T.C.

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GALİLE UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ VE FRENET DÜZLEMLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan

Mustafa HAVAN

Tez Danışmanı

Dr. Öğretim Üyesi Esma DEMİR ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek LisansTezi

Haziran 2021

NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GALİLE UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ VE FRENET DÜZLEMLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Mustafa HAVAN

Tez Danışmanı
Dr. Öğretim Üyesi Esma DEMİR ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2021
NEVŞEHİR

Dr. Öğretim Üyesi Esma DEMİR ÇETİN danışmanlığında **Mustafa HAVAN** tarafından hazırlanan "**Galile Uzayında Eğri Çiftleri Ve Frenet Düzlemleri Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

…/…/2021

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Halis BİLGİL

Üye : Dr. Öğretim Üyesi Esma DEMİR ÇETİN

Üye : Dr. Öğretim Üyesi Hatice TOPCU

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun………………….tarih ve…………….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

… / … / 2021

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mustafa HAVAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimdebüyük emeği olan Sayın Hocam Dr. Öğretim Üyesi Esma DEMİR ÇETİN'e,

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen çok kıymetli aileme,

Desteklerinden dolayı Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ'a

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına teşekkür ederim.

GALİLE UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ VE FRENET DÜZLEMLERİ ÜZERİNE
(Yüksek LisansTezi)

Mustafa HAVAN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2021

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde giriş kısmı bulunmaktadır. İkinci bölümde sırasıyla 3 boyutlu Öklid uzayında, 3 boyutlu Lorentz uzayında ve 3 boyutlu Galile uzayında temel tanım ve teoremler yer almaktadır. Üçüncü bölümde 3 boyutlu Öklid uzayında aynı Frenet düzlemlerini paylaşan eğrilerin varlığı için gerekli şartlar araştırılmış ve bazı teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde 3 boyutlu Lorentz uzayında ortak timelike Frenet düzlemlerine sahip eğriler araştırılmış, daha sonra ise aynı lightlike Frenet düzlemlerini paylaşan eğrilerin varlığı için gerekli koşullar incelenmiştir. Beşinci bölümde 3 boyutlu Galile uzayında verilen bir eğrinin Frenet düzlemlerinden birinin bu uzayda başka bir eğrinin Frenet düzlemi olup olamayacağı araştırılmış ve sonuçlar verilmiştir. Son olarak altıncı bölüm tartışma ve sonuçlara ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler **:*Galile uzayı; Frenet düzlemleri, özel eğriler.***
Tez Danışmanları : Dr. Öğretim Üyesi Esma DEMİR ÇETİN
Sayfa Adeti : 60

ON CURVE COUPLES AND FRENET PLANES IN GALILEAN SPACE
(Master Thesis)

Mustafa HAVAN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Agust 2021

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, 3 dimesional Euclidean space, Lorentz 3-space, Galilean 3-space and their properties are mentioned respectively. In the third chapter, necessary conditions for the existence of curves that share the same Frenet planes are investigated and some theorems are given in Euclidean 3-space. In the fourth chapter, curves with common timelike Frenet planes are investigated and then necessary conditions for the existence of curves sharing the same lightlike Frenet planes investigated. In the fifth chapter, it is investigated whether one of the Frenet planes of a given curve, can be the Frenet plane of another curve in Galilean 3-space and some results are given. Finally the sixth chapter is devoted to the discussion and conclusion.

Keywords **: *Galilean space, Frenet planes, special curves.***
Thesis Supervisor : Dr. Öğretim Üyesi Esma DEMİR ÇETİN
Page Number : 60

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELERve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
E^3	:	3 boyutlu Öklid uzayı
E_1^3	:	3 boyutlu Lorentz uzayı
G_3	:	3 boyutlu Galile uzayı
κ	:	Eğrinin eğriliği
τ	:	Eğrinin torsiyonu
T	:	Eğrinin birim teğet vektör alanı
N	:	Eğrinin birim normal vektör alanı
B	:	Eğrinin birim binormal vektör alanı
OP	:	Eğrinin oskülatör düzlemi
NP	:	Eğrinin normal düzlemi
RP	:	Eğrinin rektifiyan düzlemi

1. BÖLÜM
GİRİŞ

Öklid uzayındaki eğriler teorisinde, önemli ve ilginç problemlerden biri, regüler bir eğrinin karakterizasyonudur. Bu problemin cevaplanmasında, regüler bir eğrinin sırasıyla eğrilik ve burulması olarak adlandırılan k_1 (veya κ) ve k_2 (veya τ) önemli rollere sahiptir. Örnek vermek gerekirse $k_1 = k_2 = 0$ ise bu eğri, geodezik eğridir veya $k_1 = sabit \neq 0$ ve $k_2 = 0$ ise eğri, $1/k_1$ yarıçaplı çemberdir. Böylece, regüler bir eğrinin şeklini ve boyutunu, eğriliklerini kullanarak belirleyebiliriz.

Bahsedilen problemin çözümündeki başka bir yol da eğrilerin Frenet vektörleri arasındaki bağlantıdır [5]. Bertrand eğrileri ve Mannheim eğrileri buna örnek olarak gösterilebilir. Saint Venant, 1845'te (bkz. [5] ve [7]), bir eğrinin asli normali tarafından üretilen yüzey üzerinde, asli normali, verilen eğrinin asli normali olan ikinci bir eğrinin var olup olmadığı sorusunu ortaya atmıştır. Bu soru, 1850 yılında Bertrand tarafından böyle bir ikinci eğrinin varlığı için gerekli ve yeterli koşulun, verilen orijinal eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri arasında sabit katsayılarla doğrusal bir ilişki olması gerektiğini gösterdiği bir yazıda yanıtlanmıştır.

Diğer bir deyişle, verilen bir eğrinin eğriliğini ve burulmasını sırasıyla κ ve τ ile ifade edersek, o zaman ζ, ψ reel sayıları için $\zeta\kappa + \psi\tau = 1$ olması gerek ve yeterlidir.

Bertrand'ın makalesinden beri, bu tür eğri çiftleri Conjugate Bertrand Eğrileri veya daha yaygın olarak Bertrand Eğrileri olarak adlandırılır.

Bir başka ilginç örnek de Mannheim eğrileridir: α ve β uzay eğrileri arasında bu eğrilerin karşılıklı noktalarında, γ eğrisinin asli normal doğrusu β eğrisinin binormal doğrusu ile çakışacak şekilde karşılıklı bir ilişkinin mevcut olması halinde, γ eğrisine bir Mannheim eğrisi denir. β eğrisine de α eğrisinin bir Mannheim partner eğrisi denir. 3 boyutlu Öklid uzayında ve 3 boyutlu Minkowski uzayında Mannheim partner eğrileri *Liu* ve *Wang* tarafından çalışılmıştır [6].

Ele alınan problemin çözümünde bir başka metod ise regüler bir eğrinin yer vektörüdür. E^3 Öklid uzayında, en az dört sürekli türevi olan her bir birim hızlı eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to E^3$ için, T, N ve B sırasıyla teğet, normal ve binormal diye adlandırılan üç ortogonal birim vektör alanının oluşturulabileceği iyi bilinmektedir. γ eğrisinin her bir $\gamma(s)$ noktasında

$\{T,N\}$, $\{T,B\}$ ve $\{N,B\}$ tarafından gerilen düzlemler sırasıyla oskülatör düzlem, rektifiyan düzlem ve normal düzlem olarak adlandırılır. Yer vektörü her zaman rektifiyan düzlemi içinde bulunan $\gamma: I \subset \mathrm{R} \to E^3$ eğrilerine basitlik için rektifiyan eğriler denir. Benzer şekilde yer vektörü her zaman normal düzlemi içinde bulunun eğrilere normal eğriler denir. E^3 uzayında normal eğriler, küresel eğrilerdir. Son olarak yer vektörü her zaman oskülatör düzlemi içinde bulunun eğrilere oskülatör eğriler denir. E^3 uzayında oskülatör eğrilerin düzlemsel eğriler olduğu iyi bilinmektedir.

Son olarak konu edilen problemde eğrilerin Frenet düzlemleri üzerinden yapılacak bir yaklaşımla bazı sonuçlar elde edilebilir. Bu yaklaşım farklı çalışmalarda 3 boyutlu Öklid uzayı ve 3 boyutlu Lorentz uzayında ele alınmıştır. Bu tez çalışmasında ise aşağıdaki soru sorularak bu soru için olası yanıtlar araştırılmıştır.

3 boyutlu Galile uzayında verilen bir eğrinin Frenet düzlemlerinden birinin aynı uzaydaki başka bir uzay eğrisinin Frenet düzlemi olması mümkün müdür?

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı, 3 boyutlu Galile uzayında verilen bir eğrinin Frenet düzlemlerinden birinin aynı uzaydaki başka bir uzay eğrisinin Frenet düzlemi olup olmama durumunun araştırılmasıdır. Bununla birlikte literatürde bulunan, 3 boyutlu Öklid uzayı ile 3 boyutlu Lorentz uzayında bu konuda yapılmış çalışmalar incelenerek Galile uzayı ile karşılaştırmalar yapmaktır.

2. BÖLÜM
TEMEL TANIMLAR

Giriş kısmında bir eğrinin karakterizasyonu için bazı yöntemlerden bahsedilmişti. Bu bölümde bu konuda temel tanımlarla birlikte bazı örnekler verilecektir.

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. $I \subset \mathrm{R}$ reel uzayın bir açık alt aralığı olmak üzere $\gamma: I \subset \mathrm{R} \to E^3$ ile verilen diferansiyellenebilir γ fonksiyonuna 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri denir [4].

Tanım 2.1.2. $\gamma: I \subset \mathrm{R} \to E^3$, 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 te keyfi bir eğri olsun. E^3 uzayında, her $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ için

$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

ile verilen $\langle .,. \rangle$ standart Öklid iç çarpımı olmak üzere, $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$ ise γ, birim hızlı eğri (veya yay parametresi ile verilmiş eğri) olarak adlandırılır.

Bir γ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri kullanılarak elde edilen T, N, B vektör alanlarına sırasıyla teğet, asli normal ve binormal vektör alanları denir. Burada $\{T, N, B\}$ eğrinin her noktasında ortonormal bir çatı oluşturur. Bu çatıya γ eğrisinin Frenet çatısı denir [4].

Tanım 2.1.3. 3 boyutlu Öklid uzayında bir γ eğrisi verilsin. γ eğrisi için $\{T, N, B\}$ ile verilen Frenet çatısında bu çatıyı oluşturan vektörlerin gerdikleri düzlemler sırasıyla aşağıdaki şekilde adlandırılır:

$\{T, N\}$ tarafından gerilen düzlem, eğrinin oskülatör düzlemi,

$\{T, B\}$ tarafından gerilen düzlem, eğrinin rektifiyan düzlemi,

$\{N, B\}$ tarafından gerilen düzlem, eğrinin normal düzlemidir [4].

Tanım 2.1.4. 3 boyutlu Öklid uzayında bir γ eğrisi ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ verilsin. Eğer γ nın yer vektörü daima

$Sp\{T, N\}$ nin gerdiği oskülatör düzlemde kalıyorsa γ ya oskülatör eğri,

$Sp\{T, B\}$ nin gerdiği rektifiyan düzlemde kalıyorsa γ ya rektifiyan eğri,

$Sp\{N, B\}$ nin gerdiği normal düzlemde kalıyorsa γ ya normal eğri denir [9].

Tanım 2.1.5. Bir γ eğrisi ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ verilsin. Bu durumda Frenet vektörlerinin türevleri hesaplanarak elde edilen $T' = \kappa N$, $N' = -\kappa T + \tau B$, $B' = -\tau N$ denklemlerine Frenet formülleri denir.

Burada $\kappa = \langle T', N \rangle$ ve $\tau = \langle N', B \rangle$ sırasıyla γ eğrisinin eğriliği ve burulmasıdır. Bu eğrilikler yardımıyla eğrilerin cinsleri tespit edilebilir. Örnek vermek gerekirse $\kappa = \tau = 0$ ise γ bir geodeziktir. κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ ise γ bir çemberdir. κ ve τ sıfırdan farklı sabitler ise γ dairesel helistir [4].

Tanım 2.1.6. 3 boyutlu Öklid uzayında verilen bir γ eğrisinin her noktasında teğetleri sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyor ise bu eğriye eğilim çizgisi (helis) denir. Özel olarak γ bir eğilim çizgisi ise eğriliği ve burulması κ ve τ olmak üzere κ/τ oranı sabittir [4].

Tanım 2.1.7. $\gamma: I \subset \mathrm{R} \to E^3$ eğrisinin eğriliği sabit, burulması sabit değil ise bu eğriye Salkowski eğrisi denir. Benzer olarak eğriliği sabit olmayan fakat burulması sabit olan eğriye de anti Salkowski eğrisi denir [10].

Yukarıda verilen örnekler ile birlikte iki eğrinin Frenet elemanları arasındaki bağlantılarla verilen tanımlar da mevcuttur.

Tanım 2.1.8. Birim hızlı γ eğrisi ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ile Frenet elemanları $\{T^*, N^*, B^*\}$ olan β eğrisi verilsin. Eğer N ve N^* lineer bağımlı ise (γ, β) ya Bertrand eğri çifti denir [5].

2.2.3-Boyutlu Lorentz Uzayında Temel Tanımlar

Tanım 2.2.1. $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere $\langle\ ,\ \rangle : E^3 \times E^3 \to \mathbb{R}$, $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \to \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ şeklinde tanımlanan simetrik, bilineer ve non dejenere metrik tensöre Lorentz metriği denir [8].

Tanım 2.2.2. $\langle\ ,\ \rangle$, E^3de Lorentz metriği olsun. $\{E^3, \langle\ ,\ \rangle\}$ ikilisine 3- boyutlu Lorentz uzayı denir ve E_1^3 ile gösterilir. $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere v'nin normu $\|\mathrm{v}\| = \sqrt{|\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle|}$ şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 2.2.3. $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere,

$\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle > 0$ ise v'ye spacelike vektör,

$\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle < 0$ise v'ye timelike vektör,

$\langle \mathrm{v}, \mathrm{v} \rangle = 0$, $\mathrm{v} \neq 0$ ise v'ye lightlike vektör denir [8].

Tanım 2.2.4. γ, E_1^3 de bir eğri olmak üzere eğer γ' sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike ise γ eğrisine de sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike eğri denir [8].

Tanım 2.2.5. γ, E_1^3 de bir eğri olmak üzere eğer $\langle \gamma', \gamma' \rangle = \pm 1$ ise γ ya birim hızlı eğri denir [8].

Tanım 2.2.6. γ, E_1^3 de spacelike bir eğri olmak üzere eğer γ nın aslinormal vektörü Nsıfır ise bu eğriye pseudo null eğri denir [8].

Tanım 2.2.7. E_1^3 Lorentz uzayında teğet, normal ve binormal vektör alanlarının oluşturduğu cümle $\{T, N, B\}$ $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet çatısı olsun. γ eğrisinin karakterine göre Frenet eşitlikleri aşağıdaki formları alır.

1. Durum : $\gamma(s)$ lightlike olmayan bir eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2\kappa & 0 \\ -\varepsilon_1\kappa & 0 & \varepsilon_3\tau \\ 0 & -\varepsilon_2\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır. Ayrıca $\varepsilon_1 = \langle T, T \rangle = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \langle N, N \rangle = \pm 1$ ve $\varepsilon_3 = \langle B, B \rangle = \pm 1$ dir.

Aynı zamanda $T \times N = \varepsilon_1\varepsilon_2 B,\ N \times B = \varepsilon_2\varepsilon_3 T,\ B \times T = \varepsilon_1\varepsilon_3 B$ eşitlikleri sağlanır [5].

