T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN LAPLASYAN ve İŞARETSİZ LAPLASYAN ÖZ DEĞERLERİ İÇİN NORDHAUS-GADDUM TİPİ SINIRLAR

Tezi Hazırlayan
Aysun BAŞBUĞ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2018
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN LAPLASYAN ve İŞARETSİZ LAPLASYAN ÖZ DEĞERLERİ İÇİN NORDHAUS-GADDUM TİPİ SINIRLAR

Tezi Hazırlayan
Aysun BAŞBUĞ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2018
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Sezer Sorgun danışmanlığında **AYSUN BAŞBUĞ** tarafından hazırlanan "**Grafların Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan Öz Değerleri için Nordhaus-Gaddum Tipi Sınırlar**" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

BAŞKAN :DOÇ. DR. HALİS BİLGİL

ÜYE : DOÇ.DR. SEZER SORGUN

ÜYE : DR. ÖĞR.ÜYESİ HATİCE TOPCU

ONAY:

Bu tezin kabulü Yönetim Kurulunun 25/07/2018 tarih ve 30-248 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

31/07/2018

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü V.

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Aysun BAŞBUĞ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her safhasında bilgi ve tecrübesiyle bana yön veren, çalışmalarımda yardımlarını ve hoş görüsünü esirgemeyen çok değerli Sayın Hocam Doç. Dr. Sezer Sorgun'a, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

GRAFLARIN LAPLASYAN ve İŞARETSİZ LAPLASYAN ÖZ DEĞERLERİ İÇİN NORDHAUS-GADDUM TİPİ SINIRLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Aysun BAŞBUĞ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2018

ÖZET

Grafların Laplasyan, İşaretsiz Laplasyan matrisi ve öz değerleri matematikte ve birçok alanda büyük ölçüde kullanılmaktadır. Bir grafın ve bu grafın komplementinin graf değişmezlerinin toplamı ya da çarpımının herhangi bir alt veya üst sınırı Nordhaus–Gaddum (NGT) tipi eşitsizlik olarak bilinir.

Bu tez çalışmasında ikinci bölümde bazı temel tanım ve teoremler, graf değişmezleri ve diğer bölümlerde kullanılmak üzere Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan matrisi, Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan spektral yarıçapı için bazı sınırlar verildi. Üçüncü bölümde ise NGT- eşitsizlikler ile ilgili yapılan çalışmalar geniş bir biçimde derlenmiştir. Dördüncü bölümde ise Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan spektral yarıçapı için NGT- eşitsizlikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf, Laplasyan Matrisi, İşaretsiz Laplasyan Matrisi, Nordhaus–Gaddum Tipi Eşitsizlikler
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sezer Sorgun
Sayfa Adedi:43

NORDHAUS-GADDUM TYPE BOUNDS FOR LAPLACIAN AND SİGNLESS LAPLACİAN EIGENVALUES OF GRAPHS

(M. Sc. THESİS)

Aysun BAŞBUĞ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

TEMMUZ 2018

ABSTRACT

The Laplacian, Signless Laplacian matrix and its eigenvalues of graphs are used in many areas to a great extent as well as mathematics. Any upper or lower bounds on the sum or product of the invariants of the graph related to graph and its complement is known as Nordhaus-Gaddum type inequality.

In the 2nd section of this thesis, some basic definitions and results and bounds are given, as well as some bounds for Laplacian and Signless Laplacian matrices, Laplacian and Signless Laplacian spectral radius to be used in graphs. In the third section, results about NGT have been compiled widely a way. In the fourth section, NGT-inequalities are examined for the largest Laplacian and Signless Laplacian eigenvalues.

Keywords: Graph, Laplacian Matrix, Signless Laplacian Matrix, Nordhaus-Gaddum Type Inequalities
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezer Sorgun
Page Number:43

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

I_n	Birim matris
A^T	A'nın transpozu
A^*	A'nın eşlenik transpozu
F	Cisim
$M_n(F)$	Elemanları F cisminde olan $n \times n$ tipinde matris
$spek(A)$	A matrisinin öz değerler kümesi
$\sigma(A)$	A matrisinin spektral yarıçapı
$s_i(A)$	A matrisinin i.satır toplamı
$G = (V, E)$	Graf
V	Grafın nokta kümesi
E	Grafın kenar kümesi
n	Grafın nokta sayısı
e	Grafın kenar sayısı
$u \sim v$	u ve v noktası bir kenar ile bağlı
$d(v)$	v noktasına bağlı kenar sayısı
$m(v)$	v noktasının komşularının ortalama derecesi
N_i	i noktasının komşu sayısı
$\Delta(G)$	G grafınındaki noktaların maksimum dereceli olanı
$\delta(G)$	G grafınındaki noktaların minimum dereceli olanı
G^c	G grafının komplementi
$\chi(G)$	G grafının kromatik sayısı
K_{n_1,n_2}	Tam iki parçalı bir graf
K_{1,n_2}	Yıldız Graf
$d(u, v)$	u' dan v noktasına en yakın yol sayısı

$diam(G)$	Herhangi iki nokta arasındaki en büyük uzaklık
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi
$D(G)$	G grafının derece matrisi
$\lambda(G)$	G grafının spektral yarıçapı
$L(G)$	G grafının Laplasyan matrisi
$\mu_i(G)$	G grafının Laplasyan matrisinin öz değerleri
$\mu_1(G)$	G grafının L spektral yarıçapı
$Q(G)$	G grafının İşaretsiz Laplasyan matrisi
$q_i(G)$	G grafının İşaretsiz Laplasyan matrisinin öz değerleri
$q_1(G)$	G grafının Q spektral yarıçapı

ŞEKİLLER LİSTESİ

1.BÖLÜM

GİRİŞ

χ kromatik sayısının 1852 de Guthrie tarafından sorulan ünlü dört renk problemi ile başlayan tarihi 1879 da Kempe [1] ve 1890 da Heawood [2] çalışmalarıyla graf değişmezlerinde oldukça geniş çalışılmıştır. 1956' dan önce sadece G grafının kromatik sayıları ile değişmezleri arasındaki ilişkiler çalışılmıştı. Daha sonraki yıllarda Nordhaus ve Gaddum; n noktalı bir graf için $\chi(G)$ ve $\chi(G^c)$ üzerinde toplama ve çarpma işlemlerine göre alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir. Daha sonra yapılan çalışmalar P herhangi bir graf değişmezi olmak üzere $P(G) + P(G^c)$ ve $P(G).P(G^c)$ için sınırlar da Nordhaus – Gaddum tipi eşitsizlikler olarak literatürde isimlendirilmiştir.

Başlangıçta bu tür ilişkiler pek fazla ilgi görmedi. Bu ilişkilerin ilk çalışması, Nordhaus ve Gaddum [3] makalesinin yayınlanmasından yaklaşık on yıl sonra, Nordhaus ve Stewart [4] tarafından daha ayrıntılı bir biçimde literatüre kazandırıldı. Nitekim, 1965 yılında Vizing [5], bir grafın kromatik indeksi ile benzer ilişkileri kanıtlayan ilk yazardı. NGT-eşitsizliklerinin yakınlığı ile ilgilenen diğer yazarlar 1966 'dan 1969 yılına kadar Finck [6,7] ve Sachs [8] idi. Çalışmaları esas olarak $\chi(G)$ ve $\chi(G^c)$ kromatik sayılarıyla verilen G ve G^c graflarının varlığıyla ve özellikle orijinal Nordhaus–Gaddum eşitsizliklerinin sınırlarına karşılık gelen ekstremal graflarla ilişkiliydi. Stewart [9], $\chi(G)$ ve $\chi(G^c)$ sayılarının pozitif değerlerinin her bir çiftine karşılık grafların bir ailesini 1969 da yapılandırdı. NGT ile ilgili diğer çalışmalar için [11-14] kaynaklarına bakılabilir.

Bu tez çalışmasında, yukarıda bahsedilen çalışmalar ışığında grafların Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan öz değerleri için NGT- eşitsizlikleri derlenecektir. Graf teoride bir grafın Laplasyan öz değerleri önemlidir, çünkü bağlanabilirlik, izoperimetrik sayı, çap ve maksimum kesim de dahil olmak üzere birçok graf değişmezleri ile yakın ilişkileri vardır. Özellikle $\mu_1(G)$ için iyi üst sınırlar birçok alanda uygulanmaktadır. Örneğin, Heilbronner modeli içeren kuramsal kimyada, alkanların ilk iyonizasyon potansiyelini belirlemek için, grafta maksimum kesimin boyutu üzerinde bir üst sınır sağlamak için kombinatoryal optimizasyonda, kenar yönlendirme dizininde bir alt sınır sağlamak için iletişim ağlarında vb. kullanılmaktadır.

Bu literatür taramasından yola çıkarak ikinci bölümde bazı temel tanım ve teoremler, graf değişmezleri ve diğer bölümlerde kullanılmak üzere Komşuluk, Laplasyan, İşaretsiz Laplasyan matrisi ve Laplasyan, İşaretsiz Laplasyan spektral yarı çapı için bazı sınırlar verildi.

Üçüncü bölümde ise NGT- eşitsizlikler hakkında yapılan çalışmalar geniş bir biçimde derlenmiştir. Dördüncü bölümde ise Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan spektral yarıçapı için NGT- eşitsizlikler incelenmiştir.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu kısımda bahsi geçen temel tanımlar ve teoremler [13-15, 17-31] kaynaklarından alınmıştır.

2. 1. Matrisler ve Bazı Kavramları

Tanım 2.1.1 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ tipinde bir kare matris olmak üzere $AX = \lambda X$ denklemini sağlayan herhangi bir λ skaleri varsa sıfır olmayan X vektörüne A matrisinin öz vektörü denir, λ skalerine de A matrisinin öz değeri denir.

Tanım 2.1.2 I birim matris olmak üzere bir A matrisinin karakteristik polinomu $K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi denir. Bu karakteristik denklemin n tane λ köklerine de A matrisinin öz değerleri denir.

Tanım 2.1.3 $A \in M_n$ olsun. A matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olmak üzere A matrisinin öz değerlerinin kümesi $spek(A) = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ ,\ \lambda_n\}$ olarak gösterilir.

$\sigma(A) = max\{|\lambda_i|: 1 \leq i \leq n\}$

ifadesi ise matrisin spektral yarıçapı olarak isimlendirilir.

Tanım 2.1.4 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ matrisinin elemanları kompleks sayılar ise, o zaman A matrisinin eşlenik transpozu $A^* = (\bar{a}_{ji})$ olarak tanımlanır. Böylece eğer $A = (a_{ij})$ olmak üzere A matrisinin eşleniği $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ ise, bu takdirde $A^* = (\bar{A})^T$ dir.

Tanım 2.1.5

i. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ kare matrisi için $A^T = A$ ise bu matrise simetrik matris denir.

ii. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisi elemanları kompleks sayılar olan bir kare matris olmak üzere eğer $A^* = A$ şartı sağlanıyorsa, o zaman A matrisine Hermit matris denir.

Teorem 2.1.1 Hermit bir matrisin bütün öz değerleri reeldir.

Teorem 2.1.2 Bir matrisin öz değerleri ile transpozunun öz değerleri aynıdır.

Lemma 2.1.1 [18] A bir $n \times n$ tipinde reel simetrik matris ve λ bileşenleri negatif olmayan bir x öz vektörü olan A matrisinin öz değeri olsun. A matrisinin i. satır toplamı $s_i(A)$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\min_{1\leq i\leq n} s_i(A) \leq \lambda \leq \max_{1\leq i\leq n} s_i(A)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 2.1.2 [18] $A \in M_n(\mathbb{R})$ ve λ bileşenlerinin hepsi negatif olmayan bir öz vektörle A matrisinin bir öz değeri olsun. $p(x)$ keyfi polinom ve A matrisinin i. satır toplamı $s_i(A)$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\min_{1\leq i\leq n} s_i(p(A)) \leq p(\lambda) \leq \max_{1\leq i\leq n} s_i(p(A))$$

eşitsizliği sağlanır.

