T.C.

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

GAMMA FONKSİYONU: TARİHÇESİ, KARAKTERİZASYONU VE BAZI EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Necdet BATIR

HAZIRLAYAN

Leyla GÜLSARAN

NİSAN- 2018

NEVŞEHİR

Prof. Dr. Necdet BATIR danışmanlığında **Leyla Gülsaran** tarafından hazırlanan " Gamma fonksiyonu: Tarihçesi, karakterizasyonu ve bazı eşitsizlikleri" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

30/04/2018

JÜRİ

Başkan : Doç. Dr. Yasin Yazlık

Üye : Prof. Dr. Necdet BATIR

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Tollu

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 3.5.2018 tarih ve 18-182 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28/5/2018

Prof.Dr.Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Leyla GÜLSARAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimi boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda bilgi ve deneyimleriyle bana rehberlik eden, çalışmalarımın tamamlanması için her türlü şartı sağlayan saygıdeğer danışman hocam

Sayın Prof. Dr. Necdet BATIR’a;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve sevgili eşim Sadi GÜLSARAN’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Leyla GÜLSARAN

Nisan 2018

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GAMMA FONKSİYONU: TARİHÇESİ, KARAKTERİZASYONU ve BAZI EŞİTSİZLİKLER

Leyla GÜLSARAN

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Necdet BATIR

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm de kendi içinde giriş ve tarihçe olmak üzere iki kısıma ayrılmıştır.

İkinci bölümde önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, gamma fonksiyonunu karakterize eden birkaç önemli teorem verilmiştir. Ayrıca gamma fonksiyonunun geometrik konveksliği ve logaritmik konveksliği üzerinde de durulmuştur.

Dördüncü bölümde, gamma fonksiyonu ile ilgili bazı eşitsizlikler verilmiştir ve bu eşitsizlikler için bazı alt ve üst sınırlar geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *gamma fonksiyonu, beta fonksiyonu, karakterizasyon, Bohr-Mollerup Teoremi, konveks fonksiyonlar, polygamma fonksiyonları, eşitsizlikler.*

ABSTRACT

Master Thesis

GAMMA FUNCTION: HISTORY, CHARACTERIZATI ON AND SOME INEQUALITIES

Leyla GÜLSARAN

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Universty

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Necdet BATIR

This thesis consists of four chapters.

Also the first chapter, seperates two parts being introduction and history inside.

In the second chapter, preliminaries and some necessary definitions, lemmas and theorems that will be needed for later use are given.

In the third chapter, a few important theorems that characterize the gamma function are given. Furthermore, the geometrical convexity and logharitmic convexity of the gamma function is also emphasized.

In the fourth chapter, some inequalities related to gamma function are given and some lower bounds and upper bounds have been developed for these inequalities.

Keywords: *Gamma function, Beta function, characterization, Bohr-Mollerup Theorem, convex functions, polygamma functions, inequalities.*

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Kümesi
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
ψ	:	Psi ve ya Digamma Fonksiyonu
$\psi^{(n)}$	:	Polygamma Fonksiyonları
B	:	Beta Fonksiyonu
γ	:	Euler – Mascheroni Sabiti
$\operatorname{Re} z$	:	z ’ nin reel kısmı
$\operatorname{Im} z$	:	z ’ nin sanal kısmı
$\log x$	:	$\ln x$

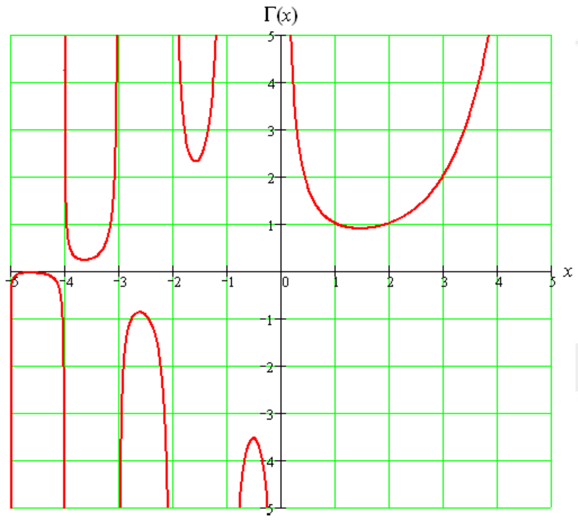
1. GAMMA FONKSİYONU ve TARİHÇESİ

1.1. Giriş

Gamma fonksiyonu $n! = 1.2.3.....n$ faktöriyel fonksiyonunun tanım kümesini tüm reel sayılara genişletme çabasının bir ürünü olarak ortaya çıkmıştır. Bu fonksiyon günümüzde negatif tamsayı olmayan tüm x reel sayıları için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du$$

has olmayan integrali ile tanımlanır.



Şekil 1: Gamma fonksiyonunun grafiği

Gamma fonksiyonunu ilk tanımlayan Leonard Euler olmakla beraber bu fonksiyonu Kompleks sayılarda ele alan matematikçi Carl Friedric Gauss olup sonraları bu fonksiyonun birçok yeni özelliğinin keşfine imzasını atmıştır. Gamma fonksiyonunun gelişiminde önemli katkısı olan matematikçilerden biri de Karl Weierstrass olup günümüzde ‘’Weierstrass Kanonik Çarpımı’’ olarak bilinen teoremi, $\dfrac{1}{\Gamma(x)}$ fonksiyonunun sonsuz çarpımını vermektedir.

Gamma fonksiyonu için pek çok tanım verilmiştir. Bunların hepsi aynı fonksiyonu tanımlamakla beraber bunların denk olduğunu göstermek her zaman kolay olmamıştır. Bu nedenle bu fonksiyonu karakterize eden özellikler üzerinde uzun süreler çalışılmıştır. Bunun amacı gamma fonksiyonu için verilen tanımların denk olduğunu göstermek yerine bu fonksiyonu özel veya tek yapan özellikleri bulup verilen tanımların bu özellikleri sağlayıp sağlamadığına bakmanın daha akıllıca bir yol olmasıdır. Gamma fonksiyonunun keşfinden 200 yıl sonrasına kadar bu konuda bir gelişme kaydedilmemiştir. 1922 yılında Harald Bohr ve Johannes Mollerup adlarındaki iki matematikçi gamma fonksiyonunun kesin ve uygulanabilir bir karakterizasyonunu verebilmişlerdir. Günümüzde Bohr-Mollerup teoremi olarak bilinen teorem şu şekildedir:

$$f:(0,\infty)\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(1)=1 \quad \text{ve} \quad \forall x>0 \text{ için } f(x+1)=x.f(x)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan logaritmik konveks bir fonksiyon olsun. O zaman $f(x)=\Gamma(x)$ dir.

Gamma fonksiyonu en önemli özel fonksiyonlardan biri olup sayılar teorisi, Kuantum fizik, istatistiksel mekanik, istatistiksel fiziği, flud dinamik ve kombinatoriklerde birçok uygulaması vardır. Örneğin, Riemann zeta fonksiyonunun en önemli özelliği kabul edilen fonksiyonel denkleminde gamma fonksiyonu ayrılmaz bir parçadır ve

$$\zeta(s)=\Gamma(1-s)\zeta(1-s)2^{s}\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}$$

dir.

1.2. Gamma Fonksiyonunun Tarihçesi

Gamma fonksiyonunun temelleri $n! = 1,2,...,n$ faktöriyel fonksiyonunu tamsayı olmayan reel sayılara da genişletme çabalarına dayanır. Bu çabalar geniş yelpazeden pek çok matematikçinin iştirakiyle gamma ve ilgili fonksiyonların ortaya çıkışının ve gelişiminin uzun ve büyüleyici bir tarihinin ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Bu yönüyle gamma fonksiyonu, ortak çalışmanın nasıl güzel meyveler vereceğinin göz kamaştırıcı bir örneğidir. Bu geniş katılımın neticesinde gamma fonksiyonunun seri şeklinde, limit şeklinde veya integral şeklinde birçok temsilleri keşfedilmiştir.

Matematikteki öneminin yanısıra, gamma fonksiyonunun uygulamalı bilimlerde de birçok uygulaması vardır. Örneğin, fluid dinamikte, astrofizikte, kuantum mekaniğinde ve istatistikte ve kombinatorikte önemli uygulamaları vardır. Gamma fonksiyonunun sonsuz çarpımların hesaplanmasında, $f(t)e^{-g(t)}$ şeklinde fonksiyonların integrallerinin hesaplanmasında, uzunluk, alan ve hacim hesaplamalarında da önemli uygulamaları vardır [9,16,41,45].

Yine birçok özel fonksiyon gamma ve ilgili fonksiyonlar cinsinden gayet uygun bir biçimde temsil edilebilmekte ve bu fonksiyon birçok hipergeometrik özdeşliğin ispatlanmasında önemli roller üstlenmektedir.

17. yüzyılda interpolasyon problemi büyük ilgi görmekteydi. Problem, doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu verildiğinde $n \in \mathbb{N}$ için $F(n) = f(n)$, fakat F, $x > 0$ için tanımlı olacak şekilde bir F fonksiyonunun bulunmasıydı. Örneğin f fonksiyonunu $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} q^k, \qquad q > 0$$

şeklinde tanımlayalım. Acaba $n \in \mathbb{N}$ için $F(n) = f(n)$ ve $x > 0$ için tanımlı bir F fonksiyonu bulunabilir mi? Bu kolay bir problemdir. Çünkü $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

dır. Dolayısıyla n yerine x alınıp $F(x) = \dfrac{q^{x+1} - 1}{q - 1}$ alınırsa problem kolayca çözülebilir. Daha zor olanı f için açık bir ifade verilemediğinde ortaya çıkar.

Christian Goldbach (1690-1764) bu tür problemlerle uğraşmaktaydı. Bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verildiğinde $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ toplamı üzerine, özellikle de

$$\sum_{k=1}^{n} k! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + ... + 1.2.....n$$

toplamı için genel bir terim bulma problemi üzerinde çalışmaktaydı.

Goldbach, ''Goldbach konjektürü'' ile bilinir, hukuk mezunu kendi kendini yetiştiren bir matematikçi idi. Sayılar teorisi, integraller ve diferansiyel denklemler üzerine bazı makaleleri yayınlandı. Goldbach, Bernoulli ailesinden bazı matematikçiler ve Leibniz'in de aralarında bulunduğu birçok ünlü matematikçi ile temasları olan bir matematikçi idi. Birçok seyahat yaptı. 1725 yılında, 35 yaşında iken St. Petersburg'daki Bilimler Akademisi sekreteri olarak ilk profesyonel mevkiisini kazandı. O tarihte Euler ile bir temasının olup olmadığı bilinmiyor. 1725 yılının başlarında Moskova'ya taşındı ve Çar'ın yakın çevresinde bulundu (Çarlık Mahkemesi). Çar'ın çocuklarına özel dersler verdi. Moskova'dan Euler ile yazışmalar yaptı ve bu yazışmalar Goldbach'ın vefat ettiği 1764 yılına kadar devam etti [9,16]. Bu yoğun yazışmaların sebebi daha sonra gamma fonksiyonu olarak tanımlanacak olan $n! = 1.2.3.....n$ faktöriyel fonksiyonunu interpole etme problemiydi. Yani, $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = n!$ olacak fakat $x > 0$ için de tanımlı bir f fonksiyonu bulma problemiydi. Goldbach, Euler'in dışında konu ile ilgili birçok matematikçi ile yazışmalar yaptı ve yardım talep etti. Örneğin 1722 yılında Nikolaus Bernoulli (1695-1726) ile 1729 yılında kardeşi Daniel Bernoulli (1700-1784) ile konuyla ilgili yazışmalar yapmıştır. Bu yazışmaların sonunda Goldbach gamma fonksiyonunun doğuşunu sağlayan üç mektup aldı.

Birinci mektup 6 Ekim 1729 yılında Daniel Bernoulli'den gelen mektuptur. D. Bernoulli bu mektubunda faktöriyeller için interpolasyon fonksiyonu olarak herhangi bir x pozitif reel sayısı için

$$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{1+x}.\frac{3}{2+x}.\frac{4}{3+x}...\frac{A}{A-1+x}\right) \tag{1.1}$$

ifadesini önermektedir. Burada A daha büyük pozitif tamsayı değeri aldıkça interpolasyonun doğruluğu daha da artacak şekildedir. Örneğin $x = 3$ ve $A = 5$ alınırsa bu formül 6.04 değerini vermektedir ki bu $3! = 6$ ya oldukça yakındır. (1.1) formülünden de $A = n \to \infty$ için

$$x! = \lim_{n\to\infty} \left(n + 1 + \frac{x}{2}\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i+x}$$

olur. Bu dikkate değer sonuçlarla Goldbach ve Bernoulli arasındaki yazışmalar sona erdi [9]. Bu sıralar Euler de faktöriyel fonksiyonunun interpolasyonu ile ilgili tartışmalardan haberdar olan ve Bernoulli'nin teşvikiyle 13 Ekim 1729 yılında Goldbach'a konu ile ilgili bir mektup yazdı [19, sayfa:1-18]. Euler bu mektubunda $1, 2, 6, 24, 120, ...$ dizisinin m. terimi olarak

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^m \frac{1}{m+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^m \frac{2}{m+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^m \frac{3}{m+3}\right]...=m! \qquad (1.2)$$

çarpım formülünü önermekteydi. Euler $m!$ in çok yaklaşık değerini elde etmek için bu çarpımda çok fazla terimin alınması gerektiğini belirtmekteydi. Euler aslında $1.2.....m$ çarpımı için $[m]$ ve $\Delta(m)$ sembollerini kullanmıştır. Bu çarpım için $m!$ sembolünü ilk kullanan 1808 yılında Strasbourg Üniversitesi'nde Matematik Profesörü olan Christian Kramp (1760-1826) olmuştur. Euler'in (1.2) ve Bernoulli'nin (1.1) formülleri görsel olarak farklı gibi görünseler de limit durumunda her ikisi de aynı sonucu vermektedir. Ancak Bernoulli'nin formülü daha hızlı yakınsamaktadır.