2. Durum : $\gamma(s)$ lightlike ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Yine κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır, $\gamma(s)$ bir doğru ise $\kappa = 0$ diğer durumlarda ise $\kappa = 1$ dir.

$\langle T, T \rangle = \langle B, B \rangle = \langle T, N \rangle = \langle N, B \rangle = 0,\ \langle N, N \rangle = \langle T, B \rangle = 1$ dir ve bununla birlikte $T \times N = -T,\ \ N \times B = -B,\ \ B \times T = -N$ eşitlikleri sağlanır [13].

3. Durum : $\gamma(s)$ pseudo null bir eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır. $\gamma(s)$ eğrisi doğru ise eğrilik $\kappa = 0$ diğer durumlarda ise $\kappa = 1$ dir. Aynı zamanda,

$\langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = \langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = 0,\ \langle T, T \rangle = \langle N, B \rangle = 1$ dir ve bununla birlikte $T \times N = N,\ \ N \times B = T,\ \ B \times T = B$ eşitlikleri sağlanır [13].

2.3. 3-Boyutlu Galile Uzayında Temel Tanımlar

Bu bölümde Galile uzayı ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilecektir.

Galile uzayı, izotropik koninin bozularak düzleme dönüştüğü pseudo - Öklid uzayının sınır durumudur. Fizikte önemli bir rol oynayan çarpım uzayının Klein geometrisi olarak tanımlanır. Galile geometrisinin temel farkı, öğrencilere çok fazla zaman ve enerji kaybetmeden ayrıntılı olarak inceleme olanağı sağlayan göreceli basitliğidir.

Tanım 2.3.1. 3 boyutlu Galile uzayı G_3'de iki vektör $\mathrm{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathrm{v}=(v_1,v_2,v_3)$ arasındaki Galile iç çarpımı;

$$\langle u,v\rangle_{G_3}=\begin{cases} u_1v_1, & u_1 \text{ veya } v_1 \text{ sıfırdan farklı ise} \\ u_2v_2+u_3v_3, & u_1 \text{ ve } v_1 \text{ her ikisi de sıfır ise} \end{cases} \tag{2.4}$$

ve Galile vektörel çarpımı;

$$\left(u\times v\right)_{G_3}=\begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, & u_1 \text{ veya } v_1 \text{ sıfırdan farklı ise} \\ \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, & u_1 \text{ ve } v_1 \text{ her ikisi de sıfır ise} \end{cases} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada e_1, e_2 ve e_3 Öklid uzayının standart bazlarıdır [1].

Tanım 2.3.2. $\gamma : I\subseteq R\to G_3$ $\gamma(s)=\left(x(s),y(s),z(s)\right)$, 3 boyutlu Galile uzayında keyfi bir eğri olsun. Eğer $x(s)$ eğrinin yay parametresi ise bu durumda $\gamma(s)=(s,y(s),z(s))$ olarak elde edilir ve γ eğrisinin birinci eğriliği $\kappa(s)$ ve ikinci eğriliği (burulması) $\tau(s)$

$$\kappa(s)=\sqrt{(y'')^2(s)+(z'')^2(s)}$$

$$\tau(s)=\frac{\det\left(\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s)\right)}{\left[\kappa(s)\right]^2}$$

şeklinde tanımlanır [1].

γ nın Frenet 3-ayaklısı;

$$T(s)=\gamma'(s)=\left(1,y'(s),z'(s)\right)$$

$$N(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\gamma''(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\left(0,y''(s),z''(s)\right)$$

$$B(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\left(0,-z''(s),y''(s)\right)$$

şeklinde verilir. *T*, *N* ve *B* vektörlerine sırasıyla γ eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektörleri denir. Bu vektörlerin türevleri için aşağıdaki Frenet formülleri geçerlidir [1].

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Tanım 2.3.3. $\gamma : I \subseteq R \to G_3$, 3 boyutlu Galile uzayında Frenet çatısı elemanları $\{T,N,B,\kappa \neq 0,\tau\}$ ile birim hızlı eğri olsun. γ eğrisinin harmonik eğriliği;

$$H : I \subseteq R \to R,\ \ H=\frac{\tau}{\kappa}$$

şeklinde tanımlanır. Burada κ ve τ sırasıyla γ eğrisinin eğriliği ve burulmasıdır [1].

3. BÖLÜM
3 BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLERİN FRENET DÜZLEMLERİ

Bu bölümde literatür taraması verilip bazı sonuçlar paylaşılacaktır.

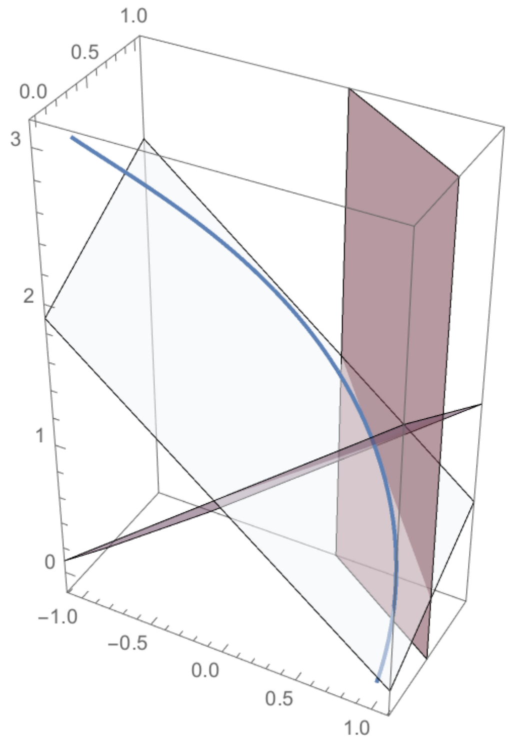
Aynı açık aralık $I \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı iki uzay eğrisi M ve $\overline{M}$ ele alınsın M ve $\overline{M}$ nin karşılık gelen noktalarında $\{M, T, N, B\}$ ve $\{\overline{M}, \overline{T}, \overline{N}, \overline{B}\}$ hareketli üçlüleri olmak üzere M ve $\overline{M}$ nin nin yay parametreleri, eğrilikleri ve burulmaları sırasıyla s, κ, τ ve $\bar{s}, \bar{\kappa}, \bar{\tau}$ ile gösterilsin. M eğrisinin her bir $M(s)$ noktasında $\{T, N\}$, $\{N, B\}$ ve $\{T, B\}$ tarafından üretilen düzlemler sırasıyla oskülatör düzlem, normal düzlem ve rektifiyan düzlem olarak bilinir. Bu düzlemler sırasıyla OP, NP ve RP ile gösterilecektir. $\overline{M}$ise eğrilikleri $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$ ve Frenet vektörleri $\{\overline{T}, \overline{N}\}$ olan keyfi bir birim hızlı uzay eğrisi iken $\overline{M}$ eğrisinin her bir $\overline{M}(\bar{s})$ noktasında $\{\overline{T}, \overline{N}\}$, $\{\overline{N}, \overline{B}\}$ ve $\{\overline{T}, \overline{B}\}$ tarafından üretilen düzlemler sırasıyla yine oskülatör düzlem, normal düzlem ve rektifiyan düzlem olmak üzere bu düzlemler sırasıyla $\overline{OP}$, $\overline{NP}$ ve $\overline{RP}$ ile gösterilsin. $f = \frac{d\bar{s}}{ds}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki Frenet formülleri elde edilir:

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N \tag{3.1}$$

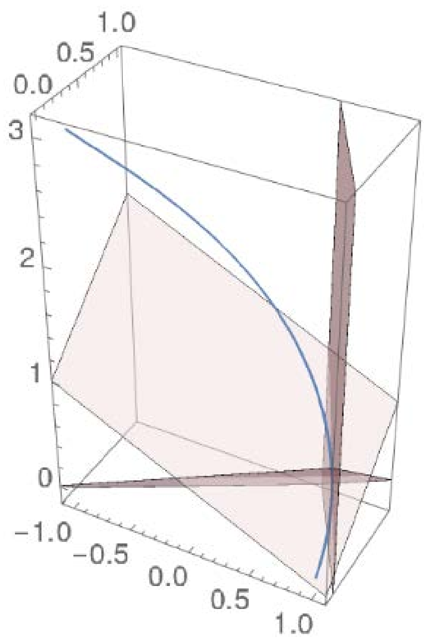
$$\overline{T}' = f\bar{\kappa}\overline{N}, \quad \overline{N}' = -f\bar{\kappa}\overline{T} + f\bar{\tau}\overline{B}, \quad \overline{B}' = -f\bar{\tau}\overline{N} \tag{3.2}$$

Burada $f = \frac{d\bar{s}}{ds}$ olmak üzere $(')$, $\frac{d}{ds}$ i göstermektedir

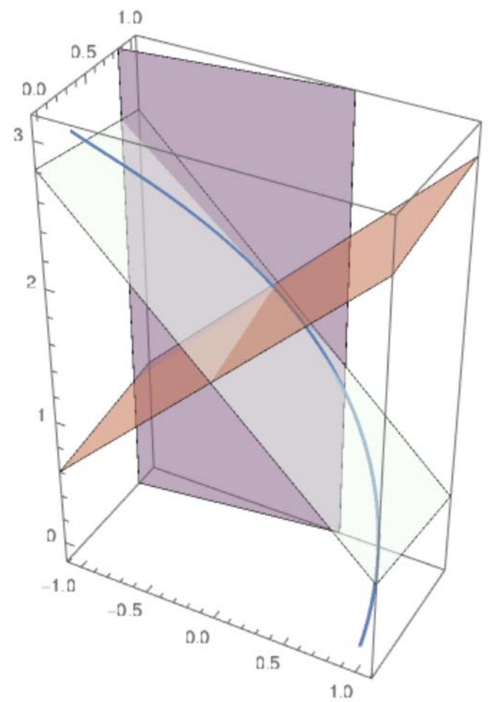
Aşağıda verilen şekillerde 3 boyutlu Öklid uzayında $\gamma(t) = (cost, sint, t)$ parametrizasyonuyla verilen helis eğrisinin sırasıyla oskülatör düzlemi, normal düzlemi ve rektifiyan düzlemi görülebilir.



Şekil 3.1. $\gamma(t) = (cost, sint, t)$ eğrisinin oskülatör düzlemi.



Şekil 3.2. $\gamma(t) = (cost, sint, t)$ eğrisinin normal düzlemi.



Şekil 3.3. $\gamma(t) = (cost, sint, t)$ eğrisinin rektifiyan düzlemi.

Bu bölümde aşağıdaki soru için cevaplar araştırılmıştır:

"*3 boyutlu Öklid uzayında farklı uzay eğrilerinin aynı Frenet düzlemlerini paylaşması mümkün müdür?*" Bu sorunun cevabı için aşağıdaki olası durumlar incelenmiştir.

Durum	M'nin Frenet düzlemi	$\overline{M}$'nin Frenet düzlemi	Koşul
1	$sp\{T,N\}=OP$	$sp\{\overline{T},\overline{N}\}=\overline{OP}$	$OP=\overline{OP}$
2	$sp\{T,N\}=OP$	$sp\{\overline{N},\overline{B}\}=\overline{NP}$	$OP=\overline{NP}$
3	$sp\{T,N\}=OP$	$sp\{\overline{T},\overline{B}\}=\overline{RP}$	$OP=\overline{RP}$
4	$sp\{N,B\}=NP$	$sp\{\overline{T},\overline{N}\}=\overline{OP}$	$NP=\overline{OP}$
5	$sp\{N,B\}=NP$	$sp\{\overline{N},\overline{B}\}=\overline{NP}$	$NP=\overline{NP}$
6	$sp\{N,B\}=NP$	$sp\{\overline{T},\overline{B}\}=\overline{RP}$	$NP=\overline{RP}$
7	$sp\{T,B\}=RP$	$sp\{\overline{T},\overline{N}\}=\overline{OP}$	$RP=\overline{OP}$
8	$sp\{T,B\}=RP$	$sp\{\overline{N},\overline{B}\}=\overline{NP}$	$RP=\overline{NP}$
9	$sp\{T,B\}=RP$	$sp\{\overline{T},\overline{B}\}=\overline{RP}$	$RP=\overline{RP}$

3.1. Durum 1 $OP = \overline{OP}$

İlk durumda aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

"3 boyutlu Öklid uzayında verilen iki farklı uzay eğrisi aynı oskülatör düzlemi paylaşabilir mi?"

Verilen Meğrisinin oskülatör düzleminin başka bir $\overline{M}$ uzay eğrisinin oskülatör düzlemi olduğu kabul edilsin. O halde

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{3.3}$$

yazılabilir.

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d her ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (3.3) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (3.1) ve (3.2) de verilen Frenet formülleri uygulanırsa,

$$\bar{T} = (1 + c' - d\kappa)\frac{1}{f}T + (c\kappa + d')\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f}B \tag{3.4}$$

denklemine ulaşılır. $\overline{T} \in Sp\{T, N\}$ olduğundan sıfırdan farklı ζ ve ψ sabitleri için

$\bar{T} = \zeta T + \psi N$ yazılabilir. Bu durumda (3.4) eşitliğinden,

$$\zeta T + \psi N = (1 + c' - d\kappa)\frac{1}{f}T + (c\kappa + d')\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f}B \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) denkleminin B ile iç çarpımı yapılırsa $d\tau = 0$ olur. Böylece, d veya τ sıfır olmalıdır ki bu da varsayımımızla çelişir. Bu nedenle aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1. M eğrisinin oskülatör düzlemi, $\overline{M}$ eğrisinin de oskülatör düzlemi olacak şekilde E^3 uzayında $(M, \overline{M})$eğri ikilisi yoktur [9].

3.2. Durum 2 $\boldsymbol{OP} = \overline{\boldsymbol{NP}}$

Burada aşağıda ifade edilen soru için cevaplar araştırılmıştır.

"E^3 de verilen bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemi ile bu uzayda başka bir uzay eğrisinin normal düzlemi kongrüent olabilir mi?"

E^3 de verilen bir Meğrisinin oskülatör düzleminin başka bir $\overline{M}$eğrisinin normal düzlemi olduğu kabul edilsin. Böylece aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{3.6}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d *her* ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (3.6) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (3.1) ve (3.2) de verilen Frenet formülleri uygulanırsa,

$$\bar{T} = (1 + c' - d\kappa)\frac{1}{f}T + (c\kappa + d')\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f}B \tag{3.7}$$

eşitliğine ulaşılır. $B^{\perp} = Sp\{T, N\} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = \overline{T}^{\perp}$ olduğundan B, $\overline{T}$ ye paraleldir. İlk olarak (3.7) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında

$$d = \frac{f}{\tau} \tag{3.8}$$

bulunur. Daha sonra (3.7) denkleminin N ile çarpımı yapılarak,

$$c = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d^2\bar{s}}{ds^2} + \left(\frac{1}{\tau}\right)'\frac{d\bar{s}}{ds}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece, aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.2. M, E^3 uzayında, sıfırdan farklı κ ve τ eğriliklerine ve $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerine sahip olan birim hızlı uzay eğrisi olsun. M eğrisinin oskülatör düzlemi, bir başka $\overline{M}$ uzay eğrisinin normal düzlemi ise $\overline{M} = M - \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d^2\bar{s}}{ds^2} + \left(\frac{1}{\tau}\right)'\frac{d\bar{s}}{ds}\right)T + \frac{1}{\tau}\frac{d\bar{s}}{ds}N$ şeklindedir [9].

3.3. Durum 3 $OP = \overline{RP}$

Bu durumda "E^3 de verilen bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemi ile bu uzayda başka bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemi kongrüent olabilir mi?" sorusunun cevabı araştırılmıştır.

E^3 de bir Meğrisinin oskülatör düzleminin başka bir $\bar{M}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi olduğu kabul edilsin. Böylece aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{3.9}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d *her* ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (3.9) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (3.1) ve (3.2) de verilen Frenet formülleri uygulanırsa,

$$\bar{T} = (1 + c' - d\kappa)\frac{1}{f}T + (c\kappa + d')\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f}B \tag{3.10}$$

eşitliğine ulaşılır.

