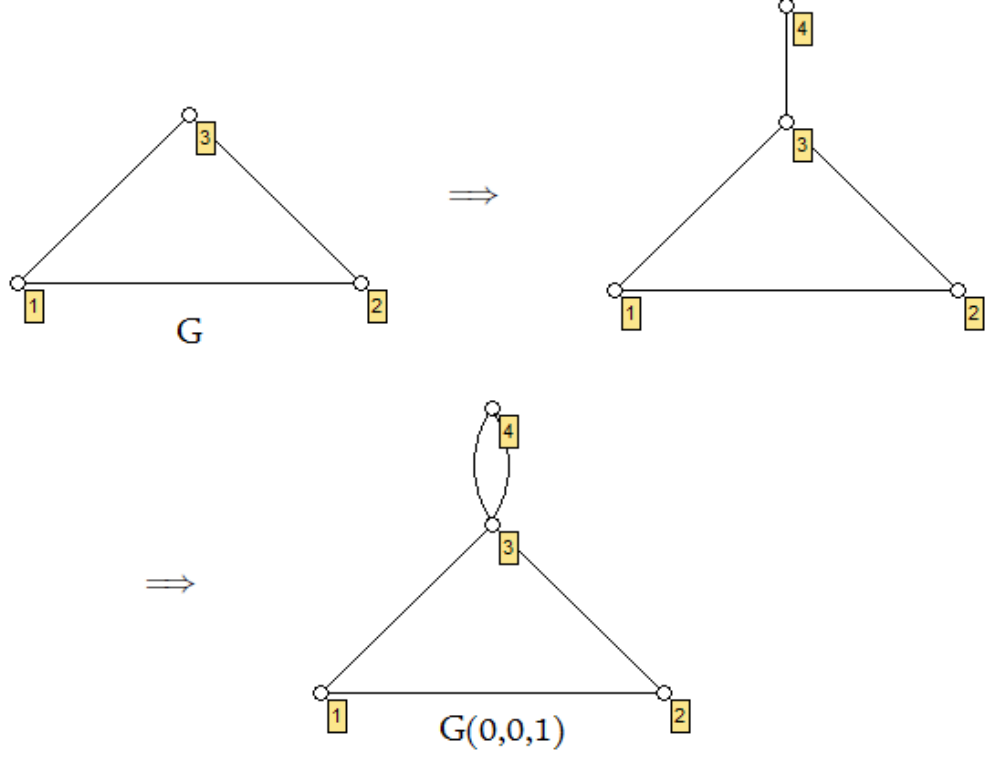
**Örnek 2.1.17.** Aşağıda verilen şekilde bir  $G$  grafi ve onun çizgi grafi  $L(G)$  gösterilmiştir.



Şekil. 2.17: Çizgi graf

**Tanım 2.1.48.**  $G = (V, E)$  grafının herhangi bir noktasına bir sarkıt kenar eklenmesi ve daha sonra bu sarkıt kenarın iki-katlı kenara dönüştürülmesi işlemine  $G$  grafına *petal eklenmesi* denir. Eklenip iki-katlı hale getirilen bu sarkıt kenara ise *petal* denir.

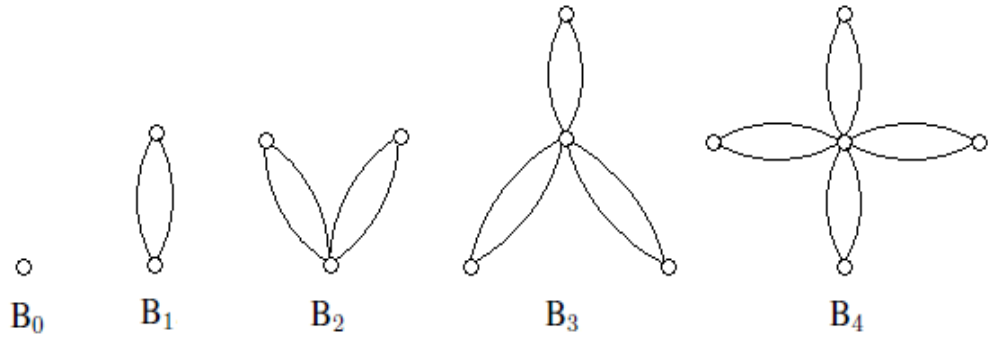
*Örnek 2.1.18.* Aşağıda verilen şekilde bir  $G$  grafi ve petal eklenmiş hali gösterilmiştir.



Şekil. 2.18: Bir grafa petal eklenmesi

**Tanım 2.1.49.**  $k \geq 0$  olmak üzere, tek bir noktaya  $k$  adet petal eklenmesiyle oluşan grafa bir *çiçek* denir ve  $B_k$  ile gösterilir.  $k = 0$  iken  $B_0$  âşikar graf olur.

*Örnek 2.1.19.* Aşağıda verilen şekilde  $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$  çiçek grafları gösterilmiştir.



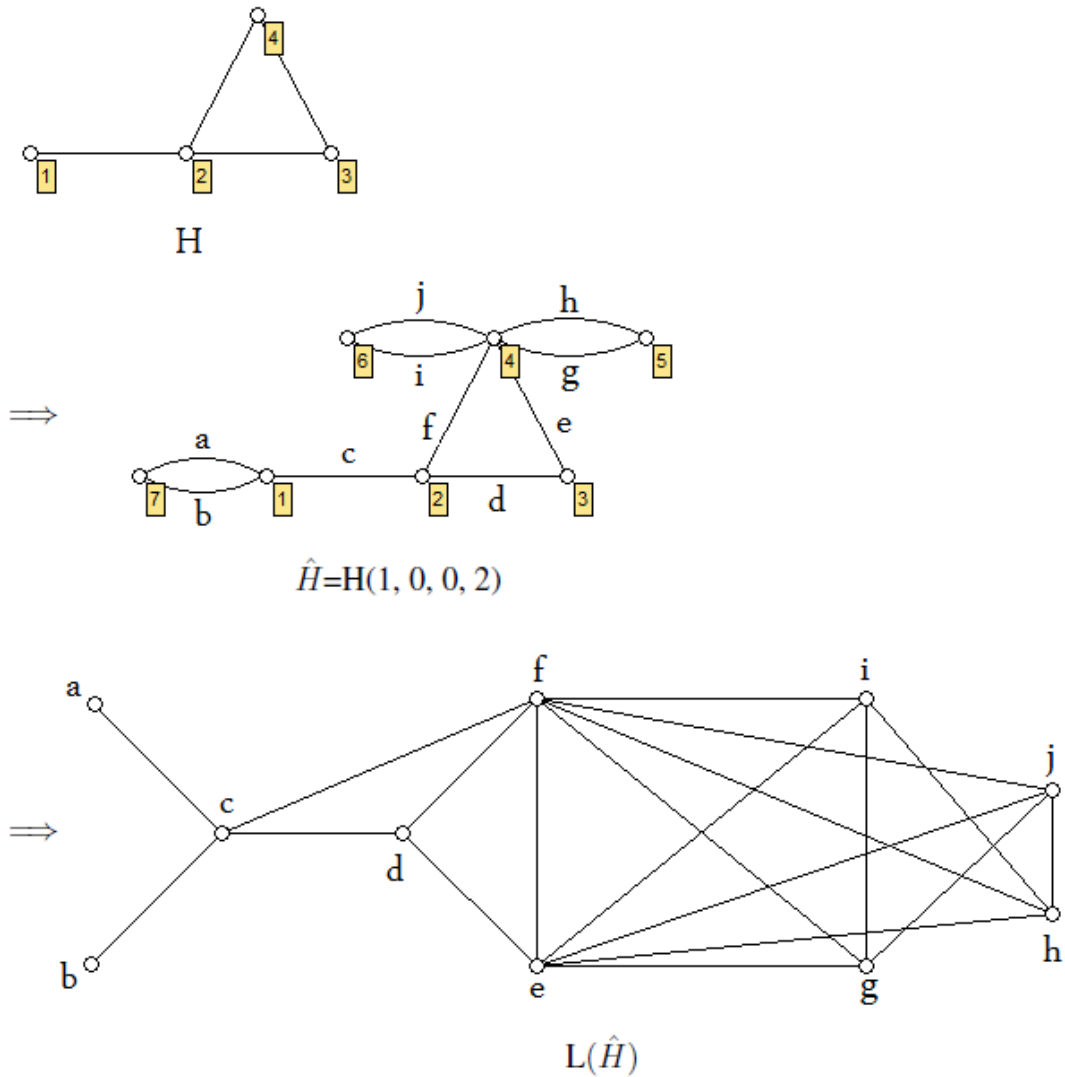
Şekil. 2.19: Çiçek graf

**Tanım 2.1.50.** Bir  $G$  grafının noktalarını  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ile etiketleyelim.  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  için  $a_i \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $G$  grafının  $v_i$  noktasına  $a_i$  adet petal eklenmesiyle oluşan graf  $G(a_1, \dots, a_n)$  ile gösterilir ve  $G$ 'nin *B-grafi* ya da *çiçeklenmiş grafi* olarak adlandırılır.

*Örnek 2.1.20.* Örnek 2.1.18 de yer alan Şekil 2.18 de  $G$  grafi ve bu grafın çiçeklenmiş grafi olan  $G(0, 0, 1)$  grafi gösterilmiştir.

**Tanım 2.1.51.**  $G = (V, E)$  grafının bir B-grafi  $\hat{G} = G(a_1, \dots, a_n)$  olsun. Bu B-grafın çizgi grafına  $G$  nin *genelleştirilmiş çizgi grafi* denir ve  $L(\hat{G})$  ya da  $L(G; a_1, \dots, a_n)$  ile gösterilir.

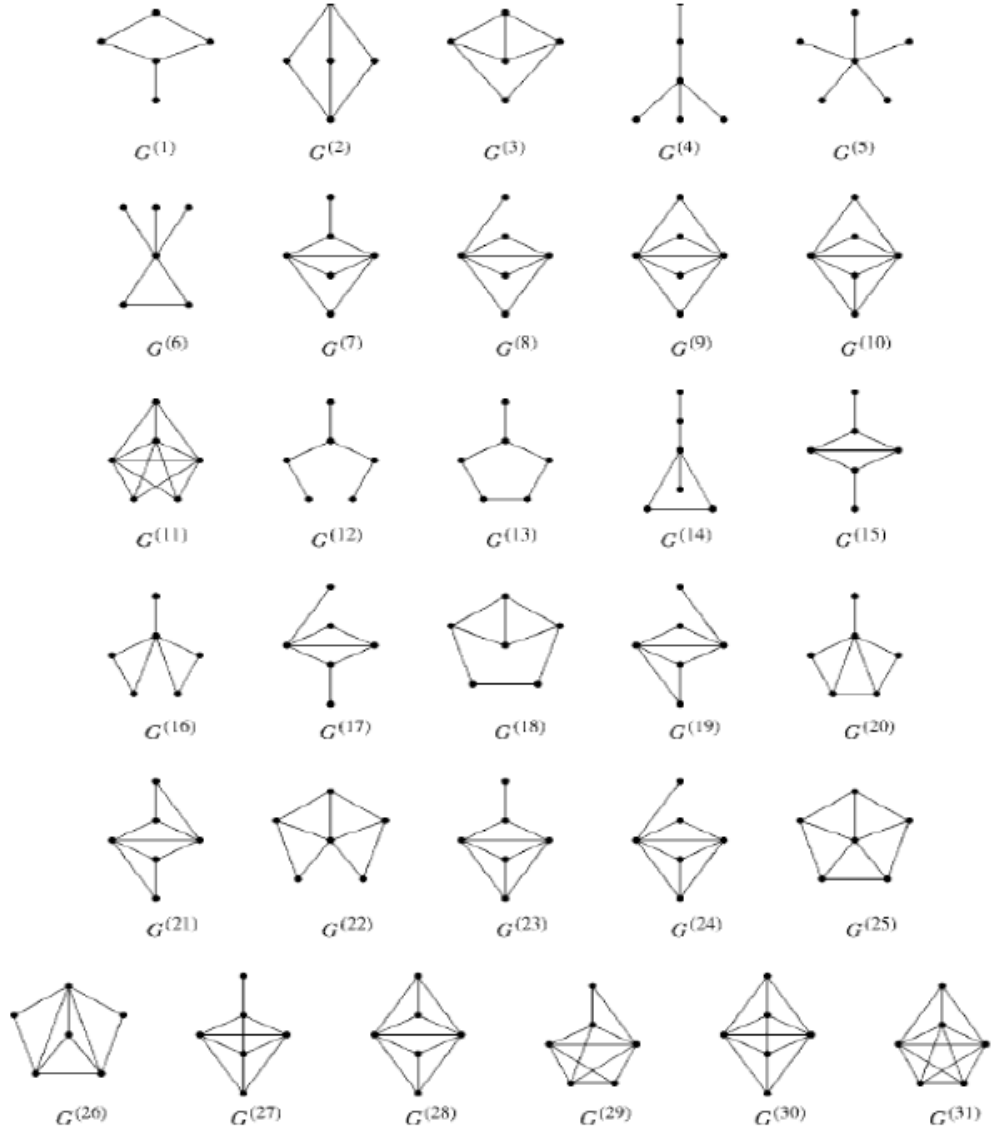
*Örnek 2.1.21* Aşağıdaki şekilde  $H$  grafi ve genelleştirilmiş çizgi grafi  $L(\hat{H}) = L(H; 1, 0, 0, 2)$  verilmiştir.



Şekil. 2.20: Genelleştirilmiş çizgi graf

Çizgi graflar ve genelleştirilmiş çizgi graflar ile ilgili literatürde iyi bilinen ve sıklıkla kullanılan aşağıdaki teoremleri verelim.

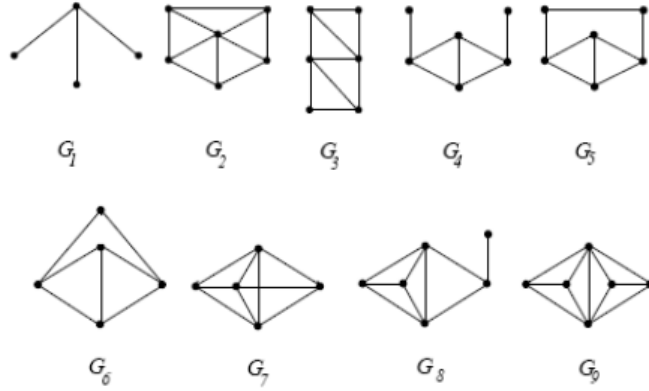
**Teorem 2.1.6.** [47] *Bir grafin genelleştirilmiş çizgi graf olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şekilde verilen  $G^1, \dots, G^{31}$  graflarından herhangi birini indirgenmiş alt graf olarak içermemesidir.*



Şekil. 2.21: Genelleştirilmiş çizgi grafların yasaklanmış alt grafları

**Teorem 2.1.7.** [47] *Bir grafin çizgi graf olması için gerek ve yeter koşul Şekil 2.22. de verilen  $G^1, \dots, G^9$  graflarından herhangi birini indirgenmiş alt graf olarak içermemesidir.*



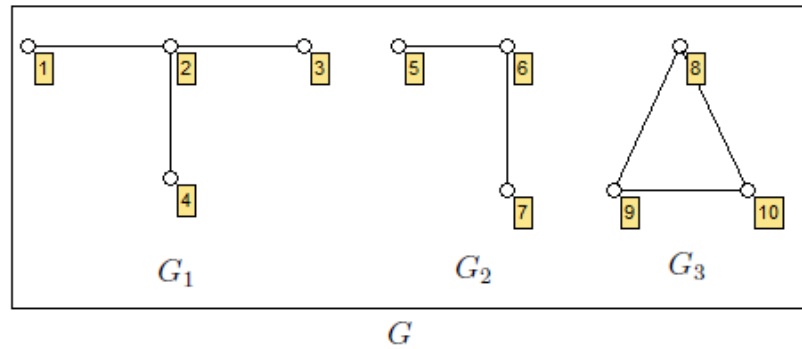


Şekil. 2.22: Çizgi grafların yasaklanmış alt grafları

## 2.2 Graf İşlemleri

**Tanım 2.2.1.** Nokta ve kenar kümeleri ayrık kümeler olan  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_n = (V_n, E_n)$  grafları verilsin.  $V' = V_1 \cup \dots \cup V_n$  ve  $E' = E_1 \cup \dots \cup E_n$  olmak üzere,  $G = (V', E')$  grafına  $G_1, \dots, G_n$  graflarının *ayrık birleşimi* denir ve  $G = G_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_n$  ile gösterilir. Yani aslında grafların ayrık birleşimi alınarak, bu grafları bileşen kabul eden bağlantısız graf oluşturulmaktadır.

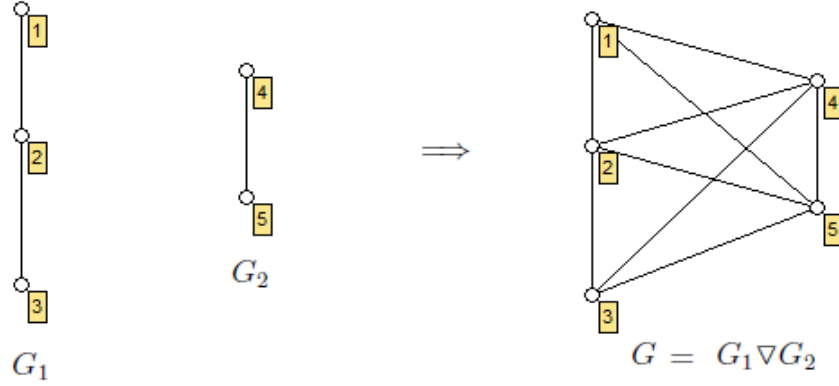
*Örnek 2.2.1.*  $G_1, G_2, G_3$  graflarının ayrık birleşimi olan  $G = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} G_3$  grafi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil. 2.23: Grafların ayrık birleşimi

**Tanım 2.2.2.** Nokta ve kenar kümeleri ayrık kümeler olan  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_n = (V_n, E_n)$  grafları verilsin.  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$  ve  $i \neq j$  olmak üzere,  $V_j$  kümesindeki her bir nokta ile  $V_i$  kümesindeki her bir noktanın bir kenar ile bağlanması işlemine  $G_1, \dots, G_n$  graflarının *birleştirilmesi* denir. Bu grafların birleştirilmesi ile elde edilen grafa  $G$  dersek,  $G = G_1 \nabla \dots \nabla G_n$  ile gösterilir.

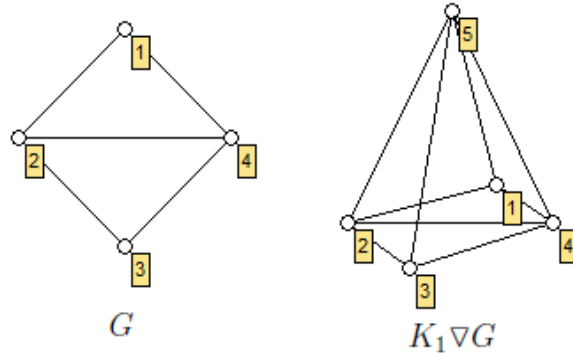
Örnek 2.2.2. Aşağıdaki şekilde  $G_1, G_2$  ayrık grafları ve onların birleştirilmesi ile elde edilen  $G = G_1 \nabla G_2$  grafi gösterilmiştir.



Şekil. 2.24: Grafların birleştirilmesi

**Tanım 2.2.3.** Keyfi bir  $G = (V, E)$  grafi ve tek noktadan oluşan  $K_1$  âşikar grafi verilsin.  $K_1$  deki bu tek noktanın  $G$  deki tüm noktalara bağlanmasıyla elde edilen  $G' = K_1 \nabla G$  birleştirilmiş grafa  $G$  grafi üzerindeki koni denir.

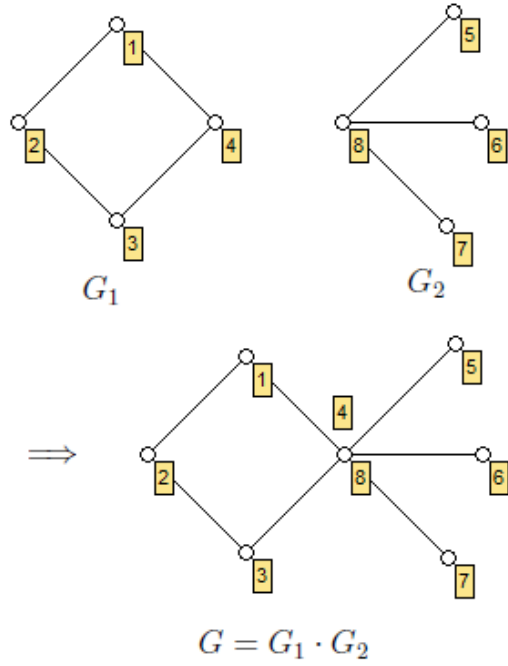
Örnek 2.2.3. Aşağıdaki şekilde  $G$  grafi ve  $G$  grafi üzerindeki koni  $K_1 \nabla G$  gösterilmiştir.



Şekil. 2.25: Bir graf üzerindeki koni

**Tanım 2.2.4.**  $G_1 = (V_1, E_1)$  ve  $G_2 = (V_2, E_2)$  ayrık grafları verilsin. Keyfi  $u \in V_1, v \in V_2$  noktalarının çakıştırılması ile yeni graf elde edilmesi işlemine  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının kaynaştırılması (coalescence) denir. Elde edilen yeni graf  $G = G_1 \cdot G_2$  ile gösterilir.

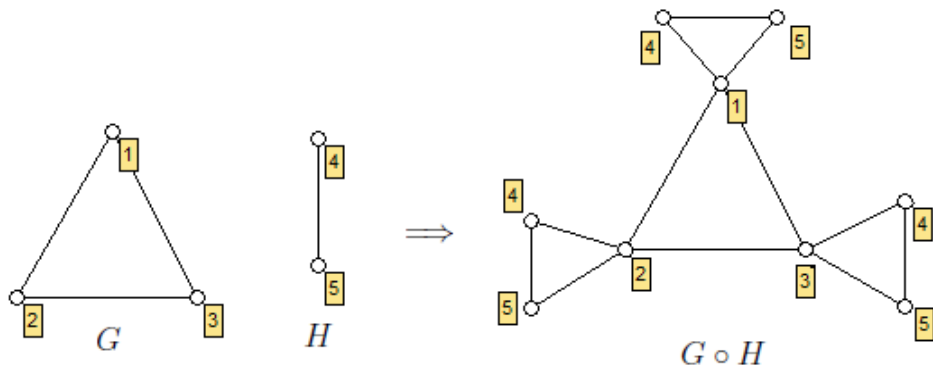
Örnek 2.2.4. Şekil 2.26. da  $G_1, G_2$  ayrık grafları ve onların 4 ve 8 noktalarının seçilip kaynaştırılması ile elde edilen  $G = G_1 \cdot G_2$  grafi gösterilmiştir.



Şekil. 2.26: Grafların kaynaştırılması

**Tanım 2.2.5.**  $n$  noktalı  $G$  ve  $m$  noktalı  $H$  ayrık grafları verilsin.  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  için  $H$  grafinin  $n$  adet kopyası alınıp,  $G$  nin  $i$ -inci noktasının  $H$  ın  $i$ -inci kopyasındaki her bir nokta ile birleştirilmesi sonucunda elde edilen grafa  $G$  ve  $H$  graflarının *koronası* denir ve  $G \circ H$  ile gösterilir.  $G \circ H$  grafinin mertebesi  $n + nm$  olur.

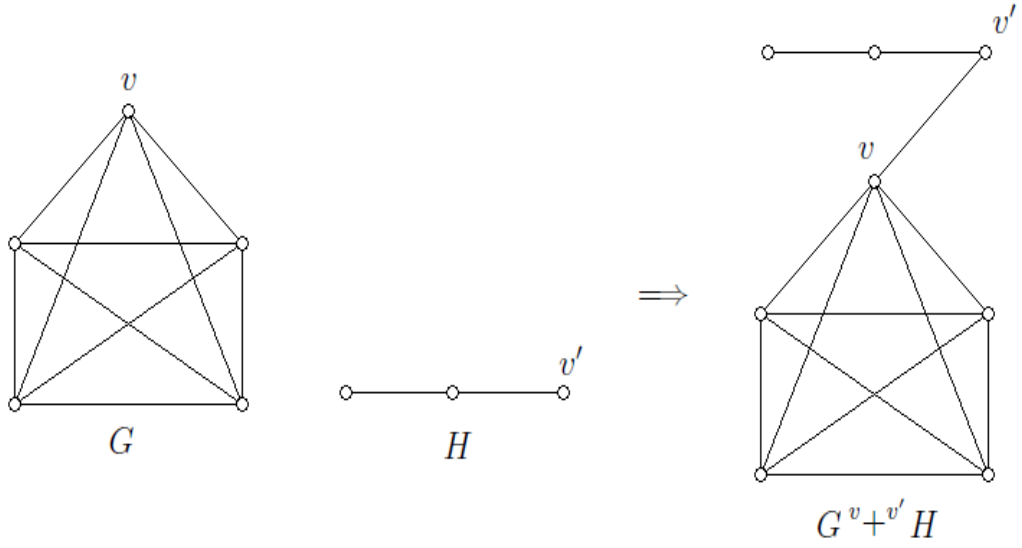
**Örnek 2.2.5.** Aşağıdaki şekilde  $G, H$  ayrık grafları ve  $G \circ H$  koronası gösterilmiştir.



Şekil. 2.27: Grafların koronası

**Tanım 2.2.6.**  $G = (V, E)$  ve  $H = (V', E')$  bağlantılı grafları verilsin.  $G$  grafinin  $v$  noktası ve  $H$  grafinin  $v'$  noktası arasında bir kenar çizilmesiyle yeni bir graf elde edilmesi işlemine  $H$  grafinin  $G$  ye eklenmesi denir ve  $G^{v+v'}$   $H$  ile gösterilir.

**Örnek 2.2.6.** Aşağıdaki şekilde  $G$ ,  $H$  bağlantılı grafları ve  $G^{v+v'}$   $H$  eklenmiş grafi gösterilmiştir.



Şekil. 2.28: Bir grafin diğerine eklenmesi

### 2.3 Graf Matrisleri ve Graf Spektrası

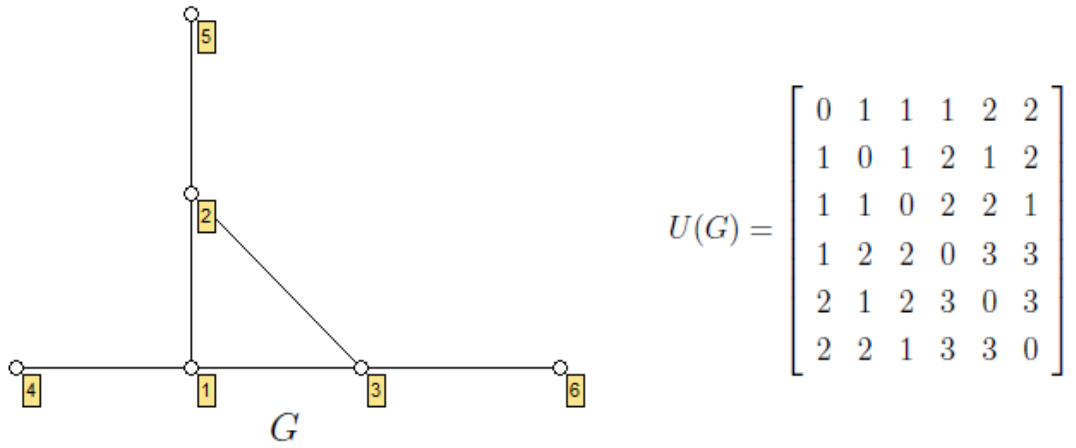
Bir grafin parametrelerinden bazıları arasındaki ilişkileri gösteren bir matrise *graf matrisi* denir. Literatürde derece matrisi, bağlılık (incidence) matrisi, komşuluk matrisi, genelleştirilmiş komşuluk matrisi, Seidel matris, Laplasyan matris, işaretli Laplasyan matris v.b. birçok graf matrisi tanımlanmıştır. Bu bölümde bu matrislerden bazıları üzerinde durularak spektral özellikleri hakkında bilgilere yer verilecektir.

**Tanım 2.3.1.**  $M(G)$  ya da kısaca  $M$ ,  $G$  grafinin bir graf matrisi ve  $I_n$  birim matris olmak üzere  $\det(xI - M(G))$  polinomuna  $G$  nin  $M(G)$  *karakteristik polinomu* denir ve  $\text{char}(M(G))(x)$  ile gösterilir. Bu polinomun köklerinden yani  $M(G)$  matrisinin özdeğerlerinden oluşan kümeye ise  $G$  nin  $M(G)$  spektrumu denir ve  $\text{spec}(M(G))$  ile gösterilir. Ya da matrisin adına göre komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu v.b. de denir.

