

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA VE
GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU KAWAHARA-RLW
DENKLEMLERİ İÇİN KOLLOKASYON YÖNTEMİ**

**Tezi Hazırlayan
Hakan ZEYBEK**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Şubat 2022
NEVŞEHİR**

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans öğrenimim süresince bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan Sayın Hocam Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ' a ve destekleri için değerli aileme çok teşekkür ederim.



**MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA VE GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU
KAWAHARA-RLW DENKLEMLERİ İÇİN KOLLOKASYON YÖNTEMİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Hakan ZEYBEK

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2022**

ÖZET

Bu tez çalışmasında modifiye edilmiş Kawahara ve genelleştirilmiş Rosenau Kawahara-RLW denklemlerinin sayısal çözümleri 7. dereceden (septik) B-spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilmiştir.

Bu tez dört bölümden meydana gelmektedir. Tezin birinci bölümünde kollokasyon ve sonlu elemanlar yöntemleri hakkında bilgiler verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde modifiye edilmiş Kawahara denklemi tanıtılıp, kollokasyon yöntemi ile sayısal çözümleri elde edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde genelleştirilmiş Rosenau Kawahara-RLW denklemi tanıtılarak kollokasyon yöntemi ile sayısal çözümleri bulunmuştur.

Tezin son bölümünde elde edilen sayısal değerlere ilişkin sonuçlar verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Modifiye edilmiş Kawahara denklemi, Genelleştirilmiş Rosenau-Kawahara-RLW denklemi, sonlu elemanlar yöntemi, kollokasyon.

Tez Danışman: Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Sayfa sayısı: 44

**COLLOCATION METHOD FOR MODIFIED KAWAHARA AND
GENERALIZED ROSENAU KAWAHARA-RLW EQUATIONS**

(M. Sc. Thesis)

Hakan ZEYBEK

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

February 2022

ABSTRACT

In this thesis, the numerical solutions of the modified Kawahara and generalized Rosenau Kawahara-RLW equations have been obtained by collocation finite element method using the septic B-spline functions.

This thesis consists of four chapters. In the first part of the thesis, collocation method and finite element methods have been given.

In the second part of the thesis, modified Kawahara equation is explained and numerical solutions of the equation have been obtained.

In the third part of the thesis, generalized Rosenau Kawahara-RLW equation is introduced and numerical solutions of the equation have been found.

In the last part of the thesis, the values related with the obtained numerical results have been given.

Keywords: Modified Kawahara equation, generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation, finite element method, collocation.

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Page Number:44

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	x
1.BÖLÜM.....	1
GİRİŞ.....	1
1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi	1
1.2 Kollokasyon Yöntemi	1
2.BÖLÜM.....	3
MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİNİN TANITILMASI VE YÖNTEMİN DENKLEME UYGULANMASI.....	3
2.1 Kararlılık Analizi	6
2.2 Nümerik Hesaplamalar ve Sonuçlar	7
2.3 Tek Solitary Dalganın Hareketi	7
2.4 İki Dalganın Girişimi Hareketi	10
2.5 Üç Dalganın Girişimi Hareketi	12
2.6 Dalgaların Gelişimi Hareketi	14
3.BÖLÜM.....	16
GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU KAWAHARA RLW DENKLEMİNİN TANITILMASI VE YÖNTEMİN DENKLEME UYGULANMASI.....	16

3.1 Yöntemin Uygulanışı	17
3.2 Kararlılık Analizi	19
3.3 Nümerik Hesaplamalar ve Sonuçlar	20
3.3.1 1.Durum	20
3.3.2 2.Durum	24
4. BÖLÜM	26
SONUÇLAR	26
KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ	31