Euler, 1729 tarihli mektubunda faktöriyel fonksiyonunun interpolasyonu ile ilgili (1.2) formülünden çok kısa bahsetmiştir, fakat 1730 yılında basılan [15] makalesinde bu formül ile ilgili birçok detaylar vermektedir. Euler bu makalesinde bulduğu formülün kesirli sayı indisleri (m'ler için) için oldukça uygun olduğunu iddia etmekte fakat tam değerlerini veren daha uygun formüller bulmaya niyetli olduğunu belirtmekte idi. Bu konudaki çalışmaları onu gerçekten bugün gamma fonksiyonu olarak bildiğimiz $\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-u}u^n du$ integraline götürecekti. Euler'i bu noktaya götüren ikinci adım, (1.2) deki çarpım formülünde $m=1/2$ için Euler formülünden

$$\sqrt{\frac{2.4}{3.3}.\frac{4.6}{5.5}.\frac{6.8}{7.7}.\frac{8.10}{9.9}...}$$

sonucunu elde etmesiydi ki bu, Oxford Üniversitesinde Matematik profesörü olan John Wallis (1616-1703) ın elde ettiği bir sonuçla doğrudan ilgiliydi. Wallis 1656 yılında yayınladığı ''Aritmetica İnfinitorum'' adlı kitabında 1 birim çaplı bir çemberin alanını

$$\frac{2.4}{3.3}.\frac{4.6}{5.5}.\frac{6.8}{7.7}.\frac{8.10}{9.9}...$$

sonsuz çarpımı şeklinde yazmıştı. Yani Wallis

$$\frac{2.4}{3.3}.\frac{4.6}{5.5}.\frac{6.8}{7.7}.\frac{8.10}{9.9}...=\pi$$

sonucunu elde etmişti. Euler bu sonuçtan esinlenerek

$$\left(\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\frac{2.4}{3.3}.\frac{4.6}{5.5}.\frac{6.8}{7.7}.\frac{8.10}{9.9}...}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

sonucunu buldu. Bu sonuç Euler için bir dönüm noktası oldu. O sıralar Wallis bir çemberi kareye dönüştürme problemi üzerine çalışmaktaydı ve bu çalışmalar sırasında

$$f\left(p,n\right)=\frac{1}{\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{p}}\right)^n dx}$$

integralini keşfetmişti. n ve p doğal sayılar ise

$$f\left(p,n\right)=\binom{n+p}{p} \qquad \text{ve} \qquad n=p=\frac{1}{2} \qquad \text{için}$$

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{6}...$$

yani

$$\left(\frac{1}{2}\right)!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{\sqrt{f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}}$$

elde edilir. Bu basit eşitlik dahi Euler'e integrallerin faktoriyel fonksiyonunun doğru interpolasyon fonksiyonu için daha uygun araçlar olduğunu göstermeye yetmişti.

Bu basit eşitlikten esinlenerek Euler önce integral 0'dan 1'e alınmak üzere

$$\int x^e dx\left(1-x\right)^n$$

integrali üzerine çalıştı. Goldbach'ın aldığı üçüncü mektup yine Euler'den gelmişti ve bu integral ile ilgiliydi. Günümüz gösterimi ile

$$\int_0^1 x^e\left(1-x\right)^n dx\ . \tag{1.3}$$

Bu integral Legendre tarafından birinci türden Euler integrali veya beta fonksiyonu olarak tanımlandı ve

$$B\left(m,n\right)=\int_0^1 x^{m-1}\left(1-x\right)^{n-1}dx$$

şeklinde gösterildi. Euler (1.3) integrali üzerinde çalışmaya devam etti ve $\left(1-n\right)^n$ nin binom açılımından faydalanarak $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\left(e+n+1\right)\int x^e dx\left(1-x\right)^n=\frac{1.2.3...n}{\left(e+1\right)\left(e+2\right)...\left(e+n\right)}$$

eşitliğine ulaştı. Euler'in amacı 1.2.3.....n çarpımını yalnız bırakmaktı. Bunun için $e = f/g$ alınarak n doğal sayıları için

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{f/g}dx(1-x)^n = \frac{1.2.3...n}{(f+g)(f+2g)...(f+ng)} \tag{1.4}$$

bağıntısına ulaştı. Euler bu eşitlikte $f=1$ ve $g=0$ alındığında sağ taraftaki 1.2.....n teriminin yalnız bırakılabileceğini görmüştü. Ancak bunu yaptığı taktirde

$$\int \frac{x^{\frac{1}{0}}dx(1-x)^n}{0^{n+1}} = 1.2...n \tag{1.5}$$

sonucuna varmaktaydı. Sol tarafın manasını anlamak için Euler ilginç bir yol izledi. (1.4) integralinde x yerine $x^{g/(f+g)}$ alarak (1.4) teki integrali

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{f/g}dx.(1-x)^n = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int \frac{g}{f+g}dx.\left(1-x^{g/(f+g)}\right)^n$$

şeklinde yazdı. Günümüz gösterimleri ile bu

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{f/g}dx.(1-x)^n = \frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}}\int_0^1 \left(\frac{1-x^{g/(f+g)}}{g/(f+g)}\right)^n dx$$

ifadesine denktir. O sıralar $f=1$ ve $g=0$ alındığında (1.5) i de kullanarak

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x^0}{0}\right)^n dx = 1.2...n = n!$$

eşitliğini elde etti. Bunun manasını anlamaya çalışarak $z=0$ için $\frac{1-x^z}{z}$ ifadesini göz önüne aldı ve Euler o zaman da bilinen bir kuraldan (L'Hospital Kuralı) hareketle

$$\frac{1-x^0}{0} = \lim_{z\to 0}\frac{1-x^z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{-x^z.dz.lx}{1.dz} = -lx$$

ve ya

$$\left(\frac{1-x^0}{0}\right)^n = (-lx)^n$$

sonucunu buldu. Euler $\log x$ yerine lx sembolünü kullanmakta idi. Euler'in bulduğu aslında günümüz ifadesi ile

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n \, dx \tag{1.6}$$

idi ve bu onun aradığı şeydi. Bu arada Euler'in integrali bir fonksiyon olarak değil de sadece doğal sayı olmayan sayıların faktöriyellerini temsil etmek ve hesaplamak için bir araç olarak görülüyordu. Bu integrali bir fonksiyon olarak tanımlayan Adrien-Marie Legendre (1752-1833) oldu. Adrian Marie Legendre ''Exercises de Calcul Integral'' [26] kitabının (16) integralinde $x = e^{-t}$ değişken değişimini yapıp bu integrali Γ ile gösterdi ve günümüzde de aynen kullanılan

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad , \quad x > 0$$

son tanımını verdi. Legendre bu integrali ikinci türden Euler integrali olarak adlandırdı. Daha sonra Γ fonksiyonunun her $x > 0$ için

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

fonksiyonel denklemini sağladığı gösterildi. Bu denklem gamma fonksiyonunun en önemli özelliğidir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = n!$ olacak şekilde ve (1.6) fonksiyonel denklemini sağlayan başka fonksiyonlar olduğu da biliniyor. Peki gamma fonksiyonunu özel yapan şey nedir? 200 yıllık bir araştırmadan sonra bu sorunun cevabının tamamen konvekslik kavramında yattığı ispatlandı. 1922 yılında Harald Bohr (1887-1951) ve Johannes Mallerup (1872-1937) faktöriyel fonksiyonunu pozitif tamsayılara genişleten tüm fonksiyonlar arasında (1.6) denklemini sağlayan ve logaritmik konveks olan tek fonksiyonun gamma fonksiyonu olduğunu ispatladılar.

Euler kompleks fonksiyonlar teorisinin gelişmesinde öncülük yapanlardan biri ise de faktöriyel fonksiyonunu hiçbir zaman kompleks sayılar için tanımlamadı. Davis'e göre [12] faktöriyel fonksiyonunu kompleks sayılar için de tanımlayan ilk kişi Gauss'dur. (Konu ile ilgili [43]'e bkz). Fakat 1930'lu yılların başına kadar bu konu fazla ilgi görmedi. Bu yıllarda gamma fonksiyonunun teorik fizikte uygulamalar bulması ve 1950'li yıllarda bilgisayarın gelişmesi ile gamma fonksiyonunun kompleks sayılardaki değerleri ile ilgili birçok tablolar yayınlanmıştır. Şimdi biliyoruz ki z sıfırdan farklı ve negatif tamsayı olmayan herhangi bir kompleks sayı ise Γ fonksiyonu tanımlıdır; $z \in \mathbb{C}$ ve

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du \quad , \qquad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

dır.

Not. Bu kısım ağırlıklı olarak [12] kaynağından alınmıştır. Bu çalışma Davis'e Hauvenet Ödülünü kazanmıştır. Bu bölümü Davis'in bu çalışmada ifade ettiği şu cümlelerle bitirmek istiyoruz:

‘’ Her kuşaktan matematikçi daima gamma fonksiyonu için söyleyeceği ilginç bir şeyler bulmuştur. Muhtemelen bu gelecek kuşaklar için de böyle devam edecektir. ‘’

2. TEMEL TANIM ve ÖZELLİKLER

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1. Γ, gamma fonksiyonu, her $z \in \mathbb{C} \setminus \{..., -2, -1, 0\}$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)...(x+n)}$$

dir.

Teorem 2.2. [22, s:29-30]. $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ integrali $x > 0$ için yakınsaktır. Ayrıca $\delta > 0$ ve $0 < \delta < R < \infty$ olmak üzere, verilen integral $[\delta, R]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat. Verilen integrali

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

şeklinde iki parçaya ayırırsak, $0 \le t \le 1$ ve $0 \le x \le 1$ aralıklarında $t^{x-1} e^{-t} \le t^{x-1}$ ve $\int_0^1 t^{x-1} dt$ yakınsak olduğundan karşılaştırma tersine göre sağdaki ilk integral yakınsaktır. Aynı şekilde $0 \le x \le 1$ ve $t \ge 1$ için $0 \le t^{x-1} e^{-t} \le e^{-t}$ ve $t > 0$ iken ilk integralde, $\int_1^\infty e^{-t} dt$ yakınsak olduğundan, yine karşılaştırma testine göre ikinci integral de yakınsaktır. Bu nedenle, verilen integral $[0,1]$ üzerinde yakınsaktır. Şimdi $x \ge 1$ olsun. Bu durumda $t \ge t_0$ için $t^{x-1} \le e^{t/2}$ olacak şekilde bir t_0 seçebiliriz. Böylece

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{t_0} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_{t_0}^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\le \int_0^{t_0} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_{t_0}^\infty e^{-(1/2)t} dt$$

eşitsizliğini elde ederiz. Sağ taraftaki her integral yakınsak olduğundan verilen integral verilen aralıkta yakınsaktır.

Tanım 2.3. Psi ya da digamma fonksiyonu ψ ile gösterilir ve $\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{\ldots,-2,-1,0\}$ için

$$\psi(z) = \frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4. $\psi^{(n)}(z)$ polygamma fonksiyonları, her $z \in \mathbb{C} \setminus \{\ldots,-2,-1,0\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\psi(z)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5. Euler-Mascheroni sabiti γ ile gösterilir ve

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = 0,57721\ldots$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f 'nin $(0,\infty)$ üzerinde her mertebeden türevi var ve

$$(-1)^n f^{(n)} \geq 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

ise f, $(0,\infty)$ üzerinde tam monotondur (completely monotonic) denir.

Tanım 2.7. $\forall x, y \in I \subset \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

ise, $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.8. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\log(f(x))$, (a,b) aralığında konveks ise f, (a,b) üzerinde logaritmik konvekstir, denir.

Tanım 2.9. Eğer her $\lambda \in (0,1)$ ve $(x,y) \in (0,\infty)$ için

$$g\left(x^{\lambda}.y^{1-\lambda}\right) \leq g(x)^{\lambda}.g(y)^{1-\lambda}$$

ise $g:(0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu geometrik konvekstir, denir.

Tanım 2.10. $g:(0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x, y \in I \subseteq (0,\infty)$ için

$$g\left(\sqrt{xy}\right) \leq \sqrt{g(x).g(y)} \quad , \quad \forall x, y \in I$$

ise g, I üzerinde geometrik Jensen konvekstir, denir.

Teorem 2.11. Her $x > 0$ için $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dir.

İspat. Kısmi integrasyonla

$$\Gamma(x+1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R u^x e^{-u} du = -\lim_{R\to\infty} \left[\left[xu^{x-1} e^{-u} \right]_{u=0}^{u=R} + x\int_0^R u^{x-1} e^{-u} du \right]$$

$$= 0 + x\int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du = x\Gamma(x)$$

elde edilir. Özel olarak $x = n \in \mathbb{N}$ alırsak $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ eşitliğinden $\Gamma(n+1) = n!$ elde edilir.

Sonuç 2.12. $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$ eşitliğinde her iki tarafın logaritmasını alalım:

$$\log\Gamma(x+1) = \log x + \log\Gamma(x) \tag{2.2}$$

buluruz. Bu eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak;

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

elde ederiz. Bu da aynı zamanda

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} \tag{2.3}$$

demektir. Her iki tarafın n. türevini alırsak, $n = 0,1,2,...$ için

$$\psi^{(n)}(x+1) - \psi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \ n = 0,1,2,... \tag{2.4}$$

sonucuna ulaşırız.

Teorem 2.13 (Weierstrass kanonik çarpımı) [6, s: 3-4]. $x>0$ için

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right\} \tag{2.5}$$

dir. Burada γ, Euler-Mascheroni sabitidir.

İspat. Tanım 2.1'de verilen gamma fonksiyonunun limit tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1).....(x+n)}{n!n^x}\\&=\lim_{n\to\infty}x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right).....\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x.\log n}\\&=\lim_{n\to\infty}xe^{x\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\log n\right)}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right\}\\&=xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right\}\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$0<\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}<1$$

olduğundan buradaki sonsuz çarpım yakınsaktır.

Teorem 2.14 [6, s:10-11]. $\forall x\in\mathbb{R}$ için

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\quad, \tag{2.6}$$

Teorem 2.15 (Euler yansıma formülü) [13, s:253] .

$x\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$ için

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

dir.

İspat. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ olduğundan burada x yerine $-x$ alıp Weierstrass çarpım formülünü uygularsak

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=\frac{1}{\Gamma(x)(-x)\Gamma(-x)}=-\frac{1}{x}.\frac{1}{\Gamma(x)}.\frac{1}{\Gamma(-x)}$$
$$=-\frac{1}{x}.xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{x/n}.(-x).e^{-\gamma x}$$
$$=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

olur. Teorem 2.14'den dolayı

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

dır. Bu da ispatı verir.

Teorem 2.16 [6, s:13]. $x>0$ olsun.