**Tanım 2.3.2.**  $G$  grafının bir graf matrisi  $M(G)$  ve  $\lambda \in \text{spec}(M(G))$  olsun.  $(x - \lambda)^k \mid (\text{char}(M(G))(x))$  olacak biçimdeki en büyük  $k$  pozitif tamsayısına  $\lambda$  özdeğerinin *cebirsal katı* denir.

**Tanım 2.3.3.**  $G = (V, E)$  grafi  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir graf olsun.  $\forall i, j \in V$  için  $u_{ij} = \text{dist}(i, j)$  olmak üzere  $U(G) = [u_{ij}]$  biçiminde tanımlanan  $n \times n$  tipindeki matris,  $G$  grafının *uzaklık matrisidir*.

**Örnek 2.3.1.** Bir  $G$  grafi ve uzaklık matrisi aşağıda verilmiştir.



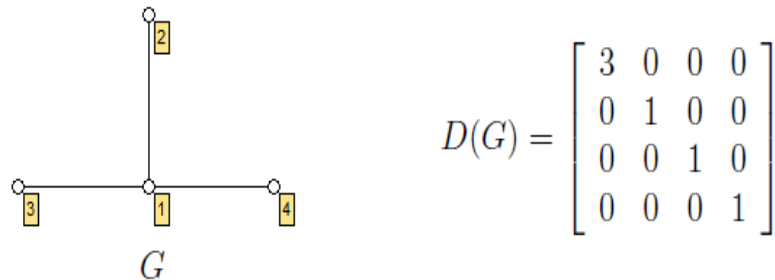
Şekil. 2.29: Bir grafın uzaklık matrisi

**Tanım 2.3.4.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin ve  $V = \{1, \dots, n\}$  olsun.  $\forall i \in V$  için,

$$D(G) = [d_{ij}] \quad \text{öyle ki} \quad d_{ij} = \begin{cases} d(i) & \text{eğer } i = j \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan  $n \times n$  tipindeki köşegen matrise  $G$  grafının *derece matrisi* denir.

**Örnek 2.3.2.** Bir  $G$  grafi ve derece matrisi aşağıdaki gibidir.



Şekil. 2.30: Bir grafın derece matrisi

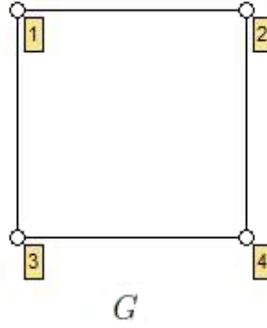
### 2.3.1 Komşuluk matrisi

**Tanım 2.3.5.**  $G = (V, E)$  grafi  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir graf olsun.  $\forall i, j \in V$  için

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{ eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0 & ; \text{ eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere  $G$  grafinin *komşuluk matrisi*,  $A(G) = [a_{ij}]$  biçiminde tanımlanan  $n \times n$  tipindeki matristir.

*Örnek 2.3.3.*



Şekil. 2.31: Spektrum örneği

Yukarıdaki şekilde verilen  $G$  grafinin komşuluk matrisi ve bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \text{char}(A(G))(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -1 & x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^2(x^2 - 4)$$

$A(G)$  nin özdeğerleri  $\{0, 0, \pm 2\}$  olur. Yani  $\text{spec}(A(G)) = \{0^2, \pm 2\}$  olur. Burada 0 özdeğeri iki katlıdır.

**Tanım 2.3.6.**  $A(G)$  matrisi tanımı gereği sıfır köşegene sahip, bileşenleri sadece 0 ve 1 den oluşan simetrik bir matristir. Dolayısıyla özdeğerleri reel olur. Bu özdeğerleri  $\lambda_1(A(G)) \geq \lambda_2(A(G)) \geq \dots \geq \lambda_n(A(G))$  ile gösterelim.  $A(G)$  matrisinin en büyük özdeğeri  $\lambda_1(A(G))$  olur.  $\lambda_1(A(G))$  değerine ise  $G$  grafinin *komşuluk spektral yarıçapı* denir ve  $\rho(G)$  ile gösterilir.

*Not :* Benzer matrislerin karakteristik polinomları aynı olduğundan  $P$  bir permütasyon matrisi olmak üzere, keyfi bir  $A' = P^{-1}A(G)P$  matrisi de  $A(G)$  ile aynı spektruma sahiptir.

Dolayısıyla  $G$  grafının noktalarının farklı etiketlenmesi komşuluk spektrumunu değiştirmez.

**Tanım 2.3.7.**  $i \in \{1, \dots, n\}$  ve  $\lambda_i \in \text{spec}(A(G))$  olmak üzere,  $k > 0$  tamsayısı için  $G$  grafının  $k$ -ıncı spektral momenti,

$$s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece,  $(A(G))^k$  matrisinin izi  $s_k$  ya eşit olur.  $k = 1$  için  $G$  nin spektral momenti komşuluk spektrumundaki değerlerin toplamı olur.

**Teorem 2.3.1.** [40]  $n \times n$  tipindeki  $A$  ve  $B$  matrisleri için aşağıdaki ifadeler birbirine denk olur.

(i)  $A$  ve  $B$  ko-spektraldir.

(ii)  $A$  ve  $B$  aynı karakteristik polinoma sahiptir.

(iii)  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\text{tr}(A^i) = \text{tr}(B^i)$  dir.

Yukarıdaki teorem sayesinde, keyfi bir grafın komşuluk spektrumunun bilinmesinin, grafın yapısı ile ilgili bazı parametrelerin belirlenebilmesine olanak verdiği görülür. Bu durum aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

**Teorem 2.3.2.** [40] Bir  $G$  grafının komşuluk matrisine göre, aşağıdaki parametreler spektrum yardımıyla belirlenebilir.

(i) nokta sayısı

(ii) kenar sayısı

(iii) belirli uzunluktaki kapalı yürüyüşlerin sayısı.

**Tanım 2.3.8.**  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $A = A(G)$  komşuluk matrisinin keyfi bir özdeğeri  $\lambda$  ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  olsun.  $(A(G))x = \lambda x$  eşitliğinden,  $A(G)$  matrisinin tanımı gereği;

$$\lambda x_u = \sum_{v \sim u} x_v \quad (u = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemdeki denklemlere  $G$  grafının komşuluk matrisine göre özdeğer denklemleri denir.

**Önerme 2.3.3.** [40]  $G$  grafinin maksimum derecesi  $\Delta(G)$  ise  $A(G)$  nin her  $\lambda$  özdeğeri için,

$$|\lambda| \leq \Delta(G) \quad (2.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat:* (2.3) deki notasyona bağlı kalarak,  $|x_u|$  değerini maksimal yapan bir  $u \in V$  noktası için,

$$|\lambda||x_u| = |\lambda x_u| = \left| \sum_{v \sim u} x_v \right| \leq \sum_{v \sim u} |x_v| \leq d(u) \max_{v \in V} \{|x_v|\} \leq \Delta(G)|x_u| \quad (2.5)$$

elde edilir.  $|x_u| \neq 0$  olduğundan  $|\lambda| \leq \Delta(G)$  olur.

**Önerme 2.3.4.** [40]  $G$   $r$ -regüler bir graftır ancak ve ancak  $G$  nin bir özdeğeri  $r$  dir ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör tüm bileşenleri 1 e eşit olan  $(1, 1, \dots, 1)^T$  vektörüdür.

*İspat:*  $\Rightarrow$ :  $G$   $r$ -regüler bir graf ve  $V = \{1, \dots, n\}$  olsun.  $\forall i \in V$  için  $d(i) = r$  olduğundan

$$A(G) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(1) \\ \vdots \\ d(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Buradan  $A(G)$  nin bir özdeğerin  $r$  olduğu ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörün  $(1, \dots, 1)^T$  olduğu görülür.

$\Leftarrow$ :  $G$  nin bir özdeğeri  $r$  ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör  $(1, \dots, 1)^T$  olsun. Yani

$$A(G) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

olur. Buradan,

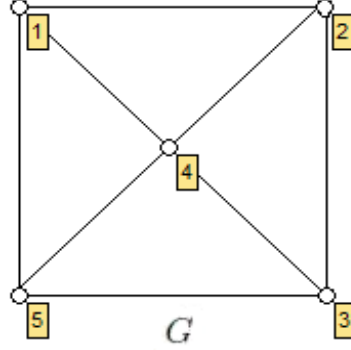
$$\begin{bmatrix} d(1) \\ \vdots \\ d(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} \quad (2.8)$$



yani  $\forall i \in V$  için  $d(i) = r$  olur. Dolayısıyla  $G$ ,  $r$ -regüler bir graf olur.

**Tanım 2.3.9.**  $G$  grafi verilsin.  $A(G)$  nin bir özdeğeri  $\lambda$  ise  $\{x \in \mathbb{R}^n : (A(G))x = \lambda x\}$  kümesi  $\mathbb{R}^n$  nin bir alt uzayı olur. Bu alt uzaya  $\lambda$  nın *öz uzayı* denir ve  $\xi(\lambda)$  ya da  $\xi_{A(G)}(\lambda)$  ile gösterilir.

*Örnek 2.3.4.*



Şekil. 2.32: Karakteristik polinom ve öz uzay örneği

Yukarıda verilen  $G$  grafinin komşuluk matrisinin karakteristik polinomunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
 \text{char}(A(G))(x) &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \\
 &= x^5 - 8x^3 - 8x^2 \\
 &= x(x+2)(x^2 - 2x - 4) \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Böylece  $G$  nin komşuluk özdeğerleri sırasıyla,  $\lambda_1(A(G)) = 1 + \sqrt{5}$ ,  $\lambda_2(A(G)) = 0$ ,  $\lambda_3(A(G)) = 0$ ,  $\lambda_4(A(G)) = 1 - \sqrt{5}$ ,  $\lambda_5(A(G)) = -2$  olur. Bu özdeğerlere karşılık gelen lineer bağımsız özvektörler ise sırasıyla  $x_1 = (1, 1, 1, 1, -1 + \sqrt{5})^T$ ,  $x_2 = (0, 1, 0, -1, 0)^T$ ,  $x_3 = (1, 0, -1, 0, 0)^T$ ,  $x_4 = (1, 1, 1, 1, 1 - \sqrt{5})^T$  ve  $x_5 = (1, -1, 1, -1, 0)^T$  olur. Öz uzaylar ise sırasıyla,  $\xi(1 + \sqrt{5}) = \langle x_1 \rangle$ ,  $\xi(0) = \langle x_2, x_3 \rangle$ ,  $\xi(1 - \sqrt{5}) = \langle x_4 \rangle$  ve  $\xi(-2) = \langle x_5 \rangle$  olur.

**Teorem 2.3.5.** [40]  $n \times m$  tipinde reel bir  $Q$  matrisi ve  $n \times n$  tipinde reel, simetrik bir  $A$  matrisi verilsin.  $Q^T Q = I$  olsun.  $A$  matrisinin özdeğerleri  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$  ve  $Q^T A Q$  matrisinin özdeğerleri  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_m$  ise  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  için,

$$\alpha_{n-m+i} \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad (2.10)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Bu teoremin bir sonucu olarak, spektral graf teoride iç içe geçme (interlacing) lemması olarak bilinen ve hayli kullanışlı olan aşağıdaki lemma verilmiştir. Bu lemma bazı kaynaklarda teorem olarak verilmiştir.

**Lemma 2.3.6.** [40] (*İç içe geçme (interlacing) lemması*)

$n$  noktalı bir  $G$  grafının komşuluk özdeğerleri  $\lambda_1(A(G)) \geq \dots \geq \lambda_n(A(G))$  ve  $G$  nin  $m$  noktalı indirgenmiş bir  $H$  altgrafının komşuluk özdeğerleri  $\lambda_1(A(H)) \geq \dots \geq \lambda_m(A(H))$  olsun.  $O$  zaman,  $i = 1, \dots, m$  için

$$\lambda_i(A(G)) \geq \lambda_i(A(H)) \geq \lambda_{n-m+i}(A(G)) \quad (2.11)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

**Sonuç 2.3.7.** [40]  $n$  noktalı bir  $G$  grafının tek bir noktasının silinmesiyle elde edilen keyfi bir indirgenmiş alt grafi  $H$  olsun.  $G$  grafının komşuluk özdeğerleri  $\lambda_1(A(G)) \geq \dots \geq \lambda_n(A(G))$  ve  $H$  altgrafının komşuluk özdeğerleri  $\lambda_1(A(H)) \geq \dots \geq \lambda_{n-1}(A(H))$  ise

$$\lambda_1(A(G)) \geq \lambda_1(A(H)) \geq \lambda_2(A(G)) \geq \dots \geq \lambda_{n-1}(A(H)) \geq \lambda_n(A(G)) \quad (2.12)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 2.3.5 in diğer bir sonucu da aşağıda verilmiştir.

**Sonuç 2.3.8.** [40] Reel, simetrik bir  $A$  matrisinin özdeğerleri  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$  olsun.  $|\Delta_i| = n_i > 0$  olmak üzere  $\{1, 2, \dots, n\} = \Delta_1 \dot{\cup} \Delta_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \Delta_m$  bir küme parçalanışı olsun.  $A_{ij}$ ,  $n_i \times n_j$  tipinde bir blok olmak üzere  $A = (A_{ij})$  blok matrisi yazılsın.  $A_{ij}$  bloğundaki tüm bileşenlerin toplamı  $e_{ij}$  ve  $B = (e_{ij}/n_i)$  ise  $B$  nin özdeğerleri  $A$  nun özdeğerleri ile iç içe geçer. (Burada  $e_{ij}/n_i$ ,  $A_{ij}$  bloğundaki ortalama satır toplamıdır.)

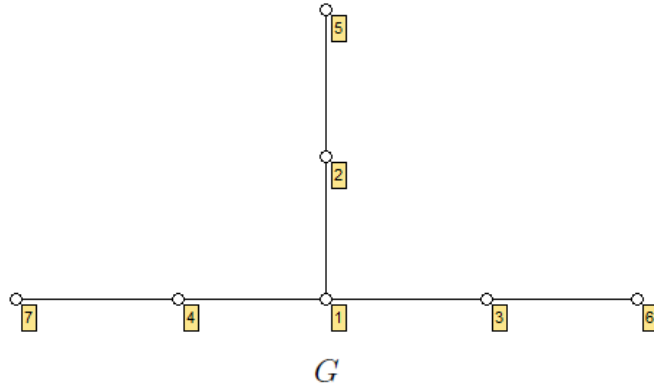
Burada aynı blok içerisindeki tüm satır toplamları eşit ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 2.3.9.** [40]  $A$  matrisi Sonuç 2.3.8 deki gibi bloklara ayrılabilen bir matris olsun.  $A_{ij}$  bloğundaki sabit satır toplamı  $b_{ij}$  ve  $B = (b_{ij})$  ise  $A$  nın spektrumu,  $B$  nin spektrumunu kapsar.

**Tanım 2.3.10.** [2]  $G = (V, E)$  grafi verilsin ve  $V$  kümesinin bir parçalanışı  $V = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$  olsun.  $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$  için eğer  $V_i$  kümesindeki her nokta,  $V_j$  de aynı sayıda noktaya komşu ise bu parçalanışa  $G$  grafinin bir eşit parçalanışı (*equitable partition*) denir.

**Tanım 2.3.11.** [2]  $G = (V, E)$  grafi ve  $V = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$  eşit parçalanışı verilsin. Sonuç 2.3.9 daki notasyona uygun biçimde elde edilen  $B = (b_{ij})$  matrisine bu parçalanışın *bölüm matrisi* (*quotient matrix*) denir.

*Örnek 2.3.5.*



Şekil. 2.33:  $G$  grafi ve iki eşit parçalanışı

Yukarıda verilen  $G$  grafinin iki eşit parçalanışı;  $\Pi : \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}$  ve  $\Pi' : \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}, \{7\}$  olur. Bu parçalanışların bölüm matrisleri aşağıdaki gibi olur.

$$B_{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B_{\Pi'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sonuç 2.3.9 dan aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 2.3.10.** [40] *Bir grafin herhangi bir eşit parçalanışına ait bölüm matrisinin karakteristik polinomu, bu grafin komşuluk matrisinin karakteristik polinomunu böler.*

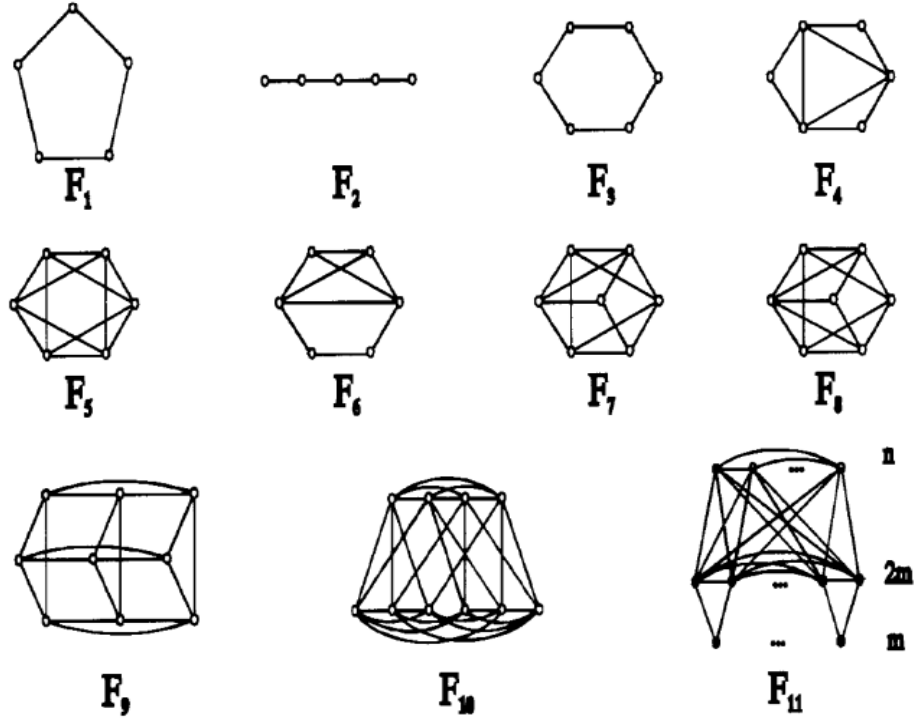
Sarkıt nokta içeren bir grafin komşuluk matrisinin karakteristik polinomunun hesabında aşağıda verilen lemma oldukça kullanışlıdır.

**Lemma 2.3.11.** [40]  *$G$  grafinin bir sarkıt noktası  $x_1$  ve bu noktaya komşu olan nokta  $x_2$  olsun.  $G$  grafindan  $x_1$  noktasının silinmesiyle elde edilen indirgenmiş alt graf  $G_1$ ;  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarının her ikisinin birden silinmesiyle elde edilen indirgenmiş alt graf  $G_2$  olsun.  $O$  zaman aşağıdaki eşitlik sağlanır.*

$$\text{char}(A(G))(x) = x[\text{char}(A(G_1))(x)] - \text{char}(A(G_2))(x) \quad (2.13)$$

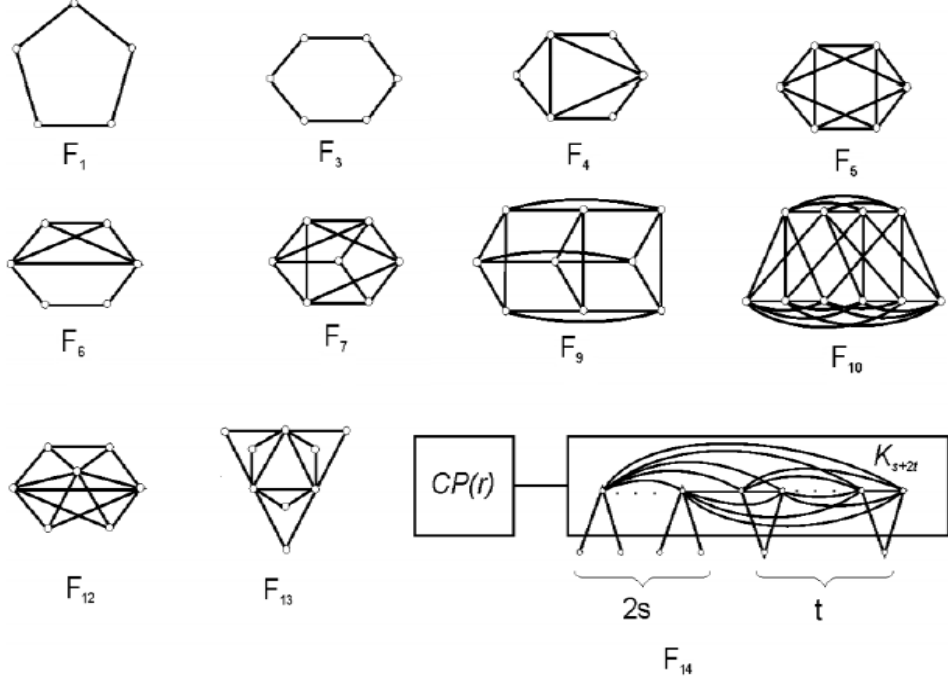
Teorem 2.1.6 ve Teorem 2.1.7 ye benzer olan aşağıdaki teoremleri de verelim.

**Teorem 2.3.12.** [51]  *$G$  bağlantılı bir çizgi graf olsun.  $\lambda_2(A(G)) \leq 1$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$  grafinin aşağıdaki şekilde verilen graflardan herhangi birinin indirgenmiş bir alt grafi olmasıdır.*



Şekil. 2.34: Çizgi graflar için  $F_1 - F_{11}$  grafları

**Teorem 2.3.13.** [52]  $G$  bağlantılı bir genelleştirilmiş çizgi graf olsun.  $\lambda_2(A(G)) \leq 1$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$  grafinin aşağıdaki şekilde verilen graflardan herhangi birinin indirgenmiş bir alt grafi olmasıdır.



Şekil. 2.35: Genelleştirilmiş çizgi graflar için  $F_1 - F_{10}$  ve  $F_{12} - F_{14}$  grafları

### 2.3.2 En küçük komşuluk özdeğeri -2 den büyük olan grafların spektral karakterizasyonu

**Tanım 2.3.12.** [47] En küçük komşuluk özdeğeri -2 ye eşit ya da büyük olan herhangi bir bağlantılı graf, genelleştirilmiş bir çizgi graf değilse bu grafa *istisna (exceptional) graf* denir.

En küçük özdeğeri -2 den büyük olan graflar Doob ve Cvetkovic tarafından [62] de karakterize edilmiştir. Bu karakterizasyona göre toplam 573 adet istisna graf vardır ve karakterizasyona dair lemma aşağıda verilmiştir. Ayrıca tüm istisna graflar ve komşuluk spektral yarıçapları [47, TabloA2] de listelenmiştir.

**Lemma 2.3.14.** [47]  $G$ ,  $n$  noktalı bağlantılı bir graf olsun. Buna göre,  $\lambda_n(A(G)) > -2$  olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır.

(i)  $G = L(H)$  olur öyle ki  $H$  bir ağaçtır ya da tek bir-döngülü graftır.

(ii)  $G = L(\hat{H}) = L(H; 1, 0, \dots, 0)$  olur öyle ki  $H$  bir ağaçtır.

(iii)  $G$ , 573 adet istisna graftan biridir.

**Tanım 2.3.13.** [27]  $n$  noktalı  $G$  grafinin *diskriminantı*,

$$d_G = \prod_{i=1}^n (\lambda_i(A(G)) + 2) \quad (2.14)$$

biçiminde tanımlanır.

*Not :* Eğer  $G$  grafinin birden fazla bileşeni varsa  $G$  nin diskriminantı bileşenlerinin diskriminantlarının çarpımına eşit olur. Aynı komşuluk spektrumuna sahip iki grafin, diskriminantları da aynı olur.

**Lemma 2.3.15.** [27]  $G$  bağlantılı bir graf ve  $\lambda_n(A(G)) > -2$  olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) Eğer  $G$  grafi, 8 noktalı istisna bir graf ise  $d_G = 1$  olur.

(ii) Eğer  $G$  grafi, 7 noktalı istisna bir graf ise  $d_G = 2$  olur.

(iii) Eğer  $G$  grafi, 6 noktalı istisna bir graf ise  $d_G = 3$  olur.

(iv) Eğer  $G$  tek bir-döngülü grafin çizgi grafi ise  $d_G = 4$  olur.

(v) Eğer bir ağaca bir adet petal eklenmesiyle elde edilen  $B$ -graf  $\hat{H}$  ve  $G = L(\hat{H})$  ise  $d_G = 4$  olur.

(vi) Eğer mertebesi  $n$  olan bir  $G$  grafi, bir ağacın çizgi grafi ise  $d_G = n + 1$  olur.

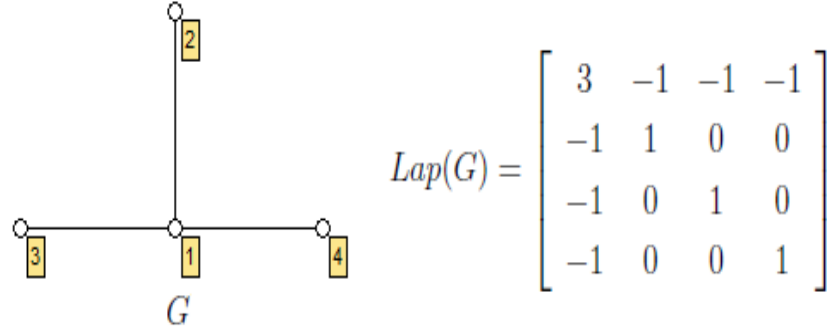
### 2.3.3 Laplasyan ve işaretli Laplasyan matrisi

**Tanım 2.3.14.**  $n$  noktalı bir  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $\forall i, j \in V$  için

$$b_{ij} = \begin{cases} d(i) & ; \text{ eğer } i = j \text{ ise} \\ -1 & ; \text{ eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0 & ; \text{ eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere  $G$  grafinin *Laplasyan matrisi*,  $Lap(G) = [b_{ij}]$  biçiminde tanımlanan  $n \times n$  tipindeki matristir.

Örnek 2.3.6. Aşağıda bir  $G$  grafi ve Laplasyan matrisi verilmiştir.



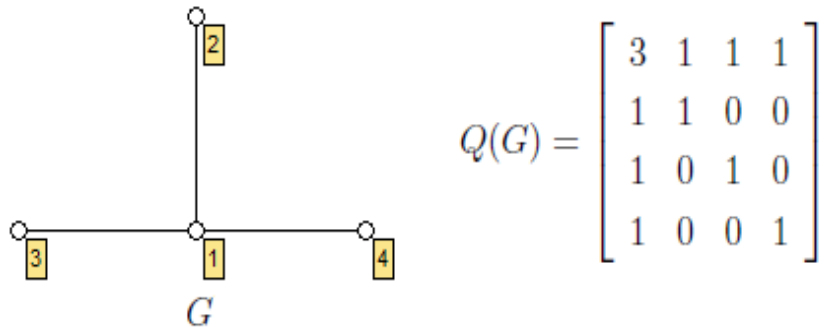
Şekil. 2.36: Bir grafin Laplasyan matrisi

**Tanım 2.3.15.**  $n$  noktalı bir  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $\forall i, j \in V$  için,

$$c_{ij} = \begin{cases} d(i) & ; \text{ eğer } i = j \text{ ise} \\ 1 & ; \text{ eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0 & ; \text{ eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere  $G$  grafinin *işaretsiz Laplasyan matrisi*,  $Q(G) = [c_{ij}]$  biçiminde tanımlanan  $n \times n$  tipindeki matristir.

Örnek 2.3.7. Aşağıda bir  $G$  grafi ve işaretsiz Laplasyan matrisi verilmiştir.



Şekil. 2.37: Bir grafin işaretsiz Laplasyan matrisi

**Sonuç 2.3.16.** [40]  $n$  noktalı bir  $G = (V, E)$  grafinin Laplasyan matrisi  $Lap(G) = [b_{ij}]$  ve işaretsiz Laplasyan matrisi  $Q(G) = [c_{ij}]$  nin *satır ve sütun toplamları için*

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = \sum_{i=1}^n b_{ij} = 0 ; \sum_{j=1}^n c_{ij} = 2d(i) ; \sum_{i=1}^n c_{ij} = 2d(j) \quad (2.15)$$

eşitlikleri sağlanır.