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 2.1.	$p = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ değerleri için tek soliter dalganın değişmezleri ve hata normları.....	8
Tablo 2.2.	$\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.05, c_1 = 0.85, c_2 = 0.35, x_1 = 0$ ve $x_2 = 20$ değerleri için iki solitary dalganın değişmezlerinin karşılaştırılması.....	10
Tablo 2.3.	$\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05, c_1 = 0.85, c_2 = 0.50, c_3 = 0.25$ değerleri için iki solitary dalganın değişmezlerinin karşılaştırılması.....	12
Tablo 2.4.	$\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.25, \Delta t = 0.25$ ve $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için Gauss başlangıç koşulu değişmezleri.....	14
Tablo 3.1.	Tek solitary dalganın $-40 \leq x \leq 240$ aralığında $p = 2$ için değişmezi ve dalganın hata normları.....	21
Tablo 3.2.	Tek solitary dalganın $-40 \leq x \leq 240$ aralığında $p = 4$ için değişmezi ve dalganın hata normları	23

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 2.1.** Tek dalganın $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.05$ için $t = 0, 20, 40, \dots, 100$ zaman adımlarındaki hareketi.....8
- Şekil 2.2.** Tek dalganın $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 0, 30, 70, 100$ zaman adımlarındaki hareketi.....9
- Şekil 2.3.** $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 100$ zamanındaki hataların dağılımı.....9
- Şekil 2.4.** İki soliter dalganın etkileşimi $\alpha = \beta = \gamma = 1, \Delta t = 0.05, h = 0.1,$
 $c_1 = 0.85, c_2 = 0.35, x_1 = 0, x_2 = 20$ için a) $t = 0, 30, 40, 50, 60, 100$
zamanlarındaki hareketi..... 11
- Şekil 2.5.** Üç soliter dalganın etkileşiminin $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05,$
 $c_1 = 0.85, c_2 = 0.35, x_1 = 0, x_2 = 20$ için $t = 0, 40, 60, 90, 110, 150$
zamanlarındaki hareketi.....13
- Şekil 2.6.** Dalgaların gelişiminin $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.25$ ve $\Delta t = 0.25$ için
 $t = 0, 1, 3, 5$ zamanlarındaki hareketi.....14
- Şekil 3.1.** $t = 1, 2, 3, \dots, 10$ zaman adımlarında $p = 2, h = 0.8$ ve $\Delta t = 0.005$ için
tek solitary dalganın davranışı.....22
- Şekil 3.2.** $t = 1, 2, 3, \dots, 10$ zamanındaki $p = 2, h = 0.8$ ve $\Delta t = 0.005$ için hata
dağılımları.....22
- Şekil 3.3.** $t = 1, 2, 3, \dots, 10$ zaman adımlarında $\Delta t = 0.005, p = 4,$ ve $h = 0.8$ için
tek solitary dalganın davranışı24
- Şekil 3.4.** $t = 1, 2, 3, \dots, 10$ zamanındaki $\Delta t = 0.005, p = 4,$ ve $h = 0.8$ için hata
dağılımları.....24

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

RLW	Düzenli uzun dalga
KdV	Korteweg-de Vries
W	Ağırlık fonksiyonu
U_N	Yaklaşık çözüm
I_E	Enerji
I_2	Momentum
I_3	Enerji
L_2 ve L_∞	Hata normları

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Bu kısımda, tezimizde kullanacağımız sonlu elemanlar ve kollokasyon yöntemleri hakkında bilgiler ele verilecektir.

1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar teriminin ilk kullanım alanı Ray William Clough tarafından, 1960 yılında yayımladığı düzlem esnekliğindeki uygulamalar isimli makalesidir [1]. Sonrasında bu yöntemin; yapı, havacılık ve nükleer mühendisliği gibi alanlarındaki problemler için kullanımının başarılı olduğu ortaya çıkmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi komplike problemleri çözebilmek için çözüm bölgesini daha basit bölgelere indirgeyen ve denklem çözümü sonrası alt bölgeleri birleştirerek yaklaşık çözümün bulunmasını sağlayan bir yöntemdir. Bilgisayar teknolojisi alanındaki gelişmeler ile birlikte bu yöntemin gelişimi son yıllarda çok hızlanmıştır. Uygulamalı matematikçiler, mühendisler, fizikçiler ve diğer bilim insanları sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili çok sayıda çalışma ortaya koymuştur [2].