$\bar{T} \in Sp\{T, N\}$ olduğundan ζ ve ψ sabitleri için $\bar{T} = \zeta T + \psi N$ yazılabilir. (3.10) eşitliğinden,

$$\zeta T + \psi N = (1 + c' - d\kappa)\frac{1}{f}T + (c\kappa + d')\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f}B \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında ise $d\tau\frac{1}{f} = 0$ bulunur. Elde edilen bu eşitliğin gerçeklenmesi için d veya τ sıfır olmalıdır ki bu da varsayımımızla çelişir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3. E^3 uzayında verilen bir M eğrisinin oskülatör düzlemi ile yine bu uzaydaki başka bir $\bar{M}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi kongrüent olacak şekilde $(M, \bar{M})$ eğri ikilisi yoktur [9].

3.4. Durum 4 $NP = \overline{OP}$

Bu durumda önceki durumlara benzer şekilde aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır. “E^3 de bir uzay eğrisinin normal düzlemi başka bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemi olabilir mi?”

Verilen *M*eğrisinin normal düzleminin başka bir $\overline{M}$ uzay eğrisinin oskülatör düzlemi olduğu kabul edilsin. Böylece aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$\bar{Y} = Y + cN + dB, \qquad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{3.12}$$

burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d *her* ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (3.12) eşitliğinin s’ye göre türevi alınıp (3.1) ve (3.2) de verilen Frenet formüllerini uygulandığında

$$\bar{T} = (1 - c\kappa)\frac{1}{f}T + (c^{'} - d\tau)\frac{1}{f}N + (c\tau + d^{'})\frac{1}{f}B \tag{3.13}$$

bulunur. $\overline{T} \in Sp\{N, B\}$ olduğundan ζ ve ψ sabitleri için $\bar{T} = \zeta N + \psi B$ yazılabilir. (3.13) eşitliğinden

$$\zeta N + \psi B = (1 - c\kappa)\frac{1}{f}T + (c^{'} - d\tau)\frac{1}{f}N + (c\tau + d^{'})\frac{1}{f}B \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) denkleminin *T* ile iç çarpımı yapıldığında

$$c = \frac{1}{\kappa} \tag{3.15}$$

ve (3.15) eşitliğinin (3.13) de kullanılmasıyla

$$\bar{T} = \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{'} - d\tau\right)\frac{1}{f}N + \left(\frac{\tau}{\kappa} + d'\right)\frac{1}{f}B \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) eşitliğinin s’ye göre türevi alındığında is

$$\begin{aligned} \overline{\kappa}\overline{N}f = {} & \left(-\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{'}\kappa + d\kappa\tau\right)\frac{1}{f}T + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{''} - d^{'}\tau - d\tau^{'} - \frac{\tau^2}{\kappa} - d^{'}\tau\right)\frac{1}{f}N \\ & + \left(2\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{'}\tau - d\tau^2 + \frac{\tau^{'}}{\kappa} + d^{''}\right)\frac{1}{f}B + \left(\left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{'} - d\tau\right)N + \left(\frac{\tau}{\kappa} + d'\right)B\right)\left(\frac{1}{f}\right)^{'} \end{aligned} \tag{3.17}$$

bulunur. $\overline{N} \in Sp\{N, B\}$ olduğundan ζ ve ψ sabitleri için (3.17) eşitliğinde $\overline{N} = \zeta N + \psi B$ yazılabilir. (3.17) eşitliğinin T ile iç çarpımı yapıldığında

$$d = -\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \tag{3.18}$$

bulunur.Son olarak (3.15) ve (3.18) eşitliklerinin (3.12) ifadesinde kullanılmasıyla

$$\bar{Y} = Y + \frac{1}{\kappa} N - \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} B$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.4. 3 boyutlu Öklid uzayında M eğrisinin normal düzlemi ile $\bar{M}$ eğrisinin oskülatör düzlemi aynı düzlem ise M eğrisinin oskülatör kürelerinin merkezlerinin geometrik yeri $\bar{M}$ eğrisidir [9].

3.5. Durum 5 $NP = \overline{NP}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun cevabı incelenmiştir.

"3 boyutlu Öklid uzayında iki farklı uzay eğrisinin aynı normal düzlemi paylaşması mümkün müdür?"

3 boyutlu Öklid uzayında verilen Meğrisinin başka bir $\bar{M}$eğrisi ile aynı normal düzleme sahip olduğu kabul edilsin. Böylece

$$\bar{Y} = Y + cN + dB, \qquad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{3.19}$$

burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d *her* ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (3.19) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (3.1) ve (3.2) de verilen Frenet formüllerini uygulandığında

$$\bar{T} = (1 - c\kappa)\frac{1}{f} T + (c' - d\tau)\frac{1}{f} N + (c\tau + d')\frac{1}{f} B \tag{3.20}$$

elde edilir. $T^{\perp} = Sp\{N, B\} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = \overline{T}^{\perp}$ olduğundan T, $\bar{T}$ ye paraleldir, $\langle T, \bar{T} \rangle = 1$ dir. (3.20) eşitliğinin T ile iç çarpımı yapıldığında $c = \frac{1}{\kappa}(1 - f)$ bulunur.

Daha sonra (3.20) denkleminin$N$ ile iç çarpımı yapılarak $d = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}(1-f)\right)'$ elde edilir. O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.5. M, 3 boyutlu Ökliduzayında, sıfırdan farklı κ ve τ eğriliklerine ve $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerine sahip olan birim hızlı uzay eğrisi olsun. M eğrisinin normal düzlemi, bir başka $\bar{M}$ uzay eğrisini N normal düzlemi ise $\bar{M}$ eğrisinin denklemi aşağıdaki şekildedir [9].

$$\bar{M} = M + \frac{1}{\kappa}\left(1 - \frac{d\bar{s}}{ds}\right)N + \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}(1 - \frac{d\bar{s}}{ds})\right)' B$$

3.6. Durum 6 $NP = \overline{RP}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

"E^3 de bir uzay eğrisinin normal düzlemi başka bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemi olabilir mi?"

E^3 de verilen Meğrisinin normal düzleminin başka bir $\bar{M}$ uzay eğrisinin rektifiyan düzlemi olduğu kabul edilsin. O halde

$$\bar{Y} = Y + cN + dB, \qquad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{3.21}$$

burada $\bar{Y}$ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d *her* ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (3.21) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (3.1) ve (3.2) de verilen Frenet formülleri uygulandığında

$$\bar{T} = (1 - c\kappa)\frac{1}{f}T + (c' - d\tau)\frac{1}{f}N + (c\tau + d')\frac{1}{f}B \tag{3.22}$$

eşitliği elde edilir. $\bar{T} \in Sp\{N, B\}$ olduğundan ζ ve ψ sabitleri için $\bar{T} = \zeta N + \psi B$ yazılabilir. (3.22) eşitliğinden

$$\zeta N + \psi B = (1 - c\kappa)\frac{1}{f}T + (c' - d\tau)\frac{1}{f}N + (c\tau + d')\frac{1}{f}B \tag{3.23}$$

yazılabilir. (3.23) eşitliğinin T ile iç çarpımının sonucunda

$$c = \frac{1}{\kappa} \tag{3.24}$$

bulunur. (3.22) eşitliğinin s'ye göre türevini alındığında ise

$$\kappa \bar{N} f = -\kappa\left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' - d\tau\right)\frac{1}{f}T + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)'' - 2d'\tau - d\tau' - \frac{\tau^2}{\kappa}\right)\frac{1}{f}N$$

$$+\left(2\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\tau - d\tau^2 + \frac{\tau'}{\kappa} + d''\right)\frac{1}{f}B + \left(\left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' - d\tau\right)N + \left(\frac{\tau}{\kappa} + d'\right)B\right)\left(\frac{1}{f}\right)' \tag{3.25}$$

elde edilir. $T^{\perp} = Sp\{N, B\} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = \overline{N}^{\perp}$ olduğundan T, $\overline{N}$ ye paraleldir ve (3.25) ifadesinin N ile iç çarpımı sonucunda

$$d' + \eta d = \mu \tag{3.26}$$

elde edilir. Burada $\eta = \frac{\tau'}{2\tau} + \frac{f}{2}\left(\frac{1}{f}\right)'$ ve $\mu = \frac{1}{2\tau}\left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)'' - \frac{\tau^2}{\kappa}\right) + \frac{f}{2\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\left(\frac{1}{f}\right)'$ dir. Son olarak (3.26) eşitliğinden $d(s) = e^{-\int \eta ds}\{e^{\int \eta ds}\mu ds + \theta\}$, $\theta \in R$ dir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6. M, E^3 uzayında, sıfırdan farklı κ ve τ eğriliklerine ve $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerine sahip olan birim hızlı uzay eğrisi olsun. M eğrisinin normal düzlemi, bir başka $\overline{M}$ uzay eğrisinin rektifiyan düzlemi ise $\overline{M}$ aşağıdaki şekildedir [9].

$$\overline{M} = M + \frac{1}{\kappa}N + \left(e^{-\int \eta ds}\{e^{\int \eta ds}\mu ds + \theta\}\right)B$$

burada $\eta = \frac{\tau'}{2\tau} + \frac{f}{2}\left(\frac{1}{f}\right)'$, $\mu = \frac{1}{2\tau}\left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)'' - \frac{\tau^2}{\kappa}\right) + \frac{f}{2\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\left(\frac{1}{f}\right)'$ dir.

Sonuç 3.1. M ve $\overline{M}$ eğrileri aynı s parametrelerine sahip ($\bar{s} = s$) olsun. Eğer $\kappa = sabit \neq 0$ ve $\tau = sabit \neq 0$ ise $\theta \in R$ için, $d = -\frac{\tau}{2\kappa}s + \theta$ bu durumda M eğrisi dairesel helistir.

Sonuç 3.2. M ve $\bar{M}$ eğrileri aynı s parametrelerine sahip ($\bar{s} = s$) olsun. Eğer $\kappa = sabit \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ sabit olmayan bir fonksiyon ise $\theta \in R$ için, $d = -\frac{1}{5}\frac{\tau^2}{\kappa} + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\theta$ dir. Bu durumda M eğrisi, E^3 uzayında bir Salkowski eğrisidir [9].

Sonuç 3.3. M ve $\bar{M}$ eğrileri aynı s parametrelerine sahip ($\bar{s} = s$) olsun. Eğer $\tau = sabit \neq 0$, $\kappa \neq 0$ sabit olmayan bir fonksiyon ise $k \in R$ için, $d = \frac{1}{2\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)' - \frac{\tau}{2}\int \frac{1}{\kappa} ds + k$ dir. Bu durumda M eğrisi, E^3 uzayında bir anti-Salkowski eğrisidir [9].

3.7. Durum 7 $\boldsymbol{RP = \overline{OP}}$

Bu durumda aşağıdaki soru için cevaplar araştırılmıştır.

“E^3 de bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemi bir başka eğrinin oskülatör düzlemine kongrüent olabilir mi?”

E^3 de verilen bir Meğrisinin rektifiyan düzleminin başka bir $\bar{M}$ uzay eğrisinin oskülatör düzlemi olduğu kabul edilsin. O halde

$$\bar{Y} = Y + cT + dB, \qquad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{3.27}$$

burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d *her* ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (3.27) eşitliğinin s’ye göre türevi alındığında

$$\bar{T} = (1 + c')\frac{1}{f}T + (c\kappa - d\tau)\frac{1}{f}N + \frac{d'}{f}B \tag{3.28}$$

bulunur. $\bar{T} \in Sp\{T, B\}$ olduğundan ζ ve ψ sabitleri için $\bar{T} = \zeta T + \psi B$ yazılabilir. (3.28) eşitliğinden

$$\zeta T + \psi B = (1 + c')\frac{1}{f}T + (c\kappa - d\tau)\frac{1}{f}N + \frac{d'}{f}B \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.29) eşitliğinin N ileiç çarpımı yapıldığında ise

$$c\kappa - d\tau = 0 \tag{3.30}$$

bulunur. Bununla birlikte. (3.28) eşitliğinin s'ye göre türevi alınırsa

$$\bar{\kappa}\bar{N}f = (c''T + (\kappa(1+c') - \tau d')N + d''B)\frac{1}{f} + ((1+c')T + d'B)\left(\frac{1}{f}\right)' \tag{3.31}$$

eşitliği elde edilir.

$\bar{N} \in Sp\{T, B\}$ olduğundan bazı ζ ve ψ sabitleri için $\bar{N} = \zeta T + \psi B$ yazılabilir. Böylece (3.31) eşitliğinden

$$\bar{\kappa}(\zeta T + \psi B)f = (c''T + (\kappa(1+c') - \tau d')N + d''B)\frac{1}{f} + ((1+c')T + d'B)\left(\frac{1}{f}\right)'$$

bulunur ki bu son ifadenin N ile iç çarpımı yapıldığında

$$\kappa(1+c') - \tau d' = 0 \tag{3.32}$$

ve (3.30) ve (3.29) eşitliklerinden

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{c}{d} = \frac{1+c'}{d'} \tag{3.33}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.4 A ve $\bar{A}$, sırasıyla M ve $\bar{M}$ eğrileri üzerinde herhangi iki nokta olsun. Yer vektörleri $OA = Y$ ve $\overline{OA} = \bar{Y}$ ile gösterilirse, (3.27) ve (3.28) denklemlerini kullanarak,

$$A\bar{A} = ct + dB, \quad \bar{T} = ((1+c')T + d'B)\frac{1}{f} \tag{3.34}$$

elde ederiz. (3.34)'den $A\bar{A}$ nin $\bar{T}$ ye paralel olduğu görülebilir. Bu da $A\bar{A}$ vektörünün $\bar{M}$ eğrisine teğet olduğu anlamına gelir [9].

Sonuç 3.5 $\bar{A} \in Sp\{T, B\}$ olduğundan $A\bar{A} = sin\theta T + cos\theta B$yazılabilir. Burada θ, $A\bar{A}$ ve B vektörleri arasındaki açıyı göstermektedir. Böylece, $\frac{c}{d} = tan\theta$. Aynı zamanda (3.33) den $tan\theta = \frac{\tau}{\kappa}$ elde edilir. Böylece $A\bar{A}$ vektörü A noktasında M eğrisinin Darboux vektörüne paralel olur [9].

Tanım 3.1 $A\bar{A}$ vektörü M eğrisinin $A \in M$ noktasındaki rektifiyan doğrusu olarak adlandırılır.

Sonuç 3.6 Sonuç 3.5 deki θ açısının sabit olması için gerek ve yeter koşul M eğrisinin genel helis olmasıdır [9].

(3.30) eşitliğinin s'ye göre türevi alındığında, (3.32) eşitliği ile birlikte

$$c\kappa' - d\tau' = \kappa \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.30) ve (3.34) den, $c = \frac{\kappa}{\tau}\frac{1}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}$ ve $d = -\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}$ olur ki bulunan c ve d değerlerinden $\|A\bar{A}\|^2 = \frac{\kappa^2(\kappa^2+\tau^2)}{\tau\kappa' - \kappa\tau'}$ olur.

Sonuç 3.7. Eğer $c = \frac{\kappa}{\tau}\frac{1}{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}$ =sabit ise $\frac{\kappa}{\tau} = a_1 e^{a_2 s}$ dir [9].

Sonuç 3.8. Eğer $d = -\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}$ = sabit ise $\frac{\kappa}{\tau} = as + b,\ \ a, b \in R$ dir, Bu da M eğrisinin bir rektifiyan eğri olması demektir [9].