Üstelik x' in bütün bileşenleri pozitif ise bu durumda eşitliklerden her ikisini de sağlanması için gerek ve yeter şart $p(A)$ nın satır toplamlarının eşit olmasıdır.

Tanım 2.1.7 (Bazı özel matrisler)

i. Eğer bir A matrisinin bütün elemanları reel ve negatif değilse A matrisine negatif olmayan matris denir.

ii. Bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ Hermit matrisi, eğer her sıfır olmayan n boyutlu X vektörü için $\bar{X}^T AX > 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa pozitif tanımlı matris; eğer $\bar{X}^T AX \geq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa pozitif yarı tanımlı matristir.

iii. Eğer $A = (a_{ij})_{n\times n}$ kare matrisi için $a_{i,i+1} = 1$, $a_{n1} = 1$ ve diğer bütün elemanları sıfır oluyorsa o zaman A matrisine permütasyon matrisi denir. Yani, birim matrisin satırlarını ya da sütunlarını değiştirmekle elde edilen bir matristir.

iv. Her hangi bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisi için $P^T AP$ matrisi blok üst üçgen olacak şekilde $n \times n$ tipinde bir P permütasyon matrisi bulunabiliyorsa A matrisine indirgenebilir matris denir. İndirgenebilir olmayan matrise de indirgenemez matris denir.

Önerme 2.1.1 Pozitif (yarı) tanımlı matrislerin öz değerleri (negatif olmayandır) pozitiftir.

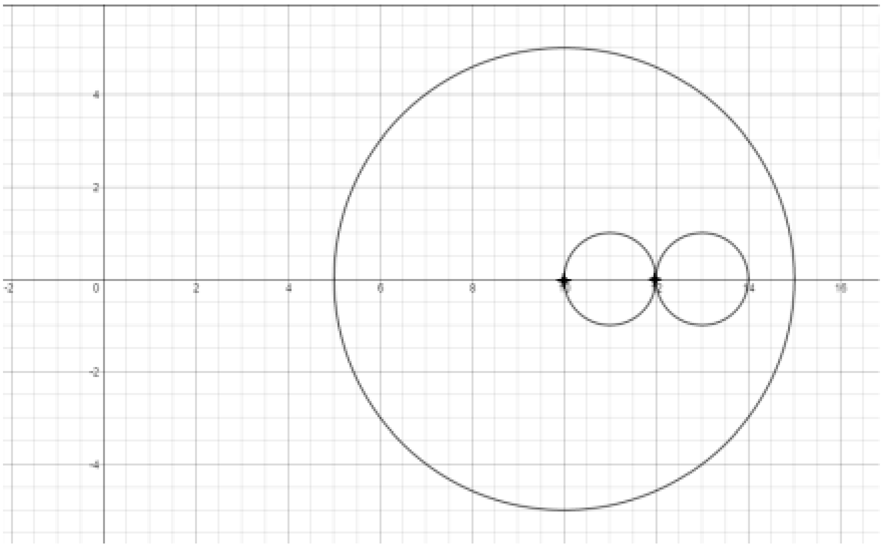
Teorem 2.1.3 (Perron–Frobenius Teoremi) Negatif olmayan, indirgenemeyen bir A matrisinin spektral yarıçapına eşit tek katlı bir öz değeri vardır ve bu değere karşılık gelen sadece pozitif bileşenli bir öz vektörü vardır.

Teorem 2.1.4 (Gershgorin Circle Theorem) $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisi ve $1 \leq i \leq n$ için $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|$ ve $C_i = \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| \leq R_i\}$ alınsın. Bu takdirde A matrisinin öz değerleri $1 \leq i \leq n$ için $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ ,\ \lambda_n$ olmak üzere $\lambda_i \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ dır.

Örnek 2.1.1 [19] $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & -1 & 13 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alınsın. A matrisinin öz değerleri hesaplanacak olursa $\det(\lambda I - A) = 0$, yani

$$\begin{vmatrix} \lambda - 10 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda - 11 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 13 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece, $(\lambda - 10)(\lambda - 12)(\lambda - 12) = 0$ denklemi elde edilir. Buradan $\lambda_1 = 10,\ \lambda_{2,3} = 12$ elde edilir. Kompleks düzlemde esas köşegen üzerindeki 10+0i, 11+0i ve 13+0i noktaları üç diskin merkezi olur. Bu disklerin yarıçapları sırasıyla $|2| + |3| = 5,\ \ |0| + |1| = 1$ ve $|0| + |-1| = 1$ olacak şekildedir. Görsel olarak bu diskler aşağıdaki şekildedir. Şekil 1 den de anlaşıldığı üzere A matrisinin öz değerleri bu disklerin birleşimi içerisindedir.



Şekil 1.Gershgorin Circle Teoremine Örnek

2.2. Graf Değişmezleri

Tanım 2.2.1 V bir nokta kümesi, E kenar kümesi olmak üzere $G = (V, E)$ sıralı ikilisine graf denir. $e = |E|$ ve $n = |V|$ sırasıyla kenar ve nokta sayılarıdır.

Tanım 2.2.2

i. Bir grafta iki nokta bir kenar oluşturuyorsa bu iki noktaya birbirlerine komşudur denir. Yani, $\{u, v\} \in E$ ise u noktası v noktasına komşu denir ve $u{\sim}v$ biçiminde de gösterilebilir.

ii. Bir grafta herhangi bir noktayla bağlı kenar sayısına o noktanın derecesi denir ve $v \in V$, $deg(v) = d(v)$ şeklinde gösterilir.

iii. Bir $v \in V(G)$ noktası için, $m(v)$ v noktasının komşularının ortalama derecesini gösterir ise yani, $m(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u\sim v} d(u)$ dir.

iv. Bir G grafındaki derecelerin en büyüğüne G grafının maksimum ve en küçüğüne minimum derecesi denir ve sırasıyla

$$\Delta = \Delta(G) = max\{d(v): v \in V\}, \delta = \delta(G) = min\{d(v): v \in V\}$$

ile gösterilir.

Lemma 2.2.1 [17] G n noktalı, e kenarlı ve Δ, δ sırasıyla en büyük ve en küçük dereceleri olan bir graf olsun. Bu durumda herhangi bir v noktası için

$$d(v) + m(v) \leq \frac{2e}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\Delta + (\Delta - \delta)\left(1 - \frac{\Delta}{n-1}\right) \tag{2.2.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer G bağlantılı bir graf ise bu durumda eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart ya $d(v) = n - 1$ ya da $d(v) = \Delta$ ve v noktasının bütün komşularının derecesi Δ ve v noktasına komşu olmayanların derecesinin δ olmasıdır.

Tanım 2.2.3 Bir graf tek bir noktada bir kenar oluşturmuyor ve aynı iki noktanın oluşturduğu birden fazla kenarlara sahip değilse grafa basit graf denir.

Tanım 2.2.4 Derecesi sıfır olan noktaya ayrık nokta (isolated vertex) denir.

Tanım 2.2.5 $G = (V, E)$ nin alt grafı; V cümlesinin alt cümlesi V' nokta cümlesi ve E cümlesinin alt cümlesi E' kenar cümlesi üzerinde tanımlı $G' = (V', E')$ grafıdır.

Tanım 2.2.6 Bir G grafında bütün noktaların dereceleri eşit ise G grafına düzenlidir denir. Yani $\Delta(G) = \delta(G) = d$ ise grafa d- düzenlidir denir. Aksi takdirde düzensiz graftır. n noktalı bir G grafı alındığında $\Delta(G) = \delta(G) = n - 1$ ise G grafına $n - 1$- düzenli (tam graf) denir.

Tanım 2.2.7 Bir G grafı ile aynı nokta kümesine sahip ve G grafında kenar oluşturmayan tüm noktaların birleştirilmesi ile elde edilen kenar kümesine sahip olan grafa G grafının tümleyeni (komplementi) denir ve G^c ile gösterilir.

Tanım 2.2.8 Bir G grafını komşu noktalar farklı renkte boyamak için ihtiyaç duyulan en az renk sayısına G grafının Kromatik sayısı denir ve $\chi(G)$ile gösterilir.

Tanım 2.2.9 Kromatik sayısı bir ya da iki olan bir G grafına iki parçalı (bipartite) graf denir. G grafındaki her kenar X deki bir nokta ile Y deki bir noktayı birleştirir şekilde iki parçalı bir grafın nokta cümlesi X ve Y olarak iki bölüme ayrılabilir.

Tanım 2.2.10 Bir bölümdeki her nokta ile diğer bölümdeki her nokta komşu ise bu grafa tam iki parçalı (complete bipartite) bir graf denir.$|X| = n_1$ ve $|Y| = n_2$ ise tam iki parçalı graf K_{n_1,n_2} şeklinde gösterilir. Özel olarak $n_1 = 1$ ise bu grafa yıldız (star) graf denir ve K_{1,n_2} şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.11 Bir graf iki parçalı ve aynı bölüme ait noktalar eşit dereceye sahipse bu grafa yarı düzenli iki parçalı denir. Nokta derecelerine r ve s karşılık geliyorsa bu graftan (r,s)- yarı düzenli iki parçalı olarak bahsedebilir.

Tanım 2.2.12 Bir G grafında k-yürüyüş (k-walk) e_i her kenarı v_i ve v_{i+1}

($1 \leq i \leq k-1$) ile ilişkili olan $v_1,\ e_1,\ v_2,\ e_2,\ \dots,\ v_k,\ e_k$ şeklinde noktaların ve kenarların alternatif sırasıdır. v_i ile v_k çakışık ise yürüyüş kapalıdır. Bir yürüyüşteki bütün noktalar belli ise buna bir yol (path) denir.

Tanım 2.2.13 Eğer her iki farklı nokta G grafında en az bir yolun sonuysa G grafına bağlantılı (connected) denir. Aksi takdirde G bağlantısızdır (disconnected) ve maksimal bağlantılı türetilmiş alt graflarına G grafının bileşenleri (component) denir.

Tanım 2.2.14 G grafında alınan herhangi iki nokta çifti arasındaki en büyük uzaklığa G grafının çapı (diameter) denir ve $diam(G)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2.15 G_1 ve G_2 iki graf olsun. G_1 grafının herhangi iki noktasını birleştiren kenarların sayısı G_2 grafının karşılık gelen noktalarını birleştiren kenarların sayısına eşit olmak üzere G_1 ve G_2 graflarının noktaları arasında birebir bir eşleme varsa G_1 ve G_2 graflarına izomorftur denir.

2. 3. Komşuluk, Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan Matrisi

Tanım 2.3.1 Bir G grafının komşuluk matrisi $A(G)$ şeklinde tanımlansın. Bu matrisin elemanları

$$a_{uv} = \begin{cases} 1, & u \sim v \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

biçimindedir.

Tanım 2.3.2 Bir $G = (V, E)$ grafının komşuluk matrisinin öz değerlerine grafın öz değerleri denir. Komşuluk matrisinin en büyük öz değeri G grafının spektral yarıçapı olarak tanımlanır ve $\lambda(G)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3.3 $A(G)$; G grafının komşuluk matrisi, $D(G)$; köşegen elemanları G grafının noktalarının derecelerinden oluşan bir köşegen matris olmak üzere

$L(G) = D(G) - A(G)$ şeklinde tanımlanan matris G grafının Laplasyan matrisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.4 $C_G(x) = \det(xI - L)$ polinomuna da G grafının Laplasyan karakteristik polinomu denir. Bu polinomun kökleri de Laplasyan öz değerleridir ve μ_1 , μ_2 , … , μ_n şeklinde gösterilir. Üstelik $L(G)$ matrisi pozitif yarı tanımlı olduğundan her bir öz değeri negatif olmayan reel sayılardır. Böylece $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0$ biçiminde sıralanır. μ_1, G grafının L spektral yarıçapıdır.