(i) $\psi(x+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right]$ (2.7)

(ii) $\psi^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{n+1}}$, $n=1,2,3,...$

dir.

İspat. (2.5) eşitliğinin her iki tarafının logaritmasını alırsak

$$-\log\Gamma(x)=\log x+\gamma x+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\log\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right\}$$

elde ederiz. Bu eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak ψ, digamma fonksiyonu olmak üzere

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\psi(x)=\frac{1}{x}+\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{x+k}-\frac{1}{k}\right\}$$

olur. Sonuç 2.12'den dolayı

$$\psi(x+1)=\frac{1}{x}+\psi(x)$$

olduğundan bu eşitlikten

$$\psi(x+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right]$$

olur. Bu da (i)-nin ispatını verir. (2.7)-ın her iki tarafının n. türevini alırsak (ii) hemen elde edilir.

Teorem 2.17 (Euler'in sonsuz çarpımı) [22, s:26]. $x \neq 0,-1,-2,\ldots$ için

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{1\leq n\leq\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} \tag{2.8}$$

dir.

İspat. Tanım 2.1'den dolayı

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{x}}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{x}}{(n+1)^{x}}=1$$

olduğundan

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^{x}}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Bu, $\frac{n+1}{n}.\frac{n}{n-1}\ldots\frac{3}{2}.\frac{2}{1}=n+1$ çarpımından şu şekilde yazılabilir:

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}.\frac{1}{x+1}.\frac{2}{x+2}\ldots\frac{n}{x+n}.\left[\left(\frac{2}{1}\right)^{x}\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\ldots\left(\frac{n+1}{n}\right)^{x}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n}{n+x}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{x}$$

$$=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+x}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{x}$$

ve istenen sonuç doğrudan elde edilir.

Teorem 2.18 (Legendre Formülü) [29, s:349]. $x \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -1\frac{1}{2}, \ldots$ için

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$$

dir.

Teorem 2.19 [6, S:23].

$$\Gamma(ma).(2\pi)^{\frac{(m-1)}{2}} = m^{ma-\frac{1}{2}}.\Gamma(a).\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right).....\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right) \tag{2.9}$$

İspat. Aynı argüment hemen hemen (2.9)'yi verir. (2.9) ne verirse

$$(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}.m^{\frac{-1}{2}}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{m}\right).....\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) =: P \tag{2.10}$$

ile yerini alır. (2.10) gösterimi doğrudur. Biz $P^2 = \frac{(2\pi)^{m-1}}{m}$ olduğunu göstereceğiz.

Yansıma formülü ile $\Gamma\left(\frac{k}{m}\right).\Gamma\left(1-\frac{k}{m}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi k}{m}}$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

$$2^{m-1}.\sin\frac{\pi}{m}.\sin\frac{2\pi}{m}.....\sin\frac{(m-1)\pi}{m} = m$$

$$\frac{x^{m+1}}{x-1} = \prod_{k=1}^{m-1}\left(x-\exp\left(\frac{2k\pi i}{m}\right)\right)$$

çarpanları ile başlar. $x \to 1$ olsun.

$$m = \prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\exp\left(\frac{2k\pi i}{m}\right)\right)$$

$$= 2^{m-1}.\sin\frac{\pi}{m}.\sin\frac{2\pi}{m}.....\sin\frac{(m-1)\pi}{m}$$

Bu (2.10)'yi ispatlar.

Fransız matematikçi Abraham de Moivre 1733 yılında yazdığı bir makalede C bir sabit olmak üzere

$$n! \sim C\sqrt{n}n^n e^{-n}$$

formülünü bulmuş, ancak C'nin tam değerinin ne olacağı konusunda bir fikir beyan etmemişti. İskoç matematikçi James Stirling (1692-1770), buradaki C sabitinin $C=\sqrt{2\pi}$ olduğunu göstererek

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$$

olduğunu göstermiştir. Bugün bu formül Stirling formülü olarak bilinir. Literatürde bu formülün bir çok farklı ispatı bulunmaktadır. Konu ile ilgili önemli çalışmalar [14,17,18,24,27,28,33-39] numaralı kaynaklardan bulunabilir. Aşağıda vereceğimiz ispat bunlardan biridir.

Teorem 2.20 (Stirling Formülü) [11, s:138-140].

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{x}}=\sqrt{2\pi} \qquad \text{dir.}$$

İspat. $\Gamma(x+1)=\int_0^\infty u^x e^{-u}du$ integralinde $u=xt$ değişken değişimini yaparsak,

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}\int_0^\infty t^x e^{-xt}dt$$

elde ederiz. Bu eşitlikten

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{x}}=\sqrt{x}\int_0^\infty\left[te^{1-t}\right]^x dt$$

bulunur. $g(t)=te^{1-t}$ dersek g, $[0,\infty)$ aralığında maksimum değerini $t=1$ noktasında alır. Yani, $t\geq 0$ ve $t\neq 1$ için $0\leq g(t)<1$ dir. Buna göre, $0<a<1<b<\infty$ şeklindeki herhangi a ve b reel sayıları için,

$$C(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{x}}=\sqrt{x}\int_0^a\left(g(t)\right)^x dt+\sqrt{x}\int_a^b\left(g(t)\right)^x dt+\sqrt{x}\int_b^\infty\left(g(t)\right)^x dt$$

dir. Amacımız $\lim_{x\to\infty}C(x)=\sqrt{2\pi}$ olduğunu göstermektedir. Birinci integralde $0<t<a<1$ olduğundan

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left[g(t)\right]^x=0$$

dır. Bu nedenle $x\to\infty$ için ilk integral sıfıra gider. g, $t>1$ için monoton azalan bir fonksiyon olduğundan her $t\in[b,\infty)$ için $g(t)\le g(b)<1$ dır. Bu nedenle üçüncü integralde

$$\sqrt{x}\int_b^\infty [g(t)]^x\,dt=\sqrt{x}\int_b^\infty [g(t)]^{x-1}g(t)\,dt\le\sqrt{x}[g(b)]^{x-1}\int_b^\infty g(t)\,dt$$

eşitsizliğini kurabiliriz. $\int_b^\infty g(t)\,dt$ yakınsak ve

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}[g(b)]^{x-1}=0$$

olduğundan $x\to\infty$ için üçüncü integral de sıfır olur. Buna göre

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\int_a^b [g(t)]^x\,dt=\sqrt{2\pi}$$

olduğunu gösterirsek ispat biter. Bu integralde a ve b yerine $a=1-\delta$ ve $b=1+\delta$ $(0<\delta<1)$ değerlerini aldıktan sonra $s=t-1$ değişken değişimini yaparsak,

$$\sqrt{x}\int_a^b [g(t)]^x\,dt=\sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta}\left((1+s)e^{-s}\right)^x ds$$

elde ederiz. $(1+s)e^{-s}=e^{-s^2h(s)}$ olacak şekilde bir $h(s)$ fonksiyonu alalım. Bu taktirde,

$$h(s)=\frac{s-\log(1+s)}{s^2}$$

olur. L'Hospital kuralını uygularsak $\lim_{s\to 0}h(s)=1/2$ elde ederiz. Limit tanımından dolayı, verilen her $\varepsilon>0$ için $-\delta<s<\delta$ olduğunda, $|h(s)-1/2|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ seçebiliriz. Böylece her $s\in[-\delta,\delta]$ için $1/2-\varepsilon<h(s)<\varepsilon+1/2$ olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $-xs^2$ ile çarparsak, her $s\in[-\delta,\delta]$ için

$$-xs^2(\varepsilon+1/2)\le -xs^2h(s)\le -xs^2(1/2-\varepsilon)$$

elde ederiz. Yine bu eşitsizliğin her tarafına e^x üstel fonksiyonunu uygularsak, üstel fonksiyon monoton artan bir fonksiyon olduğundan

$$e^{-xs^2(\varepsilon+1/2)} \le e^{-xs^2h(s)} \le e^{-xs^2(1/2-\varepsilon)}$$

yazabiliriz. Her bir eşitsizlik üzerinde, $-\delta$ dan δ ya kadar integral alır ve daha sonra $\sqrt{x}$ ile çarparsak, $\delta > 0$ için

$$\sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-xs^2(\varepsilon+1/2)}ds \le \sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-xs^2h(s)}ds \le \sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-xs^2(1/2-\varepsilon)}ds \tag{2.11}$$

olur. Herhangi bir $\delta > 0$ ve $c > 0$ için $u = \sqrt{cx}s$ değişken değişimini yaparsak,

$$\sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-xs^2c}ds = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_{-\delta\sqrt{cx}}^{\delta\sqrt{cx}} e^{-u^2}du$$

olduğunu görürüz. Bu ise,

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-xs^2c}ds = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

sonucunu doğurur. Buna göre $x\to\infty$ için (2.11) eşitsizliğinin ilk ve son terimleri sırayla,

$\sqrt{\dfrac{\pi}{1/2+\varepsilon}}$ ve $\sqrt{\dfrac{\pi}{1/2-\varepsilon}}$ değerlerine yakınsarlar. Bu nedenle,

$$\sqrt{\frac{\pi}{1/2-\varepsilon}} \le \sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-x^2h(s)}ds \le \sqrt{\frac{\pi}{1/2+\varepsilon}}$$

sonucunu elde ederiz. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, buradan da arzu edildiği üzere

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-xs^2h(s)}ds = \sqrt{2\pi}$$

sonucuna varırız.

Lemma 2.21. $s \in \mathbb{C}$ olsun. O zaman

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-sx}}{x}dx = \log s$$

dir.

İspat.

$$\int_0^\infty \int_1^s e^{-tx}dtdx = \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_{t=1}^{t=s} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-sx}}{x}dx \tag{2.12}$$

dır. Diğer taraftan en soldaki integralde integrallerin sırasını değiştirirsek

$$\int_0^\infty \int_1^s e^{-tx}dtdx = \int_1^s \int_0^\infty e^{-tx}dxdt = \int_1^s \left[\int_0^\infty e^{-tx}dx\right]dt = \int_1^s \left[-\frac{e^{-tx}}{t}\right]_{x=0}^{x=\infty} dt = \int_1^s \frac{dt}{t} = \log s \tag{2.13}$$

elde edilir. (1) ve (2) eşitliklerinden istenen sonuç hemen bulunur.

Teorem 2.22 [6, Teorem 1.6.1]. ψ, digamma fonksiyonu olsun. O zaman $\operatorname{Re} x > 0$ için

(i) $\quad \psi(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{z}\left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x}\right)dz$ (Dirichlet Formülü)

(ii) $\quad \psi(x) = \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right)dz$ (Gauss Formülü).

dır.

İspat. **(i)** Basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}\frac{e^{-s-z}-e^{-s(1+z)}}{z}dsdz &= \int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}\frac{e^{-s-z}-e^{-s(1+z)}}{z}dzds \\ &= \int_0^\infty \left[s^{x-1}e^{-s}\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-sz}}{z}dz\right]ds\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 2.21'den dolayı içerdeki integralin değeri $\log s$ dir. Bu nedenle

$$\int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}\frac{e^{-s-z}-e^{-s(1+z)}}{z}dsdz = \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}\log s ds = \Gamma'(x) \tag{2.14}$$

olur. Yine

$$\int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}\frac{e^{-s-z}-e^{-s(1+z)}}{z}dsdz = \int_0^\infty \left[e^{-z}\int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds - \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s(1+z)}ds\right]\frac{dz}{z}$$

olur.

$$\int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds=\Gamma(x) \quad \text{ve} \quad \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s(1+z)}ds=\frac{\Gamma(x)}{(1+z)^x}$$

olduğundan

$$\int_0^\infty\int_0^\infty s^{x-1}\frac{e^{-s-z}-e^{-s(1+z)}}{z}dsdz=\Gamma(x)\int_0^\infty\left[e^{-z}-\frac{1}{(1+z)^x}\right]\frac{dz}{z} \tag{2.15}$$

elde edilir. Buna göre (2.14) ve (2.15) ten

$$\Gamma'(x)=\Gamma(x)\int_0^\infty\left[e^{-z}-\frac{1}{(1+z)^x}\right]\frac{dz}{z}$$

sonucuna varılır ki bu istediğimiz sonuçtur.

(ii) Gauss formülü bir değişken değiştirme işlemi yardımıyla Drichlet formülünden elde edilir. $z=e^t-1$ alırsak;

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\lim_{s\to0^+}\left[\int_s^\infty\frac{e^{-z}}{z}dz-\int_s^\infty\frac{dz}{z(1+z)^x}\right]\\&=\lim_{s\to0^+}\left[\int_s^\infty\frac{e^{-z}}{z}dz-\int_{\log(1+s)}^\infty\frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}dt\right]\\&=\lim_{s\to0^+}\left[\int_s^{\log(1+s)}\frac{e^{-z}}{z}dz-\int_{\log(1+s)}^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}\right)dt\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left|\int_s^{\log(1+s)}\frac{e^{-z}}{z}dz\right|\le\int_s^{\log(1+s)}\frac{\left|e^{-z}\right|}{|z|}dz\le\int_{\log(1+s)}^s\frac{dz}{z}$$

$$=\log\frac{s}{\log(1+s)}\to0 \quad , \quad s\to0$$

olduğundan

$$\psi(x)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}\right)dt$$

elde edilir.

Teorem 2.23. $\operatorname{Re}x>0$ için

(i) $\log\Gamma(x)=\int_0^\infty\left((x-1)e^{-t}-\frac{(1+t)^{-1}-(1+t)^{-x}}{\log(1+t)}\right)\frac{dt}{t}$

(ii) $\log\Gamma(x)=\int_0^\infty\left((x-1)e^{-t}-\frac{e^{-t}-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)\frac{dt}{t}$

dır.

İspat. Teorem 2.22'de verilen integraller $\operatorname{Re} x \geq s > 0$ için düzgün yakınsaktır. Bu integrallerin $x=1$ den x'e kadar her iki tarafının integralini alabiliriz. Böyle yapınca ispat biter.