Sonuç 3.9. Eğer $\|A\bar{A}\|^2 = \frac{\kappa^2(\kappa^2+\tau^2)}{\tau\kappa' - \kappa\tau'}$ = sabit ise $\frac{\tau}{\kappa} = sinh(a_1 s + a_2)$ bulunur. Bu da M' nin Mannheim eğrisi olduğu anlamına gelir [6].

3.8. Durum 8 $RP = \overline{NP}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun olası yanıtları araştırılmıştır.

"Bir uzay eğrisinin rektifiyan düzlemi başka bir eğrinin normal düzlemi olabilir mi?"

Verilen Meğrisinin rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{M}$ uzay eğrisinin normal düzlemi olsun. O zaman

$$\bar{Y} = Y + cT + dB, \qquad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{3.35}$$

burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d her ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (3.35) eşitliğinin s'ye göre türevi alındığında

$$\overline{T} = (1 + c')\frac{1}{f}T + (c\kappa - d\tau)\frac{1}{f}N + \frac{d'}{f}B \tag{3.36}$$

bulunur. $N^{\perp} = Sp\{T, B\} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = \overline{T}^{\perp}$ olduğundan N, $\overline{T}$ ye paraleldir. (3.36) denkleminin N ile iç çarpımı yapıldığında

$$c\kappa - d\tau = f \tag{3.37}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.36) eşitliğinin önce T ile sonra B ile iç çarpımı yapıldığında $a_1, a_2 \in R$ sabitleri için sırasıyla, $c = -s + a_1$ ve $d = a_2$ bulunur, böylece (3.37) ile birlikte $(-s + a_1)\kappa - a_2\tau = f$ bulunur.

Teorem 3.7. M, E^3 uzayında, sıfırdan farklı κ, τ eğriliklerine ve $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerine sahip olan birim hızlı uzay eğrisi olsun. M eğrisinin rektifiyan düzlemi, bir başka $\overline{M}$ uzay eğrisinin normal düzlemi ise $\overline{M}$ aşağıdaki şekildedir, $\overline{M} = M + (-s + a_1)T + a_2B$, burada, $a_1, a_2 \in R$ dir [9].

3.9. Durum 9 $\boldsymbol{RP = \overline{RP}}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

“3 boyutlu Öklid uzayında iki farklı uzay eğrisi aynı rektifiyan düzlemi paylaşabilir mi?

E^3 de verilen M eğrisi başka bir $\overline{M}$ eğrisi ile aynı rektifiyan düzlemi paylaştığı kabul edilsin. O halde

$$\overline{Y} = Y + cT + dB, \qquad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{3.38}$$

burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d her ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (3.38) eşitliğinin s'ye göre türevi alındığında

$$\overline{T} = (1 + c')\frac{1}{f}T + (c\kappa - d\tau)\frac{1}{f}N + \frac{d'}{f}B \tag{3.39}$$

bulunur.

$\overline{T} \in Sp\{T, B\}$ olduğundan bazı ζ ve ψ sabitleri için $\overline{T} = \zeta T + \psi B$ yazılabilir. (3.39) eşitliğinden,

$$\zeta T + \psi B = (1 + c')\frac{1}{f}T + (c\kappa - d\tau)\frac{1}{f}N + \frac{d'}{f}B \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) denkleminin N ile çarpımı yapıldığında,

$$(c\kappa - d\tau) = 0 \tag{3.41}$$

bulunur. (3.39) eşitliğinin s'ye göre türevi alındığında

$$\bar{\kappa}\overline{N}f = (c''T + (\kappa(1 + c') - \tau d')N + d''B)\frac{1}{f} + \left((1 + c')T + d'B\right)\left(\frac{1}{f}\right)' \tag{3.42}$$

elde edilir. $N^{\perp} = Sp\{T, B\} = Sp\{\overline{T}, \overline{B}\} = \overline{N}^{\perp}$ olduğundan N, $\overline{N}$ ye paraleldir. (3.42) denkleminin önce N ile sonra B ile iç çarpımı yapılırsa $c''\frac{1}{f} + (1 + c')\left(\frac{1}{f}\right)' = 0$ ve $d''\frac{1}{f} + d'\left(\frac{1}{f}\right)' = 0$ eşitlikleri bulunur. Böylece c_1, c_2, d_1 ve d_2 sabitleri için sırasıyla $c = -s + c_1\int f\,ds + c_2$ ve $d = d_1\int f\,ds + d_2$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.8. M ve $\overline{M}$ aynı s $(\bar{s} = s)$ parametresine sahip eğriler olsun. M, E^3 uzayında sıfırdan farklı κ ve τ eğriliklerine ve $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerine sahip olan birim hızlı uzay eğrisi olsun. M eğrisi ile $\overline{M}$ eğrilerinin rektifiyan düzlemleri aynı ise $\overline{M}$ eğrisi aşağıdaki şekildedir [9].

$$\overline{M} = M + (c_1 s + c_2)T + (d_1 s + d_2)B \tag{3.43}$$

burada, $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. (3.41) eşitliğinden,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{c_1 s + c_2}{d_1 s + d_2} \tag{3.44}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.10. $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$ ise $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$ dir. Bu durumda M eğrisi E^3 uzayında dairesel helistir.

Örnek 3.1. E^3 uzayında $M(s) = (\cos s, \sin s, s)$ helisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibidir.

$$T(s) = \left(\frac{-\sin s}{\sqrt{2}}, \frac{\cos s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$N(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$B(s) = \left(\frac{\sin s}{\sqrt{2}}, \frac{-\cos s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Şimdi M ile aynı rektifiyan düzleme sahip bir $\overline{M}$ eğrisinin var olduğu kabul edilsin. (3.43) ifadesinde $c_1 = d_1 = 0$, $c_2 = d_2 = \sqrt{2}$ alınıp bulunan Frenet vektörleri de yerlerine yazılırsa $\overline{M}(s) = (\cos s, \sin s, s + 2)$ olarak bulunur. E^3 uzayında $M(s)$ ile $\overline{M}(s)$ eş (kongrüent) rektifiyan düzleme sahiptir.

4. BÖLÜM
3 BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA FRENET DÜZLEMLERİ

Burada Öklid uzayına benzer şekilde yine dokuz farklı durum için bir eğrinin Frenet düzlemi bir başka eğrinin Frenet düzlemi olabilir mi sorusunun cevabı araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlardan bazıları verilmiştir. Bu kısımda Öklid uzayından farklı olarak bahsedilen düzlemlerin casual karakterleri de söz konusudur. Öncelikle timelike düzlemler için inceleme yapılmıştır.

4.1. Ortak Timelike Frenet Düzlemlerine Sahip Eğriler

3 boyutlu Lorentz uzayında iki farklı eğri $M: I \subset \mathrm{R} \to \mathrm{E}_1^3$ ve $\overline{M}: J \subset \mathrm{R} \to \mathrm{E}_1^3$ olsun. M ve $\overline{M}$ nin karşılık gelen noktalarında $\{M, T, N, B\}$ ve $\{\overline{M}, \overline{T}, \overline{N}, \overline{B}\}$ hareketli üçlüleri olmak üzere M ve $\overline{M}$ nin nin yay parametrelerini, eğrilikleri ve burulmaları sırasıyla s, κ, τ ve $\bar{s}, \bar{\kappa}, \bar{\tau}$ ile gösterilsin. M eğrisinin her bir $M(s)$ noktasında $\{T, N\}$, $\{N, B\}$ ve $\{T, B\}$ tarafından üretilen düzlemler, Öklid uzayındakine benzer şekilde, sırasıyla oskülatör düzlem, normal düzlem ve rektifiyan düzlem olarak bilinir. Bu düzlemler sırasıyla OP, NP ve RP ile gösterilecektir. Şimdi $\overline{M}$, eğrilikleri $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$ ve Frenet vektörleri $\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}\}$ olan keyfi bir birim hızlı uzay eğrisi iken $\overline{M}$ eğrisinin her bir $\overline{M}(\bar{s})$ noktasında $\{\overline{T}, \overline{N}\}$, $\{\overline{N}, \overline{B}\}$ ve $\{\overline{T}, \overline{B}\}$ tarafından üretilen düzlemler sırasıyla oskülatör düzlem, normal düzlem ve rektifiyan düzlem olmak üzere bu düzlemler sırasıyla $\overline{OP}$, $\overline{NP}$ ve $\overline{RP}$ ile gösterilsin. $f = \frac{d\bar{s}}{ds}$ olsun. Yine Öklid uzayına benzer şekilde dokuz farklı durum söz konusudur.

Durum	M'nin Frenet düzlemi	$\overline{M}$'nin Frenet düzlemi	Koşul
1	$sp\{T,N\}=OP$	$sp\{\overline{T},\overline{N}\}=\overline{OP}$	$OP=\overline{OP}$
2	$sp\{T,N\}=OP$	$sp\{\overline{N},\overline{B}\}=\overline{NP}$	$OP=\overline{NP}$
3	$sp\{T,N\}=OP$	$sp\{\overline{T},\overline{B}\}=\overline{RP}$	$OP=\overline{RP}$
4	$sp\{N,B\}=NP$	$sp\{\overline{T},\overline{N}\}=\overline{OP}$	$NP=\overline{OP}$
5	$sp\{N,B\}=NP$	$sp\{\overline{N},\overline{B}\}=\overline{NP}$	$NP=\overline{NP}$
6	$sp\{N,B\}=NP$	$sp\{\overline{T},\overline{B}\}=\overline{RP}$	$NP=\overline{RP}$
7	$sp\{T,B\}=RP$	$sp\{\overline{T},\overline{N}\}=\overline{OP}$	$RP=\overline{OP}$
8	$sp\{T,B\}=RP$	$sp\{\overline{N},\overline{B}\}=\overline{NP}$	$RP=\overline{NP}$
9	$sp\{T,B\}=RP$	$sp\{\overline{T},\overline{B}\}=\overline{RP}$	$RP=\overline{RP}$

M eğrisinin oskülatör düzleminin casual karakteri timelike ise bu durumda eğrinin teğet vektörü spacelike (ya da timelike), normal vektörü timelike (ya da spacelike) ve binormal vektörü spacelike olur. Bu durumda Frenet denklemleri ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2\kappa & 0 \\ -\varepsilon_1\kappa & 0 & \varepsilon_3\tau \\ 0 & -\varepsilon_2\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$\varepsilon_1 = \langle T,T\rangle = \pm 1,\ \ \varepsilon_2 = \langle N,N\rangle = \pm 1,\ \ \varepsilon_3 = \langle B,B\rangle = \pm 1$ dir.
Aynı zamanda $T \times N = \varepsilon_1\varepsilon_2 B,\ N \times B = \varepsilon_2\varepsilon_3 T,\ B \times T = \varepsilon_1\varepsilon_3 B$ eşitlikleri sağlanır.

4.1.1. Durum 1 $OP = \overline{OP}$

Bu durumda aşağıdaki soru için cevaplar araştırılmıştır.

E_1^3 Lorentz uzayında verilen bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemi başka bir uzay uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemi olabilir mi?

Bir M eğrisinin başka bir $\overline{M}$ eğrisiyle aynı timelike oskülatör düzlemi paylaştığı kabul edilsin. $\overline{M}$ eğrisinin oskülatör düzlemi, $\overline{T}$ spacelike (ya da timelike) vektörü ve $\overline{N}$ timelike (ya da spacelike) vektörü tarafından gerilen timelike düzlem olduğundan binormal vektörü $\overline{B}$ spacelike vektördür. Bu durumda $\overline{M}$ eğrisi (5.1) ifadesindeki Frenet denklemlerini sağlayan spacelike (ya da timelike) eğridir.

O zaman

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.2}$$

yazılabilir. Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d her ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (4.2) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (4.1) ile verilen Frenet formülleri uygulanırsa

$$\bar{T}f = (1 + c' - \varepsilon_1 d\kappa)T + (\varepsilon_2 c\kappa + d')N + d\tau B \tag{4.3}$$

denklemine ulaşılır. $\bar{T} \in Sp\{T, N\}$ olduğundan sıfırdan farklı ζ ve ψ sabitleri için

$\bar{T} = \zeta T + \psi N$ yazılabilir. (4.3) eşitliğinden,

$$\zeta T + \psi N = (1 + c' - \varepsilon_1 d\kappa)\frac{1}{f}T + (\varepsilon_2 c\kappa + d')\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f} \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) denkleminin B ile iç çarpımı yapılırsa $d\tau = 0$ olur. Böylece, d veya τ sıfır olmalıdır ki bu da varsayımımızla çelişir. Bu nedenle Öklid uzayı ile benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1. M eğrisinin oskülatör düzlemi, $\bar{M}$ eğrisinin de oskülatör düzlemi olacak şekilde E_1^3 uzayında $(M, \bar{M})$ eğri ikilisi yoktur.

4.1.2. Durum 2 $OP = \overline{NP}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

"3 boyutlu Lorentz uzayında, verilen bir eğrinin timelike oskülatör düzlemi ile aynı uzayda başka bir eğrinin timelike normal düzlemi kongrüent olabilir mi?"

3 boyutlu Lorentz uzayında verilen bir Meğrisinin timelike oskülatör düzleminin başka bir $\bar{M}$ uzay eğrisinin timelike normal düzlemi olduğu kabul edilsin. $\bar{M}$ eğrisinin normal düzlemi timelike olduğundan iki farklı durum söz konusudur.

a) $\bar{N}$ spacelike (ya da timelike) vektör ve $\bar{B}$ timelike (ya da spacelike) vektördür. Bu durumda $\bar{T}$ spacelike bir vektördür ve $\bar{M}$ bir spacelike eğridir.

$B^{\perp} = Sp\{T, N\} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = \overline{T}^{\perp}$ olduğundan B vektörü $\overline{T}$ vektörüne paraleldir. O halde

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0, \; d \neq 0 \tag{4.5}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d her ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (4.5) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (4.1) ile verilen Frenet formülleri uygulanırsa,

$$\bar{T} = (1 + c' - \varepsilon_1 d\kappa)\frac{1}{f}T + (\varepsilon_2 c\kappa + d')\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f}B \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir. $B^{\perp} = Sp\{T, N\} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = \overline{T}^{\perp}$ olduğundan B, $\overline{T}$ ye paraleldir. İlk olarak (4.6) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında,

$$d = \frac{f}{\tau} \tag{4.7}$$

elde edilir. Daha sonra (4.7) denkleminin N ile iç çarpımı yapılırsa

$$c = \frac{-\varepsilon_2}{\kappa}\left(\frac{f}{\tau}\right)' \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) eşitlikleri (4.5) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\bar{Y} = Y - \frac{\varepsilon_2}{\kappa}\left(\frac{f}{\tau}\right)' T + \frac{f}{\tau}N \tag{4.9}$$

bulunur.

b) $\overline{N}$ ve $\overline{B}$ vektörleri lineer bağımsız null (lightlike) vektörler ise $\overline{M}$spacelike vektördür. Bu nedenle $\overline{T}$ Frenet denklemlerini sağlayan bir pseudo null eğridir.

$\overline{T}^{\perp} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = Sp\{T, N\} = B^{\perp}$ olduğundan B vektörü $\overline{T}$ vektörüne paraleldir. Bu durumda

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0, \; d \neq 0 \tag{4.10}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d her ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (4.10) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\bar{Y} = Y - \frac{\varepsilon_2}{\kappa}\left(\frac{f}{\tau}\right)' T + \frac{f}{\tau} N \tag{4.11}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.2. M eğrisi 3 boyutlu Lorentz uzayında, κ ve τ eğrilikleri sıfırdan farklı ve Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı eğri olsun. M eğrisinin timelike oskülatör düzlemi $\bar{M}$ eğrisinin timelike normal düzlemi ise $\bar{M}$ eğrisi aşağıdaki biçimdedir.

$$\bar{M} = M - \frac{\varepsilon_2}{\kappa}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\bar{s}}{ds}\right)' T + \frac{1}{\tau}\frac{d\bar{s}}{ds} N \tag{4.12}$$

4.1.3. Durum 3 $OP = \overline{RP}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

''3 boyutlu Lorentz uzayında verilen bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemi ile başka bir uzay eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi kongrüent olabilir mi?''