Lemma 2.3.1 [17] Laplasyan öz değerleri için

$$\mu_1(G) + \mu_1(G^c) = n + \mu_1(G) - \mu_{n-1}(G)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.3.5 $\mu_1(G) - \mu_{n-1}(G)$ değerine Laplasyan yayılımı denir.

Lemma 2.3.2 [20] Herhangi bir G grafı için

$$\mu_i(G) = n - \mu_{n-i}(G^c), \qquad i = 1, \dots, n-1$$

eşitliği vardır.

Lemma2.3.3 [17] n noktalı herhangi G grafı için $\mu_1(G) \leq n$ eşitsizliğin olması için gerek ve yeter şart G^c grafının bağlantısız olmasıdır.

Tanım 2.3.6 İşaretsiz Laplasyan matrisi; $A(G)$, G grafının komşuluk matrisi, $D(G)$, köşegen elemanları G grafının noktalarının derecelerinden oluşan bir köşegen matris olmak üzere $Q(G) = A(G) + D(G)$ biçimindedir. Başka bir ifadeyle Laplasyan matrisinden eksi işaretlerinin kaldırılmasıyla elde edilir. Bu matrise literatürde co-Laplasyan matrisi de denir. Bu matris görüldüğü üzere negatif olmayan indirgenemez bir matristir.

Tanım 2.3.7 $C_G(x) = \det(xI - Q)$ polinomu da İşaretsiz Laplasyan karakteristik polinomudur ve bu polinomun kökleri de İşaretsiz Laplasyan öz değerleridir ve

q_1 , q_2 , … , q_n biçiminde gösterilir. (q_1, G grafının Q spektral yarıçapıdır).

Lemma 2.3.4 [21] G bir graf olsun. Bu durumda

$$\mu_1(G) \leq q_1(G)$$

eşitsizliği vardır. Üstelik G bağlantılı ise eşitlik olması için gerek ve yeter şart G grafının iki parçalı olmasıdır.

Lemma 2.3.5 [17] Eğer G iki parçalı bir graf ise bu durumda $L(G)$ ve $Q(G)$ matrisleri benzerdir yani G grafının Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan öz değerleri aynıdır.

Lemma 2.3.6 [17] G bir graf ve G' grafı da G grafından bir kenarın kaldırılmasıyla elde edilsin, yani $G' = G - e$. Bu durumda G ve G' graflarının iç içe geçen İşaretsiz Laplasyan öz değerleri:

$$q_1(G) \geq q_1(G') \geq q_2(G) \geq q_2(G') \geq \cdots \geq q_n(G) \geq q_n(G')$$

şeklinde sıralanır.

Bazı özel grafların Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan spektrumu aşağıdaki gibidir:

(i) $spek\big(L(K_n)\big) = \{n^{n-1}, 0^1\}$

(ii) $spek(\mathrm{Q}(K_n)) = \{(2n-2)^1, (n-2)^{n-1}\}$

(iii) $spek\big(L(K_{r,s})\big) = spek\big(\mathrm{Q}(K_{r,s})\big) = \{(r+s)^1, r^{s-1}, s^{r-1}, 0^1\}$

2. 4. Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan Spektral Yarıçapı için Bazı Sınırlar

Teorem 2.4.1 [18] $G = (V, E)$ bir graf olsun. Bu durumda

$$\mu_1(G) \leq \sqrt{2}\max_{v\in V}(d(v)^2 + \sum_{uv\in E} d(u))^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik G bağlantılı olmak üzere eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G iki parçalı ve $\forall v \in V$ için $d(v)^2 + \sum_{uv\in E} d(u)$ ifadesi aynı olmalıdır. Özellikle eğer G iki parçalıysa bu durumda

$$\mu_1(G) \geq \sqrt{2}\min_{v\in V}(d(v)^2 + \sum_{uv\in E} d(u))^{1/2}$$

eşitsizliği vardır. Üstelik G bağlantılı olmak üzere eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için $d(v)^2 + \sum_{uv\in E} d(u)$ ifadesi aynı olmalıdır.

İspat: $s_v(Q) = 2d(v)$

ve

$$s_v(AD) = s_v(A^2) = \sum_{uv\in E} d(u)$$

eşitlikleri sağlandığından

$$\begin{aligned} s_v(Q^2) &= s_v(DQ + AD + A^2) \\ &= d(v)s_v(Q) + 2\textstyle\sum_{uv\in E} d(u) \\ &= 2d(v)^2 + 2\textstyle\sum_{uv\in E} d(u) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Lemma 2.3.4 ve Lemma 2.1.2 ifadelerinden

$$\mu_1(G) \leq q_1(G) \leq \sqrt{2}\max_{v\in V}(d(v)^2 + \sum_{uv\in E} d(u))^{1/2}$$

olduğu görülür ve G bağlantılı grafı için eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G iki parçalı ve $\forall v \in V$ için $d(v)^2 + \sum_{uv\in E} d(u)$ ifadesi aynı olmalıdır.

Eğer G iki parçalı ise bu durumda $D - A$ ve $D + A$ aynı öz değerlere sahip ve $D + A$ bir negatif olmayan indirgenemez simetrik matristir. Perron Frobenius Teoremi ve Lemma 2.1.2 ifadesinden

$$\mu_1(G) = q_1(G) \geq \sqrt{2}\min_{v\in V}(d(v)^2 + \sum_{uv\in E} d(u))^{1/2}$$

olduğu görülür ve G bağlantılı grafı için eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için $d(v)^2 + \sum_{uv\in E} d(u)$ ifadesi aynı olmalıdır.

Sonuç 2.4.1 G n noktalı, e kenarlı ve izole noktası olmayan bir graf olsun. $\Delta = \Delta(G)$ ve $\delta = \delta(G)$ olsun. Bu durumda

$$\mu_1(G) \leq \sqrt{2\Delta^2 + 4e - 2\delta(n-1) + 2\Delta(\delta - 1)} \qquad (2.4.1)$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik G bağlantılı ise eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının düzenli iki parçalı bir graf olmasıdır. Özellikle G iki parçalı olduğu durumda $\mu_1(G) \geq \sqrt{2\delta^2 + 4e - 2\Delta(n-1) + 2\delta(\Delta - 1)}$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik G bağlantılı olduğu durumda eşitlik olması için gerek ve yeter şart G grafının düzenli olmasıdır [22].

Teorem 2.4.2 [31] G n noktalı basit bağlantılı bir graf ve $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ derece dizisi olmak üzere

$$\mu_1(G) \leq d_n + \frac{1}{2} + \sqrt{(d_n - \frac{1}{2})^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - d_n)} \qquad (2.4.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.4.3 [23] G n noktalı e kenarlı basit bir graf olsun. Δ ve δsırasıyla G grafının maksimum ve minimum derecesi olsun ve $\mu_1(G)$ de G grafının Laplasyan spektral yarıçapı olsun.

$$\mu_1(G) \leq \frac{(\Delta+\delta-1)+\sqrt{(\Delta+\delta-1)^2+4(4e-2\delta(n-1))}}{2} \qquad (2.4.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik eğer G bağlantılıysa eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının düzenli iki parçalı bir graf olmasıdır.

İspat:

İlk olarak

$$q_1(G) \leq \frac{(\Delta + \delta - 1) + \sqrt{(\Delta + \delta - 1)^2 + 4(4e - 2\delta(n-1))}}{2}$$

olduğu gösterilsin.

$Q = D + A$ olduğundan

$s_v(Q) = 2d(v)$

ve

$$s_v(AD) = s_v(A^2) = \sum_{u\sim v} d(u)$$

eşitliklerine dikkat edilirse, bu durumda

$$\begin{aligned} s_v(Q^2) &= s_v(D(D+A) + AD + A^2) \\ &= d(v)s_v(Q) + s_v(AD) + s_v(A^2) \\ &= d(v)s_v(Q) + 2(2e - d(v) - \textstyle\sum_{u\nsim v, u\neq v} d(u)) \\ &\leq \Delta s_v(Q) + 4e - 2d(v) - 2(n - d(v) - 1)\delta \\ &= 4e + s_v(Q)(\Delta + \delta - 1) - 2\delta(n-1). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

elde edilir.

$\forall v \in V(G)$ için $s_v(Q^2 - (\Delta + \delta - 1)\, Q) \leq 4e - 2\delta(n-1)$

eşitsizliği sağlandığından Lemma 2.1.2 ifadesini de kullanarak

$$q_1(G)^2 - (\Delta + \delta - 1)q_1(G) \leq 4e - 2\delta(n-1).$$

eşitsizliği elde edilir. Kuadratik eşitsizliği çözerek

$$q_1(G) \leq \frac{(\Delta + \delta - 1) + \sqrt{(\Delta + \delta - 1)^2 + 4(4e - 2\delta(n-1))}}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.3.4 ifadesinden

$$\mu_1(G) \leq \frac{(\Delta + \delta - 1) + \sqrt{(\Delta + \delta - 1)^2 + 4(4e - 2\delta(n-1))}}{2}$$

eşitsizliği vardır.

(2.4.3) deki eşitlik sağlansın. Bu durumda yukarıda bütün eşitsizlikler eşit olmalıdır. Lemma 2.3.4 ifadesinden ilk olarak G bağlantılı iki parçalı bir graftır. Diğer bir yandan (2. 4. 4) denkleminden $\forall v \in V(G)$ için $d(v) = \Delta$ sağlandığından G bağlantılı düzenli iki parçalı bir graftır.

Aksine, G Δ dereceli bağlantılı düzenli iki parçalı bir graf olsun.

$\mu_1(G) = q_1(G)$

ve

$$s_v(Q^2 - (2\Delta - 1)Q) = s_v(Q^2) - (2\Delta - 1)s_v(Q)$$

$$=d(v)s_v(Q) + s_v(AD) + s_v(A^2) - (2\Delta - 1)s_v(Q)$$

$$=\Delta s_v(Q) + 2(2e - d(v) - \textstyle\sum_{u \nsim v, u \neq v} d(u)) - (2\Delta - 1)\, s_v(Q)$$

$$= 4e - 2d(v) - 2(n - d(v) - 1)\Delta - (\Delta - 1)\, s_v(Q)$$

$$= 4e - 2\Delta(n - 1)$$

eşitlikleri var olduğundan böylece

$\mu_1(G)^2 - (2\Delta - 1)\mu_1(G) = 4e - 2\Delta(n - 1),$

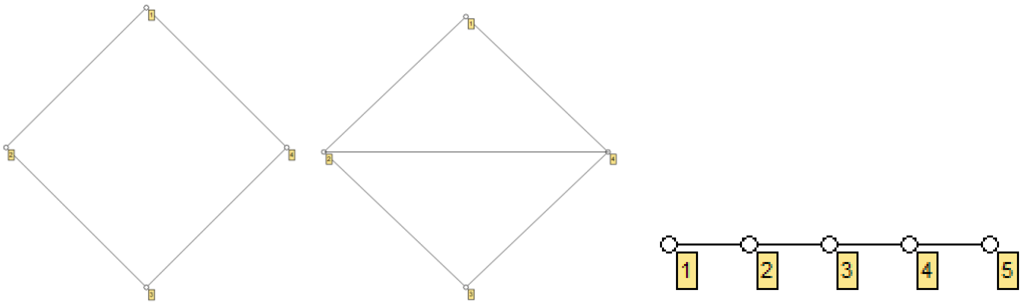
ve

$$\mu_1(G) = \frac{(2\Delta - 1) + \sqrt{(2\Delta - 1)^2 + 4(4e - 2\Delta(n - 1)}}{2}$$

eşitlikleri vardır.