Teorem 2.24 (Binnet Formülü) [6, s:27-28]. $\operatorname{Re} x > 0$ için

$$(i) \qquad \log\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{e^{-tx}}{t}\,dt$$

ve

$$(ii) \qquad \log\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log 2\pi + 2\int_0^\infty \frac{\arctan(t/x)}{e^{2\pi t} - 1}\,dt$$

İspat. Teorem 2.22 ' deki Gauss formülünden dolayı

$$\psi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-z}}\right) dz$$

olduğundan

$$\psi(x+1) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz-z}}{1 - e^{-z}}\right) dz$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z}\right) dz + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-xz}}{z} - \frac{e^{-xz-z}}{1 - e^{-z}}\right) dz$$

elde edilir. Lemma 2.21'dan dolayı buradaki ilk integralin değeri $\log x$ dir. Bu nedenle

$$\psi(x+1) = \log x + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-xz}}{z} - \frac{e^{-xz-z}}{1 - e^{-z}} + \frac{e^{-xz}}{2} - \frac{e^{-xz}}{2}\right) dz$$

$$= \log x + \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{2}\,dz + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-xz}}{z} - \frac{e^{-xz-z}}{1 - e^{-z}} - \frac{e^{-xz}}{2}\right) dz$$

$$= \log x + \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{2}\,dz + \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} - \frac{1}{2}\right) e^{-xz}\,dz$$

$$= \frac{1}{2x} + \log x + \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right) e^{-xz}\,dz$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafının $[1, t]$ aralığında integralini alırsak

$$\int_1^t \psi(x+1)\,dx = \log\Gamma(t+1) = \int_1^t \frac{dx}{2x} + \int_1^t \log x\,dx - \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\left(\int_1^t e^{-xz}\,dx\right)dz$$

$$= \frac{1}{2}\log x\Big|_{x=1}^{x=t} + \left[x\log x - x\right]_{x=1}^{x=t} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\left(-\frac{1}{z}\right)e^{-xz}\Big|_{x=1}^{x=t}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\log t + t\log t - t + 1 - \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\left(\frac{1}{z}\left(e^{-tz} - e^{-z}\right)\right)dz$$

$$= \frac{1}{2}\log t + t\log t - t + 1 - \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\frac{e^{-tz} - e^{-z}}{z}\,dz$$

elde ederiz. $\log\Gamma(x+1) = \log x + \log\Gamma(x)$ olduğundan

$$\log\Gamma(t) + \log t = \left(t + \frac{1}{2}\right)\log t - t + 1 - \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\frac{e^{-tz} - e^{-z}}{z}\,dz$$

ve ya

$$\log\Gamma(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)\log t - t + 1 - \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\frac{e^{-tz} - e^{-z}}{z}\,dz$$

$$= \left(t - \frac{1}{2}\right)\log t - t + 1 - \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\frac{e^{-tz}}{z}\,dz + \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\frac{e^{-z}}{z}\,dz$$

elde edilir.

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\frac{e^{-z}}{z}\,dz$$

dersek

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + 1 - \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^z - 1}\right)\frac{e^{-tz}}{z}\,dz + I$$

elde edilir. Stirling'in formülü yukarıda uygulanan $I = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi)$ ' yi verdiğinden istenen sonuç elde edilir. Bu da (i) nin ispatını tamamlar. Teorem 2.23'ün ikinci formülünde $u = e^{-t}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\log\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\frac{1 - u^{x-1}}{1 - u} - x + 1\right)\frac{du}{\log u} \tag{2.16}$$

elde edilir.

Aşağıda ispatlayacağımız teorem Kummer'a aittir ve gamma fonksiyonunun Fourier serisini verir.

Teorem 2.25 [6, s:29]. $0<x<1$ için

$$\log\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}=-\frac{1}{2}\log\left(2\sin(\pi x)\right)+\frac{1}{2}\left(\gamma+\log(2\pi)\right)(1-2x)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k}\left(\sin(2\pi kx)\right)$$

dır. Burada γ, Euler-Mascheroni sabitidir.

İspat. $0<x<1$ olmak üzere

$$-\log\left(1-e^{2\pi ix}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ikx}}{k}$$

eşitliğinin her iki tarafının reel ve sanal kısımlarını eşitlersek

$$-\log\left(2\sin(\pi x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi x)}{k} \tag{2.17}$$

ve

$$\frac{\pi}{2}(1-2x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\pi x)}{k} \tag{2.18}$$

sonucunu elde ederiz. $\log\Gamma(x)$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında türevlenebildiğinden Fourier açılımı vardır ve

$$C_k=\int_0^1\log\Gamma(x)\cos(2\pi kx)\,dx \quad \text{ve} \quad D_k=\int_0^1\log\Gamma(x)\sin(2\pi kx)\,dx \tag{2.19}$$

olmak üzere

$$\log\Gamma(x)=C_0+2\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos(2\pi kx)+2\sum_{k=1}^{\infty}D_k\sin(2\pi kx) \tag{2.20}$$

dır. Şimdi C_k ve D_k katsayılarını hesaplayalım. Gamma fonksiyonunun Teorem 2.15'da verilen yansıma formülünün her iki tarafının logaritmasını alırsak

$$\log\Gamma(x)+\log\Gamma(1-x)=\log(2\pi)-\log\left(2\sin(2k\pi x)\right)$$

elde ederiz. (2.17) bağıntısı yardımıyla bu eşitliği

$$\log\Gamma(x)+\log\Gamma(1-x)=\log(2\pi)+\cos(2\pi x)+\frac{1}{2}\cos(4\pi x)+\ldots \qquad (2.21)$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan (2.20)'den dolayı

$$\log\Gamma(x)+\log\Gamma(1-x)=2C_0+4C_1\cos(2\pi x)+4C_2\cos(4\pi x)+\ldots \qquad (2.22)$$

olduğundan (2.21) ve (2.22) bağıntılarından

$$2C_0-\log(2\pi)+(4C_1-1)\cos(2\pi x)+\left(4C_2-\frac{1}{2}\right)\cos(4\pi x)+\ldots+\left(4C_k-\frac{1}{k}\right)\cos(2k\pi x)+\ldots=0$$

elde edilir.

$$\{1,\cos(2\pi x),\cos(4\pi x),\cos(6\pi x),\ldots,\cos(2k\pi x),\ldots\}$$

kümesi lineer bağımsız olduğundan

$$C_0=\frac{1}{2}\log(2\pi) \quad \text{ve} \quad C_k=\frac{1}{4k}, \quad k\geq 1$$

sonucunu buluruz. [6, s:28, 1.6.2]'de

$$\log\Gamma(x)=\int_0^1\left(\frac{1-u^{x-1}}{1-u}-x+1\right)\frac{du}{\log u}$$

bağıntısı verilmiştir. $\log\Gamma(x)$'in bu değerini (2.19)'da yerine yazarsak

$$D_k=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-u^{x-1}}{1-u}-x+1\right)\frac{\sin(2k\pi x)}{\log u}\,du\,dx$$

elde ederiz. Buradaki integrallerin sırasını değiştirirsek basit bir hesaplama ile

$$D_k=\int_0^1\left[\int_0^1\left(\frac{1}{1-u}+1\right)\sin(2k\pi x)\,dx\right]\frac{du}{\log u}-\int_0^1\left[\int_0^1 \mathrm{u}^{x-1}\sin(2k\pi x)\,dx\right]\frac{du}{(1-u)\log u}$$

$$-\int_0^1\left[\int_0^1 \mathrm{x}\sin(2k\pi x)\,dx\right]\frac{du}{\log u} \qquad (2.23)$$

elde ederiz.

$$\int_0^1\sin(2k\pi x)\,dx=0\ , \quad \int_0^1 x\sin(2k\pi x)\,dx=-\frac{1}{2k\pi}$$

ve

$$\int_0^1 u^{x-1}\sin(2k\pi x)\,dx = \frac{(1-u)2k\pi}{u\left(\log^2 u + 4k^2\pi^2\right)}$$

olduğundan (2.23) bağıntısından

$$D_k = \int_0^1 \left[\frac{-2k\pi}{u\left(\log^2 u + 4k^2\pi^2\right)} + \frac{1}{2k\pi} \right] \frac{du}{\log u}$$

elde edilir. Burada $u = e^{-2k\pi t}$ değişken değişimi yapılırsa

$$D_k = \frac{1}{2k\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+t^2} - e^{-2\pi k t} \right] \frac{dt}{t} \tag{2.24}$$

bulunur. $k=1$ için bu

$$D_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+t^2} - e^{-2\pi t} \right] \frac{dt}{t}$$

olur. Teorem 2.22 (i)'deki formülde $x=1$ alınırsa

$$\psi(1) = -\gamma = \int_0^\infty \left(e^{-z} - \frac{1}{1+z} \right) \frac{dz}{z}$$

veya

$$\frac{-\gamma}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[e^{-t} - \frac{1}{1+t} \right] \frac{dt}{t}$$

elde edilir. Böylece son bağıntıyı kullanırsak

$$\begin{aligned} D_1 - \frac{\gamma}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+t^2} - e^{-2\pi t} \right] \frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[e^{-t} - \frac{1}{1+t} \right] \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2\pi t}}{t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} \right] \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

olur. Böylece Lemma 2.21'den dolayı

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{2\pi t}}{t}\,dt = \log(2\pi)$$

dir. Sonuç olarak

$$D_1 = \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\log(2\pi)$$

bulunur. (2.24)'ten

$$kD_k - D_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-2\pi t} - e^{-2k\pi t}}{t}\,dt \;= \frac{1}{2\pi}\log k$$

olduğundan

$$D_k = \frac{1}{2\pi k}\left(\gamma + \log(2\pi k)\right)\ , \quad k = 1,2,3,\ldots$$

buluruz. Böylece $\log\Gamma(x)$'in Fourier serisi

$$\log\Gamma(x) = \frac{1}{2}\log(2\pi) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi kx)}{k} + \frac{1}{\pi}\left(\gamma + \log(2\pi)\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi kx)}{k} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k}\sin(2\pi kx)$$

olur. (2.17) ve (2.18) denklemlerini kullanırsak istenen sonuç elde edilir.

Tanım 2.26. Beta fonksiyonu, $\operatorname{Re} x > 0$ ve $\operatorname{Re} y > 0$ için

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

integrali ile tanımlanır.

Beta ve gamma fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

Teorem 2.27 [11, s:140,141]. Her x ve y pozitif reel sayıları için

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

dir.

İspat: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ integralinde $t = u^2$ değişken değişimi yaparsak

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du$$

elde ederiz. Buna göre Birinci Fubini Teoreminden dolayı,

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\lim_{R\to\infty}\int_0^R v^{2x-1}e^{-v^2}dv\int_0^R u^{2y-1}e^{-u^2}du$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty v^{2x-1}u^{2y-1}e^{-\left(u^2+v^2\right)}dudv$$

yazabiliriz. Bu integralde $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$ değişken değişimini yaparsak $dudv=rdrd\theta$ olur. Buna göre,

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^{\pi/2}\left(r\sin\theta\right)^{2x-1}\left(r\cos\theta\right)^{2y-1}e^{-r^2}r\ \ d\theta dr$$

$$=4\int_0^\infty r^{2x+2y-1}e^{-r^2}dr\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta\right)^{2y-1}\left(\sin\theta\right)^{2x-1}d\theta$$

elde edilir. İlk integralde $z=r^2$; ikinci integralde de $w^2=\sin\theta$ değişken değişimlerini yaparsak, istendiği üzere

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_0^\infty\frac{z^{x+y+1/2}}{2z^{1/2}}e^{-z}dz\int_0^1\frac{\left(1-w\right)^{y-1/2}w^{x-1/2}}{2w^{1/2}\left(1-w\right)^{1/2}}dw$$

$$=\int_0^\infty z^{x+y-1}e^{-z}dz\int_0^1 w^{x-1}\left(1-w\right)^{y-1}dw$$

$$=\Gamma(x+y)B(x,y)$$

sonucunu buluruz.

3. GAMMA FONKSİYONUNUN KARAKTERİZASYONU

Gamma fonksiyonunun tarihine baktığımızda hepsi birbirine denk birçok tanımların yapıldığını görürüz. Ancak bazen bu tanımların denk olduğunu göstermek o kadar kolay olmamakta. Bunun için matematikçiler, bu tanımların her birinin temsil ettiği fonksiyonun gamma fonksiyonu olduğunu göstermek yerine, gamma fonksiyonunu tek yapan genel özellikler bulmaya çalışmışlardır. Bu başarıldığı taktirde gamma fonksiyonu için verilen her bir tanımın gerçekten gamma fonksiyonuna eşit olduğunu göstermek yerine bu tanımların gamma fonksiyonunu özel yapan özellikleri sağlayıp sağlamadığına bakmak kafi olacaktı. Bunun için önce diferansiyel denklemlere bakıldı, çünkü uygulamalı matematikteki pek çok özel fonksiyon bir diferansiyel denklemin tek çözümü olarak ortaya çıkmaktadır. Ancak Otto Hölder 1887'de hiçbir cebirsel diferansiyel denklemin çözümünün gamma fonksiyonunun sağladığı $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $(x>0)$ fonksiyonel eşitliğini sağlamadığını ispatlayınca bu yol kapandı. 1922 yılına kadar bu konuda bir gelişme kaydedilmedi. 1922 yılında Harald Bohr ve Johannes Mollerup, [10, s:149-164] günümüzde Bohr-Mollerup Teoremi olarak bilinen ve gamma fonksiyonunu karakterize eden şu teoremi ispatladılar.

Teorem 3.1. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek fonksiyon vardır ve o da gamma fonksiyonudur.

(i) $\forall x>0$ için $f(x+1)=x.f(x)$

(ii) $f(1)=1$

(iii) f, $(0,\infty)$ üzerinde logaritmik konvekstir (Yani $\log f$ konvekstir.)

Bu teorem oldukça önemlidir, çünkü bu üç özelliğe sahip tek fonksiyon gamma fonksiyonudur. Dolayısıyla gamma fonksiyonu için verilen bir tanımın gerçekten gamma fonksiyonunu temsil edip etmediğini anlamak için bu üç koşulu sağlayıp sağlamadığına bakmak yeterli olacaktır. Bohr-Mollerup Teoremi yayınlandıktan dokuz yıl sonra E. Artin [7] bu teoremin çok daha şık ve basit bir ispatını bulmuştur. Bu konu ile ilgili daha detaylı bilgi [40, Bölüm 8] den alınabilir. 1939 yılında A. E. Mayer [32] Bohr-Mollerup teoreminde logaritmik konvekslik yerine konveksliğin alınamayacağını göstermiştir. Gerçekten

$$g(x)=\cos(2m\pi x)\Gamma(x), \quad m\in\mathbb{N}$$

fonksiyonunu alırsak g, $g(1)=1$ ve $g(x+1)=x.g(x)$ bağıntılarını sağlar. Üstelik g konveks bir fonksiyondur. Fakat $g(x)\neq\Gamma(x)$ dır. Bohr Mollerup Teoremi yayınlandıktan sonra bu konuda pek çok çalışmalar yapılmış ve gamma fonksiyonunun farklı bir çok karakterizasyonu elde edilmiştir bkz [5,20,23,25]. Bohr-Mollerup

Teoreminin kompleks düzlemdeki versiyonu 1939 yılında Wieldant tarafından ispatlandı. Bu teorem Wieldant Teoremi olarak bilinmektedir.