Bir M eğrisinin timelike oskülatör düzleminin başka bir $\bar{M}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi ile kongrüent olduğu kabul edilsin. $\bar{M}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi timelike olduğundan iki alt durum mevcuttur.

a) $\overline{T}$ spacelike (ya da timelike) vektör ve $\overline{B}$ spacelike (ya da timelike) vektör ise $\overline{N}$ spacelike bir vektördür. Bu nedenle $\bar{M}$ spacelike bir eğridir.

$\overline{N}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{B}\} = Sp\{T, N\} = B^{\perp}$ olduğundan B vektörü $\overline{N}$ vektörüne paraleldir. Bu durumda

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.13}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d her ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. (4.13) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\bar{T}f = (1 + c' - \varepsilon_1 d\kappa)T + (\varepsilon_2 c\kappa + d')N + d\tau B \tag{4.14}$$

eşitliği elde edilir. $\bar{T} \in Sp\{T, N\}$ olduğundan (4.14) ifadesinden ζ ve ψ sabitleri için $\bar{T} = \zeta T + \psi B$ yazılabilir. O halde

$$(\zeta T + \psi B)f = (1 + c' - \varepsilon_1 d\kappa)T + (\varepsilon_2 c\kappa + d')N + d\tau B \tag{4.15}$$

olmak üzere (4.15) denkleminni B ile iç çarpımının sonucunda

$$b\tau = 0 \tag{4.16}$$

bulunur ki bunun için $b = 0$ ya da $\tau = 0$ olmalıdır ve bu durum varsayımımızla çelişir.

b) $\overline{T}$ ve $\overline{B}$ vektörleri lineer bağımsız null vektörler ise $\overline{N}$ spacelike bir vektördür. Bu nedenle $\overline{M}$ bir null eğridir.

$\overline{N}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{B}\} = Sp\{T, N\} = B^{\perp}$ olduğundan B vektörü $\overline{N}$ vektörüne paraleldir. O halde

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0, \; d \neq 0 \tag{4.17}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d her ikisi de s parametresinin sıfırdan farklı fonksiyonlarıdır. İlk duruna benzer işlemler yapıldığında yine $b\tau = 0$ olarak bulunur ki yine çelişkiye ulaşılmış olur.

O zaman aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3. 3 boyutlu Lorentz uzayında M eğrisinin timelike oskülatör düzlemi, $\overline{M}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemine kongrüent olacak şekilde $(M, \overline{M})$ eğrileri yoktur. M eğrisinin normal düzlemi $NP = Sp\{N, B\}$ timelike düzlem olduğunda ise iki alt durum ortaya çıkar.

a) N spacelike (ya da timelike) vektör ve B timelike (ya da spacelike) vektör olsun. Bu durumda T spacelike vektördür. M de spacelike bir eğridir.

$\overline{N}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{B}\} = Sp\{T, N\} = B^{\perp}$ olduğundan B vektörü $\overline{N}$ vektörüne paraleldir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2\kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \varepsilon_3\tau \\ 0 & -\varepsilon_2\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Burada $\langle T, T\rangle = 1$, $\varepsilon_2 = \langle N, N\rangle$ ve $\varepsilon_3 = \langle B, B\rangle$ dir. Buradan üç farklı alt durum elde edilir. Bu durumlardan burada bahsedilmeyecektir.

b) N ve B vektörleri lineer bağımsız null (lightlike) vektörlerdir.

4.1.4. Durum 4 $NP = \overline{OP}$

3 boyutlu Lorentz uzayında verilen bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemi ile başka bir uzay eğrisinin timelike oskülatör düzlemi kongrüent olabilir mi?

Bu uzayda bir M eğrisinin timelike normal düzlemi başka bir $\overline{M}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemi ile kongrüent olsun. $\overline{M}$ eğrisinin oskülatör düzlemi, $\overline{T}$ spacelike (ya da timelike) vektörü ve $\overline{N}$ timelike (ya da spacelike) vektörü tarafından gerilen timelike düzlem olduğundan binormal vektörü $\overline{B}$, spacelike bir vektördür. Bu durumda $\overline{M}$ eğrisi (4.1) deki Frenet denklemlerini sağlayan spacelike (ya da timelike) eğridir.

$\overline{B}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{N}\} = Sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan $\overline{B}$ vektörü T vektörüne paraleldir. Böylece

$$\bar{Y} = Y + cN + dB, \qquad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.19}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d sıfırdan farklı s parametreli fonksiyonlardır. (4.19) eşitliğinin s'ye göre türevi alnıp (4.18) de verilen Frenet denklemleri uygulandığında

$$\bar{T}f = (1 - c\kappa)T + (c' - \varepsilon_2\tau d)N + (d' + c\varepsilon_3\tau)B \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir. (4.20) denkleminin T ile iç çarpımı sonucunda

$$c = \frac{1}{\kappa} \tag{4.21}$$

bulunur. O halde (4.21) eşitliğinin (4.20) eşitliğinde yerine yazılmasıyla

$$\bar{T}f = (c' - \varepsilon_2 \tau d)N + (d' + c\varepsilon_3 \tau)B \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22) eşitliğinin s'ye göre türevi alındığında

$$\bar{T}f' = (-c'\kappa + \varepsilon_2 d\tau\kappa)T + (c'' - 2\varepsilon_2 d'\tau - \varepsilon_2 d\tau' - \varepsilon_2\varepsilon_3 c\tau^2)N$$

$$+(2\varepsilon_3 c'\tau + \varepsilon_3 c\tau' + d'' - \varepsilon_2\varepsilon_3 d\tau^2)B \tag{4.23}$$

olmak üzere (4.23) ifadesinin T ile iç çarpımı yapılarak

$$d = -\frac{\varepsilon_2 \kappa'}{\tau\kappa^2} \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.21) ve (4.24) eşitliklerinin (4.19) denkleminde kullanılmasıyla $\bar{Y} = Y + \frac{1}{\kappa}N - \frac{\varepsilon_2\kappa'}{\tau\kappa^2}B$ olur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.4 3 boyutlu Lorentz uzayında M, eğriliği ve burulması sırasıyla κ ve τ, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı eğri olsun. Bu eğrinin, N timelike (ya da spacelike) ve B spacelike (ya da timelike) vektörleri tarafından gerilen timelike normal düzlemi $Sp\{N, B\}$ başka bir $\bar{M}$ eğrisinin timelike oskülatör düzlemine kongrüent ise bu durumda $\bar{M}$ eğrisi aşağıdaki gibidir.

$$\bar{M} = M + \frac{1}{\kappa}N - \frac{\varepsilon_2\kappa'}{\tau\kappa^2}B.$$

4.1.5. Durum 5 $\boldsymbol{NP = \overline{NP}}$

Burada ''3 boyutlu Lorentz uzayında verilen bir uzay eğrisi aynı uzayda başka bir eğri ile aynı timelike normal düzlemi paylaşıyor olabilir mi?'' sorusunun cevabı araştırılmıştır.

M eğrisinin timelike normal düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin timelike normal düzlemi olsun. $\bar{M}$ eğrisinin normal düzlemi timelike iken iki farklı durum söz konusudur.

a) $\bar{N}$ spacelike (ya da timelike) bir vektör ve $\bar{B}$ timelike (ya da spacelike) bir vektördür.

Bu durumda $\bar{T}$ spacelike bir vektördür ve $\bar{M}$ spacelike bir eğridir.

$\bar{T}^{\perp} = Sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = Sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan $\bar{T}$ ile T paraleldir. Böylece

$$\bar{Y} = Y + cN + dB, \quad c \neq 0, \; d \neq 0 \tag{4.25}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d sıfırdan farklı s parametreli fonksiyonlardır. (4.25) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (4.18) de verilen Frenet denklemleri uygulandığında

$$\bar{T}f = (1 - c\kappa)T + (c^{'} - \varepsilon_2 \tau d)N + (d^{'} + c\varepsilon_3\tau)B \tag{4.26}$$

eşitliği elde edilir. (4.26) denkleminin T ile iç çarpımı sonucunda $c = \frac{1-f}{\kappa}$ bulunur. Bununla birlikte (4.26) nın N ile iç çarpımıyla $d = \frac{\varepsilon_2}{\tau}\left(\frac{1-f}{\kappa}\right)^{'}$ elde edilir. Bulunan c ve d değerleri (4.25) ifadesinde yerine yazıldığında $\bar{Y} = Y + \frac{1-f}{\kappa}N + \frac{\varepsilon_2}{\tau}\left(\frac{1-f}{\kappa}\right)^{'} B$ olur.

b) $\bar{B}$ vektörü ile $\bar{N}$ vektörü lineer bağımsız lightlike vektörlerdir. Bu koşul altında $\bar{M}$ eğrisi bir pseudo null eğridir.

$\bar{T}^{\perp} = Sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = Sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan T ile $\bar{T}$ birbirine paraleldir. Böylece $\bar{Y} = Y + cN + dB, \; c \neq 0, \; d \neq 0$ olmak üzere $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d sıfırdan farklı s parametreli fonksiyonlardır. Bu adımdan sonra ilk şık ile benzer işlemler uygulandığında yine aynı c ve d değerlerine ulaşılır. Yani $\bar{Y} = Y + \frac{1-f}{\kappa}N + \frac{\varepsilon_2}{\tau}\left(\frac{1-f}{\kappa}\right)^{'} B$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.5. 3 boyutlu Lorentz uzayında M, eğriliği ve burulması sırasıyla κ ve τ, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı eğri olsun. Bu eğrinin, N timelike (ya da spacelike) ve B spacelike (ya da timelike) vektörleri tarafından gerilen timelike normal düzlemi $Sp\{N, B\}$ başka bir $\bar{M}$ eğrisinin timelike normal düzlemine kongrüent ise bu durumda $\bar{M}$ eğrisi $\bar{M} = M + \frac{1-f}{\kappa}N - \frac{\varepsilon_2}{\tau}\left(\frac{1-f}{\kappa}\right)^{'} B$ formundadır.

4.1.6. Durum 6 $NP = \overline{RP}$

Burada ‘’3 boyutlu Lorentz uzayında verilen bir uzay eğrisinin timelike normal düzlemi aynı uzayda başka bir eğrinin timelike rektifiyan düzlemine kongrüent olabilie mi? sorusunun cevabı araştırılmıştır.

M eğrisinin timelike normal düzleminin başka bir $\overline{M}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemi olduğu kabul edilsin. $\overline{M}$ eğrisi timelike rektifiyan düzleme sahip olduğundan iki farklı durum söz konusudur.

a) $\overline{T}$ spacelike (ya da timelike) bir vektör ve $\overline{B}$ timelike (ya da spacelike) bir vektördür.

Bu durumda $\overline{M}$ spacelike (ya da timelike) bir eğridir. $\overline{N}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{B}\} = Sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan $\overline{N}$ ile T paraleldir. Böylece

$$\overline{Y} = Y + cN + dB, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.27}$$

Burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d sıfırdan farklı s parametreli fonksiyonlardır. (4.27) eşitliğinin s’ye göre türevi alınıp (4.18) de verilen Frenet denklemleri uygulandığında

$$\overline{T}f = (1 - c\kappa)T + (c' - \varepsilon_2 \tau d)N + (d' + c\varepsilon_3 \tau)B \tag{4.28}$$

eşitliği elde edilir. (4.28) denkleminin T ile iç çarpımı sonucunda $c = \frac{1}{\kappa}$ bulunur. Bununla birlikte (4.28) in türevi alınıp gerekli Frenet denklemleri kullanılarak $d = e^{-\int \lambda ds}\left(\int e^{\int \lambda ds}\, \mu ds + k\right)$ elde edilir.

Burada $k \in R,\ \lambda = \frac{\tau' f - \tau f'}{2\tau f}$ ve $\mu = \frac{\left(\frac{1}{\kappa}\right)'' f - \left(\frac{1}{\kappa}\right)' f' + f\frac{\tau^2}{\kappa}}{2\varepsilon_2 \tau f}$ dir.

b) $\overline{B}$ vektörü ile T vektörü lineer bağımsız lightlike vektörler iken $\overline{M}$ eğrisi bir Cartan null eğridir.

$T^{\perp} = Sp\{N, B\} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = \overline{N}^{\perp}$ olduğundan T ile $\overline{N}$ birbirine paraleldir. $\overline{Y} = Y + cN + dB,\quad c \neq 0,\ d \neq 0$ olmak üzere $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d sıfırdan farklı s parametreli fonksiyonlardır. İlk şık ile benzer işlemler uygulandığında yine aynı c ve d değerlerine ulaşılır.

Yani $\bar{Y} = Y + \frac{1}{\kappa}N + e^{-\int \lambda ds}\left(\int e^{\int \lambda ds} \mu ds + k\right)B$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.6 3 boyutlu Lorentz uzayında M, eğriliği ve burulması sırasıyla κ ve τ, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı eğri olsun. Bu eğrinin, N timelike (ya da spacelike) ve B spacelike (ya da timelike) vektörleri tarafından gerilen timelike normal düzlemi $Sp\{N, B\}$ başka bir $\bar{M}$ eğrisinin timelike rektifiyan düzlemine kongrüent ise bu durumda $\bar{M}$ eğrisi aşağıdaki gibidir.

$$\bar{Y} = Y + \frac{1}{\kappa}N + e^{-\int \lambda ds}\left(\int e^{\int \lambda ds} \mu ds + k\right)B$$

4.2. Ortak Lightlike Frenet Düzlemlerine Sahip Eğriler

Bu bölümde aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

"3 boyutlu Lorentz uzayında verilen bir eğrinin null (lightlike) Frenet düzlemlerinden birinin başka bir uzay eğrisinin null (lightlike) Frenet düzlemi ile kongrüent olması mümkün müdür?"

Bir önceki durumda incelenen timelike düzlemlere benzer olarak burada da dokuz farklı durum söz konusudur. Bahsedilen bu dokuz durumdan bazıları ele alınacaktır.

3 boyutlu Lorentz uzayında iki farklı eğri $M: I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ ve $\bar{M}: J \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ olsun. M ve $\bar{M}$ nin karşılık gelen noktalarında $\{M, T, N, B\}$ ve $\{\bar{M}, \bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ hareketli üçlüleri olmak üzere M ve $\bar{M}$ nin nin yay parametrelerini, eğrilikleri ve burulmaları sırasıyla s, κ, τ ve $\bar{s}, \bar{\kappa}, \bar{\tau}$ ile gösterilsin. M eğrisinin her bir $M(s)$ noktasında $\{T, N\}$, $\{N, B\}$ ve $\{T, B\}$ tarafından üretilen düzlemler, Öklid uzayındakine benzer şekilde, sırasıyla oskülatör düzlem, normal düzlem ve rektifiyan düzlem olarak bilinir. Bu düzlemler sırasıyla OP, NP ve RP ile gösterilecektir. Şimdi $\bar{M}$, eğrilikleri $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$ ve Frenet vektörleri $\{\bar{T}, \bar{N}\}$ olan keyfi bir birim hızlı uzay eğrisi iken $\bar{M}$ eğrisinin her bir

$\overline{M}(\bar{s})$ noktasında $\{\overline{T},\overline{N}\}$, $\{\overline{N},\overline{B}\}$ ve $\{\overline{T},\overline{B}\}$ tarafından üretilen düzlemler sırasıyla oskülatör düzlem, normal düzlem ve rektifiyan düzlem olmak üzere bu düzlemler sırasıyla $\overline{OP}$, $\overline{NP}$ ve $\overline{RP}$ ile gösterilsin. $f = \frac{d\bar{s}}{ds}$ olsun. Bununla birlikte bu kısımda bahsedilecek eğrilerin Frenet denklemleri için iki farklı durum mevcuttur. Eğri lightlike iken Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Yine κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır, Burada eğri bir doğru ise $\kappa = 0$ diğer durumlarda ise $\kappa = 1$ dir.