Sonuç 2.4.2 [23] (2.4.3) ifadesinden eğer G bir k -düzenli iki parçalı graf ise $\mu_1(G) = 2k$ olduğu görülebilir.

Sonuç 2.4.3 [23] (2.4.1)- (2.4.3) sınırları kıyaslanamaz. Ancak bazı durumlarda (2.4.3) üst sınırını göstermek (2.4.1) ve (2.4.2) den daha iyidir. Örneğin, en az 4 uzunluğunda ki bir döngüde bir kiriş ekleyerek elde edilen bir graf olan $G = K_{1,n}$, $n \geq 3$ (2.4.3) üst sınırını kontrol (2.4.1) den ve en az 5 noktalı bir G yolunda (2.4.3) üst sınırını kontrol (2.4.2) den daha kolaydır.



Şekil 2: Sırasıyla G, H ve P_5 grafı

	μ_1	(2.4.1)	(2.4.2)	(2.4.3)
G	4	4	4	4
H	4	5,656	5	5,464
P_5	3	4	4	4

Teorem 2.4.4 [18,24] G n noktalı e kenarlı iki parçalı bir graf olsun. $\Delta = \Delta(G)$ ve $\delta = \delta(G)$ olsun. Bu durumda

$$\mu_1(G) \leq \{\Delta + \delta - 1 - [(\Delta + \delta - 1)^2 + 8(2e - \Delta n + \Delta)]^{1/2}\}/2 \qquad (2.4.5)$$

ya da

$$\{\Delta + \delta - 1 + [(\Delta + \delta - 1)^2 + 8(2e - \Delta n + \Delta)]^{1/2}\}/2 \leq \mu_1(G) \leq$$
$$\{\Delta + \delta - 1 - [(\Delta + \delta - 1)^2 + 8(2e - \delta n + \delta)]^{1/2}\}/2 \qquad (2.4.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Üstelik eğer G bağlantılı olduğu durumda (2.4.5) ifadesindeki üst sınır oldukça yakındır ve (2.4.6) ifadesindeki eşitsizliklerden birini elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının düzenli olmasıdır.

Teorem 2.4.5 [18] $G = (V, E)$ e kenarlı bağlantılı iki parçalı bir graf olsun. Bu durumda

$$\mu_1(G) \geq \left[\frac{\sum_{v\in V}\left(d(v)^{3/2} + \sum_{uv\in E}\sqrt{d(u)}\right)^2}{2e}\right]^{1/2}$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının düzenli olmasıdır.

Teorem 2.4.6 [18] G Δ maksimum dereceli n noktalı bağlantılı düzensiz bir graf olsun. Bu durumda

$$\mu_1(G) < 2\Delta - 2/(2n^2 - n)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bağlantılı bir G grafının çapı $diam(G) < n$ ifadesini karşıladığından Teorem 2.4.6 den aşağıdaki sonuca kolaylıkla ulaşılır.

Teorem 2.4.7 [18] G n noktalı d çaplı bağlantılı düzensiz bir graf olsun. $\Delta = \Delta(G)$ olmak üzere

$$\mu_1(G) < 2\Delta - \frac{2}{(2d+1)n}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.4.1 G bir graf olsun. C, G grafının noktalarının bir kümesi olmak üzere eğer G' nin her kenarı C deki bazı noktalarla ilişkiliyse C kümesine G grafının bir örtüsüdür denir. G grafının bir örtüsünün en küçük eleman sayısına G grafının örtü sayısı denir ve $\tau(G)$ ile gösterilir.

Örtü sayısının terimlerinde grafların Laplasyan spektral yarıçapı için bir alt sınır vermek için [24] deki Lu ve d. ait bir lemmaya ihtiyaç vardır. Bu lemmanın orijinal şekli bağlantılı graflar içindir. Bununla birlikte oradaki ispat bağlantısız graflar içinde geçerlidir.

Lemma 2.4.1 [24] G n noktalı bir graf ve G_1, n_1 $(n_1 < n)$ noktalı ve r_1 ortalama dereceli G grafının türetilmiş bir alt grafı olsun. $d_1 = \sum_{v \in V(G_1)} d(v)/n_1$ olmak üzere

$$\mu_1(G) \geq n(d_1 - r_1)/(n - n_1)$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki teorem [24] ve [25] de $\mu_1(G) \geq n/\tau(G)$ olarak öne sürülen sonuçlarının bir genişletilmişidir.

Teorem 2.4.8 [18] G δ minimum dereceli n noktalı bir graf olsun. Bu durumda $\mu_1(G) \geq \delta n / \tau(G)$

eşitsizliği sağlanır.

$\mu_1(G) \leq 2\Delta$ eşitsizliği iyi bilindiğinden böylece Teorem 2.4.8 den bir grafın örtü sayısı üzerindeki bir alt sınırı kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 2.4.4 [18] G n noktalı bir graf olmak üzere

$\tau(G) \geq \delta n / \mu_1(G)$

ve

$\delta n / \mu_1(G) \geq \delta n / (2\Delta)$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 2.4.9 [26] G n noktalı basit bir graf olsun.

$$\mu_1 \leq \max_i \left\{ \sqrt{2d_i(m_i + d_i) + n - 2d_i - 2 \sum_{j=j\sim i} |N_i \cap N_j|} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.4.10 [27, 28] G $n \geq 3$ noktalı bağlantılı graf olmak üzere

$$\frac{\Delta+\delta+\sqrt{(\Delta-\delta)^2+4\Delta}}{2} \leq q_1(G) \leq \frac{2e+\sqrt{e(n^3-n^2-2en+4e)}}{n} \quad (2.\ 4.\ 7)$$

eşitsizlikleri vardır. Bu durumda soldaki eşitliği elde etmek için gerek ve yeter şart grafının $G \cong K_{1,n-1}$ dir. Sağdaki eşitliği elde etmek için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ dir.

Teorem 2.4.11 [29] G n noktalı e kenarlı bir graf olsun.

$$q_1(G) \leq \frac{\delta-1}{2} + \sqrt{2(\Delta^2+\delta) + 2(2e - n\delta) + \frac{(\delta-1)^2}{4}} \quad (2.\ 4.\ 8)$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 2.4.1 [29] $G = (V, E)$ basit bir graf olsun. Bu durumda

$$\sqrt{2}\min_{v\in V_G}\sqrt{d^2(v) + \sum_{uv\in E_G} d(u)} \leq q_1(G) \leq \sqrt{2}\max_{v\in V_G}\sqrt{d^2(v) + \sum_{uv\in E_G} d(u)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Üstelik eğer G bağlantılıysa bu durumda her iki eşitliği elde etmek için gerek ve yeter şart $\forall v \in V_G$ için $2d^2(v) + 2\sum_{uv\in E_G} d(u)$ aynı olmasıdır.

Teorem 2.4.12 [29] G n noktalı $e \geq 1$ kenarlı basit bir graf olsun. Bu durumda

$$q_1(G) \geq \sqrt{2\delta^2 + 4e - 2\Delta(n-1) + 2\delta(\Delta - 1)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Üstelik eğer G bağlantılıysa eşitliğin elde edilmesi için gerek ve yeter şart G grafının düzenli olmasıdır.

Teorem 2.4.13 [29] G n noktalı, e kenarlı ve izole noktası olmayan basit bir graf olsun.

$$\sqrt{2\delta^2 + 4e - 2\Delta(n-1) + 2\delta(\Delta - 1)} \leq q_1(G) \leq \sqrt{2\Delta^2 + 4e - 2\delta(n-1) + 2\Delta(\delta - 1)}$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik eğer G bağlantılı bir graf ise bu durumda her iki eşitliği elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının düzenli olmasıdır.

Lemma 2.4.2 [15] Herhangi bir G grafı için

$$q_1(G) \leq \max_{v\in V(G)}\{d(v) + m(v)\} \qquad (2.\,4.\,9)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer G bağlantılı ise bu durumda eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının düzenli ya da iki parçalı yarı düzenli olmasıdır.

3. BÖLÜM

NORDHAUS GADDUM TİPİ (NGT)

Bu kısımda bahsi geçen ifadeler ve teoremler [3, 6, 9-12, 16] kaynaklarında bulunabilir.

3. 1. NGT Hakkında

1956 da Nordhaus ve Gaddum tarafından sunulan orijinal eşitsizlikler aşağıdaki gibidir:

Teorem 3. 1 [3] G n noktalı bir graf ise

$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(G^c) \leq n + 1$

ve

$n \leq \chi(G).\chi(G^c) \leq (n+1)^2/4$

eşitsizlikleri sağlanır.

Fink [6] tarafından aşağıdaki biçimde bir graf ailesi oluşturulmuştur:
$a + b - 1 \leq n \leq a.b$ olacak şekilde a, b ve n pozitif tam sayı olsun. n noktayı bir dikdörtgen şeklinde a satır ve b sütun olacak şekilde, ilk satır ve ilk sütun dolu ve $n - a - b + 1$ nokta dikdörtgenin kalan kısımlarına keyfi olarak dağıtılmış olarak her zaman düzenlenebilir.

Böylece

- Aynı sütuna ait herhangi iki nokta komşudur.
- Aynı satıra ait komşu iki nokta yoktur.
- Ne aynı satıra, ne de aynı sütuna ait herhangi iki nokta birbirine komşu olabilir, fakat olmak zorunda da değildir.

özelliklerine sahip bir G grafı inşa edilmiştir. Bu yolla yapılandırılmış her G grafı $T_1(n, a, b)$ tipte olarak isimlendirilecektir.
Diğer taraftan bir G grafının $T_2(n, a)$ tipinde olduğunu söyleyebilmek için G_1, G_2, G_3 karşılıklı olarak ayrık kısmi graflar içerir öyle ki: G_1 5 noktalı bir döngü; G_2 a noktalı tam bir graf; G_3 ikisi komşu olmayan $n - a - 5$ nokta içerir; G_1 grafının her noktası G_2

grafının her noktasına komşudur; G_1 grafındaki nokta G_3grafının herhangi bir noktasına komşu değildir; ve G_2 grafının herhangi bir noktası G_3grafının noktalarına keyfi sayıda komşu olabilir.

Grafların bu sınıflarının özellikleri arasında Nordhaus-Gaddum eşitsizliklerinin ekstremal grafların karakterizasyonu ile ilişkisi şöyledir:

Önerme 3. 1 [6] Eğer G grafı $T_1(n, a, b)$ tipinde bir graf ise G^c grafı da $T_1(n, a, b)$ tipindedir. ($\chi(G) = a$ ve $\chi(G^c) = b$)

Teorem 3. 2 [6] G n noktalı bir graf olsun. $\chi(G).\chi(G^c) = n \Leftrightarrow d$ n'nin keyfi bir böleni olduğunda G grafı $T_1(n, \frac{n}{d}, d)$ tipinde bir graftır;

$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(G^c) \leq 2\sqrt{n} + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{n} \leq a + b \leq 2\sqrt{n} + 1$ eşitsizliğini sağlayan herhangi a ve b için G grafı $T_1(n, a, b)$ tipindedir.

Teorem 3. 3 [6] n noktalı bir G grafı için

$\chi(G).\chi(G^c) = n$

ve

$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(G^c) \leq 2\sqrt{n} + 1$

aynı anda mümkün olması için gerek ve yeter koşul $n = a.b$ ve $\left|\sqrt{a} + \sqrt{b}\right| < 1$ olduğunda G grafı $T_1(n, a, b)$ tipindedir.