Bu bölümde önce Bohr-Mollerup Teoreminin Rudin Artin tarafından verilen [40, Bölüm 8] deki ispatını vereceğiz. Daha sonra bu teoremle ilgili sonraki yıllarda yapılan gamma fonksiyonunun farklı karakterizasyonlarını vereceğiz.

Bohr-Mollerup Teoremini ispatlamak için aşağıdaki önermelere ihtiyacımız vardır.

Önerme 3.2. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ konveks ve $a<s<t<u<b$ olsun. O zaman

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\leq\frac{f(u)-f(s)}{u-s}\leq\frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

dır.

İspat. $a<s<t<u<b$ olsun. O zaman f konveks olduğundan $\forall\lambda\in(0,1)$ için

$$f\left(\lambda s+(1-\lambda)u\right)\leq\lambda f(s)+(1-\lambda)f(u) \tag{3.1}$$

dır. Özel olarak $\lambda=\dfrac{u-t}{u-s}$ alırsak

$$\lambda s+(1-\lambda)u=\frac{u-t}{u-s}s+\left(1-\frac{u-t}{u-s}\right)u$$

$$=\frac{ut-ts}{u-s}=t$$

elde edilir. Böylece (3.1) eşitsizliği

$$f(t)\leq f(u)+\frac{u-t}{u-s}.\left(f(s)-f(u)\right) \tag{3.2}$$

olur. (3.2) bağıntısında

$$\frac{u-t}{u-s}=1+\frac{s-t}{u-s}$$

özdeşliğini kullanırsak

$$f(t)\leq f(s)+\frac{s-t}{u-s}.\left(f(s)-f(u)\right) \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.2) denklemini yeniden düzenlersek

$$\frac{f(u)-f(s)}{u-s} \le \frac{f(u)-f(t)}{u-t} \tag{3.4}$$

ve (3.3) bağıntısını yeniden düzenlersek

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \le \frac{f(u)-f(s)}{u-s} \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) den

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \le \frac{f(u)-f(s)}{u-s} \le \frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

elde edilir.

Önerme 3.3. $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ logaritmik konvekstir. Yani $\log\Gamma(x)$ konvekstir.

İspat. $1<p<\infty$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olsun. O zaman

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)=\int_0^\infty t^{(x/p+y/q-1)}e^{-t}dt$$

$$=\int_0^\infty t^{x/p}t^{y/q}.t^{-1/p}t^{-1/q}e^{-t/p}e^{-t/q}dt$$

$$=\int_0^\infty \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{1/p}\left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{1/q}dt$$

olur. Hölder eşitsizliğini kullanırsak buradan

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)\le\left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt\right)^{1/q}$$

$$=\Gamma(x)^{1/p}.\Gamma(y)^{1/q} \tag{3.6}$$

elde edilir. $\lambda=\dfrac{1}{p}$ alırsak $1-\lambda=\dfrac{1}{q}$ ve $\lambda\in(0,1)$ olur. Böylece (3.6)'dan

$$\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\Gamma(x)^{\lambda}\,\Gamma(y)^{1-\lambda}$$

olur. İki tarafın logaritmasını alırsak

$$\log\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda\log\Gamma(x)+(1-\lambda)\log\Gamma(y)$$

elde edilir. Bu da $\log\Gamma(x)$' in $(0,\infty)$ üzerinde konveks olduğunu gösterir.

Şimdi Bohr-Mollerup teoremini ispatlayabiliriz.

Teorem 3.4 (Bohr-Mollerup) [40, Bölüm 8].

$f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

(i) $f(1)=1$

(ii) $\forall x\in(0,\infty)$ için $f(x+1)=x.f(x)$ ve

(iii) $\log f(x)$, $(0,\infty)$ üzerinde konvekstir.

O zaman $f(x)=\Gamma(x)$ dir.

İspat. Γ fonksiyonu bu üç şartı da sağladığından bu üç şartı da sağlayan tek bir fonksiyon olduğunu göstermek kafidir. $x>1$ için $\Gamma(x)$, $A(x)$ bir polinom olmak üzere $\Gamma(x)=A(x)\Gamma(b)$, $b\in(0,1)$ şeklinde yazılabileceğinden, teoremi sadece $x\in(0,1)$ için ispatlamak kafidir.

$$\varphi(x)=\log f(x)$$

diyelim. O zaman (i)'den dolayı $\varphi(1)=0$ dır. (ii)'den dolayı da

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)+\log x \tag{3.7}$$

dır. (iii)'den dolayı φ konvekstir.

$0<x<1$ ve $n\in\mathbb{N}$ olsun. Önerme 3.2'de $t=n+1$, $s=n$ ve $u=n+1+x$ alırsak

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)\le\frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x} \tag{3.8}$$

elde edilir. Yine Önerme 3.2'de $s=n+1$, $t=n+1+x$ ve $u=n+2$ alırsak

$$\frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x}\le\varphi(n+2)-\varphi(n+1) \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.7) eşitliğinden $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)=\log n$$

ve

$$\varphi(n+2)-\varphi(n+1)=\log(n+1)$$

elde edilir. Bu değerleri (3.8) ve (3.9)'de yerine yazarsak

$$\log n \le \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x} \le \log(n+1) \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.7) bağıntısını ard arda n-defa uygularsak

$$\begin{aligned}\varphi(x+n+1)&=\varphi(x+n)+\log(x+n)\\&=\varphi(x+n-1)+\log(x+n)+\log(x+n-1)\\&=\varphi(x+n-1)+\log\left[(x+n)(x+n-1)\right]\\&=\varphi(x+n-2)+\log\left[(x+n)(x+n-1)(x+n-2)\right]\\&\dots\\&=\varphi(x)+\log\left[(x+n)(x+n-1).....(x+1)x\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Yine (3.7)'den $\varphi(n+1)=\log(n!)$ olur. Böylece

$$\frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x}=\frac{1}{x}\left[\varphi(x)+\log\left[(x+n)(x+n-1).....(x+1)x\right]-\log(n!)\right]$$

bağıntısını (3.10)'da yerine yazarsak

$$\log n \le \frac{1}{x}\left[\varphi(x)+\log\left[(x+n)(x+n-1).....(x+1)x\right]-\log(n!)\right] \le \log(n+1)$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı x ile çarparsak

$$\log n^x \le \varphi(x)+\log\left[(x+n)(x+n-1).....(x+1)x-\log(n!)\right] \le \log(n+1)^x$$

sonucunu buluruz. Bu eşitsizliğin her bir tarafından $\log n^x$ 'i çıkarırsak

$$0 \le \varphi(x)+\log\left[(x+n)(x+n-1).....(x+1)x\right]-\log(n!)-\log n^x \le \log(n+1)^x-\log n^x$$

elde edilir. Buradaki işlemleri sadeleştirerek

$$0 \le \varphi(x)-\log\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2).....(x+n)}\right] \le x\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty}\log(1+1/n)=0$ olduğundan bu eşitsizliğin her yanının $n\to\infty$ için limitini alırsak

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\log\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2).....(x+n)}\right]$$

elde edilir. Logaritma fonksiyonu sürekli olduğundan bunu

$$\varphi(x)=\log\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2).....(x+n)}\right]$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2).....(x+n)} \tag{3.11}$$

elde edilir. Demek ki Teorem 3.4'deki üç özelliği sağlayan tek fonksiyon (3.11)'de verilen fonksiyondur. Bu ise Euler'in 13 Ekim 1729'da Goldbach'a yazdığı bir mektupta gamma fonksiyonu için verdiği tanımdır. Teorem 2.12 ve Önerme 3.3'ten dolayı

$$G(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

fonksiyonu Teorem 3.4'deki üç şartı da sağladığından

$$G(x)=\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

dır.

Teorem 3.5 [46, s:535-536]. $\forall x\geq 1$ için bir $\Gamma(x)>0$ fonksiyonu vardır öyle ki $x\geq 0$ için $L(x)=\log\Gamma(x+1)$, aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $L(0)=0$ (başlangıç koşulu, $1!=1$)

(ii) $L(x+1)=\log(x+1)+L(x)$ (fonksiyonel denklem)

(iii) $L(n+x)=L(n)+x.\log(n+1)+r_n(x)$,

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0 \tag{3.12}$$

İspat. (ii)'den dolayı $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$L(k+1)-L(k)=\log(k+1)$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanını $k=0$'dan $k=n-1$'ye kadar toplarsak

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[L(k+1)-L(k)\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\log(k+1)$$

veya

$$L(n)=\sum_{k=1}^{n}\log k=\log(n!) \tag{3.13}$$

elde edilir. Yine (ii)'de x yerine $x+k-1$ alırsak

$$L(x+k)-L(x+k-1)=\log(x+k)$$

elde edilir. Burada yine her iki tarafı $k=1$'den $k=n$'ye kadar toplarsak

$$\sum_{k=1}^{n}\left[L(x+k)-L(x+l-1)\right]=\sum_{k=1}^{n}\log(x+k)$$

veya

$$L(x+n)=L(x)+\sum_{k=1}^{n}\log(x+k) \tag{3.14}$$

elde edilir. Buradaki $L(x+n)$'in değerini (iii)'de yerine yazarsak

$$L(x)=L(n)-\sum_{k=1}^{n}\log(x+k)+x.\log(n+1)+r_n(x) \tag{3.15}$$

olur.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\log(k+1)-\log k\right)=\log(n+1)$$

olduğundan (3.15) eşitliğini

$$L(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[(1-x)\log k-x.\log(k+1)-\log(x+k)\right]+r_n(x) \tag{3.16}$$

yazabiliriz. Bilindiği üzere Euler-Mascheroni sabiti

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right]$$

şeklinde tanımlanır. Bu nedenle

$$\gamma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n+1)$$

dizisinin limiti γ 'dır. Böylece (3.16) bağıntısından

$$L(x)=\sum_{k=1}^{n}\Big[\log k+x.\big(\log(k+1)-\log k\big)-\log(x+k)\Big]+r_n(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{x}{k}+x.\big(\log(k+1)-\log k\big)+\log k+\frac{x}{k}-\log(x+k)\right]+r_n(x)$$

$$=-x\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\big(\log(k+1)-\log k\big)\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k}-\log(x+k)+\log k\right]+r_n(x) \qquad (3.17)$$

elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{n}\big(\log(k+1)-\log k\big)=\log(n+1)$$

olduğundan

$$L(x)=-x.\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n+1)\right)+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k}-\log(x+k)+\log k\right]+r_n(x)$$

$$=-x.\gamma_n+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k}-\log(x+k)+\log k\right]+r_n(x) \qquad (3.18)$$

elde edilir. $k>x\geq 0$ için

$$0\leq\frac{x}{k}-\log\left(1+\frac{x}{k}\right)=\frac{x}{k}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\left(\frac{x}{k}\right)^{j}\leq\frac{x^2}{2k^2}$$

ve $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ serisi yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{k}-\log(x+k)+\log k\right]$$

serisi yakınsaktır. Bu nedenle (3.18) eşitliğinin her iki tarafının $n\to\infty$ için limitini alırsak

$$L(x)=-\gamma x+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{k}-\log\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]$$

elde edilir. İspatı bitirmek için geriye bulduğumuz $L(x)$ fonksiyonunun (i), (ii) ve (iii) şartlarını sağladığını göstermek kalıyor. (i) şartı (3.16)'den hemen görülür. (3.16) ve (3.12)'den dolayı da

$$\begin{aligned}L(x+1)-L(x)&=\sum_{k=1}^{n}\left[\log(x+k)-\log(x+k+1)+\log(k+1)-\log k\right]+r_n(x+1)-r_n(x)\\&=\log(x+1)-\log(x+n+1)+\log(n+1)+r_n(x+1)-r_n(x)\\&=\log(x+1)-\log\left(1+\frac{x}{n+1}\right)+r_n(x+1)-r_n(x)\end{aligned}$$

Burada $n\to\infty$ alırsak (ii) elde ederiz. (3.14), (ii)'nin bir sonucudur ve (3.15), (3.16)'e denktir. Böylece (iii), (3.14) ve (3.15)'ten hemen elde edilir. Γ fonksiyonunun teoremdeki üç şartı sağladığı hemen gösterilebilir. Bu nedenle elde ettiğimiz $L(x)$ fonksiyonu $\Gamma(x+1)$ fonksiyonudur.

Uyarı 3.6 [21, s:154]. Eğer $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu $\forall x\in(0,\infty)$ için

$$g(x+1)=x.g(x) \quad \text{ve} \quad g(1)=1 \tag{3.19}$$

fonksiyonel denkleminin bir çözümü ise $x\in(0,\infty)$ için, $\varphi(x)=\log(g(x))$ şekilde tanımlanan $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\varphi(x+1)=\log x+\varphi(x)\ ,\ x\in(0,\infty)\ ,\quad \varphi(1)=0 \tag{3.20}$$

fonksiyonel denkleminin bir çözümüdür. (3.20)'den tümevarım ile $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\varphi(n+1+x)=\varphi(x)+\log\left[x.(x+1).....(x+n)\right], x\in(0,\infty) \tag{3.21}$$

elde ederiz.

Uyarı 3.7 [21, s:154]. $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonunun (a,∞) aralığı üzerinde geometrik konveks olması için gerek ve yeter şart $x\in\mathbb{R}$ için

$$\phi(x)=\log\left(g\left(e^{x}\right)\right)$$

şeklinde tanımlanan $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(\log a, \infty)$ aralığında konveks olmasıdır.

Teorem 3.8 [21, s:157]. $g:(0,\infty) \to (0,\infty)$, (3.19) fonksiyonel denklemini sağlayan bir $a \geq 0$ için (a,∞)'da geometrik konveks bir fonksiyon olsun. O zaman $g \equiv \Gamma$ dir.