$\langle N,N\rangle = \langle B,B\rangle = \langle T,N\rangle = \langle N,B\rangle = 0$, $\langle N,N\rangle = \langle T,B\rangle = 1$ dir ve bununla birlikte $T \times N = -T$, $N \times B = -B$, $B \times T = -N$ eşitlikleri sağlanır.

Eğri pseudo null bir eğri ise Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır. Eğri bir doğru ise eğrilik $\kappa = 0$ diğer durumlarda ise $\kappa = 1$ dir. Aynı zamanda, $\langle N,N\rangle = \langle B,B\rangle = \langle T,N\rangle = \langle T,B\rangle = 0$, $\langle T,T\rangle = \langle N,B\rangle = 1$ ve eşitlikleri sağlanır.

M eğrisinin oskülatör düzlemi $OP = sp\{T,N\}$ eğer null (lightlike) bir düzlem ise iki alt durum ortaya çıkar.

Durum A: T null (lightlike) bir vektör ve N spacelike bir vektördür.

Durum B: T spacelike bir vektör ve N null (lightlike) bir vektördür.

Durum A: T null (lightlike) bir vektör ve N spacelike bir vektör iken M eğrisi $\kappa = 1$ olan bir Cartan null eğridir. Burada üç alt durum vardır.

4.2.1. Durum 1 $\boldsymbol{OP} = \overline{\boldsymbol{OP}}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

E_1^3 Lorentz uzayında verilen bir M eğrisinin null (lightlike) oskülatör düzlemi başka bir $\overline{M}$ uzay eğrisinin null (lightlike) oskülatör düzlemi olabilir mi?

$\overline{M}$ eğrisinin oskülatör düzlemi lighltike iken iki alt durum söz konusudur.

a) $\overline{T}$ null (lightlike) bir vektör ve $\overline{N}$ spacelike bir vektör ise bu durumda $\overline{M}$ eğrisi $\bar{\kappa} = 1$ olan null Cartan eğrisidir.

$\overline{T}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{N}\} = Sp\{T, N\} = T^{\perp}$ olduğundan T ile $\overline{T}$ birbirine paraleldir. O halde

$$\overline{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.27}$$

dir. Burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.27) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (4.25) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa $\overline{T}f = (1 + c' + d\tau)T + (c + d')N - dB$ bulunur. $\overline{T} \in Sp\{T, N\}$ olduğundan ζ, ψ sabitleri için $\overline{T} = \zeta T + \psi B$ yazılabilir. O zaman $(\zeta T + \psi B)f = (1 + c' + d\tau)T + (c + d')N - dB$ olur. Bu son denklemin T ile iç çarpımı yapıldığında $d = 0$ elde edilir ki bu da kabulümüzle çelişir.

b) $\overline{T}$ spacelike bir vektör ve $\overline{N}$ null(lightlike) bir vektör ise bu durumda $\overline{M}$ eğrisi $\bar{\kappa} = 1$ olan pseudo null eğridir.

$\overline{N}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{N}\} = Sp\{T, N\} = T^{\perp}$ olduğundan T ile $\overline{N}$ birbirine paraleldir. O halde

$$\overline{Y} = Y + cT + dN,\ c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.28}$$

dir. Burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.28) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (4.26) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa $\overline{T}f = (1 + c' + d\tau)T + (c + d')N - dB$ bulunur. $\overline{T} \in Sp\{T, N\}$ olduğundan ζ, ψ sabitleri için $\overline{T} = \zeta T + \psi B$ yazılabilir.

O zaman $(\zeta T + \psi B)f = (1 + c' + d\tau)T + (c + d')N - dB$ olur. Bu son denklemin T ile iç çarpımı yapıldığında $d = 0$ elde edilir ki bu da ilk durumda olduğu gibi kabulümüzle çelişir. O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.7. 3 boyutlu Minkowski uzayında aynı lightlike oskülatör düzlemi paylaşan $(M, \bar{M})$ eğri çifti yoktur.

4.2.2. Durum 2 $\boldsymbol{OP = \overline{NP}}$

3 boyutlu Lorentz uzayında verilen bir uzay eğrisinin null (lightlike) oskülatör düzlemi başka bir uzay eğrisinin null (lightlike) normal düzlemi olabilir mi?

Bir M eğrisinin null (lightlike) oskülatör düzleminin başka bir $\bar{M}$ eğrisinin null (lightlike) normal düzlemi olduğu kabul edilsin. $\bar{M}$ eğrisinin normal düzlemi null (lightlike) bir düzlem olarak $\overline{N}$ spacelike vektörü ve $\overline{B}$ null (lightlike) vektörü tarafından gerildiğinden $\bar{M}$ eğrisi $\bar{\kappa} = 1$ olan ve (4.25) ifadesinde verilen Frenet denklemlerini sağlayan bir Cartan null eğridir. $\overline{B}^{\perp} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = Sp\{T, N\} = T^{\perp}$ olduğundan $\overline{B}$ vektörü T vektörüne paraleldir. Bu durumda aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.29}$$

dir. Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.29) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (4.25) ile verilen Frenet denklemleri uygulandığında

$$\bar{T}f = (1 + c' + d\tau)T + (c + d')N - dB \tag{4.30}$$

eşitliği elde edilir. Bu son denklemin T ile iç çarpımı yapıldığında $d = -f$ bulunur. Daha sonra (4.30) denkleminin N ile iç çarpımı sonucunda $c = f'$ elde edilir. Bulunan c ve d değerlerinin (4.29) ifadesinde yerine yazılmasıyla $\bar{Y} = Y + f'T - fN$ sonucuna ulaşılır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.8. M eğrisi, 3 boyutlu Lorentz uzayında eğriliği κ ve burulması τ olan ve Frenet vektörleri T, N, B olan birim hızlı eğri olsun. M eğrisinin, T null (lightlike) vektörü ve N spacelike vektörü tarafından gerilen null (lightlike) oskülatör düzlemi $Sp\{T, N\}$ bir başka $\bar{M}$ eğrisinin null (lightlike) normal düzlemi ise $\bar{M}$ eğrisi aşağıdaki biçimdedir.

$\bar{M} = M + \frac{d^2\bar{s}}{ds^2}T - \frac{d\bar{s}}{ds}N.$

4.2.3. Durum 3 $\boldsymbol{OP} = \overline{\boldsymbol{RP}}$

3 boyutlu Lorentz uzayında verilen bir uzay eğrisinin null (lightlike) oskülatör düzlemi başka bir uzay eğrisinin null (lightlike) rektifiyan düzlemi ile kongrüent olabilir mi?

Bir M eğrisinin null (lightlike) oskülatör düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin null (lightlike) rektifiyan düzlemi ile kongrüent olsun. $\bar{M}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi $\bar{T}$ spacelike vektörü ve $\bar{B}$ null (lightlike) vektörü tarafından gerilen bir null (lightlike) düzlem olduğundan ve $\bar{M}$ eğrisi $\bar{\kappa} = 1$ olan bir pseudo null eğridir. $\bar{B}^{\perp} = Sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = Sp\{T, N\} = T^{\perp}$ olduğundan $\bar{B}$ vektörü T vektörüne paraleldir. Bu durumda aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.31}$$

dir. Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.31) ifadesinin s ye göre türevi alınıp (4.25) ile verilen Frenet denklemleri uygulandığında $\bar{T}f = (1 + c' + d\tau)T + (c + d')N - dB$ eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğin T ile iç çarpımı sonucunda $d = 0$ bulunur ki bu durum varsayımımızla çelişir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.3 3 boyutlu Lorentz uzayında M eğrisinin, T null (lightlike) vektörü ve N spacelike vektörü tarafından gerilen $Sp\{T, N\}$ null (lightlike) oskülatör düzleminin $\bar{M}$ eğrisinin null (lightlike) rektifiyan düzlemine kongrüent olduğu hiçbir $(M, \bar{M})$ eğri çifti yoktur.

4.2.4. Durum 4 $\boldsymbol{NP} = \overline{\boldsymbol{OP}}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

3 boyutlu Lorentz uzayında bir uzay eğrisinin lightlike normal düzlemi başka bir eğrinin lightlike oskülatör düzlemi ile kongrüent olabilir mi?

Bu uzayda bir M eğrisinin lightlike normal düzleminin başka bir $\overline{M}$ eğrisinin lightlike oskülatör düzlemi ile kongrüent olduğu kabul edilsin. Burada iki alt durum söz konusudur.

a) $\overline{T}$ lightlike bir vektör ve $\overline{N}$ spacelike bir vektör ise, $\overline{M}$ $\kappa = 1$ olan Cartan null eğridir.

$\overline{T}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{N}\} = Sp\{N, B\} = B^{\perp}$ olduğundan B ile $\overline{T}$ paraleldir. Bununla birlikte

$$\overline{Y} = Y + cN + dB, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.32}$$

dir. Burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.32) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (4.25) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\overline{T}f = (1 + c\tau)T + (c' - d\tau)N + (d' - c)B \tag{4.33}$$

olmak üzere bu son ifadenin B ile iç çarpımı yapıldığında $c = -\frac{1}{\tau}$ bulunur ve bu c değeri ve (4.33) denkleminde yerine yazılarak

$$\overline{T}f = (c' - d\tau)N + (d' - c)B \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.34) denkleminin kendisi ile iç çarpımı sounucunda ise $d = \frac{\tau'}{\tau^3}$ bulunur. Son olarak bu c ve d ifadeleri (4.32) de yerine yazılarak $\overline{Y} = Y - \frac{1}{\tau}N + \frac{\tau'}{\tau^3}B$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.9. *M* eğrisi, 3 boyutlu Lorentz uzayında eğriliği κ, burulması τ ve Frenet vektörleri T, N, B olan birim hızlı eğri olsun. M eğrisinin null (lightlike) normal düzlemi bir başka $\overline{M}$ eğrisinin null (lightlike) oskülatör düzlemi ile kongrüent ise $\overline{M}$ eğrisi $\overline{M} = M + \frac{1}{\tau}N + \frac{\tau'}{\tau^3}B$ biçimindedir.

b) $\overline{T}$ spacelike bir vektör ve $\overline{N}$ lightlike bir vektör iken $\overline{M}$, $\kappa = 1$ olan pseudo null bir eğridir ve (4.26) ile verilen Frenet denklemlerini sağlar.

$\overline{N}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{N}\} = Sp\{N, B\} = B^{\perp}$ olduğundan B ile $\overline{N}$ paraleldir. Bununla birlikte

$$\overline{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.35}$$

dir. Burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.35) denkleminin s ye göre türevi alınıp (4.25) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\overline{T}f = (1 + c\tau)T + (c' - d\tau)N + (d' - c\kappa)B \tag{4.36}$$

elde edilir. (4.36) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında $c = -\frac{1}{\tau}$ ve bu c değeri (4.36) da yerine yazıldığında

$$\overline{T} = (c' - d\tau)N + (d' - c\kappa)B \tag{4.37}$$

bulunur. (4.37) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\overline{T}f' + f^2\overline{\kappa N} &= (c' - d\tau)\tau T + (c'' - 2d'\tau - d\tau' + c\kappa\tau)N \\ &+(-2c'\kappa - c\kappa' + d'' + d\kappa\tau)B\end{aligned}$$

elde edilir ki bu son denklemin B ile iç çarpımı yapıldığında

$$c' - d\tau = 0 \tag{4.38}$$

bulunur. Son olarak (4.37) denkleminin kendisi ile iç çarpımı yapıldığında

$$f^2 = (c' - d\tau)^2 \tag{4.39}$$

olarak hesaplanır. (4.38) ve (4.39) eşitliklerinden $f = 0$ bulunur. Bu da çelişkidir. O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.10. 3 boyutlu Lorentz uzayında verilen M eğrisinin lightlike normal düzlemi bir başka $\overline{M}$ eğrisinin lightlike oskülatör düzlemine kongrüent olacak şekilde $(M, \overline{M})$ eğri çifti yoktur.

4.2.5. Durum 5 $\boldsymbol{NP = \overline{NP}}$

Burada ‘’3 boyutlu Lorentz uzayında iki farklı uzay eğrisinin aynı lightlike normal düzlemi paylaşması mümkün müdür?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

M eğrisinin lightlike normal düzleminin başka bir $\overline{M}$ eğrisinin de lightlike normal düzlemi olduğu kabul edilsin. Burada $\overline{M}$ eğrisinin oskülatör düzlemi $\overline{N}$ spacelike vektörü ve lightlike $\overline{B}$ vektörü tarafından üretilen lightlike bir düzlemdir. Bu durumda $\overline{M}$ eğrisi (4.25) ile verilen Frenet denklemlerini sağlayan ve $\bar{\kappa} = 1$ olan Cartan null eğridir.

$\overline{N}^{\perp} = Sp\{\overline{T}, \overline{N}\} = Sp\{N, B\} = B^{\perp}$ olduğundan B ile $\overline{N}$ paraleldir. Bununla birlikte

$$\overline{Y} = Y + cN + dB, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.40}$$

dir. Burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.40) denkleminin s ye göre türevi alınıp gerekli (4.25) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\overline{T}f = (1 + c\tau)T + (c' - d\tau)N + (d' - c)B \tag{4.41}$$

(4.41) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında

$$c = \frac{f-1}{\tau} \tag{4.42}$$

bulunur ve (4.41) denkleminin N ile iç çarpımı ile

$$d = \left(\frac{f-1}{\tau}\right)' \frac{1}{\tau} \tag{4.43}$$

sonucuna ulaşılır.

(4.42) ve (4.43) ifadeleri (4.41) de kullanıldığında $\overline{Y} = Y + \left(\frac{f-1}{\tau}\right) N + \left(\frac{f-1}{\tau}\right)' \frac{1}{\tau} B$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.11. M, 3 boyutlu Lorentz uzayında sıfırdan farklı κ, τ eğriliklerine sahip, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. M eğrisinin lightlike normal düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin lightlike normal düzlemi ise $\bar{M}$ eğrisinin parametrizasyonu $\bar{M} = M + \left(\frac{f-1}{\tau}\right)N + \left(\frac{f-1}{\tau}\right)' \frac{1}{\tau}B$ şeklindedir.

4.2.6. Durum 6 $\boldsymbol{NP = \overline{RP}}$

Burada ‘’3 boyutlu Lorentz uzayında bir M eğrisinin lightlike normal düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin lightlike rektifiyan düzlemine kongrüent olabilir mi?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

$\bar{M}$ eğrisinin lightlike rektifiyan düzlemi, spacelike $\bar{T}$ vektörü ve lightlike $\bar{B}$ vektörü tarafından gerilmiş bir düzlemdir. Bu durumda $\bar{M}$ eğrisi bir pseudo null eğridir. (4.26) ile verilen Frenet denklemlerini sağlar.

$\bar{B}^{\perp} = Sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = Sp\{N, B\} = B^{\perp}$ olduğundan B ile $\bar{B}$ paraleldir. Bununla birlikte

$$\bar{Y} = Y + cN + dB, \quad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.44}$$

dir. Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.44) denkleminin s ye göre türevi alınıp (4.25) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\bar{T}f = (1 + c\tau)T + (c' - d\tau)N + (d' - c)B \tag{4.45}$$

elde edilir. (4.45) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında $c = -\frac{1}{\tau}$ bulunur ve bu c değerinin (4.45) denkleminde kullanılmasıyla

$$\bar{T}f = +(c' - d\tau)N + (d' - c)B \tag{4.46}$$

elde edilir. $N = \bar{T}$ olduğundan (4.46) eşitliğinin T ile iç çarpımı yapılırsa $d' - c = 0$ ve buradan da $d = -\int \frac{ds}{\tau}$ olarak bulunur. Elde edilen c ve d sabitleri (4.44) eşitliğinde yerine yazıldığında $\bar{Y} = Y - \frac{1}{\tau}N - \int \frac{ds}{\tau}B$ sonucuyla aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.12. M, 3 boyutlu Lorentz uzayında sıfırdan farklı κ, τ eğriliklerine sahip, Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. M eğrisinin lightlike normal düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin lightlike rektifiyan düzlemi ise $\bar{M}$ eğrisinin parametrizasyonu $\bar{M} = M - \frac{1}{\tau}N - \int \frac{ds}{\tau} B$ şeklindedir.