Teorem 3. 4 [6] G n noktalı bir graf olsun. $\chi(G) + \chi(G^c) = n + 1 \Leftrightarrow G$ ya da G^c herhangi bir $1 \leq a \leq n$ için $T_1(n, a, n - a + 1)$ tiptedir ya da her hangi bir

$1 \leq a \leq n - 5$ için $T_2(n, a)$ tipindedir; $\chi(G).\chi(G^c) = \left\lfloor\frac{(n+1)^2}{4}\right\rfloor \Leftrightarrow G$ ya da G^c tek n için $T_1\left(n, \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ ve $T_2\left(n, \frac{n-5}{2}\right)$ tipinden birindedir, ya da G ya da G^c graflarından biri $T_1(n, n/2, (n + 2)/2)$ tiptedir. n çift olmak üzere

$T_1(n, (n + 2)/2, n/2)$, $T_1(n, n/2 \ , (n + 2)/2)$, $T_2(n, (n - 4)/2)$ ve

$T_2(n, (n - 6)/2)$ dir.

Teorem 3. 5 [9] Bir G grafında a ve b pozitif tam sayılarının her çifti için $\chi(G) = a$ ve $\chi(G^c) = b$ olacak şekilde $a + b \leq n + 1$ ve $a.b \geq n$ eşitsizlikleri mümkündür.

Aslında, G grafı K_a tam grafı ve üzerinde en fazla a nokta olan $b - 1$ tam graflarının ayrık birleşimidir.

Teorem 3. 6 [10] n noktalı herhangi bir G grafı için $d(1) \geq d(2) \geq \cdots \geq d(n)$ G grafının derece dizisi olduğunda

$$\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n} min\{d(i) + 1, i\}$$

eşitsizliği vardır.

1971 de Chartrand ve Mitchem bazı Nordhaus – Gaddum eşitsizlikleri ispatı için genel bir görüntü elde ettiler. Orijinal Nordhaus – Gaddum tipi eşitsizlikleri için aşağıdaki gibi yazılabileceğini gösterdiler:

$$\sqrt{n} \leq \frac{\chi(G) + \chi(G^c)}{2} \leq \frac{n+1}{2}$$

ve

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{\chi(G).\chi(G^c)} \leq \frac{n+1}{2}$$

Brigham ve Dutton [11] başka bir kavram kullanarak $\chi(G)$ ve $\chi(G^c)$ üst sınırına karşılık gelen ekstremal grafları karakterize ettiler. Verilen bir $G = (V, E)$ grafının kliklerinin minimum sayısı G grafının klik örtü sayısı olarak adlandırılan V nokta kümesini örtmesi için gereklidir ve $\theta(G)$ ile gösterilir. Bu graf değişmezleri, özellikle altmışlı ve yetmişli yıllarda graf teorisi üzerinde geniş bir biçimde çalışılmıştır. Herhangi G grafı için $\chi(G) = \theta(G^c)$ olması önemsizdir, böylece $\chi(G) + \chi(G^c) = n + 1$ olan graflar tam olarak $\theta\,(G) + \theta(G^c) = \mathrm{n} + 1$ ifadesini karşılayan graflardır. Bu grafların karakterizasyonu Brigham ve Dutton [11] tarafından hem $\theta(G) = \theta(G^c)$ ve $\theta'(G) = \theta'(G^c)$ eşitliklerini sağlayan graflar karakterize edilmesinin bir sonucu olarak elde edildi.

Graf kuramcıları bir grafın n noktasının yerine bazen ve ek olarak Nordhaus-Gaddum eşitsizliklerinin sınırlarını açıklamak için başka değişmezler düşündüler.1990 da

N. Achuthan ve d. [12] de G grafının n noktası ve m boyutu açısından $\chi(G) + \chi(G^c)$ ve $\chi(G).\chi(G^c)$ açısından sınırlar verdiler.

Teorem 3. 7 [12] Eğer G n noktalı ve e kenarlı bir graf ise bu durumda

$$A(n,e) = \begin{cases} n+1 & e = 0 \\ n+2-e & 1 \le e \le n' \\ \lceil 2\sqrt{n} \rceil & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$B(n,e) = \begin{cases} n & e = 0\ yada\ n\ asal\ değil\ ve\ e \ge \dfrac{n(n_1-1)}{2} \\ 2(n-e) & 1 \le e \le n' \\ n+1 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$C(n,e) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor & e \ge n'(n'-1) \\ k(n+1-k) & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$n' = \lceil n/2 \rceil, n_1 \ne 1$ n nin en küçük böleni ve $k, e = k(k-1)/2 + t$ ve $0 \le t \le k-1$ ifadesine karşılık gelen bir tam sayı olduğunda

$A(n,e) \le \chi(G) + \chi(G^c) \le n+1$

ve

$B(n,e) \le \chi(G).\chi(G^c) \le C(n,e)$

eşitsizlikleri vardır.

4. BÖLÜM

LAPLASYAN ve İŞARETSİZ LAPLASYAN ÖZ DEĞERLERİ İÇİN NGT-EŞİTSİZLİKLERİ

Bu kısımda bahsi geçen ifadeler ve teoremler [16, 17, 18, 23, 29, 30] kaynaklarında bulunabilir.

Teorem 4.1 G ve G^c bağlantılı ve düzensiz olduğu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq 2[n - 1 - 2/(2n^2 - n)] + 2(\Delta - \delta)$$

Yukarıdaki eşitsizlik Teorem 2.4.6 ifadesinden elde edilmiştir.

Teorem 4.2 [23] G n noktalı e kenarlı basit bir graf olsun.

$$\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq n - 2 + \sqrt{(\Delta + \delta + 1 - n)^2 + n^2 + 4(\Delta - \delta)(n - 1)} \qquad (4.1)$$

İspat : $\Delta(G^c) = n - 1 - \delta, \delta(G^c) = n - 1 - \Delta$ ve $e(G^c) = \frac{n(n-1)}{2} - e$ dir.

(2.4.3) eşitsizliğinden

$$\mu_1(G) \leq \frac{(\Delta + \delta - 1) + \sqrt{(\Delta + \delta - 1)^2 + 4(4e - 2\delta(n - 1)}}{2}$$

ve

$$\mu_1(G^c) \leq \frac{(2n - 3 - \Delta - \delta) + \sqrt{(2n - 3 - \Delta - \delta)^2 + 4(2(n - 1)(\Delta + 1) - 4e)}}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$$f(e) = \sqrt{(\Delta + \delta - 1)^2 + 4(4e - 2\delta(n - 1))} + \sqrt{(2n - 3 - \Delta - \delta)^2 + 4(2(n - 1)(\Delta + 1) - 4e)}$$
olsun.

Böylece

$$\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq n - 2 + \frac{1}{2}f(e)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\frac{df}{de} = \frac{8}{\sqrt{(\Delta + \delta - 1)^2 + 4(4e - 2\delta(n-1)}} - \frac{8}{\sqrt{(2n - 3 - \Delta - \delta)^2 + 4(2(n-1)(\Delta + 1) - 4e)}}$$

olduğundan

$$\frac{df}{de} \geq 0 \iff e \leq \frac{2(n-2)(n-1-\Delta-\delta) + 4(n-1)(\Delta+\delta+1)}{16}$$

olduğu görülebilir. Bu nedenle

$$f(e) \leq \sqrt{(\Delta + \delta - 1)^2 + 2(n-2)(n-1-\Delta-\delta) + 4(n-1)(\Delta - \delta + 1)}$$
$$+ \sqrt{(2n - 3 - \Delta - \delta)^2 - 2(n-2)(n-1-\Delta-\delta) + 4(n-1)(\Delta - \delta + 1)}$$

$$=2\sqrt{(\Delta + \delta + 1 - n)^2 + (n-2)^2 + 4(\Delta - \delta + 1)(n-1)}$$

$$=2\sqrt{(\Delta + \delta + 1 - n)^2 + n^2 + 4(\Delta - \delta)(n-1)}$$

Böylece

$$\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq n - 2 + \sqrt{(\Delta + \delta + 1 - n)^2 + n^2 + 4(\Delta - \delta)(n-1)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1 [23] İlk olarak (4.1) ifadesindeki sınırın her zaman en az $2(n-1)$ olduğu görülebilir. $\mu_1(G) \leq 2\Delta$ olduğundan (4.1)' in en basit üst sınırı,

$$\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq 2\Delta + 2(n - 1 - \delta) = 2(n-1) + 2(\Delta - \delta) \qquad (4.2)$$

dır. Üstelik, (4.1) ve (4.2) sınırları kıyaslanamaz: Gerçekten, $\delta = \Delta \neq \frac{n-1}{2}$ olduğunda (4.2) üst sınırı $2(n-1)$ dir ve (4.1) ifadesinden daha iyidir; ancak $\Delta + \delta \geq n - 1 \geq 3\delta - \Delta$ ya da $3\delta - \Delta \geq n - 1 \geq \Delta + \delta$ olduğunda (4.1) üst sınırı (4.2) ifadesinden daha iyidir.

Teorem 4.3 [18] G n noktalı $0 < \delta(G) \leq \Delta(G) < n - 1$ olan bir graf olsun. Bu durumda

$$\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq 2\sqrt{2(n-1)^2 - 3\delta(n-1) + (\Delta + \delta)^2 - \Delta + \delta}$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik G ve G^c bağlantılı graf olduğu durumda üst sınır oldukça yakındır.

İspat : $f(e,\Delta,\delta) = [2\Delta^2 + 4e - 2\delta(n-1) + 2\Delta(\delta-1)]^{1/2}$ olsun.

$\Delta(G^c) = n-1-\delta$, $\delta(G^c) = n-1-\Delta$ ve $e(G^c) = \binom{n}{2} - e$ olduğuna dikkat edilsin. Sonuç 2. 4. 1 den

$\mu_1(G) \leq f(e,\Delta,\delta)$

ve

$\mu_1(G^c) \leq f\left(\binom{n}{2} - e, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$

eşitsizlikleri elde edilir.

$g(e) = f(e,\Delta,\delta) + f\left(\binom{n}{2} - e, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$

olsun. Bu durumda

$\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq g(e)$

eşitsizliği vardır.

$\frac{dg}{de} = 2/f(e,\Delta,\delta) - 2/f\left(\binom{n}{2} - e, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$

olduğundan

$\frac{dg}{de} \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart $f(e,\Delta,\delta) \leq f\left(\binom{n}{2} - e, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$

Başka bir ifadeyle,

$e \leq [2(n-1)^2 - \delta(n-2) - \Delta^2 + \delta^2 + \Delta]/4$

olduğunu kontrol etmek kolaydır. Böylece

$\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq g([2(n-1)^2 - \delta(n-2) - \Delta^2 + \delta^2 + \Delta]/4)$

$=2f([2(n-1)^2 - \delta(n-2) - \Delta^2 + \delta^2 + \Delta]/4, \Delta, \delta)$

$$=2\sqrt{2(n-1)^2-3\delta(n-1)+(\Delta+\delta)^2-\Delta+\delta}$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer G ve G^c bağlantılı graf ise ya G ya da G^c düzenli iki parçalı bir graf olmasına çelişkidir. Sonuç 2. 4. 1 den ya G ya da G^c grafının Laplasyan spektral yarıçapının üst sınırına ve toplama ulaşmasına çelişkidir.

[30] de Laplasyan spektral yarıçapı için bir sınır verilip bu sınır temel alınarak Laplasyan matrisinin NGT bir üst sınır verilmiştir.

Aşağıdaki teoremde kolaylık sağlamak için

$f(e,\Delta,\delta)=\sqrt{(\Delta-\frac{\delta}{2}-1)^2+16e-2\delta(4n-\delta-2)}$ olsun.

Teorem 4.4 [30] G n noktalı basit bağlantılı bir graf olsun.

$$\mu_1(G)\le\frac{\Delta+(3/2)\delta-1+f(e,\Delta,\delta)}{2} \tag{4.3}$$

eşitlik sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının düzenli iki parçalı olmasıdır.