İspat. Sırasıyla Uyarı 3.6'de ve 3.7'de olduğu gibi $\varphi = \log(g(x))$ ve $\phi = \log(g(e^x))$ alalım. Uyarı 3.7'ye göre ϕ fonksiyonu $(\log a, \infty)$ 'da konvekstir. Keyfi $n \in \mathbb{N}$ $(n > a)$ ve $x \in (0,1)$ alalım ve

$$x_1 = \log n \ , \ x_2 = \log(n+1) \ , \ x_3 = \log(n+1+x) \ \text{ ve } \ x_4 = \log(n+2)$$

olsun. Böylece $\log a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ bulabiliriz. ϕ 'nin $(\log a, \infty)$ aralığında konveksliğinden

$$\frac{\phi(x_2)-\phi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\phi(x_3)-\phi(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{\phi(x_4)-\phi(x_2)}{x_4 - x_2}$$

sonucunu buluruz. $\varphi(n) = \log\left[(n-1)!\right]$ olduğundan Önerme 3.2'den bu eşitsizlik

$$\frac{\log n}{x_2 - x_1} \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \log n!}{x_3 - x_2} \leq \frac{\log(n+1)}{x_4 - x_2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerin her bir teriminden $\dfrac{\log n}{x_2 - x_1}$ çıkarıp $(x_3 - x_2) > 0$ ile çarparsak

$$0 \leq \varphi(n+1+x) - \log n! - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\log n \leq \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2}\log(n+1) - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\log n$$

elde ederiz.

$\Theta_n := \dfrac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2}\log(n+1) - \dfrac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\log n$ diyelim. (3.21)'ü ve x_i 'nin açık bir ifadesini kullanırsak

$$0 \leq \varphi(x) - \log\left[\frac{n!}{x(x+1).....(x+n)} . n^{\frac{\log(n+1+x)-\log(n+1)}{\log(n+1)-\log n}}\right] \leq \Theta_n \tag{3.22}$$

buluruz. $\lim\limits_{n \to \infty} \Theta_n = 0$ olduğunu göstereceğiz. $x_4 - x_2 > x_3 - x_2$ eşitsizliğinden

$$0 \leq \Theta_n < \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_2}.\log(n+1) - \frac{x_4 - x_2}{x_2 - x_1}.\log n$$

$$= \log(n+1) - \delta(n).\log n = \log\left[\frac{n}{n^{\delta(n)}} + \frac{1}{n^{\delta(n)}}\right], \quad \delta(n) = \frac{x_4 - x_2}{x_2 - x_1}$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \delta(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+2) - \log(n+1)}{\log(n+1) - \log n} = 1$$

elde ederiz. Şimdi Cauchy ortalama değer teoreminden $\delta(n) > \frac{n}{n+1}$ dir ve

$$x_4 - x_2 = \log\frac{n+2}{n+1} < \log\frac{n+1}{n} = x_2 - x_1$$

dir. Yani $1 > \delta(n)$ dir. Bundan dolayı

$$1 < \frac{n}{n^{\delta(n)}} < \frac{n}{n^{n/(n+1)}} = n^{1/(n+1)} \to 1 \;, \quad n \to \infty$$

dir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \log\left[\frac{n}{n^{\delta(n)}} + \frac{1}{n^{\delta(n)}}\right] = \log\left[\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{\delta(n)}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\delta(n)}}\right] = \log(1+0) = 0$$

dir. Bunun anlamı $\lim_{n\to\infty} \Theta_n = 0$ dir. Bu nedenle

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \log\left[\frac{n!}{x(x+1).....(x+n)} n^{\frac{\log(n+1+x)-\log(n+1)}{\log(n+1)-\log n}}\right]$$

dir. Böylece $\varphi(x)$, $\forall x \in (0,1)$ için tek olarak tanımlıdır, ayrıca $\varphi(1) = 0$ dır. $g(x)$ 'in (3.19)'deki fonksiyonel denklemi dikkate alınırsa φ, $(0,\infty)$ aralığında (3.20)'i sağlayan tek fonksiyondur. Γ fonksiyonu da (3.19)'i sağlayan geometrik konveks bir fonksiyon olduğundan $\varphi(x) = \Gamma(x)$ dir.

Teorem 3.9 [21, s:157]. $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$, (3.19) denkleminin bir çözümü ise ve g , bazı $a\geq 0$ için (a,∞) aralığı üzerinde logaritmik konveks ise $g\equiv\Gamma$ dır.

Uyarı 3.10 [21, s:158]. $g:I\to(0,\infty)$ geometrik Jensen konveks olması için gerek ve yeter şart $\log\left(g\left(e^{x}\right)\right)$ fonksiyonunun $\log(I)$ aralığı üzerinde Jensen konveks olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca sürekli ve geometrik Jensen konveks her fonksiyonun geometrik konveks olduğu iyi biliniyor.

Sonuç 3.11 [21, s:158]. Farzedelim ki $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ bir noktanın bir komşuluğu üzerinde üstten sınırlı ve bir $a\geq 0$ için (a,∞) aralığı üzerinde geometrik Jensen konveks olsun. Eğer g , (3.19) ‘ı sağlarsa $g\equiv\Gamma$ dir.

İspat. Varsayım ile $x_0\in(0,\infty)$, $r>0$ ve $M>0$ vardır öyle ki
$\forall x\in(x_0-r,x_0+r)$ için $g(x)\leq M$ dir.

$(n+x_0-r,n+x_0+r)\subset(a,\infty)$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{N}$ seçelim. Bunun bir sonucu olarak (3.19) eşitliğinden

$$g(x+n)=x.(x+1).....(x+n-1).g(x)\leq(x_0+r+n)^{n}M\ , \qquad x\in(x_0-r,x_0+r)$$

elde ederiz. Bu nedenle g , $U:=(x_0+n-r,x_0+n+r)\subseteq(a,\infty)$ üzerinde sınırlıdır. Ardından $\log\left(g\left(e^{x}\right)\right)$ fonksiyonu $\log(U)\subset(\log a,\infty)$ aralığı üzerinde sınırlıdır. Bernstein-Doetsch teoremi, $\log\left(g\left(e^{x}\right)\right)$ ’nin $(\log a,\infty)$ üzerinde sürekli olduğu anlamına gelir. Uyarı 3.10, $\log\left(g\left(e^{x}\right)\right)$ ‘nin $(\log a,\infty)$ aralığı üzerinde konveks olmasını sağlar. Sonuç olarak, g , (a,∞) üzerinde geometrik konvekstir.

Sonuç 3.12 [21, s:159]. Farzedelim ki $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu bir $a\geq 0$ için (a,∞) aralığı üzerinde geometrik Jensen konvekstir ve boş olmayan açık bir $I\subset(0,\infty)$ aralığı vardır öyle ki $I\subset(0,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyondur. g , (3.19)’i sağlarsa $g\equiv\Gamma$ ‘dir.

Uyarı 3.13 [31, s:1226]. $I \subset (0,\infty)$ olmak üzere, $f : I \to (0,\infty)$ iki kez türevlenebilir olsun. Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

(i) f fonksiyonu geometrik konvekstir, yani

$$f\left(x^t y^{1-t}\right) \le f(x)^t \, f(y)^{1-t} \quad , \quad x, y \in I, \qquad t \in (0,1)$$

(ii) $\log\left(f\left(e^x\right)\right)$ fonksiyonu $J := \log(I)$ aralığında konvekstir;

(iii) $f : I \to (0,\infty)$ fonksiyonu

$$f(x) f''(x) x + f(x) f'(x) \ge \left[f'(x)\right]^2 x, \quad x \in I$$

eşitsizliğini sağlar.

4. GAMMA FONKSİYONU İLE İLGİLİ BAZI EŞİTSİZLİKLER

Gamma fonksiyonu ile ilgili eşitsizliklerle son yıllarda sık bir şekilde karşılaşmaktayız. Gamma fonksiyonu için farklı yapılarda birçok yeni alt ve üst sınırlar verilmiştir. Bu bölümde gamma fonksiyonu için digamma fonksiyonu cinsinden son yıllarda elde edilmiş alt ve üst sınırları ele alacağız.

Teorem 4.1 [4, s:779]. $c \geq 0$ ve $x > 0$ için

$$G_c(x) = \log\Gamma(x) - x\log x + x - \frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\psi(x+c)$$

tanımlayalım. O zaman G_a'nın $(0,\infty)$ üzerinde tam monoton olması için gerek ve yeter şart $a \geq 1/3$ olmasıdır. Yine $-G_b(x)$'in $(0,\infty)$ üzerinde tam monoton olması için gerek ve yeter şart $b = 0$ olmasıdır.

İspat: $x > 0$ ve $c \geq 0$ olsun. Türev alınırsa

$$G_c'(x) = \psi(x) - \log x + \frac{1}{2}\psi'(x+c)$$

ve

$$G_c''(x) = \psi(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\psi''(x+c)$$

bulunur. Teorem 2.23 (ii)'deki Gauss formülünün iki tarafının n. türevini alırsak

$$\psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\int_0^\infty e^{-xt}\frac{t^n}{1-e^{-t}}dt\,, \quad x > 0\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

elde ederiz. Bu bağıntıyı ve

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt}dt$$

bağıntısını kullanırsak (bkz [1, s:260])

$$G_c''(x) = \int_0^\infty \frac{te^{-xt}}{1-e^{-t}}dt - \int_0^\infty e^{-xt}dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-(x+c)t}t^2}{1-e^{-t}}dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{t}{1-e^{-t}} - 1 - \frac{1}{2}\frac{e^{-ct}t^2}{1-e^{-t}}\right]e^{-xt}dt$$

$$G_c''(x)=\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\Delta_c(t)}{1-e^{-t}}dt \tag{4.1}$$

dır ve burada

$$\Delta_c(t)=-1+t+e^{-t}-\frac{t^2}{2}e^{-ct}$$

dir. [1, s: 257,259,260] da aşağıdaki asimptotik açılımlar verilmiştir:

$$\log\Gamma(x)\sim\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\frac{1}{2}\log(2\pi)+\frac{1}{12x}+\ldots$$

$$\psi(x)\sim\log x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12x^2}+\ldots$$

$$\psi^n(x)\sim(-1)^{n-1}\left[\frac{(n-1)!}{x^n}+\frac{n!}{2x^{n+1}}+\ldots\right]$$

Bu asimptotik formülleri kullanırsak

$$\lim_{x\to\infty}G_c(x)=\lim_{x\to\infty}G_c'(x)=0 \tag{4.2}$$

limit bağıntısını buluruz.

$a\geq 1/3$ olsun. G_a 'nın tam monoton olduğunu gösterelim. $a\to\Delta_a(t)$ fonksiyonu monoton arttığından $t>0$ için

$$\Delta_a(t)>\Delta_{1/3}(t)=-1+t+e^{-t}-\frac{t^2}{2}e^{-t/3}$$

$$=e^{-t}\left(1-e^t+te^t-\frac{t^2}{2}e^{2t/3}\right)=e^{-t}\sum_{k=4}^{\infty}\frac{\delta_k}{k!}\left(\frac{t}{3}\right)^k$$

sağlanır. Burada

$$\delta_k=(k-1)\left(3^k-9k2^{k-3}\right)$$

dir. $k\geq 4$ için $\delta_k>0$ olduğu için Δ_a, $(0,\infty)$ üzerinde pozitiftir. (4.1)'i uygularsak G_a'' nin tam monoton olduğunu gösterir. Ayrıca G_a' monoton arttığından (4.2)'yi kullanırsak $G_a'(x)<\lim_{n\to\infty}G_a'(x)=0$ buluruz. Bu G_a nın monoton azaldığını gösterir. Böylece tekrar (4.2)'yi kullanırsak $G(x)>\lim_{x\to\infty}G(x)=0$ buluruz. Bu da G_a 'nın tam monotonluğunu ortaya ispatlar. Tersine, eğer G_a, $(0,\infty)$ üzerinde tam monoton ise $x>0$ için

$$0 < xG_a(x) = \frac{1}{12} + xH(x) - \frac{x}{2}\left[\log x - \psi(x+a)\right] \tag{4.3}$$

bulunur. Burada

$$H(x) = \log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{12x}$$

dir. Yukarıdaki asimpotik formüllerden dolayı

$$\lim_{x\to\infty} x.H(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to\infty} x\left[\log x - \psi(x)\right] = \frac{1}{2}$$

olduğu için (4.3) eşitsizliğinin her iki tarafının $x\to\infty$ için limitini alırsak

$$0 \le \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\left(a - \frac{1}{2}\right) \quad \text{veya} \quad a \ge 1/3$$

sonucunu çıkarırız. $t>0$ için

$$\Delta_0(t) = -1 + t + e^{-t} - \frac{t^2}{2} = -\frac{e^{-t}}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n-1)(n-2)}{n!}t^n < 0$$

dir. Yani (4.1)'den $-G_0''$, $(0,\infty)$ üzerinde tam monotondur. (4.2) bağıntısı yardımıyla

$$-G_0'(x) < 0 \quad \text{ve} \quad -G_0(x) > 0$$

olduğu görülür. Yani $-G_0$, $(0,\infty)$ üzerinde tam monotondur.

$b>0$ olmak üzere $-G_b$'nin tam monoton olduğunu varsayalım. Buradan G_b, $(0,\infty)$ üzerinde negatiftir. Fakat bu $\lim\limits_{x\to 0} G_b(x) = \infty$ olmasıyla çelişmektedir. O halde $b=0$ olmak zorundadır.

Teorem 4.2 [4, Corollary]. $\alpha,\beta \ge 0$ reel sayıları olmak üzere her $x>0$ için

$$\sqrt{2\pi}x^x.\exp\left(-x - \frac{1}{2}\psi(x+a)\right) < \Gamma(x) < \sqrt{2\pi}x^x\exp\left(-x - \frac{1}{2}\psi(x+\beta)\right) \tag{4.4}$$

dir. Burada $\alpha = 1/3$ ve $\beta = 0$ en iyi değerlerdir.