Şimdi de ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan işaretli Laplasyan ve komşuluk matrisleri arasındaki ilişkiye dair aşağıdaki lemmaları verelim.

**Lemma 2.3.17.** [27]  $G$ ,  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir graf olsun. Bu durumda,

$$\text{char}(A(L(G)))(x) = (x + 2)^{m-n} \text{char}(Q(G))(x + 2) \quad (2.16)$$

eşitliği sağlanır.

**Lemma 2.3.18.** [27]  $G$ ,  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir graf olsun. Bu durumda,

$$\text{char}(A(\text{Subd}(G)))(x) = (x)^{m-n} \text{char}(Q(G))(x^2) \quad (2.17)$$

eşitliği sağlanır.

**Lemma 2.3.19.** [27]  $G$  ve  $H$  grafları için  $\text{spec}(Q(G)) = \text{spec}(Q(H))$  ise  $\text{spec}(A(L(G))) = \text{spec}(A(L(H)))$  olur. Eğer  $G$  ve  $H$  graflarının nokta ve kenar sayıları aynı ise bu ifadenin tersi de doğrudur.

## 2.4 Ko-Spektral Graf İnşası ve İzomorfizm Problemi

**Tanım 2.4.1.** [40]  $G$  ve  $G'$  grafları verilsin.  $\text{spec}(M(G)) = \text{spec}(M(G'))$  ise  $G$  ve  $G'$  graflarına,  $M$  matrisine göre ko-spektral graflar denir.

Bu tanıma göre, izomorf iki grafın ko-spektral oldukları aşikardır. Fakat bunun tersi doğru mudur? 1956 yılında Günthard ve Primas'ın yaptığı çalışmaya dayandırılan bu soruya, Collatz ve Sinogowitz bir yıl sonra yaptıkları çalışmada komşuluk matrislerine göre ko-spektral, 8 noktalı ve derece dizileri farklı olan iki ağacı örnek göstererek tersinin doğru olmadığı yanıtını vermişlerdir [4]. Daha sonra ise bu soru Harary'nin 1960 yılında Standford üniversitesindeki ziyareti esnasında yaptığı konuşmada kendisi tarafından tekrar dile getirilmiştir. R.C. Bose bunun doğru olmadığını konuşma esnasında belirtmiştir ve sonrasında ters örnek teşkil eden 16 noktalı komşuluk matrislerine göre ko-spektral fakat izomorf olmayan bir graf çiftini elde ederek iddiasını desteklemiştir [5]. Ayrıca R.H. Bruck ve A.J. Hoffman tarafından da farklı ters örnekler elde edilmiştir [5].



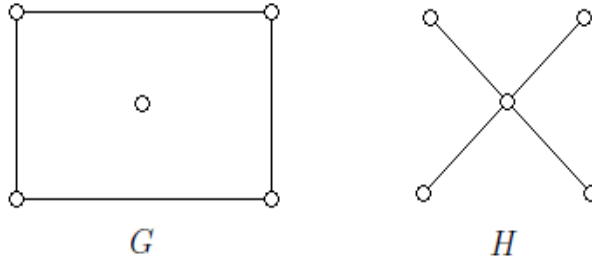
*Hipotez :* Keyfi  $G$  ve  $H$  grafları için  $spec(A(G)) = spec(A(H))$  ise  $G \cong H$  tır. Yani komşuluk matrislerine göre ko-spektral olan herhangi iki graf izomorftur.

Bunun üzerine, Harary [5] te yukarıdaki hipoteze yer vermiş ve karşılığında aldığı ters örneklere değinerek, W.T. Tutte 'nin de önerisiyle aşağıdaki soruyu sormuştur.

*Problem :* Yukarıdaki hipoteze ters örnek teşkil edecek izomorf olmayan bir graf çiftinde nokta sayısı en az kaç olabilir?

Bu soruya Cvetkovic tarafından aşağıdaki örnekle cevap verilmiştir [53]. Cvetkovic, bu çalışmasında sadece örnek vermekle kalmamış aynı zamanda bu örneği kapsayan bir genelleştirme de yapmıştır. Bunun yanısıra Turner, 12 noktalı ve derece dizileri de aynı olan ko-spektral fakat izomorf olmayan bir ağaç çifti sunarak durum ile ilgili karamsarlığını dile getirmiştir [54].

*Örnek 2.4.1.* Aşağıda komşuluk matrislerine göre ko-spektral olan ve literatürde Saltire ikilisi olarak bilinen graf çifti gösterilmiştir.



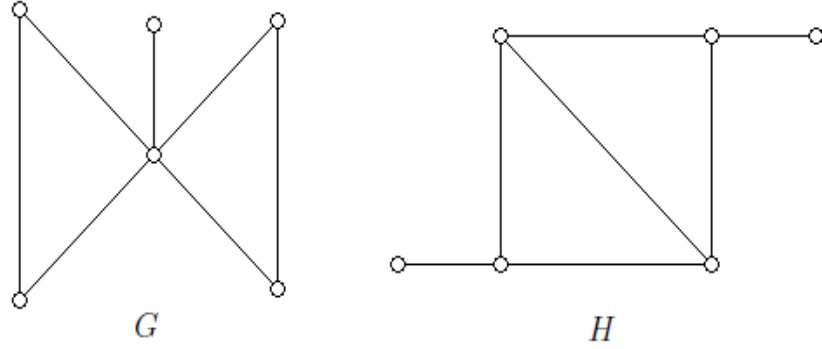
Şekil. 2.38: Saltire ikilisi

Bu grafların komşuluk spektrumu;

$$spec(A(G)) = spec(A(H)) = \{-2, 0^3, 2\}$$

olur. Bu grafların önemi ko-spektral fakat izomorf olmayan graf çiftleri arasında en az sayıda noktaya sahip olmalarıdır. Saltire ikilisi sorulan soruya ters örnek teşkil etmesine rağmen içerdiği graflardan biri bağlantılı diğeri bağlantısızdır.

*Örnek 2.4.2.* Şekil 2.39. da her iki grafında bağlantılı olduğu komşuluk matrislerine göre ko-spektral fakat izomorf olmayan en az sayıda noktaya sahip graf çifti verilmiştir. Bu grafların komşuluk spektrumu;  $spec(A(G)) = spec(A(H)) = \{-1.90, -1^2, 0.19, 1, 2.70\}$  olur.



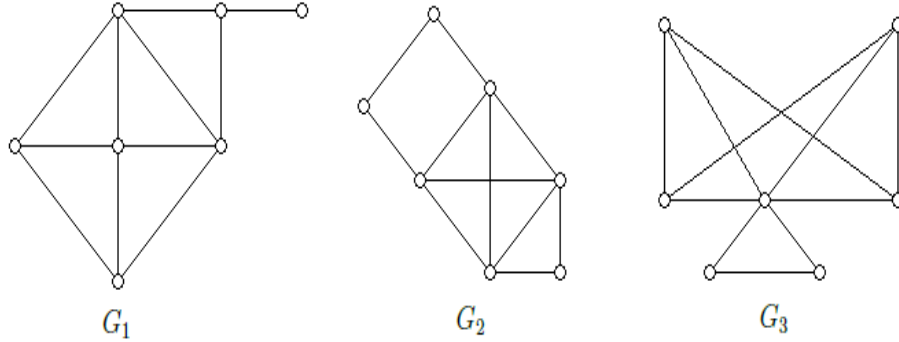
Şekil. 2.39: Ko-spektral fakat izomorf olmayan bağlantılı graf çifti

Şimdi de ko-spektral fakat izomorf olmayan bağlantılı ve en az sayıda noktaya sahip graf üçlüsünü verelim.

Örnek 2.4.3. Aşağıda verilen grafların komşuluk spektrumu;

$$\text{spec}(A(G_1)) = \text{spec}(A(G_2)) = \text{spec}(A(G_3)) = \{-2, -1.77, -1, 0^2, 1.28, 3.48\}$$

olur.



Şekil. 2.40: Ko-spektral fakat izomorf olmayan bağlantılı graf üçlüsü

Bu ilk örneklerden de anlaşılacağı üzere, bir grafi belli bir matrisinin spektrumuna bakarak belirleyebilmek her zaman mümkün değildir. Bu noktada aşağıdaki tanıma yer verelim.

**Tanım 2.4.2.**  $G$  grafının bir graf matrisi  $M(G)$  olsun.  $\text{spec}(M(G)) = \text{spec}(M(H))$  olacak biçimde  $\forall H$  grafi için  $G \cong H$  oluyorsa,  $G$  grafına  $M(G)$  spektrumu ile belirlenebilir bir graf denir.

Literatürde verilmiş olan örnekler, bu durumun her zaman mümkün olmadığını gösterse de, spektrumu ile belirlenebilen graflar mevcuttur [18,31]. Hatta son yıllarda hemen hemen tüm grafların spektrumları ile belirlenebildiği görüşüne daha sıcak bakılmaktadır [18,31].

#### 2.4.1 Bilgisayar sonuçları

Nokta sayısı  $n$  olan çizilebilecek tüm grafların kümesi  $S$  ve bu kümenin içerisinde en az bir ko-spektral eşe sahip olan grafların kümesi  $S'$  olsun.  $r_s = |S'|/|S|$  oranına,  $S$  kümesinin *spektral belirsizliği* denir. Grafların spektral belirsizliği nokta sayısı 12 ye kadar olan graflar için bilgisayar yardımıyla hesaplanmıştır [40]. Aşağıdaki tabloda mertebesi  $2 \leq n \leq 12$  olan grafların komşuluk, Laplasyan ve işaretli Laplasyan matrislerine göre spektral belirsizlikleri verilmiştir. Burada,  $A(G)$  komşuluk matrisini,  $Lap(G)$  Laplasyan matrisini ve  $Q(G)$  işaretli Laplasyan matrisini temsil etmektedir.

Tablo 2.2.  $A(G)$ ,  $Lap(G)$  ve  $Q(G)$  matrislerine göre grafların spektral belirsizliği

n	Toplam Graf Sayısı	A(G)	Lap(G)	Q(G)
2	2	0	0	0
3	4	0	0	0
4	11	0	0	0.182
5	34	0.059	0	0.118
6	156	0.064	0.026	0.103
7	1044	0.105	0.125	0.098
8	12346	0.139	0.143	0.097
9	274668	0.186	0.155	0.069
10	12005168	0.213	0.118	0.053
11	1018997864	0.211	0.090	0.038
12	165091172592	0.188	0.060	0.027

## 2.4.2 Godsil-McKay switching ve Schwenk lemması

Komşuluk spektrumu bilinen bir grafla ilgili elde edilebilecek bilgilere 2.3.1. alt bölümünde değinilmiştir. Spektrumu bilinen bir grafin, spektrumu ile belirlenebilir olduğunu göstermek için bu tür bilgiler oldukça kullanışlı olmaktadır. Fakat her zaman yeterli gelmemektedir. Bunun yanısıra, ko-spektral grafların inşası için çeşitli metotlar uygulanarak, inşa edilen grafların izomorf olup olmadıklarının kontrolüyle de bu problemin araştırılması yapılmıştır ve bunun için literatürde ko-spektral graf inşasına dair çeşitli metotlar mevcuttur [8, 18, 31-36]. Burada, bu metotlardan iyi bilinen iki tanesi olan Godsil-McKay switching ve Schwenk lemmasına yer verilmiştir.

### Godsil-McKay switching

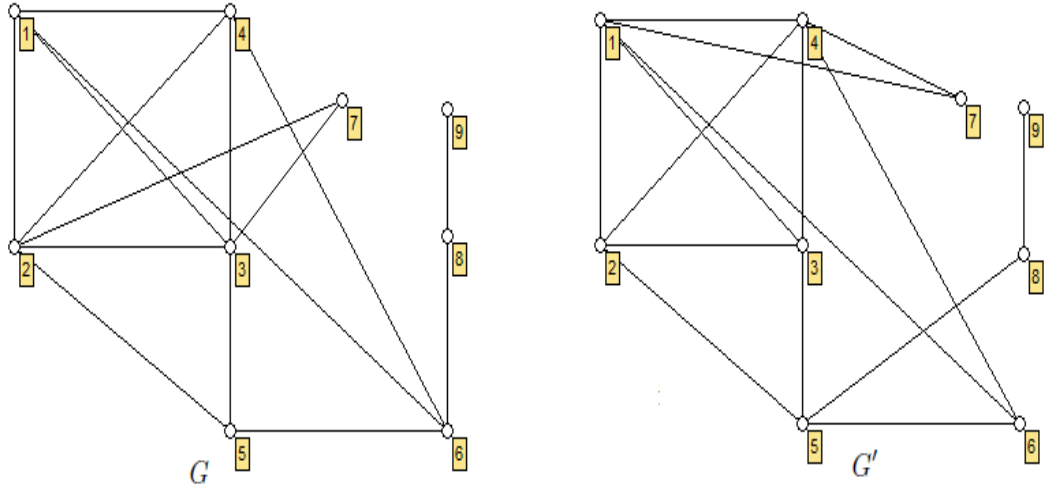
Bu yöntem ile yapılan işlem, graf üzerinde uygulanan ve verilen grafin komşuluk matrisinin spektrumunu değiştirmeyen bir işlemdir. Her zaman olmasa da çoğunlukla elde edilen graf ilkinde izomorf değildir.

**Önerme 2.4.1.** [32]  $G = (V, E)$  grafi verilsin.  $V$  kümesinin bir parçalanışı  $V = \{X_1, \dots, X_l, Y\}$  ve  $V' = V - Y$  kümesinin bir eşit parçalanışı  $V' = \{X_1, \dots, X_l\}$  olsun.  $\forall x \in Y$  ve  $\forall i \in \{1, \dots, l\}$  için  $x$  noktasının  $X_i$  kümesindeki komşu olduğu noktaların sayısı;  $0, \frac{|X_i|}{2}$  ya da  $|X_i|$  olsun.  $G$  grafinin; " $\forall x \in Y$  ve  $\forall i \in \{1, \dots, l\}$  için  $x$  noktasının  $X_i$  kümesindeki komşu olduğu noktaların sayısı  $\frac{|X_i|}{2}$  ise  $x$  noktası ile komşu olduğu bu noktalar arasındaki kenarların silinmesi ve  $x$  noktasının komşu olmadığı diğer  $\frac{|X_i|}{2}$  adet noktaya bağlanması" işlemi uygulanarak  $G'$  grafi elde edilsin. Bu durumda,  $spec(A(G')) = spec(A(G))$  olur.

**Örnek 2.4.4.** Şekil 2.41 de verilen  $G = (V, E)$  grafinin nokta kümesi  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  ve parçalanışındaki kümeler sırasıyla  $X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X_2 = \{5, 6\}$  ve  $Y = \{7, 8, 9\}$  olur. Bu parçalanışın Önerme 2.4.1. deki koşulları sağladığı açıktır. Buna göre,  $G$  grafinin Godsil-McKay switching uygulandığında elde edilen graf şekilde verilen  $G'$  grafi olur.

Bu grafların komşuluk matrislerinin spektrumları,

$$spec(A(G)) = spec(A(G')) = \{-2.72, -1.31, -1^2, -0.45, 0.28, 0.71, 1.52, 3.97\} \text{ olur.}$$

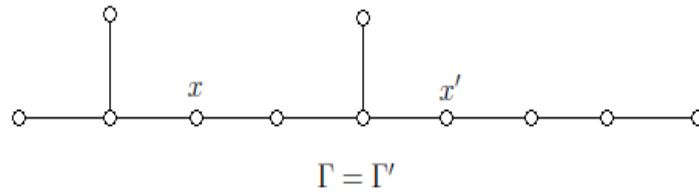


Şekil. 2.41: Godsil-McKay switching uygulanişı

### Schwenk lemması

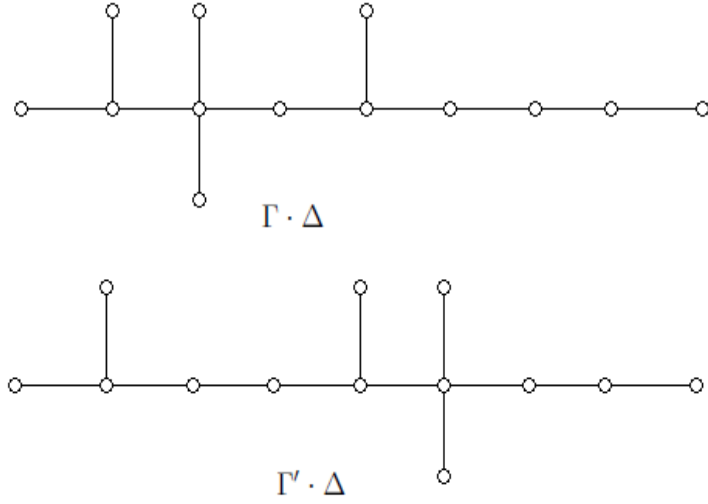
**Lemma 2.4.2.** [8]  $\Gamma$  ve  $\Gamma'$  komşuluk matrislerine göre ko-spektral graflar olmak üzere,  $x$  ve  $x'$  sırasıyla bu graflara ait birer nokta olsun. Ayrıca,  $\Gamma - x$  ve  $\Gamma' - x'$  indirgenmiş alt grafları da ko-spektral olsun. Keyfi bir  $\Delta$  grafi belirli bir  $y$  noktasından  $\Gamma$  ve  $\Gamma'$  graflarına sırasıyla  $x$  ve  $x'$  noktalarından kaynaştırılsın. Bu takdirde,  $\Gamma \cdot \Delta$  ve  $\Gamma' \cdot \Delta$  grafları da ko-spektral graflar olur.

**Örnek 2.4.5.**  $\Gamma = \Gamma'$  ağacı aşağıdaki gibi olsun.



Şekil. 2.42:  $\Gamma$  ağacı

$\Delta = P_3$  olsun ve  $d(y) = 2$  olacak biçimde  $P_3$  ten bir  $y$  noktası seçelim. Bu takdirde  $\Gamma \cdot \Delta$  ve  $\Gamma' \cdot \Delta$  ağaçları Şekil 2.43 teki gibi olur. Bu iki ağacın ko-spektral fakat izomorf olmayan ağaçlar oldukları kolayca görülür.



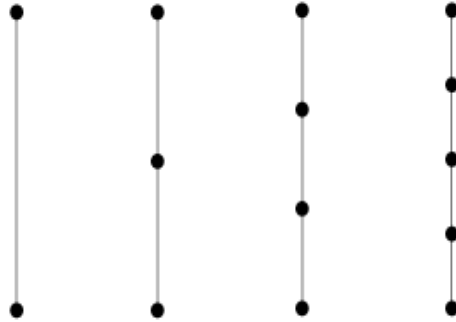
Şekil. 2.43:  $\Gamma$  ve  $\Delta$  nin farklı noktalardan kaynaştırılması

Örnek 2.4.5. ten de görüleceği üzere, Schwenk'in bu lemması ko-spektral ağaç inşası için oldukça elverişli bir metottur. Schwenk, aşağıda verilen ünlü teoremini de bu lemma sayesinde ispatlamıştır.

**Teorem 2.4.3.** [8] *Hemen hemen tüm ağaçlar komşuluk matrislerinin spektrumlarına göre belirlenebilir değildir.*

## 2.5 Bazı Özel Graflar ve Spektral Özellikleri

**Tanım 2.5.1.** [2] Sadece bir adet yoldan oluşan grafa *yol graf* denir. Grafın içerdiği nokta sayısı  $n$  ise  $P_n$  ile gösterilir.



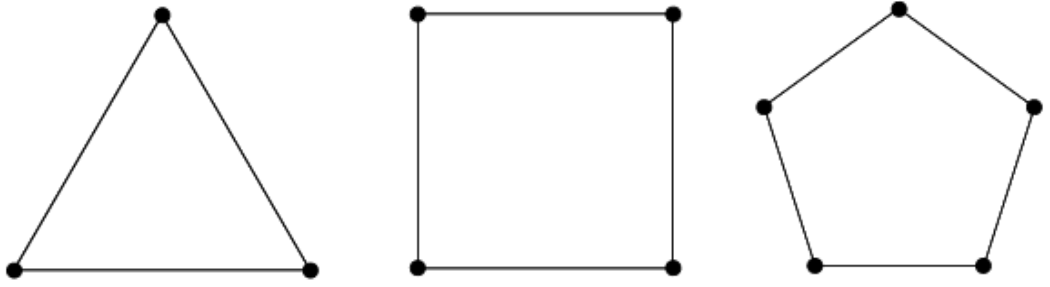
Şekil. 2.44:  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  ve  $P_5$

Bir yol grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu,

$$\text{char}(A(P_n))(x) = \prod_{i=1}^n (x - 2 \cos(\frac{2\pi i}{n+1})) \quad (2.18)$$

biçimindedir.

**Tanım 2.5.2.** [2] Sadece bir adet döngüden oluşan grafa *döngü graf* denir. Grafin içerdiği nokta sayısı  $n$  ise  $C_n$  ile gösterilir.



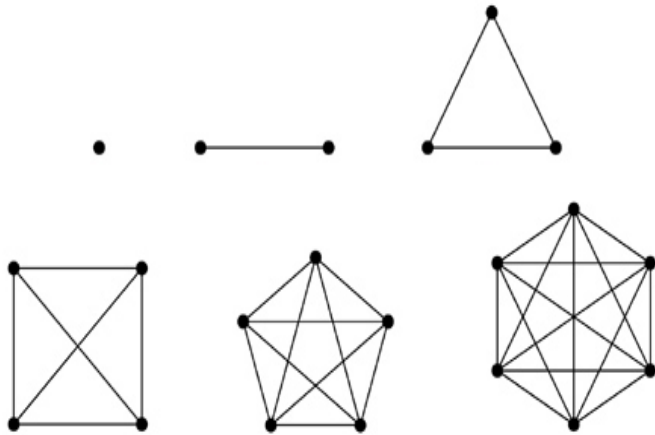
Şekil. 2.45:  $C_3$ ,  $C_4$  ve  $C_5$

Bir döngü grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu,

$$\text{char}(A(C_n))(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - 2 \cos(\frac{2\pi i}{n})) \quad (2.19)$$

biçimindedir.

**Tanım 2.5.3.** [2]  $n$  noktalı bir grafin nokta kümesi  $V = \{1, \dots, n\}$  olmak üzere  $\forall i, j \in V$  için  $i \sim j$  ise bu grafa bir *tam graf* denir ve  $K_n$  ile gösterilir.



Şekil. 2.46:  $K_1$ - $K_6$

$K_n$  grafinin komşuluk matrisi  $A(K_n) = J - I$ , Laplasyan matrisi  $Lap(K_n) = nI - J$  ve işaretli Laplasyan matrisi  $Q(K_n) = nI + J$  olur.  $K_n$  grafinin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu,

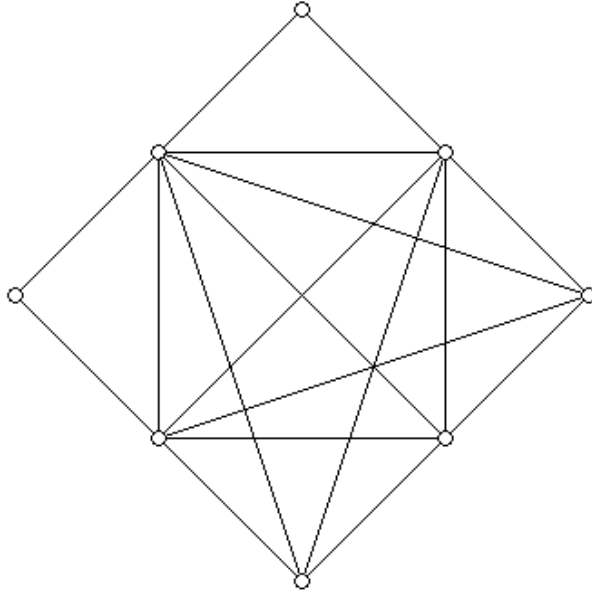
$$char(A(K_n))(x) = (x + 1)^{n-1}(x - n + 1) \quad (2.20)$$

biçimindedir.

*Not :* Tam grafların spektrumları ile belirlenebilir graflar oldukları, âşikar ve literatürde iyi bilinen bir durumdur.

**Tanım 2.5.4.** [55]  $n$  noktalı bir  $G$  grafi verilsin.  $r \leq n$  olmak üzere  $G$  grafi  $r$  noktalı  $K_r$  tam grafini bir indirgenmiş alt graf olarak içermiyorsa,  $G$  ye  $K_r - free$  graf denir.

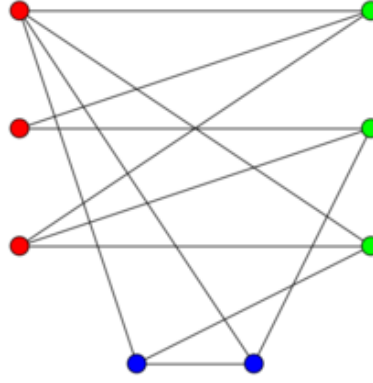
*Örnek 2.5.1.* Aşağıdaki şekilde verilen graf, 8 noktalı bir graftır fakat maksimum klik genişliği 5 tir. Dolayısıyla  $r \geq 6$  için  $K_r - free$  olur.



Şekil. 2.47:  $r \geq 6$  için  $K_r - free$  graf

**Tanım 2.5.5.** [56] Çok parçalı bir grafta, aynı bağımsız küme içerisinde bulunmayan her nokta çifti birbirine kesinlikle komşu ise bu grafa *çok parçalı tam graf* denir ve parçalardaki nokta sayıları sırasıyla  $m_1, \dots, m_n$  olmak üzere  $K_{m_1, \dots, m_n}$  ile gösterilir.



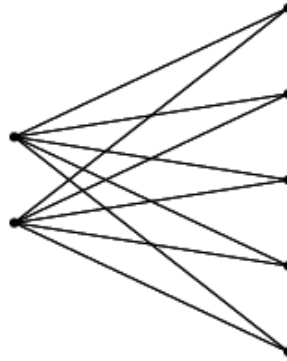


Şekil. 2.48:  $K_{1,1,3,3}$

Çok parçalı tam grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\text{char}(A(K_{m_1, \dots, m_n}))(x) = (x)^{m_1 + \dots + m_n - n} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{x + m_i}\right) \prod_{j=1}^n (x + m_j) \quad (2.21)$$

**Tanım 2.5.6.** [2]  $K_{m_1, \dots, m_n}$  grafında  $n = 2$  ise bu grafa özel olarak *iki parçalı tam graf* denir.



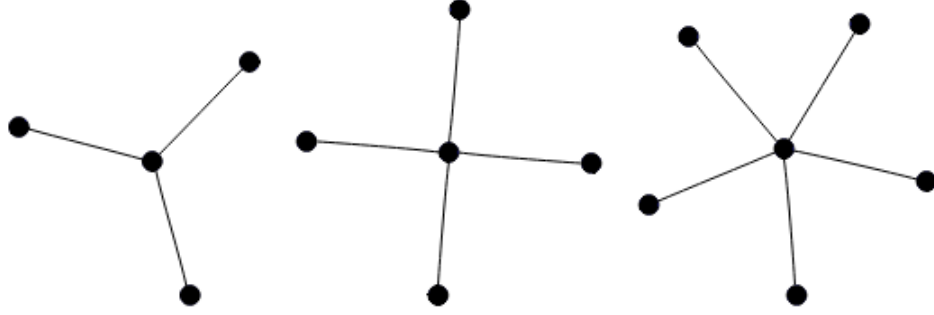
Şekil. 2.49:  $K_{2,5}$

İki parçalı tam grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu,

$$\text{char}(A(K_{m_1, m_2}))(x) = (x)^{m_1 + m_2 - 2} (x^2 - m_1 m_2) \quad (2.22)$$

biçimindedir.

**Tanım 2.5.7.** [2]  $K_{1,n}$  grafına *yıldız graf* denir ve  $S_n$  ile gösterilir.



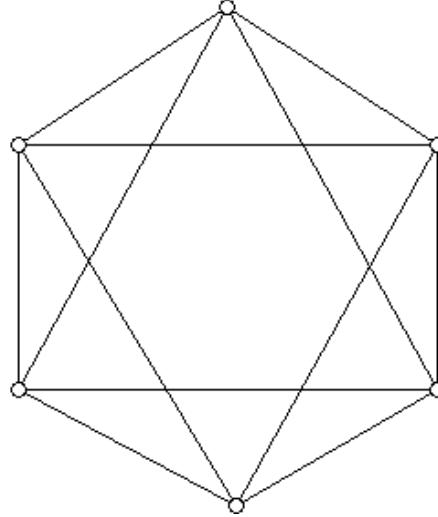
Şekil. 2.50:  $S_3$ ,  $S_4$  ve  $S_5$

$S_n$  grafının komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu,

$$\text{char}(A(K_{1,n}))(x) = (x)^{n-1}(x^2 - n) \quad (2.23)$$

biçimindedir.