4.2.7. Durum 7 $\boldsymbol{RP = \overline{OP}}$

Burada ‘’3 boyutlu Lorentz uzayında bir M eğrisinin lightlike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin lightlike oskülatör düzlemine kongrüent olabilir mi?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

M eğrisinin lightlike rektifiyan düzleminin başka bir M eğrisinin lightlike oskülatör düzlemi olduğu kabul edilsin. Burada iki durum söz konusudur.

a) $\bar{T}$ lightlike vektör ve $\bar{N}$ spacelike bir vektör ise $\bar{M}$, $\kappa = 1$ olan bir Cartan null eğridir.

$\bar{T}^{\perp} = Sp\{\bar{T}, \bar{N}\} = Sp\{T, B\} = B^{\perp}$ olduğundan B vektörü $\bar{T}$ ye paraleldir. Bununla birlikte

$$\bar{Y} = Y + cT + dB, \quad c \neq 0, \ d \neq 0 \tag{4.47}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.47) denkleminin s ye göre türevi alınıp (4.26) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\bar{T}f = (1 + c' - d)T + cN + (d' - c\tau)B \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.48) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında $c = 0$ bulunur ki bu da kabulümüzle çelişir.

b) $\bar{T}$ spacelike bir vektör ve $\bar{N}$ lightlike bir vektör ise $\bar{M}$, $\kappa = 1$ olan bir pseudo null eğridir.

$\bar{N}^{\perp} = Sp\{\bar{T}, \bar{N}\} = Sp\{T, B\} = B^{\perp}$ olduğundan B vektörü $\bar{N}$ ye paraleldir. Bununla birlikte

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0, \ d \neq 0 \tag{4.49}$$

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır.

(4.49) denkleminin s ye göre türevi alınıp (4.26) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\bar{T}f = (1 + c' - d)T + cN + (d' - c\tau)B \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.50) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında $c = 0$ bulunur ki bu da ilk durumla aynı şekilde bir çelişkidir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.13. 3 boyutlu Lorentz uzayında M eğrisinin lightlike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin lightlike oskülatör düzlemine kongrüent olacak şekilde $(M, \bar{M})$ eğri çifti yoktur.

4.2.8. Durum 8 $RP = \overline{NP}$

Burada ‘’3 boyutlu Lorentz uzayında bir M eğrisinin lightlike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin lightlike normal düzlemine kongrüent olabilir mi?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

M eğrisinin lightlike rektifiyan düzleminin başka bir $\bar{M}$ eğrisinin lightlike normal düzlemi olduğu kabul edilsin. $\bar{B}^{\perp} = Sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = Sp\{T, B\} = B^{\perp}$ olduğundan B vektörü $\bar{B}$ ye paraleldir. Bununla birlikte

$$\bar{Y} = Y + cT + dB, \quad c \neq 0, \ d \neq 0 \tag{4.51}$$

dir ve burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.51) denkleminin s ye göre türevi alınıp (4.26) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\bar{T}f = (1 + c^{'} - d)T + cN + (d^{'} - c\tau)B \tag{4.52}$$

elde edilir. (4.52) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında

$$c = f \tag{4.53}$$

bulunur.

$T = \bar{N}$ olmak üzere (4.52) eşitliğinin T ile iç çarpımı sonucunda $1 + c^{'} - d = 0$ bulunur ki bu sonuçla birlikte

$$d = f^{'} + 1 \tag{4.54}$$

olarak hesaplanır. Bulunan (4.53) ve (4.54) ifadelerinin (4.52) de eşitliğinde yerine yazılmasıyla $\bar{Y} = Y + fT + (f^{'} + 1)B$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.14. 3 boyutlu Lorentz uzayında, eğrilikleri κ, τ ve Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan bir M eğrisinin lightlike rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin lightlike normal düzlemi ise bu durumda $\bar{M}$ eğrisinin parametrizasyonu

$$\bar{M} = M + fT + (f^{'} + 1)B$$

şeklindedir.

4.2.9. Durum 9 $\boldsymbol{RP = \overline{RP}}$

Bu son kısımda ‘’3 boyutlu Lorentz uzayında bir M eğrisi ile başka bir $\bar{M}$ eğrisi ile aynı lightlike rektifiyan düzlemi paylaşabilir mi?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

3 boyutlu Lorentz uzayında bir M eğrisi ile başka bir $\bar{M}$ eğrisi ile aynı lightlike rektifiyan düzlemi paylaştığı kabul edilsin. $\bar{M}$ eğrisinin lightlike rektifiyan düzlemi, spacelike $\bar{T}$ vektörü ve lightlike $\bar{B}$ vektörü tarafından gerildiği için $\bar{M}$, $\kappa = 1$ olan pseudo null bir eğridir. (4.26) ile verilen Frenet denklemlerini sağlar.

$\bar{B}^{\perp} = Sp\{\bar{T}, \bar{B}\} = Sp\{T, B\} = B^{\perp}$ olduğundan $\bar{B}$ ile B paraleldir. O halde

$$\bar{Y} = Y + cN + dB \qquad c \neq 0,\ d \neq 0 \tag{4.55}$$

dir ve burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri, c ve d ise s parametresine bağlı sıfırdan farklı fonksiyonlardır. (4.55) denkleminin s ye göre türevi alınıp (4.26) ile verilen Frenet denklemleri uygulanırsa

$$\bar{T}f = (1 + c' - d)T + cN + (d' - d\tau)B \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.56) denkleminin B ile iç çarpımı yapıldığında $c = 0$ bulunur ki, bu sonuç kabülümüzle çelişir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.15. 3 boyutlu Lorentz uzayında aynı lightlike rektifiyan düzlemi paylaşan $(M, \bar{M})$ eğri çifti yoktur.

5. BÖLÜM
3 BOYUTLU GALİLE UZAYINDA FRENET DÜZLEMLERİ

Burada yine önceki durumlara benzer şekilde 3 boyutlu Galile uzayında dokuz farklı durum için bir eğrinin Frenet düzlemi bir başka eğrinin Frenet düzlemi olabilir mi sorusunun cevabı araştırılmıştır.

Aynı açık aralık $I \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı iki uzay eğrisi M ve $\bar{M}$ ele alınsın M ve $\bar{M}$ nin karşılık gelen noktalarında $\{M, T, N, B\}$ ve $\{\bar{M}, \bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ hareketli üçlüleri olmak üzere M ve $\bar{M}$ nin nin yay parametreleri, eğrilikleri ve burulmaları sırasıyla s, κ, τ ve $\bar{s}, \bar{\kappa}, \bar{\tau}$ ile gösterilsin. M eğrisinin her bir $M(s)$ noktasında $\{T, N\}$, $\{N, B\}$ ve $\{T, B\}$ tarafından üretilen düzlemler sırasıyla oskülatör düzlem, normal düzlem ve rektifiyan düzlem olarak bilinir. Bu düzlemler sırasıyla OP, NP ve RP ile gösterilecektir. $\bar{M}$ ise eğrilikleri $\bar{\kappa}$, $\bar{\tau}$ ve Frenet vektörleri $\{\overline{T}, \overline{N}\}$ olan keyfi bir birim hızlı uzay eğrisi iken $\bar{M}$ eğrisinin her bir $\bar{M}(\bar{s})$ noktasında $\{\overline{T}, \overline{N}\}$, $\{\overline{N}, \overline{B}\}$ ve $\{\overline{T}, \overline{B}\}$ tarafından üretilen düzlemler sırasıyla oskülatör düzlem, normal düzlem ve rektifiyan düzlem olmak üzere bu düzlemler sırasıyla $\overline{OP}$, $\overline{NP}$ ve $\overline{RP}$ ile gösterilsin. $f = \frac{d\bar{s}}{ds}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki Frenet denklemleri elde edilir:

$$T' = \kappa N, \quad N' = \tau B, \quad B' = -\tau N \tag{5.1}$$

$$\bar{T}' = f\bar{\kappa}\,\bar{N}, \quad \bar{N}' = f\bar{\tau}\bar{B}, \quad \bar{B}' = -f\bar{\tau}\bar{N} \tag{5.2}$$

“3 boyutlu Galile uzayında farklı uzay eğrilerinin aynı Frenet düzlemlerini paylaşması mümkün müdür?” sorusunun cevabı için yine dokuz farklı durum söz konusudur.

5.1. Durum 1 $OP = \overline{OP}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

“3 boyutlu Galile uzayında verilen iki farklı uzay eğrisi aynı oskülatör düzlemi paylaşabilir mi?”

Verilen M eğrisinin oskülatör düzleminin başka bir $\bar{M}$ uzay eğrisinin oskülatör düzlemi olduğu kabul edilsin. O halde

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0 \text{ veya } d \neq 0 \tag{5.3}$$

yazılabilir.

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d ikisi aynı anda sıfır olmayan s parametresinin fonksiyonlarıdır.(5.3) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (5.1) ve (5.2) de verilen Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\bar{T} = (1 + c')\frac{1}{f}T + (c\kappa + d')\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f}B \tag{5.4}$$

denklemine ulaşılır. Bununla birlikte (5.4) eşitliğinden

$$\bar{T}f - (1 + c')T = (c\kappa + d')N + d\tau B \tag{5.5}$$

elde edilir. Galile uzayında $M = (s, y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi için

$T(s) = \left(1, y'(s), z'(s)\right)$,

$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\left(0, y''(s), z''(s)\right)$,

$B(s) = \frac{1}{\kappa(s)}(0, -z''(s), y''(s))$ olmak üzere

$$\bar{T}f - (1 + c')T = (0, \frac{c\kappa + d'}{\kappa}y'' - \frac{d\tau}{\kappa}z'', \frac{c\kappa + d'}{\kappa}z'' + \frac{d\tau}{\kappa}y'') \tag{5.6}$$

(5.6) eşitliği yazılabilir. Buradan $f - (1 + c') = 0$ olduğu kolayca görülebilir. O halde $c = \int f\, ds - s + c_1, \quad c_1 \in R$ olarak elde edilir.

Diğer taraftan $\bar{T} \epsilon Sp\{T, N\}$ olduğundan (5.4) ifadesinden $d\tau = 0$ ve bu durumda $d = 0$ veya $\tau = 0$ dır. $\tau = 0$ olduğu durumda M bir uzay eğrisi değil düzlemsel eğridir.

$d = 0$ iken $f - (1 + c') = 0$ ifadesi (5.6) eşitliğinde yerine yazılarak $\bar{T}f - Tf = (0, \frac{c\kappa + d'}{\kappa}y'', \frac{c\kappa + d'}{\kappa}z'')$ elde edilir. Burada son eşitliğin N ile iç çarpımı yapıldığında $c\kappa + d' = 0$ bulunur. Elde edilen sonuçlar (5.4) ifadesinde kullanıldığında $\bar{T} = T$ bulunur. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1. 3 boyutlu Galile uzayında Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan M eğrisinin oskülatör düzleminin, Frenet vektörleri $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ olan $\bar{M}$eğrisinin de oskülatör düzlemi olması için $\bar{T} = T$ olmalıdır.

5.2. Durum 2 $\boldsymbol{OP = \overline{NP}}$

Bu durumda aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

"3 boyutlu Galile uzayında verilen iki farklı uzay eğrisinden birinin oskülatör düzlemi diğer eğrinin normal düzlemi olabilir mi?"

Bu uzayda Verilen M eğrisinin oskülatör düzleminin başka bir $\bar{M}$ uzay eğrisinin normal düzlemi olduğu kabul edilsin. O halde

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0 \text{ veya } d \neq 0 \tag{5.7}$$

yazılabilir. Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d ikisi aynı anda sıfır olmayan s parametresinin fonksiyonlarıdır.(5.7) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (5.1) ve (5.2) de verilen Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\bar{T} = (1 + c^{'})\frac{1}{f}T + (c\kappa + d^{'})\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f}B \tag{5.8}$$

denklemine ulaşılır. (5.8) eşitliğinin her iki tarafının T ile iç çarpımı yapılırsa

$$(1 + c^{'}) = 0 \Rightarrow c = -s + c_1, \quad c_1 \in R \tag{5.9}$$

elde edilir. Bununla birlikte (5.8) eşitliğinin her iki tarafının N ile iç çarpımı yapılıp (5.9) sonucu kullanılırsa $c\kappa + d^{'} = 0$ bulunur.

Aynı zamanda $\bar{T}^{\perp} = Sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = Sp\{T, N\} = B^{\perp}$ olduğundan $\bar{T}$ ile B paraleldir. O halde $B(s) = \frac{1}{\kappa(s)}(0, -z^{''}(s), y^{''}(s))$ iken $\bar{T}(s) = \frac{k}{\kappa(s)}(0, -z^{''}(s), y^{''}(s))$ yazılabilir. Bu değerlerle $\langle \bar{T}f, B \rangle = kf,\ k \in R$ elde edilir. Bununla birlikte (5.8) eşitliğinin B ile iç çarpımı yapılırsa $\langle \bar{T}f, B \rangle = d\tau$ bulunur. O halde $d\tau = kf \Rightarrow \mathrm{d} = \frac{\mathrm{kf}}{\tau}$ olur. Bulunan d değeriyle birlikte (5.9) ifadesinin (5.7) de kullanılmasıyla $\bar{Y} = Y + (-s + c_1)T + \frac{kf}{\tau}N$ elde edilir. O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.2. 3 boyutlu Galile uzayında verilen bir M eğrisinin oskülatör düzlemi bu uzaydaki başka bir $\bar{M}$ eğrisinin normal düzlemi ise $\bar{M}$ eğrisi $\bar{M} = M + (-s + c_1)T + \frac{k}{\tau}\frac{d\bar{s}}{ds}N$ formundadır.

5.3. Durum 3 $\boldsymbol{OP = \overline{RP}}$

Burada ‘’3 boyutlu Galile uzayında verilen bir eğrinin oskülatör düzlemi bu uzayda başka bir eğrinin rektifiyan düzlemi olabilir mi?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

Bu uzayda verilen M eğrisinin oskülatör düzleminin başka bir $\bar{M}$ uzay eğrisini rektifiyan düzlemi olduğu kabul edilsin. O halde

$$\bar{Y} = Y + cT + dN, \quad c \neq 0 \text{ veya } d \neq 0 \tag{5.10}$$

yazılabilir.

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d ikisi aynı anda sıfır olmayan s parametresinin fonksiyonlarıdır.(5.10) eşitliğinin s’ye göre türevi alınıp (5.1) ve (5.2) de verilen Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\bar{T} = (1 + c')\frac{1}{f}T + (c\kappa + d')\frac{1}{f}N + d\tau\frac{1}{f}B \tag{5.11}$$

denklemine ulaşılır. $\bar{T} \in Sp\{T, N\}$ olduğundan (5.11) eşitliğinden $d\tau = 0$ bulunur. Bu durumda $d = 0$ veya $\tau = 0$ dir. $\tau = 0$ olduğu durumda M düzlemsel eğridir. $d = 0$ iken $\bar{T} = (1 + c')\frac{1}{f}T + (c\kappa + d')\frac{1}{f}N$ elde edilir. Bu son denklemden

$$\bar{T}f - (1 + c')T = (c\kappa + d')N \tag{5.12}$$

yazılabilir. (5.12) denkleminin T ile iç çarpımı sonucunda $1 + c' = f$ ve buradan da

$$c = \int f ds - s + c_1, \quad c_1 \in R \tag{5.13}$$

olarak bulunur. Bulunan d değeriyle birlikte (5.13) ifadesinin (5.10) da kullanılmasıyla $\bar{Y} = Y + (\int f ds - s + c_1)T$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3. 3 boyutlu Galile uzayında verilen bir M eğrisinin oskülatör düzlemi bu uzaydaki başka bir $\bar{M}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi ise iki durum söz konusudur.

a) $\bar{M}$ eğrisinin denklemi $\bar{M} = M + (\int f ds - s + c_1)T$ şeklindedir.

b) $\bar{M}$ düzlemsel bir eğridir.