Yöntemin bir probleme uygulanması sırasında izlenecek başlıca adımlar aşağıdaki gibidir [3]:

- Probleme ait çözüm bölgesinin sonlu sayıda alt bölgeye ayrıştırılması (diskritizasyonu).
- Çözüm bölgesinde bulunan her bir tipik eleman için eleman denklemlerinin türetilmesi.
- Problemin denklemlerini oluşturmak amacıyla eleman denklemlerinin birleştirilmesi.
- Sınır şartlarının uygulanması.
- Denklem sistemlerinin çözümünün yapılması.
- Çözüm sonunda ortaya çıkan sonuçların değerlendirilmesi.

1.2 Kollokasyon Yöntemi

Ağırlıklı kalan yöntemi diferansiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının en küçük yapılması işlemidir. Ağırlıklı kalan yaklaşımına dayanan metotlarda ağırlıklı

kalan metotları adı verilir. Bu yöntem için Ω bölgesinde, A lineer ya da lineer olmayan operatör ve f bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak alınırsa

$$A(u) = f \quad (1.2.1)$$

operatör denklemleri yazılabilir.

Buradaki u çözümü için bir yaklaşım

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (1.2.2)$$

şeklinde alınır. (1.2.1) denkleminde (1.2.2) ile verilen u_N yaklaşık çözümü yerine yazıldığında $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu bulunur. $A(u_N)$ ile f fonksiyonu arasındaki fark

$$R = A(u) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (1.2.3)$$

şeklinde elde edilir ve yaklaşımın kalanı adı verilir. Bu çalışmada ele alacağımız kollokasyon yönteminde Ω bölgesinde seçilen N adet $X^i \equiv (x^i, y^i)$ kollokasyon noktasında sıfır kalanın elde edilebilmesi için

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.2.4)$$

şeklinde seçilmelidir [4].

2.BÖLÜM

MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİNİN TANITILMASI VE YÖNTEMİN DENKLEME UYGULANMASI

Bu kısımda T.Ak ve S.B.G.Karakoç'un [5] referansı ile verilen makaleleri incelenmiştir.

Burada,

$$U_t + \alpha U^2 U_x + \beta U_{xxx} - \gamma U_{xxxx} = 0, \quad (2.1)$$

biçimindeki genelleştirilmiş Kawahara denklemi

$$\begin{aligned} U(a,t) = 0, \quad U(b,t) = 0, \\ U_x(a,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0, \\ U_{xxx}(a,t) = 0, \quad U_{xxx}(b,t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

homojen sınır koşulları ve

$$U(x,0) = f(x) \quad a \leq x \leq b, \quad (2.3)$$

başlangıç koşulu ele alınmıştır. α, β ve γ pozitif parameter olup x konum ve t ise zamana göre türevi göstermektedir.

Modifiye edilmiş Kawahara denklemi fizikte plazma dalgaları, kılcal yerçekimi su dalgaları, yüzey gerilimli su dalgaları, sıg su dalgaları gibi geniş uygulamalara sahiptir. Bu denklemin analitik (tam çözümleri) birçok bilim insanı tarafından elde edilmiştir. Mesela Wazwaz [6] sine-cosine, genişletilmiş tanjanth ve ansatzh yöntemleri ile, Sirendaoreji direk cebirsel yöntemi ile ve Parkes ve arkadaşları [7] jakobi eliptik fonksiyon yöntemi ile, denklemin analitik çözümlerini elde etmişlerdir.