**Tanım 2.5.8.** [2]  $K_{m_1, \dots, m_n}$  grafında  $m_1 = \dots = m_n = 2$  ise bu grafa *kokteyl parti graf* denir ve  $CP(n)$  ile gösterilir.

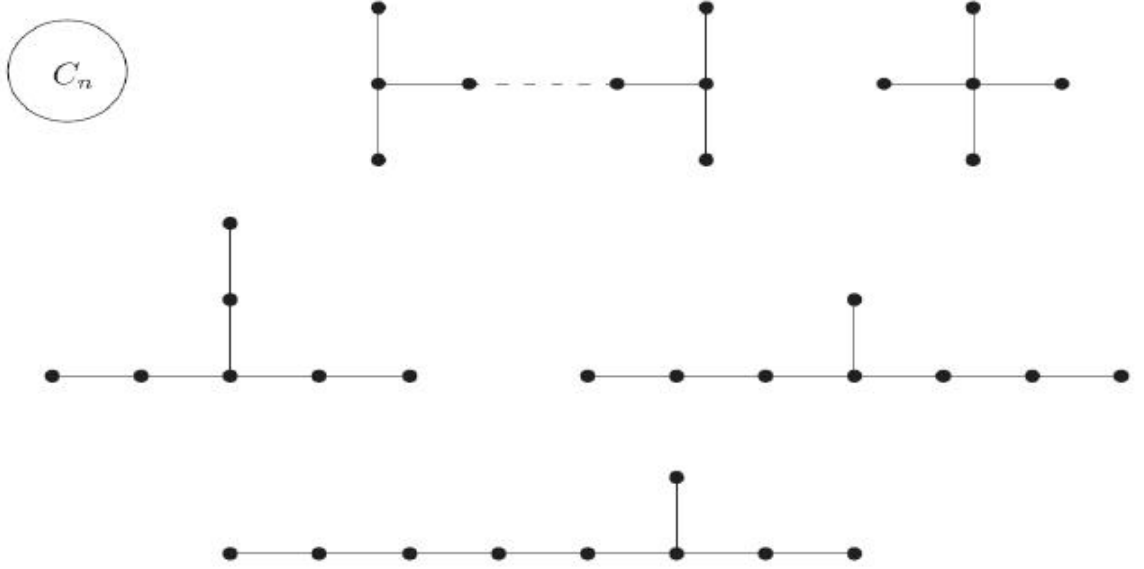


Şekil. 2.51:  $CP(3)$

$CP(n)$  grafının komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\text{char}(A(CP(n)))(x) = x^n(x + 2)^{n-1}(x + 2 - 2n) \quad (2.24)$$

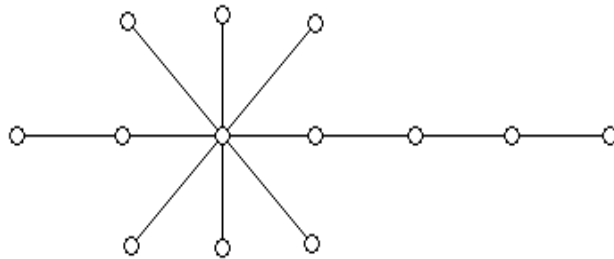
**Tanım 2.5.9.** [9, 27] Bağlantılı bir  $G$  grafi için  $\rho(G) = 2$  ise  $G$  grafına *Smith graf* denir. Tüm Smith graflar aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil. 2.52: Smith Graflar

**Lemma 2.5.1.** [9, 27] *Herhangi bir bağlantılı  $G$  grafi için  $\rho(G) < 2$  ise bu graf bir Smith grafın indirgenmiş alt grafi olur.*

**Tanım 2.5.10.** [25 – 27] En fazla bir adet noktasının derecesi 2 den büyük olan bir ağaca *yıldızsal ağaç* denir. Maksimum derecesi  $\Delta$  olan bir yıldızsal ağaç  $T(l_1, \dots, l_\Delta)$  ile gösterilir. Öyle ki burada maksimum dereceye sahip nokta  $v$  ile gösterilirse  $T(l_1, \dots, l_\Delta) - v = P_{l_1} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} P_{l_\Delta}$  olur.



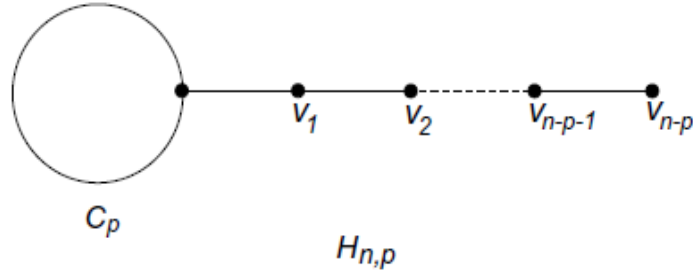
Şekil. 2.53:  $T(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4)$

**Lemma 2.5.2.** [26]  $\Delta = 4$  ise  $T(l_1, \dots, l_\Delta)$  işaretli Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir.

**Lemma 2.5.3.** [25]  $\Delta \geq 5$  ise  $T(l_1, \dots, l_\Delta)$  işaretli Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir.

**Lemma 2.5.4.** [27]  $\Delta \geq 12$  ve  $G = T(l_1, \dots, l_\Delta)$  olsun. Bu durumda,  $L(G)$  komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir.

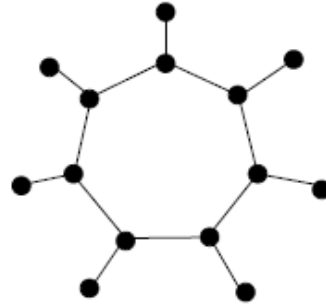
**Tanım 2.5.11.** [11]  $n = p + q$  olmak üzere,  $P_q$  grafının bir sarkıt noktasına,  $C_p$  grafının keyfi bir noktasından eklenmesiyle elde edilen grafa *lolipop graf* denir ve  $H_{n,p}$  ile gösterilir.



Şekil. 2.54: Lolipop graf

**Lemma 2.5.5.** [11]  $p$  tek sayı ise  $H_{n,p}$  komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir.

**Tanım 2.5.12.** [14]  $C_p$  grafının her bir noktasına birer adet sarkıt nokta eklenmesiyle elde edilen grafa *güneş graf* denir ve  $Sun_p$  ile gösterilir.

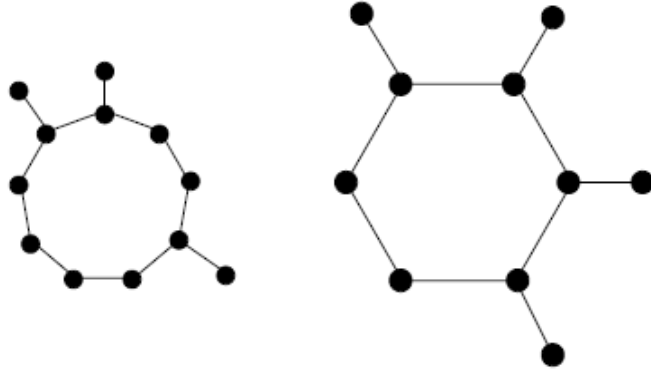


Şekil. 2.55:  $Sun_7$

**Lemma 2.5.6.** [14]  $p$  tek sayı ise  $Sun_p$  komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir.

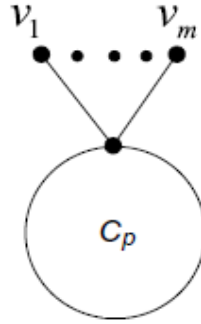
**Lemma 2.5.7.** [14]  $p > 2$  ise  $Sun_p$  Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir.

**Tanım 2.5.13.** [14]  $q < p$  olmak üzere,  $C_p$  grafının  $q$  adet noktasına birer adet sarkıt nokta eklenmesiyle elde edilen grafa *kırılmış güneş graf* denir ve  $BrokenSun_{p,q}$  ile gösterilir.



Şekil. 2.56:  $BrokenSun_{9,3}$  ve  $BrokenSun_{6,4}$

**Tanım 2.5.14.** [16, 50]  $C_p$  grafinin sadece bir adet noktasına  $m$  adet sarkıt nokta eklenmesiyle elde edilen grafa *turp graf* denir ve  $Turnip_{p,m}$  ile gösterilir.



Şekil. 2.57: Turp graf

**Lemma 2.5.8.** [16]  $p$  tek sayı ise  $Turnip_{p,m}$  komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir.

**Lemma 2.5.9.** [16]  $Turnip_{p,m}$  Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir.

Şimdi de ilerleyen bölümlere bir ön hazırlık niteliği taşıyan aşağıdaki teoreme ve ispatına yer verelim.

**Teorem 2.5.10.** [31]  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  için  $P_n$  komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir.

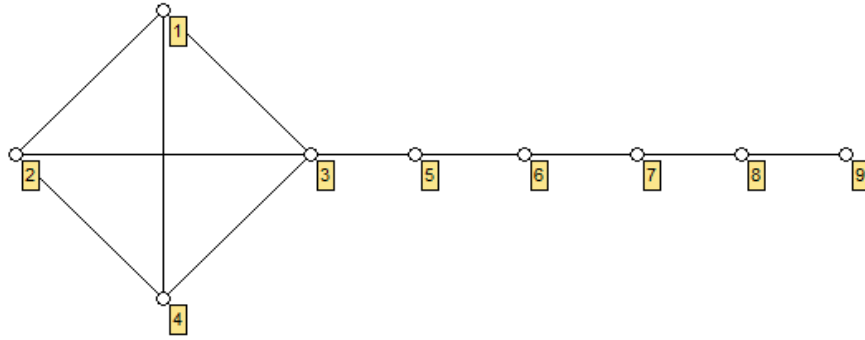
*İspat :*  $P_n$  grafinin komşuluk matrisinin özdeğerleri,  $i = 1, \dots, n$  için  $\lambda_i(A(P_n)) = 2 \cos(\frac{2\pi i}{n+1})$  olur. Dolayısıyla  $\rho(P_n) < 2$  dir.  $spec(A(P_n)) = spec(A(G))$  olacak biçimde keyfi bir  $G = (V, E)$  grafini ele alalım. O zaman Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.3.2 den  $G$  nin mertebesi  $n$  ve kenar sayısı  $n - 1$  olur.



### 3. BÖLÜM

#### UÇURTMA (KITE) GRAFIN KOMŞULUK MATRİSİNE GÖRE SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU

$K_p$  grafinin keyfi bir noktasına,  $P_q$  grafinin bir sarkıt noktasından eklenmesiyle oluşan grafa *uçurtma graf* denir ve  $Kite_p^q$  ile gösterilir [39].



Şekil 3.1:  $Kite_4^5$  grafi

$l_1 = l_2 = \dots = l_{p-1} = 1$  ve  $l_p = q + 1$  olmak üzere,  $Kite_p^q$  grafi aslında  $T(l_1, l_2, \dots, l_p)$  yıldızsal ağacının çizgi grafidir. Yıldızsal ağaçların çizgi grafları bazı çalışmalarda *güneşsel (sunlike) graf* olarak adlandırılmıştır [57]. Dolayısıyla, bir uçurtma graf aynı zamanda bir güneşsel grafin özel bir hali olur.  $P_q$  grafinin her iki sarkıt noktasına  $K_p$  grafinin eklenmesiyle oluşan grafa *çift uçurtma (double kite) graf* denir ve  $DK(p, q)$  ile gösterilir [28].

Uçurtma grafla ilgili literatürde çeşitli çalışmalar yer almaktadır [28, 39, 58-60]. Mertebesi ve maksimum klik genişliği belirli olan bağlantılı graflar arasında komşuluk spektral yarıçapının minimum değer aldığı grafların uçurtma graf oldukları gösterilmiştir [39]. Bu çalışmada aynı zamanda belirli maksimum klik genişliğine sahip uçurtma grafin komşuluk spektral yarıçapı için dar bir sınır aralığı da verilmiştir. Nath ve Paul [58] de uzaklık matrisinin spektral yarıçapını maksimize eden grafların uçurtma graf olduğunu göstermiştir. [59] ve [60] da ise belirli maksimum klik genişliğine sahip bağlantılı graflar arasında komşuluk ve Laplasyan spektral yarıçaplarının sırasıyla, en küçük dört ve en küçük üç özdeğeri hesaplanmıştır. Bu iki çalışmada da uçurtma graf kullanılmıştır. Böylece bazı graf matrislerinin spektral yarıçaplarının ekstremum değerleri üzerinde uçurtma grafin önemli rol oynadığı söylenir. Ayrıca, Stanic bağlantılı graflar içerisinde çift uçurtma grafin komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğunu göstermiştir [28].

Bu tez çalışmasında ise  $\forall p, q \in \mathbb{Z}^+$  için  $Kite_p^q$  grafin komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olup olmadığı araştırılmıştır. Öncelikle  $Kite_p^q$  grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu hesaplanmış ve sırasıyla  $q = 1$ ,  $q = 2$  değerleri için komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğuna dair kısa ispatlar elde edilmiştir. Sonrasında ise genel form için ispat yapılmış ve  $\forall p, q \in \mathbb{Z}^+$  için  $Kite_p^q$  grafin komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu gösterilmiştir.

### 3.1 Uçurtma Grafin Komşuluk Matrisine Göre Karakteristik Polinomu

Bu bölümde, tam grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu ve Lemma 2.3.11 yardımıyla uçurtma grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu hesaplanmıştır.  $Kite_p^1$  den sarkıt noktanın silinmesiyle  $K_p$  elde edilir. Bu tam graftan da bir adet nokta silinirse  $K_{p-1}$  elde edilir. Lemma 2.3.11 ve (2.20) den,

$$\begin{aligned}
char(A(Kite_p^1))(x) &= x(char(A(K_p)))(x) - char(A(K_{p-1}))(x) \\
&= x(x - p + 1)(x + 1)^{p-1} - [(x - p + 2)(x + 1)^{p-2}] \\
&= (x + 1)^{p-2}[(x^2 - xp + x)(x + 1) - x + p - 2] \\
&= (x + 1)^{p-2}[x^3 - (p - 2)x^2 - xp + p - 2] \tag{3.1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde  $Kite_p^2$  grafin indirgenmiş alt grafları sırasıyla  $Kite_p^1$  ve  $K_p$  olur. Lemma 2.3.11 ve (3.1) den,

$$\begin{aligned}
char(A(Kite_p^2))(x) &= x(char(A(Kite_p^1))(x)) - char(A(K_p))(x) \\
&= x[x(char(A(K_p)))(x) - char(A(K_{p-1}))(x)] - char(A(K_p))(x) \\
&= (x^2 - 1)[char(A(K_p))(x)] - x[char(A(K_{p-1}))(x)] \tag{3.2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu polinomları kullanarak,  $n = p + q$  olmak üzere,  $Kite_p^q$  grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomunu hesaplayalım. (3.1) denkleminde,



$$\text{char}(A(Kite_p^1))(x) = x[\text{char}(A(K_p))(x)] - \text{char}(A(K_{p-1}))(x) \quad (3.3)$$

olur. (3.3) denkleminde katsayılar  $b_1 = -1$ ,  $a_1 = x$  dir. Aynı zamanda

$$\text{char}(A(Kite_p^2))(x) = (x^2 - 1)\text{char}(A(K_p))(x) - x[\text{char}(A(K_{p-1}))(x)] \quad (3.4)$$

denklemini yazarız ve burada katsayılar  $b_2 = -a_1 = -x$ ,  $a_2 = xa_1 - 1 = x^2 - 1$  olur.  $Kite_p^3$  grafi için de aşağıdaki denklemi yazarız.

$$\begin{aligned} \text{char}(A(Kite_p^3))(x) &= x[\text{char}(A(Kite_p^2))(x)] - \text{char}(A(Kite_p^1))(x) \\ &= (x(x^2 - 1) - x)\text{char}(A(K_p))(x) \\ &\quad - ((x^2 - 1)\text{char}(A(K_{p-1}))(x)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.5) denkleminde de katsayılar  $b_3 = -a_2 = -(x^2 - 1)$ ,  $a_3 = x(a_2) - a_1 = x(x^2 - 1) - x$  olur. Sonraki adımlarda ise  $n \geq 3$  olmak üzere  $b_n = -a_{n-1}$  ve  $a_n = x(a_{n-1}) - a_{n-2}$  dir. Bu fark denkleminde,

$$a_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^k \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{n-k} \quad (3.6)$$

olur.  $x = 2\cos\theta$  ve  $u = e^{i\theta}$  dönüşümünü uygularsak,

$$a_n = \sum_{k=0}^n u^{2k-n} = \frac{u^{-n}(1 - u^{2n+2})}{1 - u^2} \quad (3.7)$$

elde ederiz. Bu dönüşüm sayesinde yapılan hesaplama sonucunda  $n = p + q$  olmak üzere  $Kite_p^q$  grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu (3.8) deki gibi olur.

$$\begin{aligned}
\text{char}(A(\text{Kite}_p^{q_1}))(u + u^{-1}) &= a_{n-p} \text{char}(A(K_p))(u + u^{-1}) - a_{n-p-1} \text{char}(A(K_{p-1}))(u + u^{-1}) \\
&= \frac{u^{-n+p}(1 - u^{2n-2p+2})}{1 - u^2} \cdot ((u + u^{-1} - p + 1) \cdot (u + u^{-1} + 1)^{p-1}) \\
&\quad - \frac{u^{-n+p+1}(1 - u^{2n-2p+4})}{1 - u^2} \cdot ((u + u^{-1} - p + 2) \cdot (u + u^{-1} + 1)^{p-2}) \\
&= \frac{u^{-n+p}(1 + u - u^{-1})^{p-2}}{1 - u^2} [(2 - p) \cdot \\
&\quad (1 + u^{-1} - u^{2n-2p+2} - u^{2n-2p+3}) + (u^{-2} - u^{2n-2p+4})] \\
&= \frac{u^{-q}(1 + u - u^{-1})^{p-2}}{1 - u^2} [(2 - p) \cdot \\
&\quad (1 + u^{-1} - u^{2q+2} - u^{2q+3}) + (u^{-2} - u^{2q+4})]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

**Teorem 3.1.1.** *Keyfi iki  $\text{Kite}_{p_1}^{q_1}$  ve  $\text{Kite}_{p_2}^{q_2}$  grafları için  $\text{spec}(A(\text{Kite}_{p_1}^{q_1})) = \text{spec}(A(\text{Kite}_{p_2}^{q_2}))$  ise  $\text{Kite}_{p_1}^{q_1} \cong \text{Kite}_{p_2}^{q_2}$  olur.*

*İspat:*  $\text{Kite}_{p_1}^{q_1}$  ve  $\text{Kite}_{p_2}^{q_2}$  graflarının komşuluk matrislerine göre ko-spektral olduklarını varsayalım. Bu durumda aynı karakteristik polinoma ve Teorem 2.3.2 den aynı nokta sayısına sahip olmaları gerekir. Yani  $n = p_1 + q_1 = p_2 + q_2$  olur. Böylece,

$$\text{char}(A(\text{Kite}_{p_1}^{q_1}))(u + u^{-1}) = \text{char}(A(\text{Kite}_{p_2}^{q_2}))(u + u^{-1}) \tag{3.9}$$

ve (3.8) den

$$\begin{aligned}
&\frac{u^{-n+p_1}(1 + u - u^{-1})^{p_1-2}}{1 - u^2} [(2 - p_1) \cdot (1 + u^{-1} - u^{2n-2p_1+2} - u^{2n-2p_1+3}) \\
&\quad + (u^{-2} - u^{2n-2p_1+4})] \\
&= \frac{u^{-n+p_2}(1 + u - u^{-1})^{p_2-2}}{1 - u^2} [(2 - p_2) \cdot (1 + u^{-1} - u^{2n-2p_2+2} - u^{2n-2p_2+3}) \\
&\quad + (u^{-2} - u^{2n-2p_2+4})]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
&u^{p_1} \cdot (1 + u - u^{-1})^{p_1} \cdot [(2 - p_1) \cdot (1 + u^{-1} - u^{2n-2p_1+2} - u^{2n-2p_1+3}) + (u^{-2} - u^{2n-2p_1+4})] \\
&= u^{p_2} \cdot (1 + u - u^{-1})^{p_2} \cdot [(2 - p_2) \cdot (1 + u^{-1} - u^{2n-2p_2+2} - u^{2n-2p_2+3}) \\
&\quad + (u^{-2} - u^{2n-2p_2+4})]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir.  $p_1 > p_2$  olsun. O zaman  $n - p_2 > n - p_1$  ve

$$\begin{aligned} & u^{p_1-p_2} \cdot (1+u-u^{-1})^{p_1-p_2} \{ [(2-p_1) \cdot (1+u^{-1}-u^{2n-2p_1+2}-u^{2n-2p_1+3}) \\ & + (u^{-2}-u^{2n-2p_1+4})] - [(2-p_2) \cdot (1+u^{-1}-u^{2n-2p_2+2}-u^{2n-2p_2+3}) \\ & + (u^{-2}-u^{2n-2p_2+4})] \} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

olur.  $u \neq 0$  ve  $1+u+u^{-1} \neq 0$  olduğundan,

$$\begin{aligned} f(u) &= [(2-p_1) \cdot (1+u^{-1}-u^{2n-2p_1+2}-u^{2n-2p_1+3}) + (u^{-2}-u^{2n-2p_1+4})] \\ &\quad - [(2-p_2) \cdot (1+u^{-1}-u^{2n-2p_2+2}-u^{2n-2p_2+3}) + (u^{-2}-u^{2n-2p_2+4})] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde ederiz.  $f(u) = 0$  olduğundan,  $f$  in  $(2n-2p_2+5)$ -inci türevi de sıfıra eşit olur. Buradan,

$$[(p_1-2)(2n-2p_2+4)!(u^{-2n+2p_2-6})] - [(p_2-2)(2n-2p_2+4)!(u^{-2n+2p_2-6})] = 0 \quad (3.14)$$

yani,

$$[(p_1-2) - (p_2-2)] \cdot (u^{-2n+2p_2-6}) = 0 \quad (3.15)$$

olur.  $u \neq 0$  olduğundan ve (3.15) ten  $p_1 = p_2$  elde edilir. Fakat bu sonuç  $p_1 > p_2$  kabulümüzle çelişir.  $p_2 > p_1$  için de benzer çelişki elde edilir. Böylece  $p_1 = p_2$  olmak zorundadır. Bu da  $q_1 = q_2$  olmasını gerektirir. Dolayısıyla  $Kite_{p_1}^{q_1} \cong Kite_{p_2}^{q_2}$  olur.

### 3.2 Kısa Uçurtma (Short Kite) Graf

$Kite_p^q$  grafi  $q = 1$  iken kısa uçurtma graf olarak adlandırılmıştır [50].  $Kite_p^1$  grafi  $K_{p+1}$  grafindan  $K_{1,p-1}$  grafinin silinmesiyle de elde edilebilir. Bu yolla elde edilen grafların komşuluk spektrumları ile belirlenebildikleri [30] da gösterilmiştir. Dolayısıyla bu sonuç,  $Kite_p^1$  grafinin da komşuluk spektrumu ile belirlenebildiğini söylemeye yeterlidir.

Bu tez çalışmasında ise bu sonuç farklı bir yöntemle kısaca ispatlanmıştır. Öncelikle ispat için gerekli bazı teoremler aşağıda verilmiştir.

**Teorem 3.2.1.** [39]  $p, q \in \mathbb{Z}^+$ ,  $p \geq 3$  ve  $q \geq 1$  olsun. Bu takdirde  $\rho(Kite_p^q)$  için,

$$p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} < \rho(Kite_p^q) < p - 1 + \frac{1}{4p} + \frac{1}{p^2 - 2p} \quad (3.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Teorem 3.2.2.** [55]  $n$  noktalı ve  $m$  kenarlı bir  $G$  grafi,  $K_{r+1}$ -free ise

$$\rho(G) \leq \sqrt{2m \left( \frac{r-1}{r} \right)} \quad (3.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Önerme 3.2.3.** Kısa uçurtma graf komşuluk spektrumu ile belirlenebilir.

*İspat:*  $Kite_p^1$  grafi için,

$$\text{char}(A(Kite_p^1))(x) = (x+1)^{p-2} [x^3 - (p-2)x^2 - px + p-2] \quad (3.18)$$

olur.  $p = 3$  iken  $Kite_p^1$  aynı zamanda bir lolipop graftır ve bu graf Lemma 2.5.5 e göre komşuluk spektrumu ile belirlenebilir. Dolayısıyla ispata  $p \geq 4$  için devam edelim.  $n = p + 1$  olmak üzere, (3.18) de verilen karakteristik polinom ve Teorem 3.2.1 yardımıyla,  $\rho(Kite_p^1)$  değerinin  $n - 2$  ye çok yakın fakat daha büyük olduğunu söyleriz.  $\text{spec}(A(Kite_p^1)) = \text{spec}(A(G))$  olacak biçimde keyfi bir  $G$  grafi verilsin. Teorem 3.2.2. ye göre,

$$n - 2 > \sqrt{(n^2 - 3n + 4) \left( \frac{n-4}{n-3} \right)} \quad (3.19)$$

olduğundan,  $r = n - 3$  için  $G$  grafi  $K_{r+1}$ -free değildir. Bu da  $G$  nin  $K_{n-2}$ -free olmadığını gösterir. Yani  $G$  grafının maksimum klik genişliği için  $w(G) \geq n - 2$  eşitsizliği elde edilir.  $G$  tam graf olmadığından aynı zamanda  $w(G) \leq n - 1$  dir. Böylece  $n - 2 \leq w(G) \leq n - 1$  olur.

$w(G) = n - 2$  olsun.  $G$  nin bir maksimum kliği  $K_{n-2}$  ile gösterilirse,  $G$  de  $K_{n-2}$  dışında kalan iki tane daha nokta vardır. Bu noktaları  $i$  ve  $j$  ile etiketleyelim.  $K_{n-2}$  de  $i$  noktasına komşu

olan noktaların sayısını  $x_i$ ;  $j$  noktasına komşu olan noktaların sayısını  $x_j$ ;  $i$  ve  $j$  noktalarının her ikisine de komşu olan noktaların sayısını ise  $x_{i \wedge j}$  ile gösterelim.  $G$  nin kenar sayısı,

$$m(G) = \binom{n-1}{2} + 1 = \frac{n^2 - 3n + 4}{2} \quad (3.20)$$

olduğundan,  $G$  de  $K_{n-2}$  dışında kalan  $n-1$  adet daha kenar vardır. Ayrıca  $G$  de  $K_{n-2}$  dışında kalan üçgen sayısı

$$t(G) - t(K_{n-2}) = \frac{n^2 - 5n + 6}{2} = \binom{n-2}{2} \quad (3.21)$$

olur. Eğer  $i \sim j$  ise  $x_i + x_j = n - 2$  ve

$$t(G) = t(K_{n-2}) + \binom{x_i}{2} + \binom{x_j}{2} + x_{i \wedge j} \quad (3.22)$$

olur. Buradan

$$\binom{x_i}{2} + \binom{x_j}{2} + x_{i \wedge j} = \frac{n^2 - 5n + 6}{2} \quad (3.23)$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned} \binom{x_i}{2} + \binom{x_j}{2} + x_{i \wedge j} &\leq \binom{x_i}{2} + \binom{x_j}{2} + x_i \\ &< \binom{x_i + x_j}{2} = \binom{n-2}{2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla  $i \not\sim j$  olmalıdır. Bu durumda  $x_i + x_j = n - 1$  olur. Fakat yine,

$$\binom{x_i}{2} + \binom{x_j}{2} < \binom{x_i + x_j - 1}{2} = \binom{n-2}{2} \quad (3.25)$$

olduğundan çelişki elde edilir. Böylece  $w(G) \neq n - 2$  olur. Yani  $w(G) = n - 1$  olmak zorundadır. Buradan  $G \cong Kite_p^1$  olduğu görülür.

### 3.3 $Kite_p^2$ Graf

$Kite_p^q$  grafına komşuluk matrisine göre ko-spektral olan keyfi bir  $G$  grafının maksimum klik genişliği için bu tez çalışmasında bir sınır elde edilmiş ve aşağıdaki lemma ile verilmiştir. Daha sonrasında ise  $Kite_p^2$  grafın komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu bu lemmanın yardımıyla gösterilmiştir.

**Lemma 3.3.1.**  $spec(A(Kite_p^q)) = spec(A(G))$  olacak biçimde keyfi bir  $G$  grafi için,

$$w(G) \geq p - 2q + 1 \quad (3.26)$$

eşitsizliği sağlanır.