İspat: $K=Q-\delta I$ olsun. $S_v(K)=2d_v-\delta\Longrightarrow 2d_v=S_v(K)+\delta$ eşitliği vardır.

K^2 matrisinin v. satır toplamı göz önünde tutulursa;

$$\begin{aligned}
S_v(K^2)&=S_v(Q^2)-2\delta S_v(Q)+\delta^2\\
&=2d_v^2+2\textstyle\sum_{u\sim v}d_u-4\delta d_v+\delta^2\\
&=2d_v^2+2(2e-d_v-\textstyle\sum_{u\nsim v,u\neq v}d_u)-4\delta d_v+\delta^2\\
&\le 2d_v^2+2(2e-d_v-(n-d_v-1)\delta)-4\delta d_v+\delta^2\\
&=2d_v^2-2d_v-2\delta d_v+4e-2(n-1)\delta+\delta^2\\
&=(2d_v-\delta)d_v-(2+\delta)d_v+4e-2(n-1)\delta+\delta^2\\
&\le \Delta S_v(K)-(2+\delta)\frac{S_v(K)+\delta}{2}+4e-2(n-1)\delta+\delta^2\\
&=\left(\Delta-\frac{\delta}{2}-1\right)S_v(K)+4e-2n\delta+\delta+\frac{\delta^2}{2}
\end{aligned}$$

Bu aşağıdaki eşitsizliğe eşdeğerdir:

$$S_v\left(K^2 - \left(\Delta - \frac{\delta}{2} - 1\right)K\right) \leq 4e - 2n\delta + \delta + \frac{\delta^2}{2}$$

Lemma 2.1.2 den

$$\rho^2(K) - \left(\Delta - \frac{\delta}{2} - 1\right)\rho(K) \leq 4e - 2n\delta + \delta + \frac{\delta^2}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Basit bir hesaplamayla aşağıdaki gibi K matrisinin spektral yarıçapının üst sınırı elde edilir:

$$\rho(K) \leq \frac{\Delta - \frac{\delta}{2} - 1}{2} + \frac{\sqrt{\left(\Delta - \frac{\delta}{2} - 1\right)^2 + 16e - 2\delta(4n - \delta - 2)}}{2}$$

$\rho(K) = \rho(Q) - \delta$ olduğundan, böylece Lemma 2.3.4 den (4.3) sonucunu elde edilir. Eğer spektral yarıçap $\mu(G)$ (4.3) ifadesindeki üst sınırı gerçekleştirirse yukarıdaki ispattaki her eşitsizlik eşit olmalıdır. $\forall v \in V(G)$ için $\Delta = \delta$ anlamına gelir, böylece G düzenli graftır. Tekrar Lemma 2.3.4 den G düzenli iki parçalı graftır.

Tersine düzenli iki parçalı graf için geçerli olan (4.3) ifadesindeki eşitliği doğrulamak kolaydır.

Teorem 4.5 [30] G Δ ve δ lı n noktalı basit bir graf olsun;
$es(G) = \mu_1(G) + \mu_1(G^c)$ olmak üzere

$$es(G) \leq \frac{5n-\Delta+\delta-9+\sqrt{2}\sqrt{2(2\Delta-\delta-2)^2+8\delta(2+\delta)+(\omega-\Delta)(n+3\Delta-3\delta-5)+32n\omega-8\pi(3n+\Delta-1)}}{4} \qquad (4.4)$$

$\omega = n - \delta - 1$ ve $\pi = n - \Delta - 1$ dir. Üstelik eğer G ve G^c bağlantılıysa üst sınır kesindir.

İspat: Bir G grafı ve onun komplementinin ilişkisine göre G^c grafının değişmezlerini elde etmek zor değildir.

$\Delta(G^c) = n - \delta - 1,\ \delta(G^c) = n - \Delta - 1$ ve $e(G^c) = C_n^2 - e(G)$ olarak belirtilir.

Teorem 4. 4 den

$$\mu(G^c) \leq \frac{\Delta(G^c) + (3/2)\delta(G^c) - 1}{2} + \frac{f(e(G^c), \Delta(G^c), \delta(G^c))}{2}$$

eşitsizliği vardır.

$g(e) = f(e, \Delta, \delta) + \ f(e(G^c), \Delta(G^c), \delta(G^c))$ olsun.

Laplasyan matrisinin Nordhaus- Gaddum tipinin üst sınırı

$$g'(e) = \frac{8}{f(e, \Delta, \delta)} - \frac{8}{f(e(G^c), \Delta(G^c), \delta(G^c))}$$

olduğundan

$$es(G) = \mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq \frac{5n - \Delta + \delta - 9 + 2g(e)}{4}$$

eşitsizliği sağlanır. Açıkça $g'(e) \geq 0$ eşitsizliğini elde etmek için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitsizliğin elde edilmesidir.

$$f(e, \Delta, \delta) \leq f(C_n^2 - e, n - \delta - 1, n - \Delta - 1)$$

t bir değişken olsun, bu eşitsizliği çözerek

$$t \leq \frac{(n - \delta - \Delta - 1)(n - 3\delta + 3\Delta - 5) + 32n(n + \delta - 1)}{128} - \frac{8\delta(\delta + 2) - 8(n - \Delta - 1)(3n + \Delta - 1)}{128} = t^*$$

elde edilir.

Burada t^* sembolü yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafını temsil eder. Sonra $t \leq t^*$ için $g(t)$ fonksiyonunun artan bir fonksiyon olduğunu ileri sürebilir ve $g(t) \leq g(t^*)$ eşitsizliği elde edilir.

Böylece

$$es(G) \leq \frac{5n - \Delta + \delta - 9 + 2g(t^*)}{4}$$

$$= \frac{5n - \Delta + \delta - 9 + 4f(t^*, \Delta, \delta)}{4}$$

elde edilir.

Bu ifadeyi doğrudan hesaplamayla basitleştirerek (4. 4) ifadesinin doğruluğu kanıtlanır. (4.4) deki eşitlik korunursa yukarıdaki ispattaki her eşitsizlik eşitlik olmak zorundadır. Teorem 4. 4 den G ve G^c graflarının düzenli iki parçalı olduğu elde edilir. Fakat bu bir bağlantılı graf için imkansızdır, bu ya G ya da G^c grafının Laplasyan spektral yarıçapının üst sınırını elde etmekte başarısız olduğu anlamına gelir ve burdan toplam elde edilir. Bundan dolayı (4.4) deki eşitsizlik kesindir.

Teorem 4.6 [29] G $0 < e < \frac{n(n-1)}{2}$ olan e kenarlı ve n noktalı basit bir graf olsun. Bu durumda

$$q_1(G) + q_1(G^c) \geq 2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\Delta(n-1) + (\Delta+\delta)^2 - \delta + \Delta}$$

eşitsizliği vardır. Üstelik eğer G ve G^c grafları bağlantılıysa bu durumda eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının $\frac{n-1}{2}$- düzenli olmasıdır.

İspat : $f(e, \Delta, \delta) = \sqrt{2\delta^2 + 4e - 2\Delta(n-1) + 2\delta(\Delta - 1)}$ olsun.

$\Delta(G^c) = n - 1 - \delta$, $\delta(G^c) = n - 1 - \Delta$ ve $|E_{G^c}| = \frac{n(n-1)}{2} - e$ olduğu göz önünde bulundurulursa $0 < e < \frac{n(n-1)}{2}$ olduğundan $|E_{G^c}| \geq 0$ elde edilir. Teorem 2. 4. 12 den

$q_1(G) \geq f(e, \Delta, \delta)$

ve

$q_1(G^c) \geq f(\frac{n(n-1)}{2} - e, n - 1 - \delta, n - 1 - \Delta)$

eşitsizlikleri vardır. Şimdi

$h(e) = f(e, \Delta, \delta) + f(\frac{n(n-1)}{2} - e, n - 1 - \delta, n - 1 - \Delta)$ olsun. Bu durumda $q_1(G) + q_1(G^c) \geq h(e)$ eşitsizliği vardır.

$$\frac{dh}{de} = \frac{2}{f(e, \Delta, \delta)} - \frac{2}{f(\frac{n(n-1)}{2} - e, n - 1 - \delta, n - 1 - \Delta)}$$

olduğundan

$\frac{dh}{de} \leq 0$ olması için gerek ve yeter şartın

$$f(e, \Delta, \delta) \geq \ f(\tfrac{n(n-1)}{2} - e, n-1-\delta, n-1-\Delta)$$

olmasını görmek kolaydır, yani

$$e \geq \frac{2(n-1)^2 - \Delta(2n-3) - \delta^2 + \Delta^2 + \delta}{4}$$

eşitsizliği vardır. Böylece

$$q_1(G) + q_1(G^c) \geq h\left(\frac{2(n-1)^2 - \Delta(2n-3) - \delta^2 + \Delta^2 + \delta}{4}\right)$$

$$= 2f\left(\frac{2(n-1)^2 - \Delta(2n-3) - \delta^2 + \Delta^2 + \delta}{4}, \Delta, \delta\right)$$

$$= 2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\Delta(n-1) + (\Delta+\delta)^2 - \delta + \Delta}$$

ifadesi vardır.

Eğer İşaretsiz Laplasyanın endekslerinin toplamı üst sınıra ulaşırsa bu durumda G ve G^c graflarının İşaretsiz Laplasyan endeksleri hem üst sınırlarına ulaşır ve

$$e = \frac{2(n-1)^2 - \Delta(2n-3) - \delta^2 + \Delta^2 + \delta}{4}$$

eşitliği vardır. Şimdi eğer G ve G^c grafları bağlantılıysa bu durumda Teorem 2.4.12 ifadesi $\Delta = \delta$ olduğunu gösterir. Böylece $2n\delta = 2(n-1)^2 - \delta(2n-3) + \delta$ eşitliği vardır. Bu $\delta = \frac{n-1}{2}$ olduğunu gösterir ve bundan dolayı G grafı $\frac{n-1}{2}-$ düzenlidir.

Aksine eğer G ve G^c bağlantılı ve G $\frac{n-1}{2}-$ düzenli ise bu durumda

$$q_1(G) = q_1(G^c) = n-1$$

eşitliği vardır.

Böylece

$$q_1(G) + q_1(G^c) = 2(n-1) = 2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\Delta(n-1) + (\Delta+\delta)^2 - \delta + \Delta}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.7 [29] G n noktalı basit bir graf olsun ve sırasıyla Δ ve δ G grafının maksimum ve minimum dereceleri olsun. Eğer $0 < \delta \leq \Delta < n-1$ ise bu durumda

$$f_1(n,\delta,\Delta) = 2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\Delta(n-1) + (\Delta+\delta)^2 - \delta + \Delta},$$

$$f_2(n,\delta,\Delta) = 2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\delta(n-1) + (\Delta+\delta)^2 + \delta - \Delta}$$

olduğunda

$$f_1(n,\delta,\Delta) \leq q_1(G) + q_1(G^c) \leq f_2(n,\delta,\Delta)$$

eşitsizlikleri vardır.

Üstelik eğer G ve G^c grafları bağlantılı ise bu durumda her iki eşitliği elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının $\frac{n-1}{2}-$ düzenli olmasıdır.

İspat: Eğer G $0 < \delta \leq \Delta < n-1$ ile n noktalı basit bir graf ise bu durumda

$0 < e < \frac{n(n-1)}{2}$ dir. Teorem 4.6 ifadesinden

$$q_1(G) + q_1(G^c) \geq 2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\Delta(n-1) + (\Delta+\delta)^2 - \delta + \Delta}$$

eşitsizliği elde edilmiştir. Üstelik eğer G ve G^c grafları bağlantılıysa bu durumda eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının $\frac{n-1}{2}-$ düzenli olmasıdır.