İspat: Teorem 4.1'den $x>0$ için

$$G_0(x) < 0 < G_{1/3}(x)$$

elde ederiz. Bu da $\alpha = 1/3$ ve $\beta = 0$ için (4.4) ile eşdeğerdir. (4.4)'ün sol tarafı geçerlidir. Buradan

$$0 < x.G_\alpha(x) \qquad (x > 0)$$

buluruz. Bu da teoremin ispatında gösterildiği gibi $\alpha \geq 1/3$ olmasına yol açar. Ve bir β pozitif sayısının var olduğunu varsayalım öyle ki (4.4)'ün sağ tarafı $\forall x > 0$ için geçerlidir. Buradan

$$\lim_{x\to 0} \Gamma(x) \leq \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\psi(\beta)\right)$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı en uygun sabitler $\alpha = 1/3$ ve $\beta = 0$ ile (4.4)'te verilir.

Aşağıdaki teoremde yazar (4.4) eşitsizliğinin üst sınırını geliştirmiş bulunmaktadır.

Teorem 4.3 [8, s:867]. $x > 0$ olsun. O zaman

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\psi\left(\delta_*(x)\right)\right\} < \frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi}} < \exp\left\{-\frac{1}{2}\psi\left(\delta^*(x)\right)\right\} \tag{4.5}$$

dır. Burada $\delta_*(x) = x + \frac{1}{3}$ ve $\delta^*(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)\log(1+1/x) - 1}$ dır.

İspat. [44, sf.47, denklem (42)] den dolayı

$$\int_0^x \log\Gamma(u)\,du = \frac{x(1-x)}{2} + \frac{x}{2}\log(2\pi) - (1-x)\log\Gamma(x) - \log G(x) \quad , \tag{4.6}$$

dır. Burada G,

$$G(z+1) = \Gamma(z)G(z) \;\; \text{ve} \;\; G(1) = 1 \tag{4.7}$$

bağıntısını sağlayan Barnes' G-fonksiyonudur. Lütfen [54, sf.38-61]'e detayı için bakınız.

(4.6) ve (4.7) özdeşliklerini kullanırsak

$$\int_x^{x+1} \log\Gamma(u)\,du = x\log x - x + \frac{1}{2}\log(2\pi) \tag{4.8}$$

bulunur. (2.5) bağıntısının her iki tarafının logaritmasını alıp x yerine t alırsak

$$\log\Gamma(t+1) = -\gamma t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{t}{n} - \log(t+n) + \log n\right] \tag{4.9}$$

elde ederiz. Bu eşitliğin her iki tarafının $(x-1,x)$ aralığı üzerinde integralini alırsak

$$\int_{x}^{x+1}\log\Gamma(u)\,du = -\frac{\gamma(2x-1)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2x-1}{2k} - (x+k)\log(x+k) + (x-1+k)\log(x-1+k) + \log k + 1\right]$$

buluruz. Taylor teoremine göre,

$$(x+k)\log(x+k) - (x+k-1)\log(x+k-1) = \log(x+k-1) + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x+k-1+\theta(k)} \tag{4.10}$$

sağlanacak şekilde x'e bağlı bir $\theta(k)$ vardır ve $0<\theta(k)<1$ dir. (4.9)'dan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{x}^{x+1}\log\Gamma(u)\,du = -\gamma(x-1) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x-1}{k} - \log(x-1+k) + \log k\right] + \frac{1}{2}\left[-\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k-1+\theta(k)}\right)\right] \tag{4.11}$$

(4.8), (4.9) ve (4.10) bağıntılarını kullanırsak,

$$x\log x - x + \frac{1}{2}\log(2\pi) - \log\Gamma(x) = \frac{1}{2}\left[-\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x-1+\theta(k)}\right)\right] \tag{4.12}$$

olur. (4.10)'dan dolayı bu bağıntıyı

$$\theta(k) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+k)\log(x+k) - (x+k)\log(x+k-1) - 1} - k - x + 1 \tag{4.13}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece θ'nın $[1,\infty]$ da kesin artan olduğunu ispatlamak amacıyla, sadece

$$f(u) := \frac{1}{2}\frac{1}{(u+1)\log(u+1) - (u+1)\log u - 1} - u$$

fonksiyonunun $(0,\infty)$ üzerinde kesin artan olduğunu göstermek kafidir. Burada $u = 1/t$ alırsak,

$$f(1/t)=\frac{1}{2}\frac{t}{(t+1)\log(+1)-t}-\frac{1}{t}$$

elde ederiz. Türevini alırsak

$$h(t)=t^2\log(t+1)-t^3+2\left((t+1)\log(t+1)-t\right)^2$$

olmak üzere

$$-\frac{1}{t^2}f'(1/t)=\frac{h(t)}{2t^2\left((t+1)\log(t+1)-t\right)^2} \tag{4.14}$$

elde edilir. Üç defa türev aldığımızda,

$$(1+t)h'''(t)=8\log(1+t)-\frac{6t^3+12t^2+8t}{(t+1)^2}=:g(t)$$

elde ederiz. Basit bir hesapla

$$g'(t)=-\frac{6t^3+10t^2}{(t+1)^3}<0$$

olduğunu görürüz. $g(0)=0$ ve $g'(0)=0$ olduğundan $g(t)<0$ dır. Bu nedenle $t>0$ için $h'''(t)<0$ dır. $h(0)=h'(0)=h''(0)=0$ olduğundan $t>0$ için $h(t)<0$ dır. Bu nedenle (4.14)'dan θ'nın $[1,\infty)$ üzerinde kesin artan olduğu sonucunu çıkarırız. L'Hospital kuralını uygulayarak

$$\theta(\infty):=\lim_{k\to\infty}\theta(k)=\lim_{u\to\infty}f(u)=\lim_{t\to 0}f(1/t)=\frac{1}{3} \tag{4.15}$$

olduğunu kolayca hesaplayabiliriz. Ayrıca, (4.13)'den

$$\theta(1)=\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)\log(x+1/x)-1}-x \tag{4.16}$$

olduğu açıktır. (4.12)'yi kullanarak, θ'nın kesin artan oluşunun doğrudan bir sonucu olarak

$$-\frac{1}{2}\left[-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x-1+\theta(\infty)}\right)\right]<\log\Gamma(x)-x\log x+x$$

$$-\frac{1}{2}\log(2\pi)<-\frac{1}{2}\left[-\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x-1+\theta(1)}\right)\right]$$

elde ederiz. (4.10)'ya göre bu

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\psi\left(x+\theta(\infty)\right)\right\}<\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi}}<\exp\left\{-\frac{1}{2}\psi\left(x+\theta(1)\right)\right\}$$

ile denktir. (4.15) ve (4.16) özdeşliklerini hesaba katarsak, ispatı tamamlanır.

Bir sonraki teoremimiz, gamma fonksiyonu için yeni sınırlar sağlar.

Teorem 4.4 [8, s:869]. $x \geq 1$ olsun. O zaman

$$\sqrt{2\pi}x^x e^{-x}\left(x^2+\frac{x}{3}+a_*\right)^{\frac{1}{4}} \leq \Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi}x^x e^{-x}\left(x^2+\frac{x}{3}+a^*\right)^{\frac{1}{4}} \tag{4.17}$$

dır. Burada $a_* = \dfrac{e^4}{4\pi^2}-\dfrac{4}{3} = 0.049653963176...$ ve $a^* = \dfrac{1}{18} = 0.05555...$ en iyi değerlerdir.

İspat. (4.17) eşitsizliği

$$a_* \leq \left(\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}x^x e^{-x}}\right)^4 - x^2 - \frac{x}{3} < a^* \tag{4.18}$$

biçiminde yazılabilir. (4.17)'yi ispatlamak amacıyla $x>0$ için

$$\phi(x) = \left(\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}x^x e^{-x}}\right)^4 - x^2 - \frac{x}{3}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Türev alarak,

$$\phi'(x) = \frac{\left(\Gamma(x+1)\right)^4\left(\frac{1}{x}-\left(\log x-\psi(x)\right)\right)}{\pi^2 x^{4x} e^{-4x}} - 2x - \frac{1}{3}$$

elde ederiz.

$$\sqrt{\pi}x^x e^{-x}\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{6}} < \Gamma(x+1) < \sqrt{\pi}x^x e^{-x}\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{4.19}$$

bkz [2] ve

$$\log x-\psi(x) < \frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}-\frac{1}{252x^6}+\frac{1}{240x^8}-\frac{1}{132x^{10}}+\frac{691}{32760x^{12}}-\frac{1}{12x^{14}}$$

bkz [3, Teorem 8] eşitsizliklerini kullanarak

$$\phi'(x) > \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{100}\right)^{\frac{2}{3}} p_1(x) - p_2(x)\left(2x + \frac{1}{3}\right)$$

buluruz. Burada

$p_1(x) = -60060 + 15202x^2 - 5460x^4 + 3003x^6 - 2860x^8 + 6006x^{10} - 60060x^{12} + 360360x^{13}$
ve

$p_2(x) = 720720x^{14}$

dir. ϕ'nin $x \geq 1$ için kesin artanlığını göstermek amacıyla son iki eşitsizliği kullanırsak

$$\left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{100}\right)^2 \left(p_1(x)\right)^3 - \left(p_2(x)\right)^3 \left(2x + \frac{1}{3}\right)^3 > 0 \tag{4.20}$$

olduğunu görmek yeterlidir. Eğer eşitsizliğin sol tarafındaki polinomu $x = 1$'de Taylor serisine açarsak

$$\left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{100}\right)^2 \left(p_1(x)\right)^3 - \left(p_2(x)\right)^3 \left(2x + \frac{1}{3}\right)^3$$

$$> 1221 + 4595(x-1) + 8755(x-1)^2 + 1115(x-1)^3 + 1061(x-1)^4$$

$$+8004(x-1)^5 + 4961(x-1)^6 + 2589(x-1)^7 + 1158(x-1)^8$$

$$+4505(x-1)^9 + \ldots + 8135(x-1)^{24} + 6374(x-1)^{25} + 4561(x-1)^{26}$$

$$+2977(x-1)^{27} + \ldots + 2416(x-1)^{38} + 3636(x-1)^{39} + 4445(x-1)^{40}$$

$$+4242(x-1)^{41} + 2963(x-1)^{42} + 1347(x-1)^{43} + 2994(x-1)^{44}$$

elde ederiz. Tüm katsayılar pozitif olduğu için bu eşitsizliğin sağ tarafı pozitiftir. Bu nedenle, $x \geq 1$ için $\phi'(x) > 0$ buluruz. ϕ, $[1, \infty)$ üzerinde monoton arttığından

$$\phi(1) = \frac{e^4}{4\pi^2} - \frac{4}{3} \leq \phi(x) < \lim_{x\to\infty} \phi(x), \quad x \geq 1$$

sonucunu çıkarırız. Geriye sadece $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 1/18$ olduğunu göstermek kalıyor. (4.19) eşitsizliğini kullanırsak

$$\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{100}\right)^{\frac{2}{3}}-2x-\frac{1}{3}<\phi(x)<\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}\right)^{\frac{2}{3}}-2x-\frac{1}{3}$$

buluruz. Bu eşitsizliğin sol ve sağ tarafının $x\to\infty$ için limitinin $1/18$ olduğunu görmek zor değildir. Bu da $\lim\limits_{x\to\infty}\phi(x)=1/18$ demektir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.5 [8, s:871]. $\forall x>0$ için

$$\alpha_*.x^x e^{-x}\left(x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{18}\right)^{\frac{1}{4}}<\Gamma(x+1)<\alpha^*.x^x e^{-x}\left(x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{18}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{4.21}$$

dır. Burada $\alpha_*=\dfrac{\sqrt[4]{18}}{\sqrt{2\pi}}=0.821728...$ ve $\alpha^*=\sqrt{2\pi}=2.50663...$ sabitleri en iyi değerlerdir.

İspat. $x\geq 0$ için

$$\Theta(x)=\log\left(\Gamma(x+1)\right)-x\log x+x-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{4}\log\left(x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{18}\right)$$

tanımlayalım. Türevini alırsak

$$\Theta'(x)=\psi(x+1)-\log x-\frac{18x+3}{36x^2+12x+2}$$

ve

$$\Theta''(x)=\psi'(x+1)-\frac{1}{x}+\frac{162x^2+54x}{\left(18x^2+6x+1\right)^2}$$

buluruz. İyi bilinen $\psi'(x+1)-\psi'(x)=-1/x^2$ eşitliğini kullanarak

$$\Theta''(x+1)-\Theta''(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

elde edebiliriz. Burada

$$p(x)=625+9816x+42516x^2+63936x^3+38556x^4+7776x^5>0$$

ve

$$q(x)=x(1+x)^2\left(1+6x+18x^2\right)^2\left(25+42x+18x^2\right)^2>0$$

dir. Bu, $x \geq 0$ için $\Theta''(x+1)-\Theta''(x)>0$ olduğunu gösterir. Biz matematiksel tümevarımla $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\Theta''(x)<\Theta''(x+n)$ ve $\Theta''(x)<\lim\limits_{n\to\infty}\Theta''(x+n)=0$ elde ederiz. Yani Θ', $(0,\infty)$ üzerinde kesin azalandır. Benzer şekilde $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\log x-\psi(x)\right]=0$ olduğundan $\Theta'(x)>\Theta(x+n)>\lim\limits_{n\to\infty}\Theta(x+n)$ dır (bkz [3]). Bu da, Θ'nin kesinlikle monoton artan olduğunu ortaya koyar. Klasik Stirling formülünü uygulayarak $\lim\limits_{x\to\infty}\Theta(x)=0$ buluruz. Bu nedenle (4.21)'e denk olan

$$\frac{1}{4}\log 18-\frac{1}{2}\log 2\pi=\Theta(0)\leq\Theta(x)<\lim_{x\to\infty}\Theta(x)=0$$

sonucunu çıkarırız.

Aşağıdaki sonuç Θ'in kesin artan oluşunun ve $\Theta(1)=1-\frac{1}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{4}\log\left(\frac{25}{18}\right)$ 'ın doğal bir sonucudur.

Sonuç 4.6 [8, s:872]. Tüm n doğal sayıları için

$$\beta_*.n^n e^{-n}\left(n^2+\frac{n}{3}+\frac{1}{18}\right)^{\frac{1}{4}}<n!\leq\beta^*.n^n e^{-n}\left(n^2+\frac{n}{3}+\frac{1}{18}\right)^{\frac{1}{4}}$$

dır. Burada $\beta_*=\frac{e}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{18}{25}\right)^{\frac{1}{4}}=0.998936...$ ve $\beta^*=\sqrt{2\pi}=2.50663...$ skalerleri en iyi değerlerdir.