5.4. Durum 4 $\boldsymbol{NP = \overline{OP}}$

Burada ‘’3 boyutlu Galile uzayında verilen bir eğrinin normal düzlemi diğer bir eğrinin oskülatör düzlemine kongrüent olabilir mi?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

Bu uzayda verilen M eğrisinin normal düzleminin bu uzayda başka bir $\bar{M}$ uzay eğrisinin oskülatör düzlemi olması durumunda

$$\bar{Y} = Y + cN + dB \qquad c \neq 0 \text{ veya } d \neq 0 \tag{5.14}$$

yazılabilir.

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d ikisi aynı anda sıfır olmayan s parametresinin fonksiyonlarıdır. (5.14) eşitliğinin s’ye göre türevi alınıp (5.1) ve (5.2) de verilen Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\bar{T}f = T + (c' - d\tau)N + (c\tau + d')B \tag{5.15}$$

elde edilir. Burada $\bar{T} \in Sp\{N, B\}$ dir. Ancak (5.15) eşitliği bu durumla çelişir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.4. 3 boyutlu Galile uzayında verilen bir M eğrisinin normal düzlemi bu uzaydaki başka bir $\bar{M}$ eğrisinin oskülatör düzlemi olacak şekilde $(M, \bar{M})$ eğri çifti yoktur.

5.5. Durum 5 $\boldsymbol{NP} = \overline{\boldsymbol{NP}}$

Burada aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

“3 boyutlu Galile uzayında verilen iki farklı uzay eğrisi aynı normal düzlemi paylaşıyor olabilir mi?’’

Bu uzayda verilen farklı M ve $\overline{M}$ eğrilerinin aynı normal düzlemi paylaştığı kabul edilsin. Bu durumda

$$\overline{Y} = Y + cN + dB \qquad c \neq 0 \text{ veya } d \neq 0 \tag{5.16}$$

yazılabilir.

Burada $\overline{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d ikisi aynı anda sıfır olmayan s parametresinin fonksiyonlarıdır. (5.16) eşitliğinin s’ye göre türevi alınıp (5.1) ve (5.2) de verilen Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\overline{T}f = T + (c^{'} - d\tau)N + (c\tau + d^{'})B \tag{5.17}$$

elde edilir. M ve $\overline{M}$ eğrileri birim hızlı iken (5.17) eşitliğinden $f = 1$ olur ki bu da eğrilerin parametreleri arasında $s = \bar{s}$ eşitliğinin varlığını gösterir.

Bununla birlikte $\overline{T}^{\perp} = Sp\{\overline{N}, \overline{B}\} = Sp\{N, B\} = T^{\perp}$ olduğundan T ile $\overline{T}$ birbirine paraleldir. O halde $\overline{T} = T$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.5. 3 boyutlu Galile uzayında Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan M eğrisinin normal düzleminin, Frenet vektörleri $\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}\}$ olan $\overline{M}$ eğrisinin de normal düzlemi olması için $\overline{T} = T$ olmalıdır.

5.6. Durum 6 $\boldsymbol{NP} = \overline{\boldsymbol{RP}}$

Burada ‘’3 boyutlu Galile uzayında verilen bir eğrinin normal düzlemi diğer bir eğrinin rektifiyan düzlemine kongrüent olabilir mi?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

Bu uzayda verilen M eğrisinin normal düzleminin bu uzayda başka bir $\overline{M}$ uzay eğrisinin rektifiyan düzlemi olması durumunda

$$\bar{Y} = Y + cN + dB \qquad c \neq 0 \text{ veya } d \neq 0 \tag{5.18}$$

yazılabilir.

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d ikisi aynı anda sıfır olmayan s parametresinin fonksiyonlarıdır. (5.18) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (5.1) ve (5.2) de verilen Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\bar{T}f = T + (c' - d\tau)N + (c\tau + d')B \tag{5.19}$$

elde edilir. Burada $\bar{T} \in Sp\{N, B\}$ dir. Ancak (5.19) eşitliği bu durumla çelişir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.6 3 boyutlu Galile uzayında verilen bir M eğrisinin normal düzlemi bu uzaydaki başka bir $\bar{M}$ eğrisinin rektifiyan düzlemi olacak şekilde $(M, \bar{M})$ eğri çifti yoktur.

5.7. Durum 7 $\boldsymbol{RP = \overline{OP}}$

Burada aşağıdaki sorunun cevabı araştırılmıştır.

"3 boyutlu Galile uzayında verilen bir eğrinin rektifiyan düzlemi bu uzayda başka bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemine kongrüent olabilir mi?''

Bu uzayda verilen bir M eğrisinin rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin oskülatör düzlemine kongrüent olsun. O halde

$$\bar{Y} = Y + cT + dB \qquad c \neq 0 \text{ veya } d \neq 0 \tag{5.20}$$

yazılabilir.

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d ikisi aynı anda sıfır olmayan s parametresinin fonksiyonlarıdır. (5.20) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (5.1) ve (5.2) de verilen Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\bar{T}f = (1 + c')T + c\kappa N + (d' - d\tau)B \tag{5.21}$$

elde edilir. (5.21) eşitliğinden

$$\bar{T}f-(1+c^{'})T=c\kappa N+(d^{'}-d\tau)B \tag{5.22}$$

yazılabilir. Bu son ifadenin T ile iç çarpımı yapılırsa

$$f=1+c' \tag{5.23}$$

bulunur.

Bununla birlikte (5.22) eşitliğinin $N(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\left(0,y^{''}(s),z^{''}(s)\right)$ vektörü ile iç çarpımının sonucunda

$$c\kappa=0 \tag{5.24}$$

elde edilir. Son olarak (5.22) eşitliğinin $B(s)=\frac{1}{\kappa(s)}(0,-z^{''}(s),y^{''}(s))$ vektörü ile iç çarpımı yapıldığında

$$d^{'}-d\tau=0 \tag{5.25}$$

sonucuna ulaşılır. O halde (5.23), (5.24) ve (5.25) eşitliklerinin (5.21) ifadesinde kullanılmasıyla $\bar{T}=T$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.7 3 boyutlu Galile uzayında Frenet vektörleri $\{T,N,B\}$ olan M eğrisinin rektifiyan düzleminin, Frenet vektörleri $\{\bar{T},\bar{N},\bar{B}\}$ olan $\bar{M}$ eğrisinin oskülatör düzlemi olması için $\bar{T}=T$ olmalıdır.

5.8. Durum 8 $\boldsymbol{RP=\overline{NP}}$

Burada ‘’3 boyutlu Galile uzayında verilen bir eğrinin rektifiyan düzlemi bu uzayda diğer bir eğrinin normal düzlemine kongrüent olabilir mi?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

Bu uzayda verilen bir M eğrisinin rektifiyan düzlemi başka bir $\bar{M}$ eğrisinin normal düzlemine kongrüent olsun. O halde

$$\bar{Y}=Y+cT+dB \qquad c\neq 0 \text{ veya } d\neq 0 \tag{5.26}$$

yazılabilir.

Burada $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\bar{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d ikisi aynı anda sıfır olmayan s parametresinin fonksiyonlarıdır. (5.26) eşitliğinin s'ye göre türevi alınıp (5.1) ve (5.2) de verilen Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\bar{T}f = (1 + c^{'})T + c\kappa N + (d^{'} - d\tau)B \tag{5.27}$$

elde edilir. (5.27) eşitliğinden

$$\bar{T}f - (1 + c^{'})T = c\kappa N + (d^{'} - d\tau)B \tag{5.28}$$

yazılabilir. Bununla birlikte $\bar{T}^{\perp} \in Sp\{\bar{N}, \bar{B}\} = Sp\{T, B\} = N^{\perp}$ olduğundan $\bar{T}$ ile N birbirine paraleldir. O halde $k \in R$ olmak üzere $\bar{T} = \frac{1}{\kappa}(0, ky^{''}, kz^{''})$ dir. O halde

$$T(s) = \left(1, y^{'}(s), z^{'}(s)\right),$$

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\left(0, y^{''}(s), z^{''}(s)\right),$$

$$B(s) = \frac{1}{\kappa(s)}(0, -z^{''}(s), y^{''}(s))$$

olmak üzere (5.27) eşitliğinden

$$\frac{f}{\kappa}(0, ky^{''}, kz^{''}) = (1 + c^{'}, (1 + c^{'})y^{'} + cy'' - \frac{d^{'} - d\tau}{\kappa}z^{''}, (1 + c^{'})z^{'}$$

$$+cz^{''} + \frac{d^{'} - d\tau}{\kappa}y'') \tag{5.29}$$

bulunur. Bu eşitlikten $1 + c^{'} = 0$ ve $c_1 \in R$ ve $c = -s + c_1,\ c_1 \in R$ sonucuna ulaşılır. Böylece (5.29) eşitliği

$$\frac{f}{\kappa}(0, ky^{''}, kz^{''}) = (0, cy' - \frac{d^{'} - d\tau}{\kappa}z^{''}, cz^{''} + \frac{d^{'} - d\tau}{\kappa}y'') \tag{5.30}$$

ifadesine indirgenmiş olur. (5.30) eşitliğinin N ile iç çarpımı yapılırsa

$$fk = c\kappa \tag{5.31}$$

ve (5.30) eşitliğinin B ile iç çarpımı yapılırsa

$$d^{'} - d\tau = 0 \tag{5.32}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.8 3 boyutlu Galile uzayında verilen bir M eğrisinin rektifiyan düzleminin, başka bir $\overline{M}$ eğrisinin normal düzlemi olabilmesi için

$\overline{M} = M + cT + dB \quad c \neq 0$ veya $d \neq 0$

olmak üzere $c = -s + c_1,\ c_1 \in R$ ve $d^{'} - d\tau = 0$ olmalıdır.

5.9. Durum 9 $\boldsymbol{RP = \overline{RP}}$

Bu son durumda ‘’3 boyutlu Galile uzayında verilen iki farklı eğri aynı rektifiyan düzlemi paylaşıyor olabilir mi?’’ sorusunun cevabı araştırılmıştır.

3 boyutlu Galile uzayında verilen farklı M ve $\overline{M}$ eğrileri aynı rektifiyan düzlemi paylaşıyor olsunlar. O halde $\bar{Y}$ ve Y sırasıyla $\overline{M}$ ve M eğrilerinin yer vektörleri ve c, d ikisi aynı anda sıfır olmayan s parametresinin fonksiyonları olmak üzere

$$\bar{Y} = Y + cT + dB \qquad c \neq 0 \text{ veya } d \neq 0 \tag{5.33}$$

yazılabilir.

(5.33) eşitliğinin s’ye göre türevi alınıp (5.1) ve (5.2) de verilen Frenet denklemleri uygulanırsa,

$$\bar{T}f = (1 + c^{'})T + c\kappa N + (d^{'} - d\tau)B \tag{5.34}$$

elde edilir. (5.34) eşitliğinden

$$\bar{T}f - (1 + c^{'})T = c\kappa N + (d^{'} - d\tau)B \tag{5.35}$$

yazılabilir. (5.35) eşitliğinin N ile iç çarpımı yapılırsa

$$c\kappa = 0 \tag{5.36}$$

bulunur. $\kappa \neq 0$ olduğundan $c = 0$ dir. Benzer şekilde (5.35) eşitliğinin B ile iç çarpımının sonucunda

$$d' - d\tau = 0 \tag{5.37}$$

elde edilir. (5.36) ve (5.37) eşitliklerinin (5.34) de kullanılmasıyla $T = \bar{T}$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.9 3 boyutlu Galile uzayında Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olan M eğrisinin rektifiyan düzleminin, Frenet vektörleri $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ olan $\bar{M}$ eğrisinin de rektifiyan düzlemi olması için $\bar{T} = T$ olmalıdır.

6. BÖLÜM
TARTIŞMA VE SONUÇ

6.1. Tartışma

Bu çalışmada, öncelikle 3 boyutlu Öklid uzayında ve 3 boyutlu Lorentz uzayında ortak Frenet düzlemlerine sahip olan eğrilerin varlığı için gerekli şartlar verilmiş ve bazı sonuçlar paylaşılmıştır. Daha sonra ise 3 boyutlu Galile uzayında farklı eğrilerin aynı Frenet düzlemlerine sahip olup olamayacağı araştırılmıştır. 3 boyutlu Galile uzayı temel olarak üzerinde tanımlanan Galile iç çarpımının bilineer olmaması sebebiyle bu uzayda elde edilen sonuçların diğer uzaylarda elde edilmiş sonuçlardan daha sınırlı olduğu söylenebilir.

6.2. Sonuç

Yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar şu şekildedir:
3 boyutlu Öklid uzayında ve 3 boyutlu Lorentz uzayında verilen bir eğrinin Frenet düzlemlerinden birinin aynı uzayda başka bir eğrinin de Frenet düzlemi olması için bazı durumlarda bahsedilen eğrilerin örneğin null Cartan eğrisi gibi özel eğriler olduğu görülmüştür. Ancak bu uzaylardan farklı olarak 3 boyutlu Galile uzayında aynı problemin çözümlerinde daha sınırlı sonuçlar elde edilmiştir. Hatta birçok durumda bahsedilen eğrilerin varlığı söz konusu değildir.

KAYNAKLAR

1. Ali, A. T., "Position vectors of curves in the Galilean space G^3", *Matematicki Vesnik*, 64(3), 200-210, 2012.
2. Chen, B. Y., "When does the position vector of a space curve always lies in its rectifying plane?", *Amer Math. Monthly*, 110, 147-152, 2003.
3. Chen, B. Y., Dillen, F., "Rectifying curves as centrodes and extremal curves", *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, 33(2), 77-90, 2005.
4. Hacısalihoğlu, H. H., "Diferensiyel Geometri I", *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, Ankara, 2000.
5. Kuhnel, W., "Differential geometry: curves-surfaces-manifolds", *Braunschweig*, Weisbaden, 1999.
6. Liu, H., Wang, F., "Mannheim partner curves in 3-space", *Geom. J.*, 88,120-126, 2008.
7. Millman, R. S., Parker, G. D., "Elements of differential geometry", *Prentice-Hall*, New Jersey, 1977.
8. O'Neill, B., "Semi Riemannian geometry with applications to relativity", *Academic Press*, New York, 1983.
9. Özkaldı, S., İlarslan, K., Yaylı, Y., "A new approach for characterization of curve couples in Euclidean 3-space", *Honam Math J.*, 36(1), 113-129, 2014.
10. Salkowski, E., "Zur transformation von raumkurven", *Mathematische Annalen*, 66(4), 517-557, 1909.
11. Uçum, A., İlarslan, K., Özkaldı Karakuş, S., "On curve couples with joint lightlike Frenet planes in Minkowski 3-space", *Acta Univ. Apulensis Math. Inform*, 41, 111-119, 2015.
12. Uçum, A., İlarslan, K., Özkaldı Karakuş, S., "On curve couples with joint timelike Frenet planes in Minkowski 3-space", *Acta Univ. Apulensis Math. Inform*, 44(4), 87-108, 2015.
13. Walrave, J., "Curves and surfaces in Minkowski 3-space", *Leuven, K.U., Faculty of Science*, *Doktora tezi*, Leuven, 1995.