Bunların yanısıra modifiye edilmiş kawahara denkleminin nümerik çözümleri Bibi ve arkadaşları [8] ağsız çizgileri yöntemini, Suarez ve Moralez [9] Fourier bölme yöntemini, Zarebria ve Aghili [10] radyal tabanlı fonksiyonlara dayalı kollokasyon yöntemini, Yuan ve arkadaşları [11] Dual-Petrov-Galarkin yöntemini, Gang ve arkadaşları [12] multi-simplektik Fourier Psödospektral yöntemini, Dereli ve Dağ [13] Kollokasyon yöntemine dayalı Meshless yöntemini, Bagherzadeh [14] B-spline Kollokasyon yöntemini, Wen-Jun ve Yushun [15] yeni Multi-simplektik integrator yöntemini, Safavi, Khajehnasini [16] ve Necat Polat ve arkadaşları [17] Adomian ayrışım yöntemini, Marinov ve Marinova [18] sonlu fark yöntemi içeren özel bir nümerik yöntemini, Bellman [19] ve Ali Başhan [20] diferansiyel quadratur yöntemini,

Lin Jin [21] varyasyonel iterasyon ve homotopi perturbasyon yöntemlerini kullanarak elde etmişlerdir.

Yapılan nümerik hesaplamalara uygun olarak problemin çözüm bölgesi $a \leq x \leq b$ aralığına kısıtlanmış ve $h = \frac{b-a}{N} = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere $a \leq x \leq b$ aralığı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ şeklinde N eşit aralığa bölünmüştür.

$\varnothing_m(x)$ ($m = -3(1)N + 3$) fonksiyonları problemin çözüm bölgesi olan $[a, b]$ aralığı için bir baz oluşturmaktadır. $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varnothing_m(x) \delta_m(t). \quad (2.4)$$

şeklinde septik B-spline fonksiyon cinsinden yazılabilir. Burada $\delta_m(t)$ sınır ve ağırlıklı kalan koşullarından belirlenecek zamana bağlı parametrelerdir. Her septik B-spline 8 elemanı kapsamakta ve her bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı 8 tane B-Spline tarafından kapsanmaktadır.

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U^{(iv)}_m &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\ U^{(v)}_m &= \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U^{(vi)}_m &= \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.5) ifadeleri (2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3} \\ &+ \frac{7\alpha Z_m}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ &+ \frac{210\beta}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ &+ \frac{2520\gamma}{h^5}(-\delta_{m-3} - 4\delta_{m-2} + 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$Z_m = (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^2 \text{ dir.}$$

(2.5) denkleminde görülen δ_i ve δ_i^* yerlerine sırasıyla

$$\delta_i = \frac{\delta_i^{n+1} + \delta_i^n}{2} \quad (2.7)$$

Crank Nicolson ve

$$\dot{\delta}_i = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \quad (2.8)$$

ileri sonlu fark yaklaşımı yazılırsa $(n+1)$ inci ve (n) inci zaman adımlarında δ_i^{n+1} ve δ_i^n

$(i = m-3, m-2, \dots, m+2, m+3)$ bilinmeyen parametreler için,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n, \end{aligned} \quad (2.9)$$

denklemleri bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [1 - EZ_m - M + K], \\ \gamma_2 &= [120 - 56EZ_m - 8M - 4K], \\ \gamma_3 &= [1191 - 245EZ_m + 19M + 5K], \\ \gamma_4 &= [2416], \\ \gamma_5 &= [1191 + 245EZ_m - 19M + 5K], \\ \gamma_6 &= [120 + 56EZ_m + 8M + 4K], \\ \gamma_7 &= [1 + EZ_m + M - K], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$m = 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7}{2h} \alpha \Delta t, \quad M = \frac{105}{h^3} \beta \Delta t, \quad K = \frac{840}{h^4} \gamma \Delta t$$

dir. (2.2) ile verilen sınır şartları kullanılarak $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$ ve $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$

bilinmeyenleri (2.9) denklem sisteminden yok edilerek $N+1$ bilinmeyen ve $N+1$ tane denklemden oluşan

$$P\mathbf{d}^{n+1} = R\mathbf{d}^n \quad (2.11)$$

denklemleri elde edilir. Burada $\mathbf{d}^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ dir.