Aşağıdaki teorem digamma fonksiyonu cinsinden gamma fonksiyonu için zarif alt ve üst sınırlar verir.

Teorem 4.7 [8, s:872]. $x>0$ için

$$\exp\left[x\psi\left(\frac{x}{\log(x+1)}\right)\right]\leq\Gamma(x+1)\leq\exp\left[x\psi\left(\frac{x}{2}+1\right)\right] \qquad \text{dir.}$$

İspat. Ortalama Değer Teoremini kullanırsak;

$$\log(x+k)-\log k=\frac{x}{k+\varphi(k)},\ 0\leq\varphi(k)<x \tag{4.22}$$

buluruz. Bu nedenle (4.9), aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\log\Gamma(x+1) = x\left[-\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\varphi(k)}\right)\right] \tag{4.23}$$

(4.22)'den

$$\varphi(k) = \frac{x}{\log(1+x/k)} - k$$

elde ederiz. Türevini alalım:

$$\varphi'(k) = \frac{\dfrac{x^2}{k^2+kx} - \log^2(1+x/k)}{\log(1+x/k)}$$

Buna göre φ'nin monoton arttığını göstermek için

$$\sqrt{k(k+x)} < \frac{(k+x)-k}{\log(k+x)-\log k}$$

olduğunu göstermek kafidir. Bu ise Geometrik-logaritmik ortalama eşitsizliğinden açıktır $(G \le L)$. Buradan φ, $[1,\infty)$ üzerinde kesin monoton artan bir fonksiyondur.

$$\varphi(\infty) := \lim_{k\to\infty}\varphi(k) = \frac{x}{2} \quad \text{ve} \quad \varphi(1) = \frac{x}{\log(x+1)} - 1$$

olduğu basit bir hesaplama ile gösterilebilir. (4.23)'den $x > 0$ için

$$x\left[-\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\varphi(1)}\right)\right] < \log\Gamma(x+1) < x\left[-\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\varphi(\infty)}\right)\right]$$

sonucunu buluruz. Bu da (2.7)'den dolayı

$$x\psi(\varphi(1)+1) < \log\Gamma(x+1) < x\psi(\varphi(\infty)+1)$$

ifadesine denktir. Böylece Teorem ispat tamamlanır.

[3, Teorem 8]'den dolayı aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}\exp\left(-x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{1}{1680x^7}\right) < \Gamma(x) \\ &\quad < \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}\exp\left(-x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5}\right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Teorem 4.8 [30, Teorem 1.1]. $x \geq 2$ için

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\psi\left(x+1/3\right)+\frac{1}{72x^2}\right) < \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}x^x e^{-x}} < \exp\left(-\frac{1}{2}\psi\left(x+1/3\right)+\frac{1}{72x^2}+\frac{11}{3240x^3}\right)$$

dir.

İspat. (4.24) eşitsizliği göz önüne alındığında teoremi ispatlamak için

$$\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}\exp\left(-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\frac{1}{1680x^7}\right) > \sqrt{2\pi}x^x\exp\left(-x-\frac{1}{2}\psi\left(x+1/3\right)+\frac{1}{72x^2}\right)$$

ve

$$\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}\exp\left(-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}\right) < \sqrt{2\pi}x^x\exp\left(-x-\frac{1}{2}\psi\left(x+1/3\right)+\frac{1}{72x^2}+\frac{11}{3240x^3}\right)$$

eşitsizliklerini ispatlamak kafidir. Ya da her iki tarafın logaritmalarını alırsak

$$\psi\left(x+1/3\right) > \log x-\frac{1}{6x}+\frac{1}{32x^2}-\frac{1}{180x^3}-\frac{1}{630x^5}+\frac{1}{840x^7} \tag{4.25}$$

ve

$$\psi\left(x+1/3\right) < \log x-\frac{1}{6x}+\frac{1}{36x^2}+\frac{1}{81x^3}-\frac{1}{630x^5} \tag{4.26}$$

Bu eşitsizlikleri göstermek için (4.24) eşitsizliğini kullanalım. Bu durumda teoremi kanıtlamak için

$$\begin{aligned} u(x) &:= \log\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2\left(x+1/3\right)}-\left(\frac{1}{12\left(x+1/3\right)^2}-\frac{1}{120\left(x+1/3\right)^4}+\frac{1}{252\left(x+1/3\right)^6}\right) \\ &\quad -\left(\log x-\frac{1}{6x}+\frac{1}{36x^2}+\frac{1}{180x^3}-\frac{1}{630x^5}+\frac{1}{840x^7}\right) > 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} v(x) &:= \log\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2\left(x+1/3\right)}-\left(\frac{1}{12\left(x+1/3\right)^2}-\frac{1}{120\left(x+1/3\right)^4}+\frac{1}{252\left(x+1/3\right)^6}-\frac{1}{240\left(x+1/3\right)^8}\right) \\ &\quad -\left(\log x-\frac{1}{6x}+\frac{1}{36x^2}+\frac{1}{81x^3}-\frac{1}{630x^5}\right) < 0 \end{aligned}$$

olduğunu göstermek kafidir. Türev alırsak

$$\begin{aligned} P(x) &= 112266x^{11}+173502x^{10}-14094x^9-158058x^8+1323x^7-60921x^6 \\ &\quad -82985x^5-55797x^4-19425x^3-3949x^2-441x-21 \end{aligned}$$

ve

$$Q(x)=597051x^{10}+2261358x^{9}+3357774x^{8}+1581687x^{7}-1253313x^{6}$$
$$-276885x^{5}-127890x^{4}-32025x^{3}-4790x^{2}-405x-15$$

olmak üzere

$$u'(x)=\frac{-P(x)}{2520x^{8}(3x+1)^{7}} \quad \text{ve} \quad v'(x)=\frac{-Q(x)}{1890x^{6}(3x+1)^{9}}$$

olduğunu görürüz. Mathematica programı yardımıyla $P(x+2)$ ve $Q(x+2)$ polinomlarını hesapladığımızda her ikisinin de $[0,\infty]$ üzerinde pozitif olduğunu görürüz. Bu nedenle $x\geq 2$ için $u'(x)<0$ ve $v'(x)>0$ dır. Buradan u monoton azalan, v de monoton artan fonksiyonlardır. Yani,

$$u(x)<\lim_{x\to\infty}u(x)=0 \quad \text{ve} \quad v(x)>\lim_{x\to\infty}v(x)=0$$

dır. Bu da ispatı bitirir.

KAYNAKLAR

1. Abramowitz M., Stegun I.A.(Eds.), ‘’Hanbook of Mathematical Functions with Formulas and Mathematical Tables’’, *Dover,* New York, 1965.
2. Alzer H., ‘’On Ramanujan’s double inequality for the gamma function’’, *Bull. Lond. Math. Soc*. 35, 601-607, 2003.
3. Alzer H., ‘’On some inequalities for the gamma and psi functions’’, *Math. Comput.* 66(217), 373-389, 1997.
4. Alzer H., Batır N., ‘’Monotonicity properties of the gamma function’’, *Applied Mathematics Letters,* 20, 778-781, 2007.
5. Alzer H., Matkowski J., ‘’A convexity property and a new characterization of Euler’s gamma function’’, *Arch. Math.* 100 (2013), 131-137.
6. Andrews G.E., Askey R., Roy R., ‘’Special Functions’’, *Cambridge University Press*, 1999.
7. Artin E., ‘’Einführung in die Theorie der Gamma funktion’’, *Hamburger Math*., Einzelschr., Heft 1, B.G. Teubner, Leipzig\Berlin 1931.
8. Batır N., ‘’Bounds for the gamma function’’, *Results Math*, 72, 865-874, 2017.
9. Bell W.W., ‘’Special Functions for Scientists and Engineers’’, *D. Van Nostrand Company Ltd*., Reinhold, New York, 1968.
10. Bohr H., Mollerup J., ‘’Laerebog i matematisk Analyse III’’, *Graenseprocesser. Jull. Gjellerup*, Kobenhavn, 1922.
11. Buck R.C., ‘’Advanced Calculus’’, Mc Graw-Hill, Kogakusha Ltd., Third Ed, 1978.
12. Davis J., ‘’Leonard Euler’s Integral: A historical profil of the gamma function’’, *The American Mathematical Monthly*, 66 (10), 849-869, 1959.
13. Duren P., ‘’Invitation to Classical Analysis’’, *Amer. Math. Soc*., 2012
14. Dutkay D., Niculescu E., Constantin P., Popovici F., ‘’A note on Stirling’s formula for the gamma function’’, J. Prime Res.
15. Euler L., ‘’De Progressionibus transcendentibus sen quaroum termini generalis algebrare dari nequent’’, . *Petropolitanae,* Comm. Acad. Sci, 36-57, 1730.
16. Farrell O. J., Ross B., ‘’Solved Problems in Analysis, as applied to Gamma, Beta, Legendre and Bessel Functions’’, *Dover Publications*, New York, 1971.
17. Feller W., ‘’A direct proof of Stirling’s formula’’, *Amer. Math. Monthly,* 74, 1223-1225, 1967.
18. Frenzen C. L., ‘’ A new elementary proof of Stirling’s formula, Math. Mag., 68, no.1, 55-58, 1995.
19. Fuss N., ‘’Corvespondance Mathematique et Physique de Quelques Celebres Geometries du XVIII Siecle’’, *Saint-Petersbourg*, 1843.
20. Gronau D., Matkowski J., ‘’Geometrical convexity and generalization of the Bohr-Mollerup theorem on the gamma function’’, *Math. Pannonica 4,* 153-160, 1993.

21. Gronau D., Matkowski J., ‘’Geometrical conveksity and generalizations of the Bohr-Mollerup theorem on the gamma function’’, *Math. Pannonica*, 4/2, 153-160, 1993.
22. Hannah J.P., ‘’Idetities for the gamma and hypergeometric functions: an overviewfrom Euler to the present’’, yüksek lisans tezi, University of the Witwatersrand, Matematik Okulu, Johannesburg, Güney Afrika.
23. Haruki H., ‘’A new characterization of Euler’s gamma function by a functional equation’’, *Aequat. Math.* 31, 173-183, 1986.
24. Jameson G. J. O., ‘’A simple proof of Stirling’s formula for the Gamma function’’, *Math. Gaz*. 99, no.544, 68-74, 2015.
25. Juskevic A. P., Kopelevic L.K., Goldbach C., *Birkhauser Verlag*, Basel etc., 1690-1764, 1994.
26. Juskevic A. P., Winter E., Euler L., Goldbach C., Briefwechsel, Abh. der Deutschen Akad der Wiss zu Berlin, Akademie-Verlag, 1729-1764, 1965.
27. Kuczma M, ‘’ An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy’s Equation and Jensen’s Inequality’’, Prace Nauk. Uniw. Slask. 489, *Polish Scientific Publishers*, Warsaw-Cracow-Katowice, 1985.
28. Laugwitz D., Rodewald B., ‘’A simple characterization of the gamma function’’, *Amer. Math. Monthly*, 94, 534-536, 1987.
29. Legendre A. M., ‘’ Exercises De Calcul Integrals Sur Divers De Transcendantes Et Sur Les Quadratures’’, Vol.1, Nabu Press, 2010.
30. Lou H., ‘’A short proof of Stirling’s formula’’, *Amer. Math. Monthly*, 121, no.2, 154-157, 2014.
31. Mortici C., ‘’Accurate estimates of the gamma function involving the psi function’’, *Numerical Funct. Anal. Optimization*, 32(4), 469-476, 2011.
32. Matkowski J., ‘’Some Characterizations of the Euler Gamma Function’’, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, Volum 45, Number 4, 2015.
33. Mayer A.E., ‘’Konvexe lösungen der funktional gleichung $1/f(x+1)=x.f(x)$ ’’, *Acta Math.*, 70, 57-62, 1939.
34. Merkle M., ‘’Conditions for convexity of a derivative and some’’, *Aequationes Math.* 55, 273-280, 1998.
35. Michel R., ‘’The $(n+1)$ th proof of Stirling’s formula’’, *Amer. Math. Monthly*, 115, no.9, 844-845, 2008.
36. Michel R., ‘’On Stirling’s formula’’, *Amer. Math. Monthly*, 109, no.4, 388-390, 2002.
37. Murty M. R., Kannappan S., ‘’A very simple proof of Stirling’s formula’’, *Math. Student*, 84, no.1-2, 129-133, 2015.
38. Neuschel T., ‘’A new proof of Stirling’s formula’’, *Amer. Math. Monthly*, 121, no.4, 350-352, 2014.
39. Niizeki S., Araki M., ‘’Simple and clear proofs of Stirling’s formula’’, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech*. 41, no.4, 555-558, 2010.

40. Quine M. P., ‘’An elementary proof of Stirling’s formula’’, *Austral. Math. Soc. Gaz.*, 18, no.4, 93-94, 1991.
41. Rudin W., ‘’Principles of Mathematical Analysis’’, (Third Edicion), *Mc Graw-Hill Inc.*, New York, 1985.
42. Siklos S.T.C., ‘’Further Complex Methods’’, *Mathematical Tripos Part* II, Michaelmas term 2007.
43. Srinivasan G. K., ‘’The gamma function: an electric tour’’, *Amer. Math. Monthly*, *114*, April, 297-315, 2007.
44. Srivastava H.M., Choi J., ‘’ Zeta and q-Zeta and Functions and Associated Series and Integrals’’, *Elsevier*, Amsterdam 2012.
45. Temme N. M., ‘’Special Function to the Classical Functions of Mathematical Physics’’, *John Wiley and Sons*, New York, 1996.
46. Rodewald B., Laugwitz D., ‘’A simple characterization of the gamma function’’, *Amer. Math. Monthly*, 94, 534-536, 1987.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad-Soyad : Leyla GÜLSARAN

Doğum Tarihi : 15 / 01 / 1992

Doğum Yeri : ADANA

Medeni Durumu : Evli

İş Deneyimi

Eylül 2016 – Haziran 2017 Değirmenli Şehit Yalçın Aran Ortaokulu
Matematik Öğretmeni

Şubat 2018 – Haziran 2018 Niğde Şehit Fatih Özdemir İmam Hatip Ortaokulu
Matematik Öğretmeni

İletişim Bilgileri

Adres : Şahsüleyman Mah. Sakarya sok. Aydoğanlar apt. no: 2 NİĞDE / MERKEZ

Telefon : 0541 943 50 01

e-mail : leylagulsaran@gmail.com