$f(e,\Delta,\delta) = \sqrt{2\Delta^2 + 4e - 2\delta(n-1) + 2\Delta(\delta-1)}$ olsun.

$\Delta(G^c) = n-1-\delta$, $\delta(G^c) = n-1-\Delta$ ve $e(G^c) = \frac{n(n-1)}{2} - e(G)$ olduğu göz önünde bulundurulsun. Teorem 2.4.13 den

$$q_1(G) \leq f(e,\Delta,\delta)$$

ve

$$q_1(G^c) \leq f(\frac{n(n-1)}{2} - e, n-1-\delta, n-1-\Delta\,)$$

olduğu bilinir. Şimdi

$g(e) = f(e, \Delta, \delta) + f(\frac{n(n-1)}{2} - e, n-1-\delta, n-1-\Delta\,)$ olsun. Bu durumda $q_1(G) + q_1(G^c) \leq g(e)$

eşitsizliği vardır.

$$\frac{dg}{de} = \frac{2}{f(e, \Delta, \delta)} - \frac{2}{f(\frac{n(n-1)}{2} - e, n-1-\delta, n-1-\Delta\,)}$$

olduğundan

$\frac{dg}{de} \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart

$f(e, \Delta, \delta) \leq f(\frac{n(n-1)}{2} - e, n-1-\delta, n-1-\Delta\,)$ olduğunu görmek kolaydır, yani

$$e \leq \frac{2(n-1)^2 - \delta(2n-3) + \delta^2 - \Delta^2 + \Delta}{4}$$

eşitsizliği vardır. Böylece

$$q_1(G) + q_1(G^c) \leq g\left(\frac{2(n-1)^2 - \delta(2n-3) + \delta^2 - \Delta^2 + \Delta}{4}\right)$$

$$= 2f\left(\frac{2(n-1)^2 - \delta(2n-3) + \delta^2 - \Delta^2 + \Delta}{4}, \Delta, \delta\right)$$

$$= 2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\delta(n-1) + (\Delta + \delta)^2 + \delta - \Delta}$$

dir.

Eğer İşaretsiz Laplasyan endekslerinin toplamı üst sınıra ulaşır ise bu durumda G ve G^c graflarının İşaretsiz Laplasyan endeksleri hem üst sınırlarına ulaşır hemde

$$e = \frac{2(n-1)^2 - \delta(2n-3) + \delta^2 - \Delta^2 + \Delta}{4}$$

eşitliği vardır.

Şimdi eğer hem G hem de G^c grafı bağlantılı ise bu durumda Teorem 2.4.13 ifadesinden $\Delta = \delta$ dir. Böylece $2n\delta = 2(n-1)^2 - \delta(2n-3) + \delta$ eşitliği vardır.

Bu $\delta = \frac{n-1}{2}$ olduğunu gösterir ve bundan dolayı G $\frac{n-1}{2}-$ düzenlidir. Tersine eğer hem G hem de G^c grafı bağlantılı ve G $\frac{n-1}{2}$ düzenli ise bu durumda

$$q_1(G^c) = q_1(G) = n - 1$$

eşitliği vardır.

Böylece

$$q_1(G) + q_1(G^c) = 2(n-1) = 2\sqrt{2(n-1)^2 - 4\delta(n-1) + (\Delta+\delta)^2 + \delta - \Delta}$$

eşitliği vardır.

Varsayım 4.1 [32] n noktalı herhangi bir G grafı için, $\mu_1(G) - \mu_{n-1}(G) \leq n-1$ (ya da eşdeğeri $\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq 2n-1$) ve eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G ya da G^c grafının K_1ve $n-1$ noktalı bağlantısız bir grafın birleşmesine izomorf olmasıdır.

Not 4.1 İki parçalı graflar için varsayım [17] de ispatlandı. G ya da G^c grafının bağlantısız olduğu durumda Varsayım 4.1. ifadesinin elde edileceği belirtilsin. Bunu görmek için Lemma 2.3.3 de G^c grafının bağlantısız olduğu kabulünden $\mu_1(G) \leq n$ ve $\mu_1(G^c) \leq n-1$ ve ikinci eşitliği elde etmek için gerek ve yeter şart G^c grafının $n-1$ noktalı bağlantılı bir bileşeni H olsun öyle ki H^c bağlantısızdır. Diğer birdeyişle $\mu_1(G^c) = n-1$ olması için gerek ve yeter şart $\vee$ iki grafın birleşimini gösterirken $G = K_1 \vee H^c$ ile H^c nin bağlantısız olmasıdır.

Varsayım 4.1 aşağıdaki teoremler yardımıyla ispatlanmıştır.

Teorem 4. 8 [17] G (X,Y) iki parça ve $|Y| \geq |X|$ ile iki parçalı bir graf olsun. Eğer X $|Y|$ derecelerinin bazı noktalarını içeriyor ve Y $|X|$ derecelerinin ℓ noktasını içeriyorsa bu durumda

$$\mu_{n-1}(G) \geq \frac{\ell}{|Y|}$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının bir star (yıldız) olmasıdır.

Teorem 4. 9 [17] G n noktalı, e kenarlı ve (X,Y) iki parçalı bir graf olsun. Eğer $|X| \leq |Y|$ olduğu durumda

$$\mu_1(G) \leq |Y| + \frac{e}{|Y|}$$

eşitsizliği vardır. Üstelik $|X|$ derecelerinin ℓ noktasını içerdiği durumda

$$|Y| + \frac{e}{|Y|} \leq n - 1 + \frac{\ell}{|Y|}$$

eşitsizliği vardır.

$$\mu_1(G) = n - 1 + \ell/|Y|$$

eşitliğini elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının tam iki parçalı bir graf olmasıdır.

Teorem 4.8 ve Teorem 4.9 yardımıyla iki parçalı graflar için Varsayım 4.1 ispat edilmiştir.

Teorem 4.10 [17] Eğer G ya da G^c n noktalı iki parçalı bir graf ise bu durumda aşağıdaki denk eşitsizlikler elde edilir:

i. $\mu_1(G) + \mu_1(G^c) \leq 2n - 1$
ii. $\mu_1(G) - \mu_1(G^c) \leq n - 1$
iii. $\mu_{n-1}(G) + \mu_{n-1}(G^c) \geq 1$

Eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G ya da G^c grafının bir yıldız olmasıdır.

Teorem 4.11 [17] G (X, Y) iki parçalı ve $|Y| \geq |X| \geq 2$ iki parçalı bir graf olsun. Kabul edelim ki X $|Y|$ nin derecesinin t noktasını ve Y $|X|$ nin ℓ noktasını içersin.

a) Eğer $t \geq 2$ ve $\ell \geq 2$ olduğu durumda ya $\mu_{n-1} > 1$ ya da $\mu_1 \leq n - 1$ eşitsizliklerinden biri vardır.
b) $\ell = 1$ için: eğer $t \leq k - 2$ olduğu durumda $\mu_1 < n - 1$ dir; eğer $t = k - 1 < n/2 - 1$ olduğu durumda $\mu_1 < n - 1 + 1/n$, eğer $t = k - 1 = n/2 - 1$ olduğu durumda $\mu_1 = \frac{1}{2}\left(n + \sqrt{n^2 - 4n + 8}\right)$ ve $\mu_{n-1} = \frac{1}{2}\left(n - \sqrt{n^2 - 4n + 8}\right)$ dir.
c) Eğer $t = 1$ ve $n \geq 7$ olduğu durumda $\mu_1 \leq n - 1 + \ell/n$ eşitsizliği vardır.
d) Eğer ya $t = 0$ ya da $\ell = 0$ olduğu durumda $\mu_1 < n - 1$ eşitsizliği vardır.

Teorem 4.12 [17] G n noktalı iki parçalı bir graf olsun. Bu durumda

$$\mu_1(G)\mu_1(G^c) \leq n(n-1)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G ya da G^c grafının yıldız olmasıdır.

İspat: Not 4. 1 ifadesinde bahsedildiği gibi $\mu_1(G) \leq n$ ve $\mu_1(G^c) \leq n-1$ eşitsizliği olması için gerek ve yeter şart G grafının bir yıldız olmasıdır. Bundan dolayı G ve G^c graflarının bağlantılı olabileceği farz edilsin. Teorem 4.11 ifadesindeki notasyonlar kullanıldığında eğer $k=1$ olduğu durumda G bir yıldızdır, $k \geq 2$ olduğu durumda G^c grafının bağlantılılığı $t \leq k-1$ ve $\ell \leq n-k-1$ olduğunu gösterir. $n \leq 6$ lı yukarıdaki koşullar altında iki parçalı graflar için teorem kolaylıkla doğrulanabilir. Böylece $n \geq 7$ olabileceği kabul edilsin.

Lemma 2.3.2 den $\mu_1(G^c) = n - \mu_{n-1}$ eşitliği olduğu biliniyor. Böylece Teorem 4.8 ifadesinden

$$\mu_1(G^c) < n - \frac{\ell}{n-k} \tag{4.5}$$

eşitsizliği vardır.

Eğer $t = \ell = 0$ ya da $t \geq 2,\ \ell \geq 2$ ya da $\ell = 1,\ t \leq k-2$ durumlarından biri gerçekleşirse bu durumda Teorem 4.11 ifadesinden ya $\mu_1 \leq n-1$ ya da $\mu_1^c < n-1$ eşitsizlikleri elde edilir ve ispat tamamdır. Eğer $\ell = 1$ ve $t = k-1 < n/2 - 1$ olduğu durumda Teorem 4.11 ve (4.5) ifadelerinden

$$\mu_1(G)\mu_1(G^c) < \left(n - 1 + \frac{1}{n}\right)\left(n - \frac{1}{n-k}\right) < n(n-1)$$

eşitsizliği vardır. Eğer $\ell = 1$ ve $t = k-1 = n/2 - 1$ olduğu durumda Teorem 4.11 ifadesinden

$n \geq 4$ için $n(n-1)$ den küçük değerler için

$$\mu_1(G)\mu_1(G^c) = \frac{1}{4}\left(n + \sqrt{n^2 - 4n + 8}\right)^2$$

eşitliği vardır. Eğer $t = 1$ ise sonuç Teorem 4.11 ve (4.5) ifadelerinden benzer şekildedir.

Varsayım 4. 2 [16] G $n \geq 2$ noktalı basit bir graf olsun. Bu durumda

$q_1(G) + q_1(G^c) \leq 3n - 4$ eşitsizliği vardır. Eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının $K_{1,n-1}$ yıldız olmasıdır.

Varsayım 4. 3 [16] G $n \geq 2$ noktalı basit bir graf olsun. Bu durumda

$q_1(G).q_1(G^c) \leq 2n(n-2)$

eşitsizliği vardır. Eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının $K_{1,n-1}$ yıldız olmasıdır.

[16] de bulunan Varsayım 4. 2- 3 için [17]de F.Ashraf ve d. Varsayım 4. 2 ifadesini daha genel bir sonuç belirleyerek kanıtladılar ve Varsayım 4. 3 ifadesinin aksini ispatladılar.

Teorem 4.13 [17] G $n \geq 2$ noktalı basit bir graf olsun. Bu durumda

$$q_1(G) + q_1(G^c) \leq 2n - 2 + (\Delta - \delta)\left(2 - \frac{\Delta-\delta+1}{n-1}\right) \tag{4.6}$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının ya düzenli ya da $K_{1,n-1}$ yıldız olmasıdır.