*İspat:*  $spec(A(Kite_p^q)) = spec(A(G))$  olduğundan, Teorem 2.3.2. ye göre  $G$  nin mertebesi

$$n = p + q$$

ve kenar sayısı

$$m(G) = \binom{p}{2} + q = \frac{p^2 - p + 2q}{2}$$

olur. Ayrıca,  $\rho(G) = \rho(Kite_p^q)$  olur. Teorem 3.2.2. den,

$$\rho(G) > \sqrt{2m \binom{r-1}{r}}$$

ise  $G$  grafi  $K_{r+1}$  - free olamaz, yani

$$w(G) \geq p - 2q + 1$$

olur. Şimdi ise iddia  $r < p - 2q$  için

$$\sqrt{2m \binom{r-1}{r}} < \rho(G)$$

olduğudur.

Teorem 3.2.1. den,

$$p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} < \rho(G)$$

olur. Böylece iddianın ispatı için gösterilmesi gereken durum,  $r < p - 2q$  iken

$$\sqrt{2m\left(\frac{r-1}{r}\right)} < p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}$$

olduğudur. Gerçekten de,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2m\left(\frac{r-1}{r}\right)}\right)^2 - \left(p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right)^2 &= (p^2 - p + 2q)(r - 1) - r\left(p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right)^2 \\ &= (p^2 - p + 2q)(r - 1) - \\ &\quad \left(\frac{r(p^2 + p^3)}{p^5}\right)\left(2(p - 1) + \frac{p^2 + p^3}{p^5}\right) \\ &= pr - p^2 + p + (2q - 1)r - 2q - \\ &\quad \left(\frac{r(p^2 + p^3)}{p^5}\right)\left(2(p - 1) + \frac{p^2 + p^3}{p^5}\right) \quad (3.27) \end{aligned}$$

olur. Mathematica yardımıyla gerekli hesaplama yapıldığında,  $r < p - 2q$  iken

$$pr - p^2 + p + (2q - 1)r - 2q - \left(\frac{r(p^2 + p^3)}{p^5}\right)\left(2(p - 1) + \frac{p^2 + p^3}{p^5}\right) < 0 \quad (3.28)$$

yani,

$$\left(\sqrt{2m\left(\frac{r-1}{r}\right)}\right)^2 - \left(p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right)^2 < 0 \quad (3.29)$$

olur. Böylece

$$\left(\sqrt{2m\left(\frac{r-1}{r}\right)}\right)^2 < \left(p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right)^2 \quad (3.30)$$

elde edilir.  $\sqrt{2m\left(\frac{r-1}{r}\right)} > 0$  ve  $p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} > 0$  olduğu için,

$$\sqrt{2m\left(\frac{r-1}{r}\right)} < p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} < \rho(G) \quad (3.31)$$

olur. Yani iddia ispatlanır ve böylece  $w(G) \geq p - 2q + 1$  olur.

**Teorem 3.3.2.** [39] *Eğer bağlantılı bir  $G$  grafinin mertebesi, kenar sayısı ve maksimum klik genişliği  $Kite_p^q$  grafi ile aynı ise  $G \cong Kite_p^q$  olur.*

**Teorem 3.3.3.**  $\forall p \in \mathbb{Z}^+$  için,  $Kite_p^2$  grafi komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir graftır.

*İspat:* Eğer  $p = 1$  ya da  $p = 2$  ise  $Kite_p^2$  grafi aslında  $P_3$  ya da  $P_4$  tür. Ayrıca, eğer  $p = 3$  ise  $H_{5,3}$  grafini elde ederiz. Bu grafların komşuluk spektrumları ile belirlenebilen graflar oldukları Lemma 2.5.5. ve Teorem 2.5.10. da verilmiştir. Dolayısıyla ispata  $p \geq 4$  için devam edelim.  $Kite_p^2$  grafi için,

$$\text{char}(A(Kite_p^2))(x) = (x+1)^{p-2}[x^4 + (2-p)x^3 - (p+1)x^2 + (2p-4)x + p-1] \quad (3.32)$$

olur. Gerekli hesaplama yapıldığında,  $Kite_p^2$  nin komşuluk özdeğerlerine ilişkin şu sonuçlar elde edilir;

$$\begin{aligned} p-1 &< \lambda_1(A(Kite_p^2)) = \rho(Kite_p^2) < p, \\ 0 &< \lambda_2(A(Kite_p^2)) < 2, \\ \lambda_3(A(Kite_p^2)) &< 0, \\ \lambda_4(A(Kite_p^2)) &= \dots = \lambda_{p+1}(A(Kite_p^2)) = -1, \\ \text{ve } \lambda_{p-1}(A(Kite_p^2)) &< -1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Mertebesi  $n$  ve kenar sayısı  $m$  olan keyfi bir  $G$  grafi için  $\text{spec}(A(Kite_p^2)) = \text{spec}(A(G))$  olduğunu varsayalım. O zaman Teorem 2.3.2. den;  $n = p + 2$ ,

$$m = \binom{p}{2} + 2 = \frac{p^2 - p + 4}{2}$$

ve

$$t(G) = t(Kite_p^2) = \binom{p}{3} = \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{6}$$

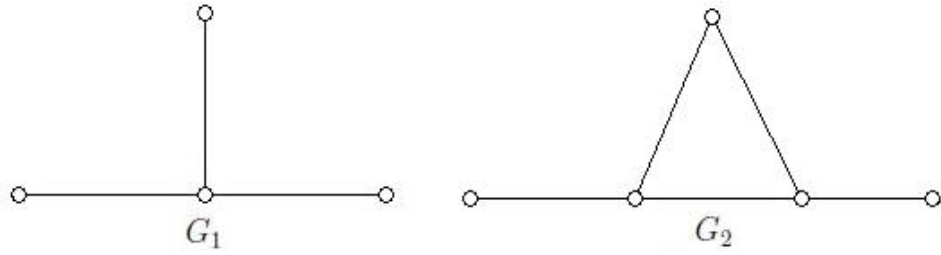
olur. Lemma 3.3.1. den  $w(G) \geq p - 2q + 1$  dir. Yani  $q = 2$  iken  $w(G) \geq p - 3 = n - 5$  olur. Tam grafların komşuluk spektrumları ile belirlenebildikleri halihazırda bilindiğinden,



$w(G) \neq n$  dir. Böylece eğer  $w(G) = n - 1 = p + 1$  ise  $G$  grafi mertebesi  $p + 1$  olan en az bir klik içerir. Yani  $G$  nin kenar sayısı  $\binom{p+1}{2}$  değerinden büyük ya da eşit olur. Fakat

$$\binom{p+1}{2} > \binom{p}{2} + 2 = m$$

olduğundan bu bir çelişkidir ve  $w(G) \neq n - 1$  olur. Böylece  $G$  grafinin maksimum klik genişliği şu şekilde sınırlanır ;  $p - 3 \leq w(G) \leq p$ . İç içe geçme lemmasından,  $G$  grafi aşağıdaki şekilde verilen  $G_1$  ve  $G_2$  graflarını indirgenmiş alt graf olarak içeremez çünkü  $\lambda_3(A(G_1)) = \lambda_3(A(G_2)) = 0$  dir.



Şekil. 3.2:  $G_1$  ve  $G_2$  grafları

Eğer  $G$  bağlantısız bir graf ise iç içe geçme lemmasından,  $G$  nin bileşenleri (en fazla bir tanesi hariç) Şekil 2.52 de verilen Smith grafların indirgenmiş alt grafları olur. Fakat bu mümkün değildir çünkü  $G_1$  ve herhangi bir yol graf (yol grafların özdeğerleri simetrik olduğundan)  $G$  nin indirgenmiş alt grafi olamaz. Dolayısıyla  $G$  grafinin bağlantısız olması mümkün değildir. Yani  $G$  bağlantılı olmak zorundadır.

Eğer  $w(G) = p$  ise Teorem 3.3.2 den,  $G \cong Kite_p^q$  olur. Dolayısıyla  $w(G) < p$  için incelemeye devam edelim.  $w(G) \geq p - 3$  olduğundan,  $G$  grafi mertebesi  $p - 3$  olan en az bir klik içerir. Bu kliği  $K_{w(G)}$  ile gösterelim.  $K_{w(G)}$  kliği dışında ise en fazla 5 adet nokta bulunabilir. Bu noktaları sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5 ile etiketleyelim ve bu noktaların kümesini  $A$  ile gösterelim. Buradan  $|A| \leq 5$  olduğu açıktır. Bunun yanısıra,  $G_1$  ve  $G_2$  grafları  $G$  nin indirgenmiş alt grafları olmadığından ve  $G$  de izole nokta bulunamayacağından,  $\forall i, j \in A$  için  $i \sim j$  olduğunu söyleriz. Böylece  $p \geq 6$  olur.

Keyfi  $i \in A$  için,  $i$  noktasının  $K_{w(G)}$  kliğindeki komşu olduğu noktaların sayısını  $x_i$  ile gösterelim.  $p - 1 \geq w(G) \geq p - 3$  olduğundan  $\forall i \in A$  için  $i \sim j$  ise aşağıdaki eşitsizlik elde

edilir.

$$x_i \leq w(G) - |A| + 1 \quad (3.34)$$

Ayrıca keyfi  $i, j \in A$  ve  $i < j$  için  $K_{w(G)}$  de  $i$  ve  $j$  noktalarının her ikisine birden komşu olan noktaların sayısını  $x_{i \wedge j}$  ile gösterelim. Benzer şekilde eğer  $i \sim j$  ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$x_{i \wedge j} \leq w(G) - |A| \quad (3.35)$$

$A$  ve  $K_{w(G)}$  arasında oluşan ve bu kümeler tarafından kapsanmayan kenarların sayısını  $d$  ile, üçgenlerin sayısını ise  $\alpha$  ile gösterelim. O zaman,

$$m = \binom{p}{2} + 2 = \binom{w(G)}{2} + \binom{|A|}{2} + d \quad (3.36)$$

ve

$$t(G) = \binom{p}{3} = \binom{w(G)}{3} + \binom{|A|}{3} + \alpha \quad (3.37)$$

olur. Diğer taraftan  $x_i$  ve  $x_{i \wedge j}$  tanımları gereği,  $\alpha$  ve  $d$  için aşağıdaki iki eşitlikte sağlanmalıdır.

$$d = \sum_{i=1}^{|A|} x_i \quad (3.38)$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{|A|} \binom{x_i}{2} + \sum_{i \sim j} x_{i \wedge j} \quad (3.39)$$

Eğer  $w(G) = p - 3$  ise  $|A| = 5$  ve buradan  $p \geq 8$  olur. Böylece,

$$d = 3p - 14 \quad (3.40)$$

ve

$$\alpha = \binom{p}{3} - \binom{p-3}{3} - 10 = \frac{3p^2}{2} - \frac{15p}{2} \quad (3.41)$$

elde edilir. (3.34),(3.35),(3.38),(3.39) ve (3.41) den

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{i=1}^5 \binom{x_i}{2} + \sum_{i \sim j} x_{i \wedge j} \leq 3 \binom{p-7}{2} + \binom{7}{2} + 2 \sum_{i=1}^5 x_i \\
&= 3 \binom{p-7}{2} + \binom{7}{2} + 6p - 28 \\
&= \frac{3p^2 - 33p}{2} + 77
\end{aligned} \tag{3.42}$$

olur. Fakat  $p = 8$  iken bu sonuç çelişki oluşturur. Ayrıca,  $p > 8$  iken

$$\frac{3p^2 - 33p}{2} + 77 < \frac{3p^2 - 15p}{2} = \alpha \tag{3.43}$$

olduğundan yine çelişki elde edilir. Yani  $w(G) \neq p - 3$  tür.

Eğer  $w(G) = p - 2$  ise  $|A| = 4$  ve buradan  $p \geq 7$  dir. Böylece,

$$d = 2p - 7 \tag{3.44}$$

ve

$$\alpha = \binom{p}{3} - \binom{p-2}{3} - 4 = p^2 - 4p \tag{3.45}$$

olur. Diğer yandan (3.42) ye benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{i=1}^4 \binom{x_i}{2} + \sum_{i \sim j} x_{i \wedge j} \leq 2 \binom{p-5}{2} + \binom{3}{2} + 2 \sum_{i=1}^4 x_i \\
&= p^2 - 7p + 19
\end{aligned} \tag{3.46}$$

olur. Fakat  $p \geq 7$  için

$$p^2 - 7p + 19 < p^2 - 4p = \alpha \tag{3.47}$$

olduğu açıktır. Yani çelişki elde edilir ve  $w(G) \neq p - 2$  dir.

Benzer şekilde, eğer  $w(G) = p - 1$  ise  $|A| = 3$  ve buradan  $p \geq 6$  dır. Böylece

$$d = p - 2 \quad (3.48)$$

ve

$$\alpha = \frac{p^2 - 3p}{2} \quad (3.49)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^3 \binom{x_i}{2} + \sum_{i \sim j} x_{i \wedge j} \leq \binom{p-3}{2} + p - 2 \\ &= \frac{p^2 - 5p}{2} + 4 \end{aligned} \quad (3.50)$$

olur.  $p \geq 6$  için,

$$\frac{p^2 - 5p}{2} + 4 < \frac{p^2 - 3p}{2} = \alpha \quad (3.51)$$

olduğu açıktır ve yine çelişki elde edildiğinden  $w(G) \neq p - 1$  olur. Bütün bu çelişkilerin sonucunda  $w(G) \neq p$  olduğunu söyleriz. Böylece  $w(G) \leq p$  olduğundan,  $w(G) = p$  sonucunu elde ederiz. Teorem 3.3.2 den  $G \cong Kite_p^2$  elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

### 3.4 Uçurtma Grafın Komşuluk Spektrumu ile Belirlenebilirliği

Bu kısımda  $\forall p, q \in \mathbb{Z}^+$  için  $Kite_p^q$  nun komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir graf olduğu söylenmiştir. Öncelikle bu hipotezin ispatı için gerekli bazı lemmalara yer verelim.

**Lemma 3.4.1.** [27]  $G$  bir yıldızsal ağaç ise  $\lambda_2(A(L(G))) < 2$  olur.

*İspat:*  $G = T(l_1, \dots, l_\Delta)$  ve  $m = l_1 + \dots + l_\Delta$  olsun.  $G$  grafının işaretli Laplasyan matrisinin özdeğerleri  $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_m(G)$  olsun. Lemma 2.3.18. den  $Subd(G)$  nin komşuluk özdeğerleri  $\mp\sqrt{\mu_1(G)}, \dots, \mp\sqrt{\mu_m(G)}, 0$  olur.  $Subd(G)$  ayrıca bir yıldızsal ağaç olduğundan,  $Subd(G)$  deki  $\Delta$  dereceli nokta  $v$  ise  $Subd(G) - v = P_{2l_1} \cup \dots \cup P_{2l_\Delta}$  olur. (2.8) ve iç içe geçme lemmasından  $\sqrt{\mu_2(G)} < 2$  olur. Böylece  $\mu_2(G) < 4$  tür. Lemma 2.3.17. den ise  $\lambda_2(A(L(G))) < 2$  olur.

**Lemma 3.4.2.** [27, 31]  $G = T(l_1, \dots, l_\Delta)$ ,  $\Delta \neq 3$  ve  $H$  bağlantılı bir graf olsun. Eğer  $spec(A(H)) = spec(A(L(G)))$  ise  $H \cong L(G)$  dir.

*İspat:*  $G$  bir yıldızsal ağaç olduğundan  $\Delta \geq 2$  dir.  $\Delta = 2$  ise  $G$  bir yol graftır.  $L(G)$  de yine bir yol graf olur. Yol grafların komşuluk spektrumlarına göre belirlenebilir oldukları Teorem 2.5.10. da söylenmiştir.  $L(G)$  ve  $H$  komşuluk matrislerine göre ko-spektral olduklarından, Teorem 2.3.2. ye göre aynı nokta ve kenar sayısına sahiptir.  $|L(G)| = n$  olsun.  $\Delta \geq 4$  ise  $n > 4$  tür. Ayrıca Lemma 2.3.15. ten  $d_{L(G)} = n + 1$  olur. Böylece  $d_H = d_{L(G)} = n + 1 > 5$  olur. Lemma 2.3.14. ve Lemma 2.3.15 ten  $H, \tilde{T}$  gibi bir ağacın çizgi grafi olur.  $L(G) = L(T(l_1, \dots, l_\Delta))$  ve  $H = L(\tilde{T})$  olduğundan,  $G$  ve  $\tilde{T}$  graflarının nokta ve kenar sayılarının aynı olduğu söylenir. Lemma 2.3.19. dan  $spec(Q(G)) = spec(Q(\tilde{T}))$  dir. Böylece, Lemma 2.5.2. ve Lemma 2.5.3. ten  $H \cong L(G)$  elde edilir.

*Uyarı :*  $\Delta = 3$  durumu için [11,61] kaynaklarına bakılabilir.

**Sonuç 3.4.3.** Bağlantılı graflar arasında,  $\Delta \neq 3$  ise  $L(T(l_1, \dots, l_\Delta))$  komşuluk spektrumuyla belirlenebilir.

**Sonuç 3.4.4.** Bağlantılı graflar arasında,  $\forall p, q \in \mathbb{Z}^+$  için  $Kite_p^q$  komşuluk spektrumuyla belirlenebilir.

*İspat:* Lemma 3.4.2. ve Sonuç 3.4.3. ten açıktır.

**Teorem 3.4.5.** Keyfi bir  $G$  grafi için,  $spec(A(Kite_p^q)) = spec(A(G))$  ise  $G$  bağlantılı graf olur.

*İspat:*  $p \leq 2$  ya da  $p = 3$  ise yol graf ya da lolipop graf elde edilir. Dolayısıyla  $p \geq 4$  için devam edelim.  $l_1 = \dots = l_{p-1} = 1$  ve  $l_p = q + 1$  olmak üzere,  $Kite_p^q = L(T(l_1, \dots, l_p))$  olur. Lemma 2.5.4. ten  $Kite_p^q$  grafi  $p \geq 12$  için komşuluk spektrumu ile belirlenebilir bir graftır.

Dolayısıyla incelenmesi gereken  $4 \leq p \leq 11$  durumudur. Lemma 3.4.1. den  $\lambda_2(A(Kite_p^q)) < 2$  olur. Lemma 2.3.14. ten ise  $\lambda_n(A(Kite_p^q)) > -2$  olur öyle ki burada  $n = p + q$  dur.

Varsayalım ki  $G$  bağlantısız bir graf ve  $spec(A(G)) = spec(A(Kite_p^q))$  olsun.  $G$  bağlantısız olduğundan,  $k \geq 1$  için  $\lambda_1(A(G)) = \lambda_1(A(H))$  olacak şekilde  $G = H \dot{\cup} H_{r_1} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} H_{r_k}$  yazabiliriz. Burada  $H, H_{r_i}$  ( $i = 1, \dots, k$ )  $G$  nin bileşenleridir. Buradan ve iç içe geçme lemmasından hareketle  $\lambda_2(A(H)) \leq \lambda_2(A(G)) < 2$  ve  $\lambda_1(A(H_{r_i})) \leq \lambda_2(A(G)) < 2$  olur. Lemma 2.5.1. den  $H_{r_i}$  bileşeni Smith grafın indirgenmiş bir alt grafıdır. Yani  $G$  grafının  $H$  dışındaki tüm bileşenleri birer ağaç olur. Bu da  $t(G) = t(H)$  demektir. Teorem 2.3.2. den

$$t(H) = t(G) = t(Kite_p^q) = \binom{p}{3} \quad (3.52)$$

olur.  $\lambda_1(A(H)) = \lambda_1(A(Kite_p^q)) < p$  olduğundan,  $H$  bileşeninin maksimum klik genişliği  $w(H) \leq p$  olur.

*İddia 1 :  $w(H) < p$*

$w(H) = p$  olduğunu kabul edelim.  $H$  bileşeninin nokta sayısı  $n_H$  ise  $n_H < n$  dir. (3.52) den,  $H$  bileşeninde mertebesi  $p$  olan en fazla bir tane klik vardır ve bu klik dışında kalan bir üçgen yoktur. Ayrıca  $\lambda_2(A(H)) < 2$  ve  $\lambda_n(A(H)) > -2$  olduğunu biliyoruz. İç içe geçme lemmasından  $S_4$  ve mertebesi (2 den büyük) çift sayı olan herhangi bir döngü graf  $H$  ın indirgenmiş alt grafi olamaz. Bir  $G$  grafındaki 5-uzunluklu kapalı yürüyüşlerin sayısını  $t_5(G)$  ile gösterirsek, Teorem 2.3.2. den  $t_5(H) = t_5(Kite_p^q)$  olur. Aynı zamanda, uçurtma graf tanımı gereği,  $t_5(Kite_p^q) = t_5(Kite_p^1)$  olduğu açıktır. Buradan,  $H$  bileşeninin  $K_p$  kliğindeki noktaların en fazla bir tanesi klik dışında kalan en fazla bir adet noktaya komşu olabilir. Dolayısıyla, (3.52) yi de kullanarak,  $H$  bileşeninin  $K_p$  kliğine bir adet ağaç eklenmesiyle elde edilen bir graf formunda olduğu söylenir. Bu durumda,  $H$  a eklenen nokta sayısı  $a_1$  ise  $H$  ta klik dışında kalan kenar sayısı da  $a_1$  e eşit olur. Bunun yanısıra,  $i = 1, \dots, k$  için,  $G$  deki diğer  $H_{r_i}$  bileşenlerinin nokta sayıları  $n_{H_{r_i}}$  ise  $G$  deki toplam nokta ve kenar sayıları için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$p + a_1 + n_{H_{r_1}} + \dots + n_{H_{r_k}} = p + q$$

$$\binom{p}{2} + a_1 + \sum_{i=1}^k (n_{H_{r_i}} - 1) = \binom{p}{2} + q \quad (3.53)$$

Buradan,

$$a_1 + n_{H_{r_1}} + \dots + n_{H_{r_k}} = q$$

$$a_1 + n_{H_{r_1}} + \dots + n_{H_{r_k}} - k = q \quad (3.54)$$

olur ki bu da  $k = 0$  demektir. Yani  $w(H) = p$  ise  $G$  de  $H$  bileşeninden başka bileşen yoktur. Fakat bu durum  $G$  grafının bağlantısız olmasıyla çelişir ve iddia doğru olur,  $w(H) < p$  dir. Buradan  $3 \leq w(H) \leq 10$  elde edilir.

$\lambda_1(A(H)) = \lambda_1(A(Kite_p^q))$  ve  $4 \leq p \leq 11$  olduğundan [47, Tablo A2] yardımıyla  $H$  grafının bir istisna graf olmadığını söyleriz. Buradan ve Lemma 2.3.14. ten,  $H$  grafi tek petal eklenmiş bir ağacın genelleştirilmiş çizgi grafi, bir ağacın çizgi grafi ya da tek bir-döngülü bir grafın çizgi grafidir. Böylece aşağıda verilen ikinci iddianın doğruluğunu göstermek ispatın tamamlanması için yeterli olacaktır.

*İddia 2:*  $H$  grafi, herhangi bir grafın genelleştirilmiş çizgi grafi olamaz.

Öncelikle bazı notasyonları verelim.  $V \subseteq V(H)$ ,  $|V| = n'$ ,  $k \in \{1, \dots, n'\}$  ve  $i, j, i_k \in V$  olmak üzere,

$$T_i = \{x \in V(H) - V : \forall y \in V - \{i\} \text{ için } x \sim i \wedge x \not\sim y\},$$

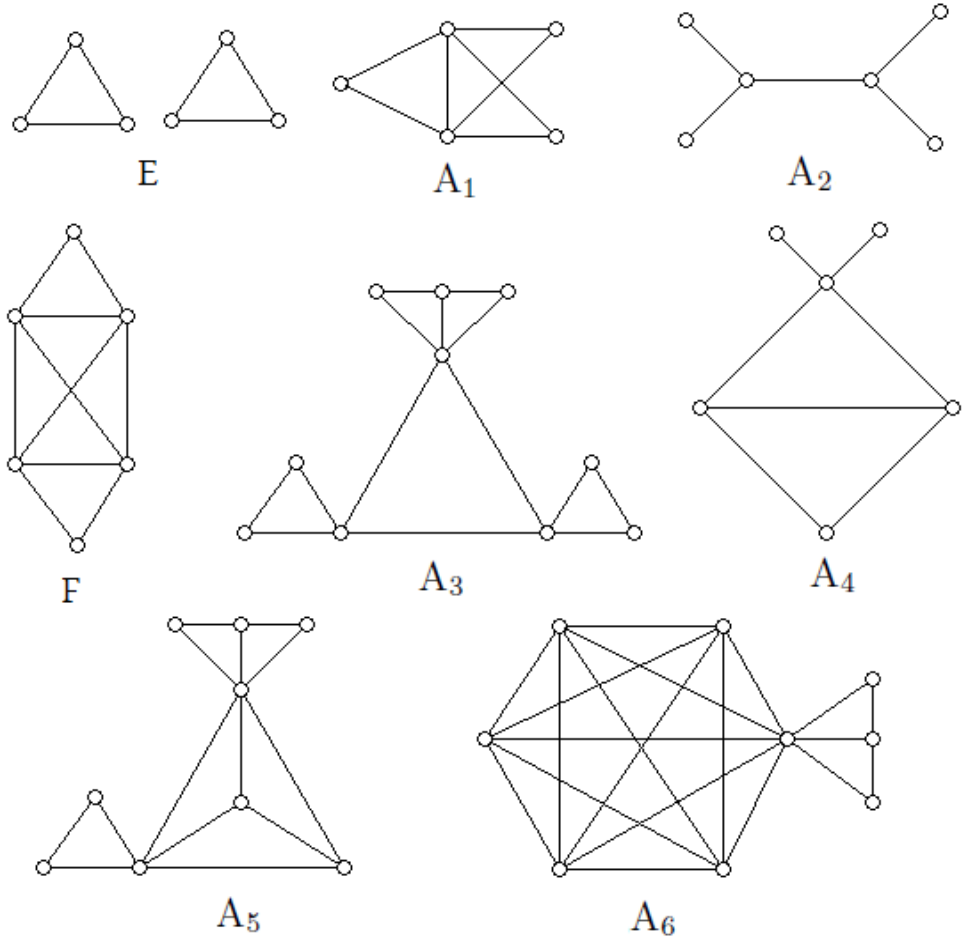
$$T_{ij} = \{x \in V(H) - V : \forall y \in V - \{i, j\} \text{ için } x \sim i \wedge x \sim j \wedge x \not\sim y\}$$

⋮

$$T_{i_1 \dots i_k} = \{x \in V(H) - V : \forall y \in V - \{i_1, \dots, i_k\} \text{ için } x \sim i_1 \wedge \dots \wedge x \sim i_k \wedge x \not\sim y\}$$

kümelerini alalım.

Şekil 3.3 teki graflar ikinci en büyük ve en küçük özdeğerlerinden dolayı  $H$  grafının indirgenmiş alt grafi olamazlar. Ayrıca  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  için  $n(E)$ ,  $n(F)$  ve  $n(A_i)$  sırasıyla  $E$ ,  $F$  ve  $A_i$  nin mertebelerini göstermektedir.



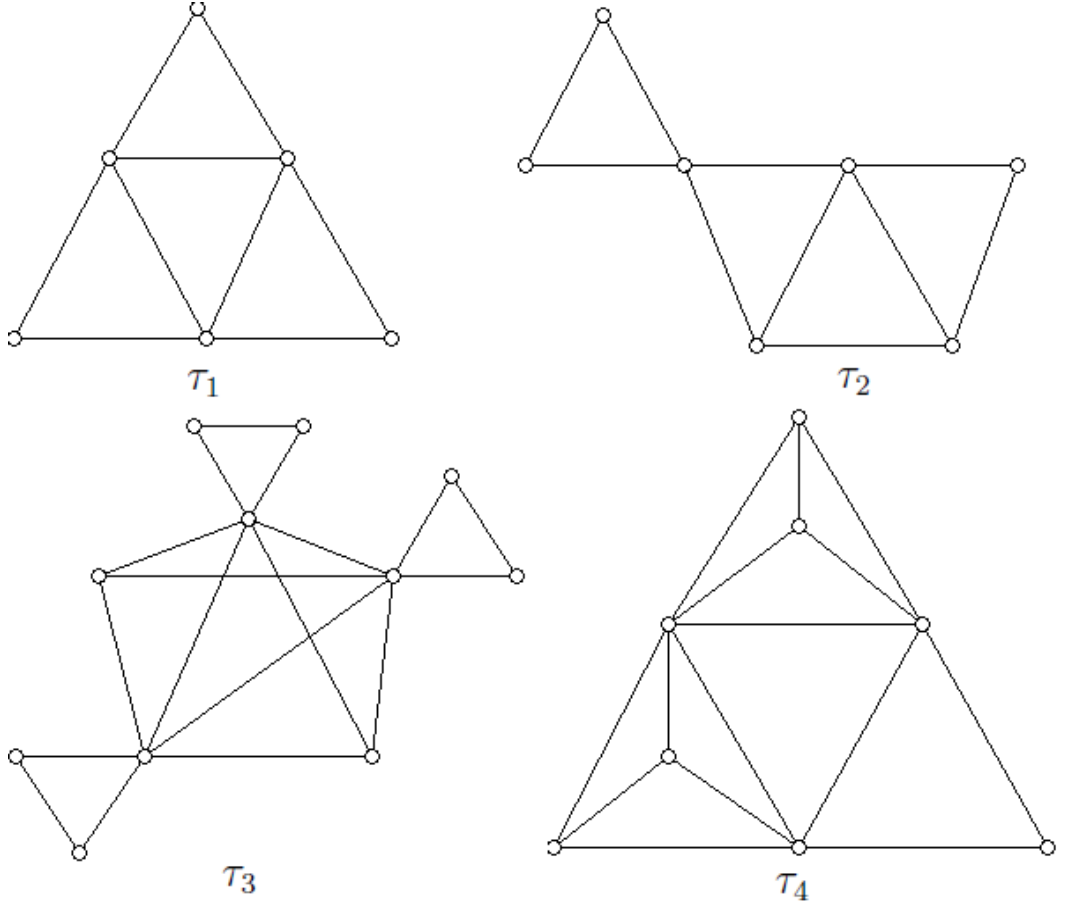
Şekil. 3.3:  $E, F, A_1 - A_6$  grafları

$H$  grafinin genelleştirilmiş bir çizgi graf olduğunu varsayalım. Teorem 2.1.6. dan, Şekil 2.21 de verilen graflarda bu durumda yasaklanmış alt graf olurlar. Ayrıca, Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 te verilen graflarda ispatın devamında kullanılmıştır.

$H$  grafinin genelleştirilmiş çizgi graf olmasını dört durumda inceleyeceğiz.

*Durum 1* :  $w(H) = 3$  olsun.  $H$  grafindaki bir üçgenin noktalarını  $V' = \{1, 2, 3\}$  ile etiketleyelim.  $T_{123} = \emptyset$  olduğu açıktır.  $\forall i, j \in V'$  için  $x, y \in T_{ij}$  iken  $x \sim y$  ise  $K_4$ ,  $x \not\sim y$  ise  $A_1$  birer indirgenmiş alt graf olurlar. Dolayısıyla  $\forall i, j \in V'$  için  $|T_{ij}| \leq 1$  dir. Şimdi,  $\forall i \in V'$  için  $T_i$  kümelerini inceleyelim.  $K_4$  ün oluşmaması için bu kümedeki keyfi üç nokta arasında en fazla iki adet kenar bulunur. Ayrıca  $G^{16}$  ve  $S_4$  (ya da  $G^6$ ) yasaklanmış alt graflar olduklarından  $T_i$  deki herhangi üç nokta arasındaki kenar sayısı 0 ya da 1 olamaz. Böylece,  $G^{20}$  nin de yasaklanmış alt graf olduğunu da kullanarak  $\forall i \in V'$  için  $|T_i| \leq 3$  elde edilir. Aynı zamanda,  $A_2$  ve  $A_3$  yasaklanmış alt graf olduklarından  $\forall i \in V'$  için  $T_i \neq \emptyset$  ise

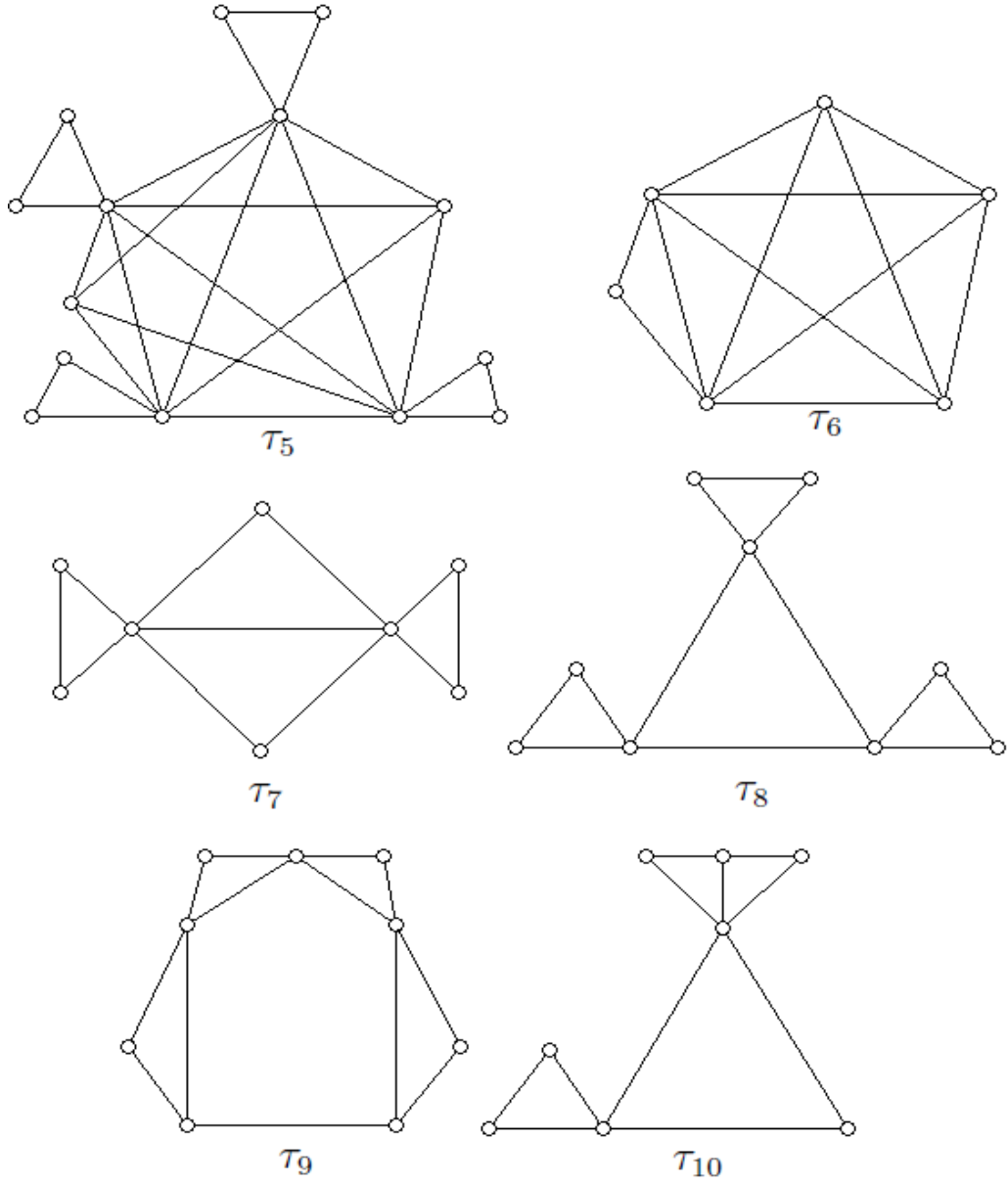




Şekil. 3.4:  $\tau_1 - \tau_4$  grafları

$\sum_{i \in V'} |T_i| \leq 6$  ve  $\exists i \in V'$  için  $T_i \neq \emptyset$  ise  $\sum_{i \in V'} |T_i| \leq 5$  olur. Dolayısıyla aşağıdaki alt durumlar ile devam edebiliriz.

*Alt durum 1:*  $\forall i, j \in V'$  için  $T_{ij}$  kümelerinden en az iki tanesinin boştan farklı olduğunu varsayalım. Genelliği bozmadan,  $T_{12} = \{x\}$  ve  $T_{13} = \{y\}$  olsun.  $x \sim y$  ise  $C_4$  bir indirgenmiş alt graf olur. Yani  $x \not\sim y$  dir.  $C_4, K_4, G^{19}, G^{20}, G^{21}, G^{22}, G^{24}, G^{25}$  yasaklanmış alt graflarını kullanarak  $|T_x| \leq 2, |T_y| \leq 2$  ve  $|T_x| + |T_y| \leq 3$  sonuçlarını elde ederiz. Ayrıca diğer tüm  $T_1, T_2, T_3, T_{xy}, \dots, T_{xy123}$  kümeleri boş küme olur.  $E$  de bir yasaklanmış alt graf olduğundan  $H$  daki hiçbir üçgen  $\overset{\Delta}{123}$  üçgeninin en az bir noktasını (ya da kenarını) içerir veya  $\overset{\Delta}{123}$  üçgenine komşudur. Bu koşullar altında,  $H$  daki üçgen sayısı en fazla 5 olabilir. Daha önce söylendiği üzere  $p > 4$  için  $t(Kite_p^q) \geq 10$  olur. Eğer  $p = 4$  ise  $t(H) = 4$  tür. Dolayısıyla, Şekil 3.4 te verilen  $\tau_1$  veya  $\tau_2$ ,  $H$  ın indirgenmiş bir alt grafi olur. Bu da  $\rho(Kite_4^q) < \rho(\tau_1) < \rho(\tau_2)$  olmasıyla çelişir.



Şekil. 3.5:  $\tau_5 - \tau_{10}$  grafları

*Alt durum 2* :  $T_{ij}$  kümelerinden sadece birinin boştan farklı olduğunu varsayalım. Genelliği bozmadan  $T_{12} = \{x\}$  ve  $T_{13} = T_{23} = \emptyset$  olsun. Eğer  $T_{x1}$  veya  $T_{x2}$  boştan farklı ise bu durum esasen en az iki tane  $T_{ij}$  kümesinin boştan farklı olması durumuyla eş olur. Yani incelemeye  $T_{x1} = T_{x2} = \emptyset$  için devam edelim.  $C_4$  ve  $K_4$  yasaklanmış alt graflar olduklarından  $T_{x123} = T_{123} = T_{x23} = T_{x13} = T_{x12} = T_{x3} = \emptyset$  olur. Ayrıca  $\forall i \in \{x, 1, 2, 3\}$  ve  $i \neq j$  için eğer  $\exists z_1, z_2 \in V(H)$ ,  $z_1 \sim i$  ve  $z_2 \sim j$  ise  $z_1 \not\sim z_2$  olur. Aksi takdirde  $A_1$  veya  $C_4$ ,  $H$  in bir indirgenmiş alt grafi olur.  $G^{15}$  ve  $G^{17}$  yasaklanmış alt graf olduklarından  $[|T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_x|] \leq 4$  tür. Bu bulgulardan ve  $E$  yasaklanmış alt graf olduğundan  $t(H)$  değeri en fazla 4 olur.  $t(H) = t(Kite_p^q) \geq 4$  olduğundan  $t(H) = 4$  elde edilir. Fakat bu durumda da Şekil 3.5 te verilen  $\tau_7$ ,  $H$  in bir indirgenmiş alt grafi olur. Bu sonuç  $\rho(\tau_7) > \rho(Kite_4^q)$  olmasıyla çelişir.

*Alt durum 3 :*  $T_{ij}$  kümelerinin hepsi boş olsun. Yani  $H$  taki herhangi iki üçgen ortak bir kenara sahip olmasın.  $E$  yasaklanmış bir alt graf olduğundan  $H$  daki keyfi bir üçgen  $V' = \{1, 2, 3\}$  kümesinin en az bir noktasını içerir ya da komşu olur. Yine yasaklanmış alt graflar yardımıyla şu sonuçlar elde edilir;  $\forall i \in V$  için  $|T_i| \leq 3$  ve  $T_i \neq \emptyset$  ise  $\sum_{i \in V} |T_i| \leq 6$ ,  $\exists i \in V$  için eğer  $T_i = \emptyset$  ise  $\sum_{i \in V} |T_i| \leq 5$ ,  $\max\{t(H)\} = 5$ .  $p > 4$  için  $t(H) \geq 10$  olduğunu biliyoruz. Ayrıca  $p = 4$  ise  $t(H) = 4$  olur. Buradan Şekil 3.5 te verilen  $\tau_8, \tau_9$  ya da  $\tau_{10}$  grafi  $H$  ın bir indirgenmiş alt grafi olur. Fakat  $\tau_8$  ve  $\tau_9$ ,  $H$  ın indirgenmiş alt grafi olamazlar.  $\tau_{10}$  grafına keyfi bir sarkıt kenar eklendiğinde elde edilen grafi  $\tau_{11}$  ile gösterirsek,  $\rho(\tau_4) > \rho(Kite_4^q)$  olur bu da bir çelişkidir.

Dolayısıyla  $w(H) \neq 3$  olur.

*Durum 2 :*  $w(H) = 4$  olsun. Eğer  $H$  daki bir maksimum kliğin noktalarını  $V'' = \{1, 2, 3, 4\}$  ile etiketlersek  $T_{1234} = \emptyset$  olur. Genelliği bozmadan  $T_{124} = \{x\}$  olsun.  $G^{27}$  yasaklanmış alt graf olduğundan  $T_x = \emptyset$  olur.  $G^{29}, G^{30}, C_4$  yasaklanmış alt graflar ve  $w(H) = 4$  olduğundan  $N(x) = \{1, 2, 4\}$  tür. Ayrıca  $F$  ve  $G^{29}$  yasaklanmış alt graf olduklarından,  $\forall i, j \in V''$  için  $T_{ij} = \emptyset$  olur.  $\forall i \in V''$  için  $T_i$  kümelerini incelersek  $T_3 = \emptyset, |T_1| \leq 2, |T_2| \leq 2$  ve  $|T_4| \leq 2$  elde ederiz. Çünkü  $G^{27}, A_4$  ve  $E$  yasaklanmış alt graflardır. Dolayısıyla  $t(H)$ , en fazla 10 a eşit olabilir öyle ki  $|T_1| = |T_2| = |T_4| = 2$  dir.  $w(H) = 4$  olduğundan  $p \geq 5$  ve  $t(Kite_p^q) = t(H) \geq \binom{5}{3} = 10$  sonucunu elde ederiz. Buradan  $t(H) = 10$  ve Şekil 3.4 te verilen  $\tau_3$ ,  $H$  ın indirgenmiş bir alt grafi olur. Fakat  $\rho(\tau_3) > \rho(Kite_5^q)$  olduğundan bu bir çelişkidir. Yani  $\forall i, j, k \in V''$  için  $T_{ijk} = \emptyset$  dir. Genelliği bozmadan  $T_{12} = \{x\}$  diyelim.  $G^{23}$  ve  $G^{24}$  yasaklanmış alt graflar olduklarından  $T_1 = T_2 = T_x = \emptyset$  dir. Ayrıca  $E, A_1$  ve  $A_4$  yasaklanmış alt graflar olduklarından  $|T_3| \leq 2, |T_4| \leq 2, |T_{x1}| \leq 2$  ve  $|T_{x2}| \leq 2$  olur. Eğer eşitlik sağlanıyorsa, aynı küme içerisinde yer alan keyfi iki nokta birbirine komşu olmalıdır. Aynı zamanda  $\forall i, j, k \in V''$  için  $T_{x3}, T_{x4}, T_{xij}, T_{xijk}, T_{x1234}$  kümelerinin hepsi boş küme olur çünkü  $C_4, A_1, G^{28}$  yasaklanmış alt graflardır,  $w(H) = 4$  tür ve  $T_{12}$  hariç tüm  $T_{ij}$  kümeleri boştur. Eğer  $|T_3| = |T_4| = 2$  ise  $|T_{1x}| \leq 2$  ve  $|T_{2x}| \leq 1$  dir. Yani  $t(H) = 9$  olur. Fakat  $w(H) = 4$  ve  $w(H) < p$  için  $t(H) \geq 10$  olduğunu biliyoruz. Böylece  $|T_3| \leq 1$  ve  $|T_4| \leq 1$  olur. Buradan,  $t(H)$  ın maksimum değeri 13 olur ki bu da ancak  $|T_{1x}| = |T_{2x}| = 2$  iken mümkündür. Yani  $t(H) = 10$  ve  $p = 5$  olur öyle ki  $|T_{1x}| = 2, |T_{2x}| = 1$  ya da  $|T_{1x}| = 1, |T_{2x}| = 2$  dir. Bu durumda Şekil 3.4 te verilen  $\tau_4$ ,  $H$  ın indirgenmiş alt grafi olur. Fakat  $\rho(\tau_4) > \rho(Kite_5^q)$  olduğundan çelişki elde edilir. Böylece,  $\forall i, j \in V''$  için  $T_{ij} = \emptyset$  olduğunu

söyleriz.  $\forall i \in V''$  için  $T_i$  kümelerinin en az birinin boştan farklı olduğunu varsayalım.  $A_5$  ve  $E$  yasaklanmış alt graflar olduğundan, eğer  $\exists i \in V''$  için  $|T_i| = 3$  ise  $\forall j \in V'' - \{i\}$  için  $|T_j| \leq 1$  olur. Yani  $\forall i \in V''$  için  $|T_i| = 2$  iken  $t(H)$  maksimum değerini alır. Buradan  $t(H) = \binom{4}{3} + 4$  elde edilir. Fakat bu da  $t(H) \geq 10$  olmasıyla çelişir. Böylece  $w(H) \neq 4$  olduğunu söyleriz.

*Durum 3* :  $w(H) = 5$  olsun.  $H$  daki beş noktalı bir kliğin noktalarını  $V''' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ile etiketleyelim.  $T_{12345} = \emptyset$  olduğu açıktır.  $G^{26}, G^{29}, G^{30}, G^{31}$  ve  $F$  yasaklanmış alt graflar olduklarından  $\forall i, j, k, l \in V''$  için şu sonuçlar elde edilir ;  $\sum_{i,j \in V'''} |T_{ij}| \leq 1$ ,  $T_{ijk} = \emptyset$ ,  $\sum_{i,j,k,l \in V'''} |T_{ijkl}| \leq 1$ ,  $\sum_{i,j,k,l \in V'''} (|T_{ijkl}| + |T_{ij}|) \leq 1$ ,  $|T_i| \leq 3$ . Ayrıca  $\exists i \in V'''$  için  $|T_i| = 3$  ise aynı  $T_i$  kümesindeki keyfi 3 nokta arasında iki adet kenar oluşmalıdır. Genelliği bozmadan,  $T_{1234} = \{x\}$  olsun. O zaman  $\forall i, j, k \in V'''$  için  $T_{ijk} = T_{ij} = \emptyset$  dir.  $G^{27}$  yasaklanmış alt graf olduğundan,  $T_x = T_5 = \emptyset$  olur ve  $H$  taki hiçbir nokta hem  $x$  noktasına hem de  $V'''$  kümesindeki en az bir noktaya aynı anda komşu değildir. Ayrıca,  $\forall i \in V'''$  için  $T_{ix} = \emptyset$  olur çünkü  $G^{29}$  ve  $C_4$  yasaklanmış alt graflardır. Bunun yanısıra,  $w(H) = 5$  ve  $G^{31}, C_4$  yasaklanmış alt graf olduklarından  $\forall i, j, k, l \in V'''$  için  $T_{xij} = T_{xjk} = T_{xijkl} = \emptyset$  dir. Aynı zamanda  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$  için  $|T_i| \leq 2$  olur ve eşitlik sağlanıyorsa  $T_i$  kümesindeki keyfi iki nokta birbirine komşu olmak zorundadır.  $w(H) = 5$  ve  $w(H) < p$  olduğundan  $t(Kite_p^q) = t(H) \geq \binom{6}{3} = 20$  olur. Elde edilen bütün bu sonuçlardan dolayı,  $t(H)$  in maksimum değerinin 20 ve  $p = 6$  olduğunu söyleriz. Fakat bu durumda da Şekil 3.5 te verilen  $\tau_5$ ,  $H$  in indirgenmiş alt grafi olur ki bu da  $\rho(Kite_6^q) < \rho(\tau_5)$  olmasıyla çelişir. Yani  $\forall i, j, k, l \in V'''$  için  $T_{ijkl} = \emptyset$  olur. Genelliği bozmadan,  $T_{23} = \{x\}$  olsun.  $G^{23}, G^{24}, G^{31}, G^{28}, A_4, C_4$  yasaklanmış alt graflar ve  $w(H) = 5$  olduğundan  $\forall i, j, k, l \in V'''$  için şu sonuçları elde ederiz;  $T_x = T_2 = T_3 = \emptyset$ ,  $T_{x1} = T_{x4} = T_{x5} = \emptyset$ ,  $T_{xij} = T_{xijk} = T_{xijkl} = \emptyset$ ,  $T_{x12345} = \emptyset$ ,  $|T_{x2}| \leq 1$ ,  $|T_{x3}| \leq 1$ ,  $|T_1| \leq 2$ ,  $|T_4| \leq 2$ ,  $|T_5| \leq 2$ . Ayrıca  $T_1, T_4$  ve  $T_5$  grafları için eşitlik sağlanıyorsa aynı kümedeki keyfi iki nokta komşu olmak zorundadır. Bununla birlikte,  $E$  yasaklanmış alt graf olduğundan  $t(H)$  in maksimum değeri 13 olur. Bu da Şekil 3.5 te verilen  $\tau_6$  nın  $H$  in bir indirgenmiş alt grafi olmasını gerektirir. Fakat bu durum  $t(H) \leq 20$  olmasıyla çelişir. Yani  $\forall i, j \in V'''$  için  $T_{ij} = \emptyset$  olur.  $\forall i \in V'''$  için  $T_i$  kümelerini inceleyelim. Eğer  $\exists i \in V'''$  için  $|T_i| = 3$  ise  $\forall j \in V''' - \{i\}$  için  $|T_j| \leq 1$  olur çünkü  $A_5$  ve  $E$  yasaklanmış alt graflardır. Dolayısıyla  $t(H)$  in maksimum değeri  $\forall i \in V'''$  için  $|T_i| = 2$

iken elde edilir ve  $\binom{5}{3} + 5 = 15$  e eşit olur.  $t(H) \geq 20$  olduğundan bu bir çelişkidir. Yani  $w(H) \neq 5$  olur.

*Durum 4 :*  $w(H) \geq 6$  olsun.  $H$  daki bir maksimum kliği  $K_W$  ve bu klikteki noktaların kümesini  $W$  ile gösterelim.  $K_W$  deki dört adet noktayı  $V'' = \{1, 2, 3, 4\} \subset W$  ile etiketleyelim.  $G^{31}$  yasaklanmış alt graf olduğundan  $T_{1234} \subset W$  ve  $\forall i, j, k \in V''$  için  $T_{ijk} = \emptyset$  olur.  $\forall i, j \in W$  için  $G^{26}$  yasaklanmış alt graf olduğundan  $T_{ij}$  kümelerinden en fazla bir tanesi boştan farklı olabilir. Bunun yanısıra  $A_1$  ve  $E$  yasaklanmış alt graf olduklarından  $|T_{ij}| \leq 1$  dir. Ayrıca  $\forall i \in W$  için  $A_6, E, G^{16}$  ve  $S_4$  yasaklanmış alt graflar olduklarından  $|T_i| \leq 2$  dir. Genelliği bozmadan  $T_{12} = \{x\}$  diyelim.  $G^{23}, G^{24}, E, C_4$  yasaklanmış alt graflar olduklarından  $\forall i, j, k \in V''$  için şu sonuçları elde ederiz.  $|T_{x1}| \leq 1, |T_{x2}| \leq 1$  ve  $T_x = T_1 = T_2 = T_{xij} = T_{xijk} = T_{x3} = T_{x4} = \emptyset$ . Böylece  $t(H)$  in alabileceği maksimum değer  $\binom{w(H)}{3} + w(H)$  olur.  $w(H) < p$  ve  $w(H) \leq 6$  iken  $\binom{w(H)}{3} + w(H) < \binom{p}{3}$  olur. Buna göre,  $\forall i, j \in V''$  için  $T_{ij} = \emptyset$  olur.  $T_i$  kümeleri boştan farklı bile olsa  $t(H)$  in alabileceği maksimum değer yine  $\binom{w(H)}{3} + w(H)$  olur ki bu değer  $\binom{p}{3}$  den küçüktür. Bu da çelişki oluşturur.

Bütün durumların incelenmesi sonucu çelişki elde edildiğinden ikinci iddianın aksi yanlış olur. Yani ikinci iddia doğrudur ve  $H$  grafi herhangi bir grafın genelleştirilmiş çizgi grafi olamaz. Dolayısıyla  $G$  grafi bağlantısız olamaz. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 3.4.6.** Her  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  için  $Kite_p^q$  grafi komşuluk spektrumu ile belirlenebilir bir graftır.

*İspat:* Teorem 3.4.5 ve Sonuç 3.4.4. yardımıyla görülür.

## 4. BÖLÜM

### DENİZ KESTANESİ (URCHIN) VE KIRIK DENİZ KESTANESİ (BROKEN URCHIN) GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSİNE GÖRE SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU

$K_p$  grafinin her bir noktasına birer adet sarkıt nokta eklenmesiyle elde edilen grafa *deniz kestanesi graf* denir ve  $Urchin_p^p$  ile gösterilir [50].  $q < p$  olmak üzere,  $K_p$  grafinin  $q$  adet noktasına birer adet sarkıt nokta eklenmesiyle elde edilen grafa ise *kırık deniz kestanesi graf* denir ve  $Urchin_p^q$  ile gösterilir [50].

*Not* :  $q = 1$  iken kırık deniz kestanesi graf, bir kısa uçurtma graf olur ve bu graflar üçüncü bölümde incelenmiştir. Dolayısıyla bu bölümde yapılan tüm incelemelerde  $q \geq 2$  olduğu kabul edilmiştir.

Bu bölümde,  $Urchin_4^3$  haricindeki tüm  $Urchin_p^p$  ve  $Urchin_p^q$  grafların komşuluk spektrumları ile belirlenebildikleri, literatürde yer alan ispattakinden farklı bir metot kullanılarak daha kısa biçimde gösterilmiştir. Yapılan bu ispatın sonucu olarak komşuluk matrisine göre en küçük özdeğeri  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$ 'e eşit ya da büyük olan tüm grafların karakterizasyonu yeniden elde edilmiş ve Sonuç 4.2.3 te verilmiştir.

#### 4.1 $Urchin_p^p$ ve $Urchin_p^q$ Grafların Komşuluk Matrisine Göre Karakteristik Polinomları

**Lemma 4.1.1.**  $q < p$  olmak üzere,  $Urchin_p^p$  ve  $Urchin_p^q$  grafların komşuluk matrislerinin karakteristik polinomları, aşağıdaki gibidir.

$$\text{char}(A(Urchin_p^q))(x) = (x+1)^{p-q-1}(x^2+x-1)^{q-1}(x^3 - (p-2)x^2 - px + p - q - 1)$$

$$\text{char}(A(Urchin_p^p))(x) = (x^2+x-1)^{p-1}(x^2 - (p-1)x - 1) \quad (4.1)$$

*İspat* : Lemma 2.3.11. den,

$$\begin{aligned} \text{char}(A(Urchin_p^1))(x) &= (x)(\text{char}(A(K_p))(x)) - (\text{char}(A(K_{p-1}))(x)) \\ &= [x(x-p+1)(x+1)^{p-1}] - [(x-p+2)(x+1)^{p-2}] \\ &= (x+1)^{p-2}[(x^2-px+x)(x+1) - x + p - 2] \\ &= (x+1)^{p-2}[x^3 - (p-2)x^2 - px + p - 2] \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur. Aynı adım sonlu defa tekrarlanırsa,

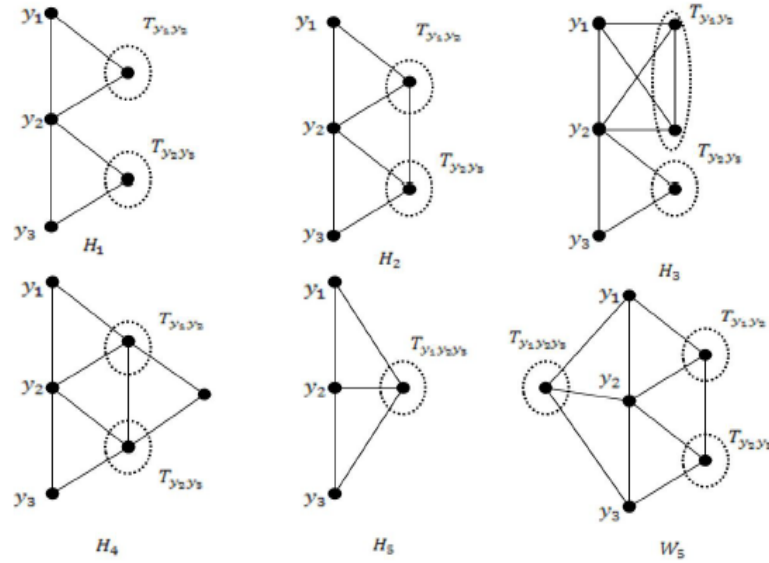
$$\text{char}(A(\text{Urchin}_p^q))(x) = (x)(\text{char}(A(\text{Urchin}_p^{q-1}))(x)) - (\text{char}(A(\text{Urchin}_{p-1}^{q-1}))(x)) \quad (4.3)$$

elde edilir. Burada,  $\text{Kite}_p^q$  grafinin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomunun elde edilmesinde kullanılan metot yardımıyla gerekli hesaplamalar yapılarak, istenilen karakteristik polinomlar elde edilir.