İspat: Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.4.2 ifadelerinden

$$q_1 + q_1^c \leq \frac{2e + 2e^c}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}(\Delta + \Delta^c) + (\Delta - \delta)\left(1 - \frac{\Delta}{n-1}\right) + (\Delta^c - \delta^c)\left(1 - \frac{\Delta^c}{n-1}\right)$$

eşitsizliği vardır. Aslında $e + e^c = \frac{n(n-1)}{2}$, $\Delta^c = n - 1 - \delta$ ve $\delta^c = n - 1 - \Delta$ eşitliklerinden

$$q_1 + q_1^c \leq n + \frac{n-2}{n-1}(\Delta + n - 1 - \delta) + (\Delta - \delta)\left(1 - \frac{\Delta}{n-1} + \frac{\delta}{n-1}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu (4. 6) eşitsizliğini verir.

Şimdi (4.6) deki eşitlik durumunu ele alalım. Eğer G düzenli ise (4. 6) ifadesinin her iki tarafı $2n-2$ ifadesine eşittir. Eğer $G = K_{1,n-1}$ ise (4. 6) ifadesinin her iki tarafı $3n-4$ ifadesine eşittir. Şimdi G grafı için (4.6) deki eşitliğin meydana geldiği kabul edilsin. Bu durumda G ve G^c için (2. 2. 1) ve (2. 4. 9) deki eşitlikler elde edilmek zorundadır. G grafının düzenli olmadığı kabul edilebilir. (2. 4. 9) deki eşitlik durumunda $\Delta = n-1$ olmaksızın (2. 2. 1) de meydana gelmeyen eşitlik için G iki parçalı yarı düzenli olmak zorundadır. Böylece $G = K_{1,n-1}$ eşitliği vardır.

Yukarıdaki Teorem 4.13 [17] tarafından elde edilmiş olup Varsayım 4.2 ifadesinin genel bir halidir. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç ile Varsayım 4.2 ifadesinin ispatı gerçekleşir.

Sonuç 4. 1 [17] "G $n \geq 2$ noktalı basit bir graf olduğu durumda $q_1(G) + q_1(G^c) \leq 3n-4$ eşitsizliği vardır. Eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart G grafının $K_{1,n-1}$ yıldız olmasıdır.'' ifadesi elde edildi. Yani Varsayım 4.2 doğrulanır.

İspat: Teorem 4.13 ifadesinden

$$(\Delta-\delta)\left(2-\frac{\Delta-\delta+1}{n-1}\right) \leq n-2$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Herhangi G grafı için $\Delta - \delta \leq n-2$ olduğuna dikkat edilsin.

$f(x) = x\left(2-\frac{x+1}{n-1}\right)$ olsun. Bu durumda $x < n - 3/2$ için pozitif olan

$f'(x) = 2-(2x+1)/(n-1)$ dir. İstenilen gibi $f(\Delta-\delta) \leq f(n-2) = n-2$ olarak devam eder. Eşitlik elde etmek için gerek ve yeter şart $\Delta-\delta = n-2$ olmasıdır. Teorem 4.13 ifadesindeki eşitlik durumundan bunun mümkün olması için gerek ve yeter şart $G = K_{1,n-1}$ olmasıdır.

Varsayım 4. 3 ifadesinin aksini kanıtlamak için aşağıdaki önerme olduğuna dikkat edilsin.

Önerme 4. 1 [17] Herhangi pozitif n tamsayısı için

$$q_1(H_n).\, q_1(H_n^c) = \frac{5}{18}\left(4+\sqrt{14}\right)n^2 + O(n)$$

eşitliğini sağlayan n noktalı bir $\mathrm{H_n}$ grafı olsun. ($\frac{5}{18}\left(4+\sqrt{14}\right) \approx 2.15$)

İspat: Bazı pozitif k ve $-3 \leq s \leq 2$ tam sayıları için $n = 6k + s$ olsun. "$\vee$" iki grafın birleşmesini gösterdiği $H_n = K_{n-k}^c \vee K_k$ grafıdır. Bu durumda

$q_1(H_n^c) = 2(\mathrm{n}-\mathrm{k}-1)$ ile $H_n^c = K_{n-k} \cup K_k^c$ dır. k-klik ve $(n-k)$ bağımsız cümlesi içinde $V(H_n)$ nin bölümü $\begin{pmatrix} n+k-2 & n-k \\ k & k \end{pmatrix}$ bölüm matrisi ile bir adil bölümdür. Bu da

$$q_1(H_n) = \frac{n}{2} + k - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + 4nk - 4n - 4k^2 + 4}$$

eşitliği olduğunu gösterir. $k = (n-s)/6$ ifadesi denklemde yerine yazılırsa

$$q_1(\mathrm{H_n}).\, q_1(H_n^c) = \frac{5n+s-6}{18}\left(4n - s - 6 + \sqrt{14n^2 - 4ns - 36n - s^2 + 36}\right)$$

$$= \frac{5}{18}\left(4+\sqrt{14}\right)n^2 + O(n)$$

eşitliği elde edilir.

5. BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER

Son yıllarda karşımıza çıkan durumları nokta kümesi ve bu noktaları birleştiren kenarların oluşturduğu şekillerle açıklayabiliriz. Bu da Graf teori ve uygulamalarına yönelik ilgiyi arttırmıştır. Graf teorinin birçok uygulamasını matematik, fizik, kimya, mühendislik gibi temel bilimlerin yanında iletişim ağları vb gibi uygulamalı bilimlerde de kullanmak kolaylık sağlamıştır.

Bu tezde bazı temel tanım ve teoremler, graf değişmezleri, ile ilgili kavramlar ele alınmıştır. Genel olarak Graf değişmezlerinin ve komplementlerinin toplama ve çarpma işlemlerine göre alt ve üst sınırları yani NGT eşitsizlikleri elde edilmiş olduğu verildi. NGT-eşitsizliklerinin graf parametreleri üzerinde geniş bir çalışma alanı oluşturduğu görülmüştür. Bu çalışmada özellikle grafların Laplasyan ve İşaretsiz Laplasyan Öz Değerleri için NGT-eşitsizlikler hakkında araştırma yapılmış olup ilgili sonuçlar derlenmiştir.

KAYNAKLAR

1. Kempe, B. , "On the Geographical Problem of Four Colors." , *Amer. J. Math*. 2 193– 204, 1879
2. Heawood, P. J. , "Map Color Theorems." , *Quart. J. Math*. 24, 332–338, 1890
3. Nordhaus, E. A. and Gaddum, J. , "On Complementary Graphs." , *Amer. Math. Monthly* 63, 175–177, 1956
4. Nordhaus, E. A. and Stewart, B. M. , "Triangles in an Ordinary Graph." *Canad. J. Math*. 15 33–41, 1963
5. Vizing, V. G. , "The Chromatic Class of Multigraphs." , *Kibernetika 1*, 29–39, 1965
6. Finck, H. J. , "On the Chromatic Numbers of a Graph and its Complement" *In Theory of Graphs* (Proc. Coll. Tihany), pp. 99–113,1968
7. Finck, H. J. , "*Uber die Chromatischen Zahlen eines Graphen und seines Komplements. I, II."* (German) Wiss. Z. Techn.Hochsch. Ilmenau, 12,243–246,1966
8. Finck, H. J. and Sachs, H. , "*Uber eine von H. S. Wilf Angegebene Schranke f̀ur die Chromatische Zahl endlicher Graphen*." (German) Math. Nachr. , 39, 373–386, 1969
9. Stewart, B.M. , "On a theorem of Nordhaus and Gaddum," *J. Combin. Theory 6*, 217–218, 1969
10. Welsh, D.J.A. , Powell, M.B. , "An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetable problems", *Comput. J. 10*, 85–86, 1967
11. Brigham, R. C. and Dutton, R. D. , "Graphs which, with their Complements, have Certain Clique Covering Numbers" , *Discrete Math.* 34, 1–7, 1981
12. Achuthan, N. , Achuthan N. R. and Caccetta, L. , " On the Nordhaus–Gaddum Class Problems" , *Australas. J. Combin*. 25–27, 1990
13. Taşçı, D. , "Lineer Cebir" , *Gazi kitapevi*, 3, 2005
14. Horn, R. A., Johnson, C. R., 1985. "Matrix Analysis" . Cambridge University Press, New York, 561 pp.
15. Merris, R. , "A note on Laplacian graph eigenvalues" , Linear Algebra Appl. 285 (1988) 33–35.

16. Aouchiche, M. and. Hansen, P. , “A Survey of Nordhaus–Gaddum type relations” , *Discrete Appl. Math.* 161, 466–546, 2013
17. Ashraf, F. and Tayfeh-Rezaie, B. , “Nordhaus-Gaddum type inequalities for Laplacian and signless Laplacian eigenvalues” , *Electron. J. Combin.* ,21, 2014.
18. Shi, L. , “Bounds on the (Laplacian) spectral radius of graphs” , *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 422, no. 2-3, pp. 755–770, 2007.
19. Marquis, D. , ‘‘Gershgorin’s Circle Theorem for Estimating the Eigenvalues of a Matrix with Known Error Bounds’’,May 15, 2016, math.stmarys-ca.edu
20. Cvetković, D.M. , Rowlinson, P. and Simi_c, S.K. , “An Introduction to the Theory of Graph Spectra” , *Cambridge University Press*, Cambridge, 2010.
21. Zhang, X.-D. , Luo, R. , “The spectral radius of triangle-free graphs” , *Australas. J. Combin*. 26, 33–39, 2002
22. Li, J.-S. , Pan, Y.-L. , “de Cane’s inequality and bounds on the largest Laplacian eigenvalue of a graph” , *Linear Algebra Appl*. 328, 153–160, 2001.
23. Liu, H. , Lu, M. and Tian, F. , “On the Laplacian spectral radius of a graph” , *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 376, no. 1–3,pp. 135–141, 2004.
24. Lu, M. , Liu, H. , Tian, F. “Bounds of Laplacian spectrum of graphs based on the domination number” , *Linear Algebra Appl*. 402, 390–396, 2004
25. Yuan, X. , “The spectral radius of Laplace matrix of graphs” , *Master Thesis, East China Normal University*, China,2003
26. Sorgun, S. , “An incomparable upper bound for the largest Laplacian Graph eigenvalue” , *Ars. Comb*, 133, 197-204, 2017
27. Chen, Y. Q. , Wang, L. G. , “Sharp bounds for the largest eigenvalue of the signless Laplacian of a graph” , *Linear Algebra Appl*. 433, 908–913, 2010
28. Wang, T. , “The largest eigenvalue on the signless Laplacian of a graph” , *J. Leshan Teachers College* 20 (5), 14–15, 2005
29. Li, S. , Tian, Yi , “Some bounds on the largest eigenvaluesof graphs” , *Applied Mathematics Letters* 25, 326-332, 2012
30. Wang T. , Jia, L. , Sung, F. , “Bounds of the Spectral Radius and the Nordhaus-Gaddum Type of the Graphs” , Leshan Normal University,*The Scientific World Journal*,vol.2013, Article ID:472956
31. Shu, J. L. , Hong, Y. , Kai. , W. , R, “A sharp bound on the largest eigenvalue of the Laplacian matrix of a graph” , *Linear Algebra Appl*. 347 (2002) 123–129.

32. Zhai, M. , Shu, J. , and Hong, Y. “On the Laplacian spread of graphs” , *Appl. Math. Lett.* 24 (2011), 2097–2101.

ÖZGEÇMİŞ

Aysun BAŞBUĞ 1985 yılında Kayseri'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Mersin'de tamamladı. 2003'te kazandığı Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2015 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesinde Pedagojik Formasyon sertifikasını aldı. 2016 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında başladığı Yüksek Lisansa devam etmektedir. Evli olup iki kız çocuğu annesidir.

Adres:	Altınoluk Mah. Seher Bulvarı No:62 Tegin City D Blok 14/28 Kayseri
Telefon:	0 5537693359
e-posta :	aysunbasbug38@gmail.com