#### 4.2 $\text{Urchin}_p^q$ ve $\text{Urchin}_p^q$ Grafların Komşuluk Spektrumu ile Belirlenebilirliği

**Teorem 4.2.1.**  $\forall p \in \mathbb{Z}^+$  için  $\text{Urchin}_p^q$  grafi komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir.

*İspat :*  $p < 3$  iken yol graf elde edilir. Dolayısıyla ispata  $p \geq 3$  için devam edelim. Aşağıdaki şekilde verilen graflar ispat boyunca kullanılacaktır.



Şekil. 4.1:  $H_1 - H_5$  ve  $W_5$  grafları

$\text{Urchin}_p^q$  grafinin komşuluk matrisine göre ko-spektral olan bir  $G$  grafi verilsin. O zaman,

$$\text{spec}(A(G)) = \{p - 1 + \alpha, \alpha, \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}, \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}\} \quad (4.4)$$

olur öyle ki burada  $\alpha$  ve  $p - 1 + \alpha$ ,

$$x^2 - (p - 1)x - 1 = 0$$

denkleminin kökleridir. Böylece  $n = 2p$  için  $\lambda_n(A(G)) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$  dir. İç içe geçme lemmasından,  $C_4$ ,  $S_3$  ve  $P_5$  grafları  $G$  grafi için yasaklanmış alt graflardır. Buradan,  $G$  nin indirgenmiş alt graf olarak en fazla 4 noktalı yol grafi içerebileceği söylenir.

$G$  nin 3 noktalı indirgenmiş bir yol alt grafi  $P_y = y_1y_2y_3$  olsun.  $P_y$  nin komşuluk kümesinin bir parçalanışını elde edelim.  $i \in \{1, 2, 3\}$  olmak üzere  $P_y$  dışında kalan ve  $P_y$  deki noktalardan yalnızca  $y_i$  noktasında komşu olan noktaların kümesini  $T_{y_i}$  ile gösterelim. Benzer şekilde,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  olmak üzere  $P_y$  dışında kalan ve  $P_y$  deki noktalardan  $y_i$  ve  $y_j$  noktalarına aynı anda komşu olan noktaların kümesini  $T_{y_iy_j}$  ile gösterelim.  $P_y$  deki tüm noktalara aynı anda komşu olan noktaların kümesini ise  $T_{y_1y_2y_3}$  ile gösterelim. Bu kümelerin ayrık olduğu ve birleşimlerinin  $P_y$  nin tüm komşuluğunu verdiği açıktır. Yani bu kümeler,  $P_y$  nin komşuluk kümesinin bir parçalanışını oluşturur. İç içe geçme lemması yardımıyla bu kümelerin eleman sayıları için  $|T_{y_1}| \leq 1$ ,  $|T_{y_3}| \leq 1$ ,  $|T_{y_1y_2y_3}| \leq 1$  ve  $T_{y_2} = T_{y_1y_3} = \emptyset$  elde edilir. Ayrıca,  $T_{y_1y_2}$  ve  $T_{y_2y_3}$  kümeleri de ya boştur ya da birer kliktir.  $P_y$  nin komşuluğunun parçalanışındaki kümelerden herhangi biri  $T_x$  olmak üzere,  $T_x$  in  $P_y$  dışında kalan komşuluğunu  $\tilde{T}_x$  ile gösterelim. Böylece, iç içe geçme lemmasından  $\tilde{T}_{y_1} = \tilde{T}_{y_3} = \tilde{T}_{y_1y_2y_3} = \emptyset$  olur.  $|T_{y_1}| = |T_{y_3}| = 0$  olsun. Eğer,  $|T_{y_1y_2y_3}| = 0$  ise  $p' > q'$  olmak üzere iç içe geçme lemmasından  $P_y$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$  veya  $Urchin_{p'}^q$ ,  $G$  nin bir bileşeni olur. Fakat bu durum  $spec(A(G))$  ile çelişir.  $|T_{y_1y_2y_3}| = 1$  ise yine iç içe geçme lemmasına göre  $H_2$ ,  $H_5$  ya da  $W_5$ ,  $G$  nin bir bileşeni olur ve yine aynı çelişki elde edilir. Dolayısıyla  $T_{y_1}$  ve  $T_{y_3}$  kümelerinden en az birinde bir adet nokta bulunduğu söylenir. Bu da  $P_4$  grafinin  $G$  nin bir indirgenmiş alt grafi olduğunu gösterir.

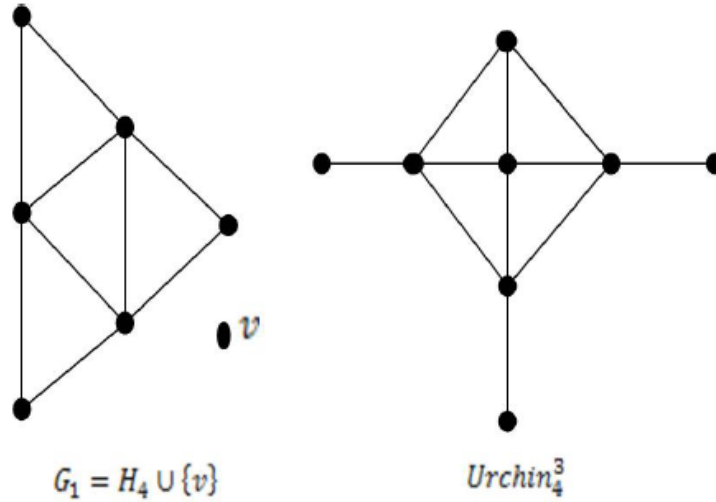
$G$  nin 4 noktalı indirgenmiş bir yol alt grafi  $P = v_1v_2v_3v_4$  olsun.  $P_y$  dekine benzer şekilde,  $P$  nin komşuluk kümesinin parçalanışını inceleyelim. Öncelikle,  $P_5$ ,  $S_3$  ve  $C_4$  içerilmediğinden  $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_{13} = T_{24} = \emptyset$  olur. İç içe geçme lemmasından  $T_{12} = T_{34} = T_{123} = T_{134} = T_{124} = T_{234} = \emptyset$ ,  $\tilde{T}_{14} = \tilde{T}_{1234} = \emptyset$ ,  $|T_{14}| \leq 1$  ve  $|T_{1234}| \leq 1$  olduğu görülür. Ayrıca,  $T_{23}$  ya boş kümedir ya da bu kümedeki noktalar  $G$  de bir klik oluşturur.  $|T_{14}| = 1$  olsun. O zaman,  $T_{23} = \emptyset$  olur. Aynı zamanda,  $|T_{1234}| = 0$  ise  $C_5$ ;  $|T_{1234}| = 1$  ise  $W_5$ ,  $G$  nin bir bileşeni olur.  $G$  nin komşuluk spektrumu bilindiğinden, her iki durumda da çelişki olduğu görülür. Böylece  $|T_{14}| = 0$  olduğu söylenir. Şimdi de  $|T_{1234}| = 1$  iken duruma bakalım. Bu durumda, iç içe geçme lemmasından,  $|T_{23}| \leq 1$  ve  $\tilde{T}_{23} = \emptyset$  olur. Böylece  $H_2$  ya da  $H_4$ ,  $G$  nin bir bileşeni olacaktır fakat bu sonuç  $G$  nin komşuluk spektrumu ile çelişki



oluşturduğundan  $|T_{1234}| = 0$  dır. Dolayısıyla, parçalanıştaki kümelerden  $T_{23}$  haricindeki tüm kümelerin kesinlikle boş küme olduğunu söyleriz. Şimdi de  $T_{23}$  kümesini inceleyelim.

$T_{23} = \emptyset$  olsun. Bu durumda,  $P$  nin komşuluğunda hiç bir nokta yoktur, yani  $P$  yol grafi  $G$  nin bir bileşeni olur. Fakat bu durumda,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \in \text{spec}(A(G))$  olur ki bu da  $p=2$  durumunu verir. Dolayısıyla,  $T_{23}$  kümesi boştan farklı olmak zorundadır. Şimdi de  $T_{23}$  kümesinin,  $T_{23}$  ve  $P$  dışında kalan komşuluğunun benzer notasyona sahip parçalanışını inceleyelim. Keyfi iki  $a, b \in T_{23}$  için  $T_{ab} = \emptyset$  olduğu iç içe geçme lemması yardımıyla görülür. Ayrıca  $\forall a \in T_{23}$  için  $|T_a| \leq 1$  olur.  $\exists a \in T_{23}$  için  $T_a = 0$  ise kırık deniz kestanesi graf  $G$  nin bir bileşeni olur. Fakat  $G$  nin komşuluk spektrumundan dolayı bunun mümkün olmadığı görülür. Böylece  $\forall a \in T_{23}$  için  $|T_a| = 1$  elde edilir. Yani bir deniz kestanesi graf oluşur ve bu graf  $G$  nin bir bileşeni olmalıdır. Dolayısıyla  $G \cong \text{Urchin}_p^3$  olur.

*Uyarı :* Aşağıdaki şekilde verilen  $G_1 = H_4 \cup v$  ve  $\text{Urchin}_4^3$  grafları komşuluk matrislerine göre ko-spektral fakat izomorf olmayan graflardır.



Şekil. 4.2:  $\text{Urchin}_4^3$  ve izomorf olmayan ko-spektral eşi

**Teorem 4.2.2.**  $\text{Urchin}_4^3$  dışındaki tüm kırık deniz kestanesi (broken urchin) graflar komşuluk spektrumlarına göre belirlenebilir graflardır.

*İspat :* Lemma 4.1.1 e göre,

$$\text{spec}(\text{Urchin}_p^q) = \left\{ \left( \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{q-1}, x_1, (-1)^{p-q-1}, x_2, \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{q-1}, x_3 \right\} \quad (4.5)$$

olur. Öyle ki burada  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $x_1 = -1 - \alpha - \beta$ ,  $x_2 = \beta$  ve  $x_3 = p - 1 + \alpha$  dır.  $Urchin_p^q$  grafına komşuluk spektrumuna göre ko-spektral olan bir  $G$  grafi, Teorem 4.2.1 in ispatına benzer şekilde spektrum göz önüne alınarak incelendiğinde istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.1. ve Teorem 4.2.2. yardımıyla aşağıdaki sonuç direkt olarak elde edilir.

**Sonuç 4.2.3.**  $n$  mertebeli bir  $G$  grafinin komşuluk matrisinin en küçük özdeğeri  $\lambda_n(G) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$  olsun.  $n \geq m$  olmak üzere,  $G$  grafinin bir bileşeni  $H$  ve  $H$  in komşuluk matrisinin en küçük özdeğeri  $\lambda_m(H)$  olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i)  $p \geq 3$  ve  $q \geq 2$  olsun. Eğer  $\lambda_m(H) = \lambda_n(G) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$  ise  $H$  grafi aşağıda verilen graflardan birine izomorf olmak zorundadır.

$P_4, C_5, H_2, H_4, W_5, Urchin_p^p, Urchin_p^q$

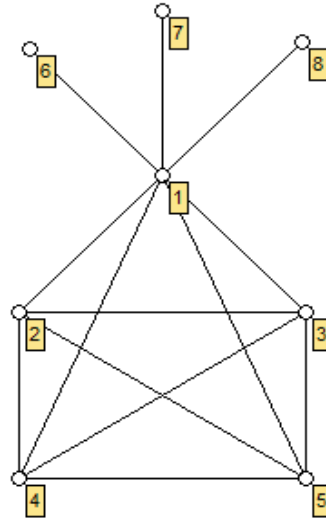
(ii)  $p \geq 3$  ve  $t \geq 0$  olsun. Eğer  $\lambda_m(H) > \lambda_n(G) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$  ise  $H$  grafi aşağıda verilen graflardan birine izomorf olmak zorundadır.

$P_3, K_t, H_1, H_3, H_5, Urchin_p^1$

## 5. BÖLÜM

### ANANAS (PINEAPPLE) GRAFIN KOMŞULUK MATRİSİNE GÖRE SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU

$K_p$  grafına, belirli bir noktasından  $q$  adet sarkıt kenar eklenmesiyle oluşan grafa *ananas graf* denir ve  $K_p^q$  ile gösterilir [39, 50]. Burada, yıldız grafların ve tam grafların hariç tutulabilmesi için,  $p \geq 3$  ve  $q \geq 1$  olduğu kabul edilmiştir. Aşağıdaki şekilde  $K_5^3$  grafi gösterilmiştir.



Şekil. 5.1:  $K_5^3$  grafi

[16] da Zhang ve Zhang, bu graf türünün komşuluk ve Laplasyan spektrumları üzerinde durmuş ve bu matrislerin spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadığını incelemişlerdir. Aynı çalışmada verilen teoremden, ananas grafın  $\forall p, q \in \mathbb{Z}^+$  için komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu söylenmiş ve bu teoremin ispatı yapılmıştır. Fakat yapılmış olan ispatta hata bulunduğu ve elde edilen sonucunda doğru olmadığı bu tez çalışması için yapılan araştırmalar esnasında tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu tür graflar üzerine çalışma yapılarak aslında her zaman spektrumları ile belirlenebilir olmadıkları burada gösterilmiştir. Bu durumun ispatı için ters örnek teşkil eden graf aileleri üretilmiştir. Aynı zamanda  $q = 2$  iken ananas grafın komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu ispat edilerek, bu graf türüne ait olumlu bir sonuca da ulaşılmıştır. Fakat burada yapılan çalışmalar, literatürde var olan hatayı kısmen telafi etse de ananas grafın komşuluk spektrumuna göre tam karakterizasyonunu vermemektedir. Dolayısıyla, ananas grafın komşuluk spektrumuna göre tamamen karakterize edilebilmesi üzerine açık problemler de ortaya konmuştur. Bu bölümde üretilmiş olan yeni problemlere dair daha geniş bilgiye tez çalışmasının son bölümünde yer verilmiştir.

## 5.1 Ananas Grafın Komşuluk Matrisine Göre Karakteristik Polinomu

$K_p^q$  grafının mertebesi  $p + q$ , kenar sayısı  $\binom{p}{2} + q$ , üçgen sayısı ise  $\binom{p}{3}$  olur. Bütün bileşenleri 1 e eşit olan vektör  $\mathbf{1}$  ve yine bütün bileşenleri 1 e eşit olan  $l \times l$  tipindeki matris  $J_l$  ile gösterilsin. Aynı zamanda  $I$  birim matris olsun. Bu durumda  $K_p^q$  grafının komşuluk matrisi,

$$A(K_p^q) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & J_{p-1} - I & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

formunda olur.

**Önerme 5.1.1.**  $K_p^q$  için,

$$\text{char}(A(K_p^q))(x) = x^{q-1}(x+1)^{p-2}(x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2)) \quad (5.1)$$

*biçimindedir.*

*İspat:*  $K_p^q$  grafının aynı noktaya eklenmiş  $q$  adet sarkıt noktası bulunduğundan,  $A(K_p^q)$  matrisinin  $q$  adet satırı aynı olur. Yani bu matrisin rankı en fazla  $p + 1$  e eşit olur. Böylece bu matrisin karakteristik polinomunun bir çarpanı  $x^{q-1}$  dir. Benzer şekilde  $A + I$  matrisinin  $p - 1$  adet satırı aynı olduğundan, karakteristik polinomun bir diğer çarpanı  $(x + 1)^{p-2}$  olur. Aşağıda  $A(K_p^q)$  matrisinin bir eşit parçalanışının bölüm matrisi verilmiştir. Yani  $A(K_p^q)$  matrisi satır toplamları sabit olan bloklara ayrılmış ve buna göre her bileşeni bu toplamı gösteren  $Q$  bölüm matrisi oluşturulmuştur.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & p-1 & q \\ 1 & p-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q$  matrisinin karakteristik polinomu,

$$q(x) = \det(xI - Q) = x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2) \quad (5.2)$$

olur.  $q(x)$  in,  $A(K_p^q)$  matrisinin karakteristik polinomunu böldüğü Teorem 2.3.10 da verilmiştir.  $K_p^q$  grafının mertebesi  $p + q$  ya eşit olduğundan,  $der(char(A(K_p^q))(x)) = p + q$  olur. Böylece,

$$der(x^{q-1}) + der((x+1)^{p-2}) + der(q(x)) = q - 1 + p - 2 + 3 = p + q \quad (5.3)$$

olduğundan

$$char(A(K_p^q))(x) = x^{q-1}(x+1)^{p-2}(x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2)) \quad (5.4)$$

elde edilir.

## 5.2 Bazı Ananas Graflara Ko-spektral Olan Graf Aileleri

$K_p^q$  grafi,  $q = 1$  iken aslında bir kısa uçurtma graf olur. Bu durum üçüncü bölümde incelenmiştir.  $p = 3$  için bu graf turp graf olur ve ikinci bölümde durumla ilgili bilgiye yer verilmiştir. Godsil ve McKay, 7 noktalı ve birbirine izomorf olmayan ko-spektral graf çiftlerinin hepsini bilgisayar yardımıyla üretip, liste haline getirmişlerdir [32]. Bu liste yardımıyla  $K_4^3$  grafının da komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu söylenir.

**Önerme 5.2.1.**  $k \geq 2$  pozitif tamsayısı verilsin. Mertebesi  $3k$  olan ve komşuluk matrisi

$$B = \begin{bmatrix} O & J_k & J_k \\ J_k & J_k - I & O \\ J_k & O & J_k - I \end{bmatrix}$$

formunda olan bir graf  $G'$  ise

$$char(A(G'))(x) = x^{k-1}(x+1)^{2k-2}(x-k+1)(x^2 - (k-1)x - 2k^2) \quad (5.5)$$

olur.

*İspat:* Önerme 5.1.1. in ispatına benzer şekilde  $B$  matrisinin  $k$  adet satırı aynı olduğundan karakteristik polinomunun bir çarpanı  $x^{k-1}$  olur.  $B + I$  matrisinin yardımıyla da diğer bir

çarpan  $(x + 1)^{2k-2}$  olur. Aynı zamanda  $G'$  grafının bir eşit parçalanışının bölüm matrisi,

$$Q' = \begin{bmatrix} O & k & k \\ k & k-1 & O \\ k & O & k-1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$q'(x) = \det(xI - Q') = (x - k + 1)(x^2 - (k - 1)x - 2k^2) \quad (5.6)$$

polinomu da  $B$  matrisinin karakteristik polinomunun bir çarpanı olur.

$$\text{der}(x^{k-1}) + \text{der}((x + 1)^{2k-2}) + \text{der}(q'(x)) = k - 1 + 2k - 2 + 3 = 3k \quad (5.7)$$

olduğundan,

$$\text{char}(A(G'))(x) = x^{k-1}(x + 1)^{2k-2}(x - k + 1)(x^2 - (k - 1)x - 2k^2) \quad (5.8)$$

elde edilir.

**Sonuç 5.2.2.**  $p = 2k \geq 4$  ve  $q = k^2$  ise  $K_p^q$  grafi komşuluk spektrumu ile belirlenebilen bir graf değildir.

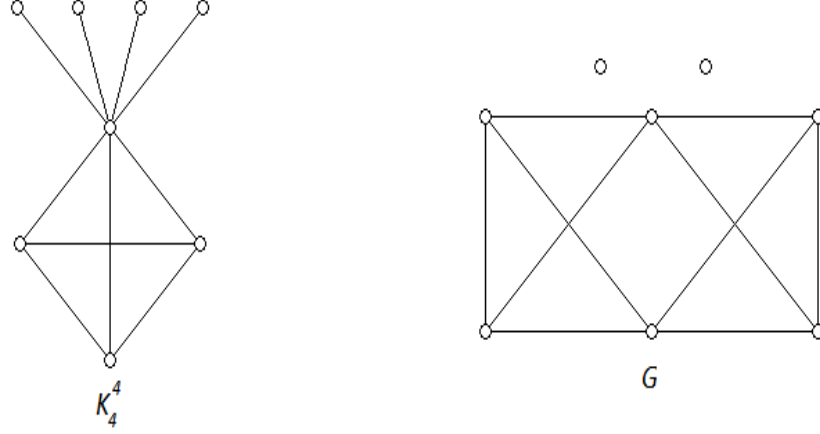
*İspat:*  $p = 2k \geq 4$  ve  $q = k^2$  ise (5.1) den,

$$\text{char}(A(K_{2k}^{k^2}))(x) = x^{k^2-1}(x + 1)^{2k-2}(x - k + 1)(x^2 - x(k - 1) - 2k^2) \quad (5.9)$$

olur. Önerme 5.2.1. de verilen  $G'$  grafına  $k(k - 1)$  adet izole nokta eklenince elde edilen bağlantısız grafi  $G$  ile gösterirsek,  $\text{char}(A(G))(x) = \text{char}(A(K_{2k}^{k^2}))(x)$  olduğu görülür. Dolayısıyla  $G$  ve  $K_{2k}^{k^2}$  graflarının komşuluk spektrumlarına göre ko-spektral fakat izomorf olmayan graflar oldukları sonucuna varılır.

*Örnek 5.2.1.* Şekil 5.2 de  $K_4^4$  grafi ve Sonuç 5.2.2. ye göre ko-spektral eşi olan  $G$  grafi gösterilmiştir. Bu grafların komşuluk matrislerine göre karakteristik polinomları da aşağıda verilmiştir.

$$\text{char}(A(G))(x) = \text{char}(A(K_4^4))(x) = x^3(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x - 8) \quad (5.10)$$



Şekil. 5.2:  $K_4^4$  grafi ve izomorf olmayan ko-spektral eşi

Şimdi de bazı ananas graflara ko-spektral olan başka bir bağlantısız graf ailesine yer verelim.

**Önerme 5.2.3.**  $k \in \mathbb{Z}^+$  ve  $k(k+1)$  çarpımının bir pozitif tam böleni  $\alpha$  olsun.  $p = k + 2 + \alpha$  ve  $q = \frac{k(k+1)(\alpha+1)}{\alpha}$  ise  $k \in \text{spec}(A(K_p^q))$  olur.

*İspat:*  $k(k+1)$  in pozitif bir tam böleni  $\alpha$  olduğundan,  $(k+2+\alpha) \in \mathbb{Z}^+$ ,  $k+2+\alpha \geq 4$  ve  $\frac{k(k+1)(\alpha+1)}{\alpha} \in \mathbb{Z}^+$  olur.

$$p(x) = x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2)$$

polinomu ise  $K_p^q$  grafinin bir çarpanıdır. Böylece  $p = k + 2 + \alpha$  ve  $q = \frac{k(k+1)(\alpha+1)}{\alpha}$  değişken değiştirme işlemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - x^2(k+\alpha) - x(k+1+\alpha + \frac{k(k+1)(\alpha+1)}{\alpha}) + (k+\alpha)(\frac{k(k+1)(\alpha+1)}{\alpha}) \\ &= (k-x) \left[ \frac{k(1+k) + \alpha^2(1+k+x) + \alpha(1+2k+k^2-x^2)}{\alpha} \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

olur. Buradan  $x = k$  değerinin,  $p(x)$  polinomunun bir kökü olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla  $K_p^q$  grafinin bir komşuluk özdeğeri  $k$  olur.

**Örnek 5.2.2.**  $k = 1$  ve  $\alpha = 2$  için  $p = k+2+\alpha = 5$  ve  $q = \frac{k(k+1)(\alpha+1)}{\alpha} = 3$  olur. Gerçekten de  $K_5^3$  grafinin bir komşuluk özdeğerinin  $k = 1$  olduğu aşağıdaki polinom yardımıyla görülür.

$$\begin{aligned} \text{char}(A(K_5^3))(x) &= x^2(x+1)^3(x^3 - 3x^2 - 7x + 9) \\ &= x^2(x+1)^3(x-1)(x^2 - 2x - 9) \end{aligned} \quad (5.12)$$

**Önerme 5.2.4.**  $b = q - k^2 + 1$  olmak üzere,  $\alpha + 1$  adet sınıfının nokta sayısı 1 olan çok parçalı tam graf  $K_{b,1,\dots,1}$  ve  $k^2 - 1$  adet izole noktadan oluşan graf  $(k^2 - 1)K_1$  ile gösterilsin. Bu takdirde,

$$G = K_{b,1,\dots,1} \dot{\cup} K_{k+1} \dot{\cup} (k^2 - 1)K_1 \quad (5.13)$$

biçiminde tanımlanan bağlantısız  $G$  grafi ve Önerme 5.2.3. de verilen  $p$  ve  $q$  değerlerine sahip  $K_p^q$  grafi için  $\text{spec}(A(G)) = \text{spec}(A(K_p^q))$  olur.

*İspat:*  $\text{char}(A(G))(x)$  polinomunu hesaplayalım.  $G$  grafi bağlantısız olduğundan, tüm bileşenlerinin komşuluk matrislerine göre karakteristik polinomlarının çarpımı  $\text{char}(A(G))(x)$  polinomunu verecektir. Dolayısıyla öncelikle  $G$  nin bileşenlerinin komşuluk matrislerine göre karakteristik polinomlarını yazarsak,

$$\text{char}(A((k^2 - 1)K_1))(x) = x^{k^2-1} \quad (5.14)$$

$$\text{char}(A(K_{k+1}))(x) = (x - k)(x + 1)^k \quad (5.15)$$

ve

$$\text{char}(A(K_{b,1,\dots,1}))(x) = x^{b-1}(x + b)(x + 1)^{\alpha+1} \left(1 - \frac{b}{x + b} - \frac{\alpha + 1}{x + 1}\right) \quad (5.16)$$

olur. (5.14), (5.15) ve (5.16) dan,

$$\begin{aligned} &[\text{char}(A((k^2 - 1)K_1))(x)][\text{char}(A(K_{k+1}))(x)][\text{char}(A(K_{b,1,\dots,1}))(x)] = \\ &x^{q-1}(x+1)^{p-2}(x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2)) = \text{char}(A(K_p^q))(x) \end{aligned} \quad (5.17)$$

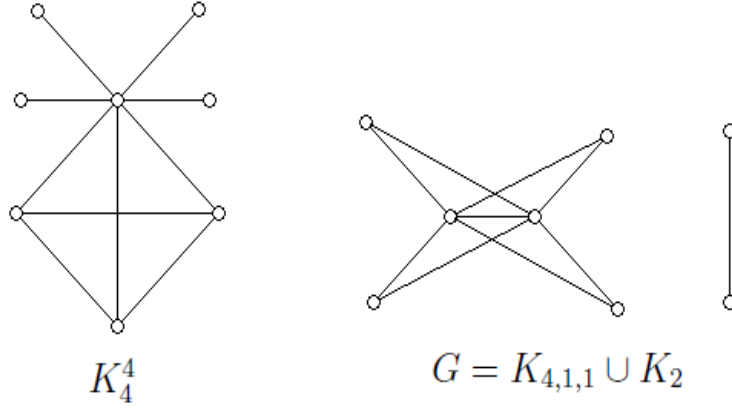
elde edilir. Dolayısıyla  $G$  ve  $K_p^q$  grafları komşuluk spektrumlarına göre ko-spektral graflar olurlar.



**Sonuç 5.2.5.**  $p \geq 4$  olmak üzere,  $\forall p \in \mathbb{Z}^+$  için Önerme 5.2.3. deki koşulu sağlayan  $q$  değerlerine sahip  $K_p^q$  grafları komşuluk spektrumları ile belirlenebilir graflar değildir.

*İspat:* Önerme 5.2.3 ve Önerme 5.2.4 ten kolaylıkla görülür.

**Örnek 5.2.3.**  $K_4^4$  grafi ve Önerme 5.2.4 ten elde edilen komşuluk spektrumuna göre ko-spektral eşi aşağıda verilmiştir.



Şekil. 5.3:  $K_4^4$  grafi ve izomorf olmayan diğer ko-spektral eşi

Böylece belirli koşulları sağlayan  $K_p^q$  graflarına komşuluk spektrumlarına göre ko-spektral fakat izomorf olmayan yeni bir graf ailesi daha elde edilmiştir. Örnek 5.2.1. ve Örnek 5.2.3. te verilen her iki graf,  $K_4^4$  grafına komşuluk spektrumuna göre ko-spektral fakat izomorf olmayan graflar olurlar.

### 5.3 $K_p^2$ Grafının Komşuluk Spektrumu ile Belirlenebilirliği

$K_{p,1}$  grafının  $L(K_{p,1}; 1, 0, \dots, 0)$  formundaki genelleştirilmiş çizgi grafi,  $K_p^2$  grafını verir. Dolayısıyla Lemma 2.3.14. ve Lemma 2.3.15 ten yararlanarak  $K_p^2$  grafi için aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

**Teorem 5.3.1.**  $\forall p \in \mathbb{Z}^+$  için  $K_p^2$  grafi, komşuluk matrisinin spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır.

*İspat:*  $spec(A(G)) = spec(A(K_p^2))$  olacak biçimde bir  $G$  grafi verilsin. Teorem 2.3.2. den  $G$  grafının mertebesi  $n = p + 2$ , kenar sayısı  $m = \binom{p}{2} + 2$  ve üçgen sayısı  $t(G) = \binom{p}{3}$

olur. Aynı zamanda (5.1) den,

$$\text{char}(A(G))(x) = x(x+1)^{p-2}(x^3 - (p-2)x^2 - (p+1)x + 2(p-2)) \quad (5.18)$$

olur. Böylece,  $G$  için

$$\lambda_1(A(G)) \geq \lambda_2(A(G)) > 0 > -1 = \dots = -1 > \lambda_n(A(G)) \quad (5.19)$$

olur öyle ki  $0 < \beta < 1$  olmak üzere

$$\lambda_1(A(G)) = p - 1 + \beta,$$

$$\lambda_2(A(G)) < 1 \text{ ve}$$

$\lambda_n(A(G)) \geq -2$  dir. Burada  $-1$  özdeğerinin cebirsel katı  $p - 2$  olur.

Öncelikle  $G$  nin bağlantısız olduğu durumu inceleyelim.  $H$  ve  $H_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ),  $G$  nin bileşenleri ise  $G = H \dot{\cup} H_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} H_r$  yazılır.  $\lambda_1(A(G)) = \lambda_1(A(H))$  ise  $\lambda_2(A(G)) < 1$  olduğundan iç içe geçme lemması yardımıyla  $\forall i \in 1, \dots, r$  için  $\lambda_1(A(H_i)) < 1$  olur. Bu da  $G$  grafının  $H$  dışında herhangi bir bileşeni var ise bu bileşenin yalnızca izole noktalardan oluşabileceği anlamına gelir. Aynı zamanda  $G$  grafi, en fazla bir adet sıfıra eşit olan komşuluk özdeğerine sahip olabilir. Dolayısıyla en fazla bir adet izole nokta barındırabilir. Bu izole noktayı  $v$  ile gösterirsek,  $G = H \dot{\cup} v$  olur. Böylece  $H$  bileşeni için,

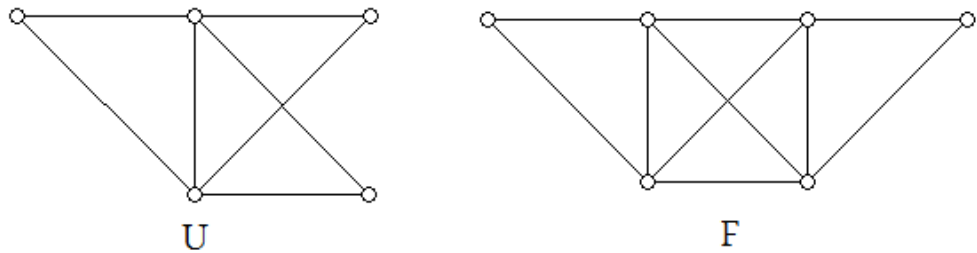
$$\text{char}(A(H))(x) = \frac{\text{char}(A(G))(x)}{x} = (x+1)^{p-2}(x^3 - (p-2)x^2 - (p+1)x + 2(p-2))$$

olur. Buradan,  $d_H = 2$  olur. Lemma 2.3.15 ten  $H$  in nokta sayısı 7 ye eşit olur. Bu da  $G$  nin nokta sayısının 8 olduğunu yani  $p = 6$  olduğunu gösterir. Dolayısıyla  $H$  bileşeninin kenar sayısı 17 ve üçgen sayısı 20 olur. 7 noktalı ve 17 kenarlı 10 adet bağlantılı graf mevcuttur ve bu grafların hiçbiri 20 adet üçgen içermez. Yani çelişki elde edilir. Bu yüzden,  $G$  grafi bağlantısız graf olamaz.

$G$  bağlantılı ise  $d_G = 4$  olduğundan,  $G$  grafi Lemma 2.3.15. teki (iv) ya da (v) şıklarında verilen grafların formunda olur. Yani  $G$  tek bir-döngülü grafın çizgi grafi ya da bir  $T$  ağacının  $L(T; 1, 0, \dots, 0)$  tipindeki genelleştirilmiş çizgi grafıdır.  $G$  nin çizgi graf olduğu durumu inceleyelim.  $\lambda_2(G) \leq 1$  olduğundan Teorem 2.3.12. ye göre  $G$  grafi Şekil 2.34 deki  $F_1 - F_{11}$

graflarından birinin indirgenmiş alt grafi olur.  $p \geq 4$  olduğundan  $G$  nin mertebesi en az 6 olur. Yani  $G$  nin  $F_1 - F_6$  graflarının bir indirgenmiş alt grafi olmadığı açıktır. Ayrıca  $F_7, F_9, F_{10}$  graflarının 6 noktalı tüm indirgenmiş alt graflarının en küçük özdeğeri  $-2$  ye eşit olduğundan,  $G$  bu grafların da indirgenmiş alt grafi değildir.  $G$  nin,  $F_8$  grafinin da indirgenmiş alt grafi olmadığı benzer şekilde görülür. Yani  $G$  grafi sadece  $F_{11}$  in indirgenmiş alt grafi olabilir.  $m > 1$  iken,  $F_{11}$  grafinin en küçük özdeğeri  $-2$  dir. Bu yüzden  $F_{11}$  deki  $m$  adet noktayı  $a_1, \dots, a_m$  ile etiketlersek,  $G$  bu noktalardan en fazla bir tanesini içerebilir. Eğer  $G$ , bu noktalardan hiçbirini içermiyorsa bir tam graf olur. Fakat  $G$  nin spektrumundan dolayı bu mümkün değildir. Dolayısıyla,  $G$  grafi  $a_1, \dots, a_m$  noktalarından bir tanesini kesinlikle içerir.  $G$  nin,  $F_{11}$  deki maksimum klik olan  $K_{n+2m}$  in noktalarının  $x$  tanesini içerdiğini kabul edelim. O zaman,  $G$  deki üçgen sayısı  $t(G) = \binom{x}{3} + 1$  olur. Fakat  $t(G) = \binom{p}{3}$  idi. Yani bu bir çelişki olur ve  $G$  bir çizgi graf olamaz.

$G$  nin genelleştirilmiş çizgi graf olduğu durumu inceleyelim.  $H$  bir ağaç olmak üzere,  $G = L(H; 1, 0, \dots, 0)$  olsun. O zaman Teorem 2.3.13. ten  $G$  grafi Şekil 2.35 deki graflardan birinin indirgenmiş bir alt grafi olur.  $G$  nin,  $F_1 - F_{10}$  graflarının bir indirgenmiş alt grafi olmadığı söylenmişti. Böylece  $G$  grafi  $F_{12}, F_{13}$  ve  $F_{14}$  graflarından birinin indirgenmiş alt grafi olur.  $F_{12}$  nin mertebesi 7 olduğundan  $|G| = 6$  ya da  $|G| = 7$  olur. Yani  $spec(A(G)) = spec(A(K_4^2))$  ya da  $spec(A(G)) = spec(A(K_5^2))$  olur. Fakat  $F_{12}$  nin 6 noktalı hiçbir alt grafi  $K_4^2$  ile aynı kenar ve üçgen sayısına sahip değildir. Ayrıca  $F_{12}$  grafinin nokta ve kenar sayısı da,  $K_5^2$  grafindan farklıdır. Böylece  $G$ ,  $F_{12}$  nin bir indirgenmiş alt grafi olamaz.  $G$  grafinin,  $F_{13}$  ün bir indirgenmiş alt grafi olmadığı da benzer şekilde görülür. Bu yüzden  $G$ ,  $F_{14}$  ün bir indirgenmiş alt grafi olmak durumundadır.  $G$  nin en küçük özdeğeri  $-2$  den büyük olduğundan,  $F_{14}$  grafinda yer alan  $CP(r)$  deki komşu olmayan nokta çiftlerinden en fazla bir tanesi  $G$  tarafından kapsanır.



Şekil. 5.4:  $U$  ve  $F$  grafları

Ayrıca Şekil 5.4 te verilen  $F$  grafi da,  $G$  nin bir indirgenmiş alt grafi olamaz. Yani  $G$ ,  $F_{14}$  teki  $t$  adet noktanın en fazla bir tanesini içerebilir. Eğer  $G$ ,  $CP(r)$  deki komşu olmayan nokta çiftlerinden bir tanesini içeriyorsa,  $F_{14}$  teki  $t$  adet noktanın hiçbirini içeremez. Çünkü Şekil 5.4 te verilen  $U$  grafi,  $G$  nin indirgenmiş bir alt grafi olamaz. Buradan,  $t(G) = \binom{x}{3} - x + 2$

olur. Bu da  $t(G) = \binom{p}{3}$  olmasıyla çelişir. Yani  $G$ ,  $CP(r)$  deki komşu olmayan nokta çiftlerinden hiçbirini içermez. Benzer şekilde  $G$ ,  $F_{14}$  teki  $t$  adet noktanın hiçbirini içermez. Buradan  $x = p$  olur ve  $F_{14}$  teki  $2s$  adet noktanın sadece iki tanesi  $G$  tarafından içerilebilir. Fakat bu durumda da  $Urchin_p^2$  grafi oluşur ve  $spec(A(G)) \neq spec(A(Urchin_p^2))$  olduğu açıktır. Dolayısıyla  $G \cong K_p^2$  elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu bölümde yapılan çalışmaların sonucunda aşağıdaki açık problemler elde edilmiştir.

- (i)  $p \geq 4$  ve  $q \geq 3$  olmak üzere,  $K_p^q$  grafi hangi  $p$  ve  $q$  değerleri için komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir?
- (ii) Bağlantılı graflar içerisinde,  $K_p^q$  grafi komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir midir?
- (iii)  $K_p^q$  grafının komşuluk spektrumuna göre tam bir karakterizasyonunu yapmak mümkün müdür?

## 6. BÖLÜM

### TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bir grafin herhangi bir graf matrisinin spektrumuna göre belirlenebilir olduğunu söyleyebilmek genellikle zor bir problem teşkil eder. Graf matrisi olarak komşuluk matrisi seçildiğinde ise bu problem genellikle daha da zor bir hal alır. Çünkü komşuluk matrisinin özdeğerleri her ne kadar graf yapısına dair bilgiler verse de, genel olarak grafin bağlantılı olup olmadığını bile söylemeye yeterli değildir. Bu tez çalışmasında esas olarak, literatürde uzun yıllardır açık bir problem olarak duran "Hangi graflar spektrumları ile belirlenebilir?" sorusu komşuluk matrisinin spektrumu göz önüne alınarak incelenmiş ve bu soru bazı özel graf türlerine indirgenerek cevaplanmaya çalışılmıştır. Yapılan literatür taraması sonucunda, döngü graf baz alınarak elde edilen bazı özel graf türlerinin komşuluk spektrumları ile belirlenebilirliklerinin araştırılmış oldukları görülmüş ve döngü graf yerine tam graf baz alındığında elde edilen grafların komşuluk spektrumları ile belirlenebilirlikleri araştırılmıştır. Dolayısıyla, bu tez çalışmasında incelenen özel graflar sırasıyla *uçurtma (kite) graf*, *deniz kestanesi (urchin) graf*, *kırık deniz kestanesi (broken urchin) graf* ve *ananas (pineapple) graftır*. Üçüncü bölümde, literatürde sıklıkla kullanılmış olan ve iyi bilinen bir graf türü olan uçurtma grafin aslında belli koşulları sağlayan bir yıldızsal ağacın çizgi grafi olduğundan yararlanılarak komşuluk spektrumu ile belirlenebilir olduğu gösterilmiştir. Böylece iyi bilinen ve sık kullanılan bu graf türü için açık bir problem olan önemli bir özellik ispatlanarak literatüre katkıda bulunulmuştur. Dördüncü bölümde ise deniz kestanesi ve kırık deniz kestanesi grafların da ( $Urchin_4^3$  haricinde) komşuluk spektrumları ile belirlenebildiklerine dair ispat yapılmıştır. Buraya kadar elde edilen bulgular kısaca aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

**Sonuç 1.**  $p \geq 3$  olmak üzere  $K_p$  grafına,  $P_q$  grafinin eklenmesiyle elde edilen uçurtma graf komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır.

**Sonuç 2.**  $p \geq 3$ ,  $q \leq p$  ve  $(p, q) \neq (4, 3)$  olmak üzere bir  $K_p$  grafinin  $q$  adet noktasına sarkıt kenar eklenmesiyle elde edilen (kırık) deniz kestanesi graflar komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir.

Yani tam graf baz alınarak elde edilen graf türlerinden ilk ikisinin komşuluk spektrumları ile belirlenebildikleri görülmüştür. Fakat ananas graf üzerine yapılan incelemede, literatürde her ne kadar komşuluk spektrumları ile belirlenebilir olduğu gösterilmiş olsa da,  $q > 2$  iken aslında bu özelliği sağlamadığı görülmüştür. Bu durum ters örnek teşkil eden graf aileleri üretilerek ispatlanmıştır. Üretilen ailelerden ilkinde grafın içerdiği maksimum kliğin nokta sayısının çift olması koşulu vardır. Fakat ikinci ailede içerilen tam graftaki nokta sayısı kaç olursa olsun daima ko-spektral fakat izomorf olmayan bir eş bulunabilecek şekilde birden fazla örnek bulunabildiği görülmüştür.

Aynı zamanda  $q = 1$  ve  $q = 2$  değerleri için iddia edilen hipotezin doğru olduğuna dair yeniden ispat yapılmıştır. Beşinci bölümde elde edilen bulgular da kısaca aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

**Sonuç 3.**  $\forall p \in \mathbb{Z}^+$  ve  $q \leq 2$  için  $K_p^q$  komşuluk matrisinin spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır.

**Sonuç 4. (i)**  $p = 2k \leq 4$  ve  $q = k^2$  ise  $K_p^q$  komşuluk spektrumu ile belirlenebilen bir graf değildir.

**(ii)**  $k \in \mathbb{Z}^+$  ve  $k(k+1)$  çarpımının bir pozitif tam böleni  $\alpha$  olsun.  $p = k + 2 + \alpha$  ve  $q = \frac{k(k+1)(\alpha+1)}{\alpha}$  ise  $K_p^q$  grafi komşuluk spektrumu ile belirlenebilen bir graf değildir.

Elde edilen bu sonuçlar içerisinde, ananas grafın komşuluk spektrumu ile belirlenemediğine dair verilen ters örnekler için üretilen aileler bağlantısız graf aileleridir. Dolayısıyla akla şu soru gelmektedir.

**Problem 1.** Bağlantılı graflar içerisinde,  $K_p^q$  komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir midir?

Yani bağlantılılık koşulu altında iddia edilen hipotezin doğruluk değeri nedir? Ayrıca üretilen ailelerde sarkıt nokta sayısı olan  $q$  değeri, klikteki nokta sayısı olan  $p$  değerine bağlı olarak elde edilmiştir. Bunun yanısıra  $q < 2$  iken hipotezin doğru olduğu ispat edilmiştir. Bu yüzden aşağıdaki soru da açık bir problem haline gelir.

**Problem 2.**  $p \geq 4$  ve  $q \geq 3$  olmak üzere,  $K_p^q$  hangi  $p$  ve  $q$  değerleri için komşuluk spektrumuna göre belirlenebilirdir?

Bu problemlerin cevaplanabilmesi, çok daha kapsamlı bir hipotez olan aşağıdaki probleme de yanıt bulunabilmesine imkan tanıyacaktır.

*Problem 3.*  $K_p^q$  grafinın komşuluk spektrumuna göre tam bir karakterizasyonunu yapmak mümkün müdür?

Böylelikle, bu tez çalışması esnasında elde edilen bulgular ile literatüre katkıda bulunulurken, aynı zamanda ilgi uyandıracak nitelikte yeni açık problemler de üretilmiştir.

## KAYNAKLAR

1. Brin S., Page L., "The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine", *Proceedings of the seventh international conference on world wide web (Australia)*, 107-117, 1998.
2. Brouwer A. E., Haemers W., "Spectra of Graphs", *WordPress*, 2008.
3. Günthard H., Primas H., "Zusammenhang von Graphentheorie und MO-Theorie von Molekeln mit Systemen konjugierter Bindungen", *Helv. Chim. Act*, 39, 1645-1653, 1956.
4. Collatz L., Sinogowitz U., "Spektren endlicher Grafen", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 21, 63-77, 1957.
5. Harary F., "The determinant of the adjacency matrix of a graph", *SIAM Review* 4, 202-210, 1962.
6. Fisher M., "On hearing the shape of a drum", *J. Combin. Theory*, 1, 105-125, 1966.
7. Kac M., "Can one hear the shape of a drum?", *Amer. Math. Monthly*, 73, 1-23, 1966.
8. Schwenk A.J., "Almost all trees are cospectral, F. Harary (Ed.) New directions on the theory of graphs", *Academic Press, New York*, 275-307, 1973.
9. Smith J.H., "Some properties of spectrum of a graph", *Comb. Structures and their App.*, *Gordon and Breach, New York*, 403-406, 1970
10. Liu X., Zhang Y., Gui X., "The multi-fan graphs are determined by their Laplacian spectra", *Discrete Math.* , 308 (18), 4267-4271, 2008.
11. Haemers W., Liu X., Zhang Y., "Spectral characterizations of lollipop graphs", *Lin. Alg. App.*, 428, 2415-2423, 2008.
12. Boulet R., Jouve B., "The lollipop graph is determined by its spectrum", *Elect. J. Combin.*, 15, R74, 2008.
13. Zhang Y., Liu X., Zhang B., Yong X., "The lollipop graph is determined by its Q-spectrum", *Lin. Alg. App.*, 428, 2415-2423, 2009.
14. Boulet R., "Spectral characterization of sun graphs and broken sun graphs", *Disc. Math. Theo. Comp. Science*, 11 (2), 149-160, 2009.
15. Zhang Y., Liu X., Yong X., "Which wheel graphs are determined by their Laplacian spectra?", *Comp. Math. And App.*, 1887-1890, 2009.
16. Zhang H., Zhang X., "Some graphs are determined by their spectra", *Lin. Alg.App.*, 431, 1443-1454, 2009.



17. Omid G.R., "On a signless Laplacian spectral characterization of T-shape trees", *Lin. Alg. Appl.*, 431, 1607-1615, 2009.
18. Haemers W., Van Dam E.R., "Developments on spectral characterizations of graphs", *Discrete Math.*, 309, 576-586, 2009.
19. Mirzakhah M., Kiani D., "The sun graph is determined by its signless Laplacian spectrum", *Elect. J. Linear Alg.*, 20, 610-620, 2010.
20. Hamidzade H., Kiani D., "Erratum to "The lollipop graph is determined by its Q-spectrum", *Discrete Math.*, 310, 1649, 2010
21. Wang W., Lu H., Xu Z., "Graphs determined by their generalized characteristic polynomials", *Lin. Alg. App.*, 434, 1378-1387, 2011.
22. Guo J-M, Shiu W.C., Li J., "The algebraic connectivity of lollipop graphs", *Lin. Alg. App.*, 434, 2204-2210, 2011.
23. Wang J., Shi S., "The line graphs of lollipop graphs are determined by their spectra", *Lin. Alg. App.*, 436, 2630-2637, 2012.
24. Bu C., Zhou J., Li H., "Spectral determination of some chemical graphs", *Filomat*, 26 (6), 1123-1131, 2012.
25. Bu C., Zhou J., "Starlike trees whose maximum degree exceed 4 are determined by their Q-spectra", *Lin. Alg. Appl.*, 436, 143-151, 2012.
26. Omid G.R., Vatandoost E., " Starlike trees with maximum degree 4 are determined by their signless Laplacian spectra", *Elect. J. Linear Alg.*, 23, 375-386, 2012.
27. Zhou J., Bu C., "Spectral characterization of line graphs of starlike trees", *Linear and Multilinear Alg.*, 61 (8), 1040-1050, 2013.
28. Stanic Z. "Graphs with small spectral gap", *Elect. J. Linear Alg.*, 26, 417-432, 2013.
29. Liu F., Huang Q., "Laplacian spectral characterization of 3-rose graphs", *Lin. Alg. App.*, 439 (10), 2914-2920, 2013.
30. Camara M., Haemers W.H., "Spectral characterization of almost complete graphs", *Discrete Applied Math.*, 176, 19-23, 2014.
31. Haemers W., van Dam E.R., "Which graphs are determined by their spectrum?", *Lin. Alg. And App.*, 373, 241-272, 2003.
32. Godsil C.D., McKay B.D., "Constructing cospectral graphs", *Aequations Math. vol 25*, 257-268, 1982.
33. Cvetkovic D., Lepovic M., "Cospectral graphs with least eigenvalue at least -2", *Publ. Inst. Math. (Belgrad)*, 78 (92), 51-63, 2005.

34. Wang W., Xu C.-X., “A sufficient condition for a family of graphs being determined by their generalized spectra”, *European J. Combin.*, 27, 826-840, 2006.
35. Wang W., Xu C.-X., “An excluding algorithm for testing whether a family of graphs are determined by their generalized spectra”, *Lin. Alg. App.*, 418, 62-74, 2006.
36. Wang W., Xu C.-X., “Note: On the generalized spectral characterization of graphs having an isolated vertex”, *Lin. Alg. App.*, 425, 210-215, 2007.
37. Ghareghani N., Omid G.R., Tayfeh-Rezaie B., “Spectral characterization of graphs with index at most  $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ ”, *Lin. Alg. App.*, 420, 483-489, 2007.
38. Woo R., Neumaier A., “On graphs whose spectral radius is bounded by  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ”, *Graphs Combin.*, 23, 713-726, 2007.
39. Stevanovic D., Hansen P., “The minimum spectral radius of graphs with a given clique number”, *Elect. J. Linear Alg.*, 17, 110-117, 2008.
40. Cvetkovic D., Rowlinson P., Simic S., “An Introduction to the Theory of Graph Spectra”, *Cambridge University Press*, 2010.
41. Cvetkovic D., Stevanovic D., “Graphs with least eigenvalue at least  $-\sqrt{3}$ ”, *Publ. Inst. Math. (Belgrad)*, 73 (87), 39-51, 2003.
42. Cvetkovic D., Doob M., Sachs H., “Spectra of Graphs”, *Academic Press*, 1980.
43. Biggs N., “Algebraic Graph Theory 2. ed”, *Cambridge Mathematical Library*, 1993.
44. Chung F.R.K., “Spectral Graph Theory”, *CBMS, American Mathematics Society*, 1997.
45. Gross J., Yellen J., “Graph Theory and its Applications”, *CRC Press*, 2000.
46. Godsil C., Royle G., “Algebraic Graph Theory”, *GTM, Springer*, 2001.
47. Cvetkovic D., Rowlinson P., Simic S., “Spectral generalizations of line graphs”, *Cambridge University Press*, 2004.
48. Horn R. A., Johnson R.C., “Matrix Analysis 23. ed”, *Cambridge University Press*, 2010.
49. Bapat R. B., “Graphs and Matrices”, *Springer-Hindustan Book Agency*, 2010.
50. Aouchiche M., Caporossi G., Hansen P., “Variable neighborhood search for extremal graphs 27. families of extremal graphs”, *Les Cahiers du GERAD*, 2007.
51. Petrovic M., Milekic B., “On the second largest eigenvalue of line graphs”, *J. Graph Theory*, 27, 61-66, 1998.
52. Petrovic M., Milekic B., “Generalized line graphs with the second largest eigenvalue at most 1” *Publ. Inst. Math. (nouvelle serie)*, 68 (82), 37-45, 2000.

53. Cvetkovic D., "Graphs and their spectra", *University Beograd, Publ. Elektrothen. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, 1-50, 1971.
54. Turner J., "Generalized matrix functions and the graph isomorphism problem", *SIAM J. Appl. Math.*, 16, 520-526, 1968.
55. Nikiforov V., "Some inequalities for the largest eigenvalue of a graph", *Combin. Probab. Comput.*, 11 (2), 179-189, 2002.
56. Stevanovic D., Gutman I., Rehman M., "On spectral radius and energy of complete multipartite graphs", *Ars Mathematica Contemporanea*, 9, 109-113, 2015.
57. Lepovic M., "Some results on starlike trees and sunlike graphs", *J. Appl. Math. Comp.*, 11, 109-123, 2003.
58. Nath M., Paul S., "A note on the distance spectral radius of some graphs", *Discrete Math. Alg. Appl.*, 6 (1), 1450015, 1-8, 2014.
59. Guo J. Li J. Shiu W.C., "The smallest Laplacian spectral radius of graphs with a given clique number", *Lin. Alg. Appl.*, 437, 1109-1122, 2012.
60. Zhang J. M., Huang T. Z., Guo J. M., "The smallest spectral radius of graphs with a given clique number", *The Scientific World J.*, 2014 (ID 232153), 1-9, 2014.
61. Omid G.R., "On a signless Laplacian spectral characterization of T-shape trees", *Lin. Alg. Appl.*, 431, 1607-1615, 2009.
62. Doob M., Cvetkovic D., "On spectral characterizations and embeddings of graphs", *Lin. Alg. Appl.*, 27, 17-26, 1979.
63. Liu M., Shan H., Das K. C., "Some graphs are determined by their (signless) Laplacian spectra", *Lin. Alg. Appl.*, 449, 154-165, 2014.
64. Wang J., Belardo F. Zhang Q., "Signless Laplacian spectral characterizations of line graphs of T-shape trees", *Linear and Multilinear Alg.*, 62 (11), 1529-1545, 2014.
65. Sorgun S., Topcu H., "On the spectral characterization of kite graphs", *Journal of Alg. Combin. Disc. Struct. And Appl.*, 3 (2), 1-10, 2016.
66. Topcu H., Sorgun S., Haemers W.H., "On the spectral characterization of pineapple graphs", *arXiv:1511.08674v2[math.CO]*, 2015.
67. Topcu H., Sorgun S., "The kite graph is determined by its adjacency spectrum", *submitted for publication*, 2015.

## ÖZGEÇMİŞ

Hatice TOPCU 1986 yılında Afyonkarahisar ilinin Şuhut ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Şuhut Zaferyolu İlkokulunda, Ortaokulu ise Afyonkarahisar Anadolu İmam Hatip Lisesinde tamamladı. Lise öğrenimini ise Konya Meram Fen Lisesinden Afyon Süleyman Demirel Fen lisesine geçiş yaparak 2003 yılında tamamladı. Aynı yıl kazandığı Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2007-2009 yılları arasında Final Dergisi Dershanelerinde Matematik ve Geometri öğretmenliği yaptı. Aynı yıllarda ayrıca Afyon Anadolu İmam Hatip Lisesinde ve Afyon Kocatepe Anadolu Lisesinde stajyer öğretmenlik yaptı. 2009 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak işe başladı. Aynı yıl çalıştığı üniversitede Fen Bilimleri Enstitüsü Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2011 yılında YÖK kanalıyla gittiği A.B.D. nin Kentucky eyaletinde University of Louisville’de Şubat-Haziran ayları arasında misafir araştırmacı olarak bulundu. 2012 yılında yüksek lisansını tamamlayıp aynı enstitüde ve aynı anabilim dalında doktora eğitimine başladı. 2016 yılında TÜBİTAK 2214-A doktora sırası araştırma burs programı kapsamında, Hollanda’da bulunan Tilburg University’de Ocak-Şubat aylarında misafir araştırmacı olarak bulundu. Evli olup halen Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde görevine devam etmektedir.

Adres: Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü

Telefon: 0 384 2281000 - 13096

Belgegeçer: 0 384 2153948

e-posta : hatice.kamit@nevsehir.edu.tr