P ve R matrisleri $(N+1) \times (N+1)$ şeklindedir. Problemin sayısal çözümü elde edilmeden önce, \mathbf{d}^0 ile gösterilen başlangıç vektörüne ihtiyaç vardır. Bu başlangıç vektörü

2.2 Nümerik Hesaplamalar ve Sonuçlar

Bu kısımda modifiye edilmiş Kawahara denkleminin nümerik sonuçlarını elde etmek için tek dalganın hareketi, iki ve üç dalganın girişimi ve solitonların gelişimi şeklinde dört farklı problem ele alınmıştır. Yöntemimizin geçerliliğini ve doğruluğunu göstermek için

$$L_2 = \|U^{exact} - U_N\|_2 \square \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{exact} - (U_N)_j|^2} \quad (2.2.1)$$

ve

$$L_\infty = \|U^{exact} - U_N\|_\infty \square \max_j |U_j^{exact} - (U_N)_j| \quad (2.2.2)$$

hata normları hesaplanılmıştır. Modifiye edilmiş Kawahara denklemi

$$I_1 = \int_a^b U(x,t) dx \cong h \sum_{j=1}^N U_j^n,$$

$$I_2 = \int_a^b [U^2(x,t)] dx \cong h \sum_{j=1}^N (U_j^n)^2,$$

şeklinde sırasıyla dalganın kütle ve momentumuna karşılık gelen iki adet değişmeze sahiptir.

2.3 Tek Solitary Dalganın Hareketi

(2.1) ile verilen modifiye edilmiş Kawahara denkleminin tek dalga hareketi için tam çözüm

$$U(x,t) = \frac{3}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{1}{20}} \frac{\beta}{\gamma} \left(x - \frac{4}{25} \frac{\beta}{\gamma} t - x_0 \right) \right],$$

biçiminde $U \rightarrow 0$ ve başlangıç koşulu ve sınır koşulları $x \rightarrow \pm\infty$ iken

$$U(x,0) = \frac{3}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{1}{20}} \frac{\beta}{\gamma} (x - x_0) \right],$$

olup burada $\alpha, \beta, \gamma, x_0$ keyfi sabitler ve burada dalganın genliği $A = \frac{3}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}}$ ve hızı

$c = \frac{4}{25} \frac{\beta}{\gamma}$ dır. Tek solitary dalganın hareketini incelemek için $[-50, 50]$ aralığında

$\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ değerleri alınmıştır. Bu değerler için tek solitary

dalga 0.94868 genliğine sahip olur. Değişmezlerin ve L_2 ve L_∞ hata normlarının

$t = 100$ zamanına kadar farklı zamanlardaki değerleri Tablo 2.1 de verilmiştir. Tablo 2.1

e bakıldığında L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük ve değişmezlerin

değerlerinin de programın çalışması boyunca hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir.

Yine tabloya bakıldığında başlangıç değerlerine göre I_1 ve I_2 değişmezlerin değerlerinin

sırasıyla $\% 1.164 \times 10^{-4}$ ve $\% 6.854 \times 10^{-10}$ oranında değiştiği görülmektedir. Tek

dalganın $[-50, 50]$ aralığında $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ değerleri için

$t = 0, 20, 40, \dots, 100$ zaman adımlarındaki hareketi Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Yine aynı

parametreler için $t = 0, 30, 70, 100$ zaman adımlarında tek dalganın hareketi Şekil 2.2 de

gösterilmiştir. Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 incelendiğinde tek solitary dalganın şeklini,

genliğini ve hızını hemen hemen koruyarak sağa doğru ilerlediği açıkça görülebilir.

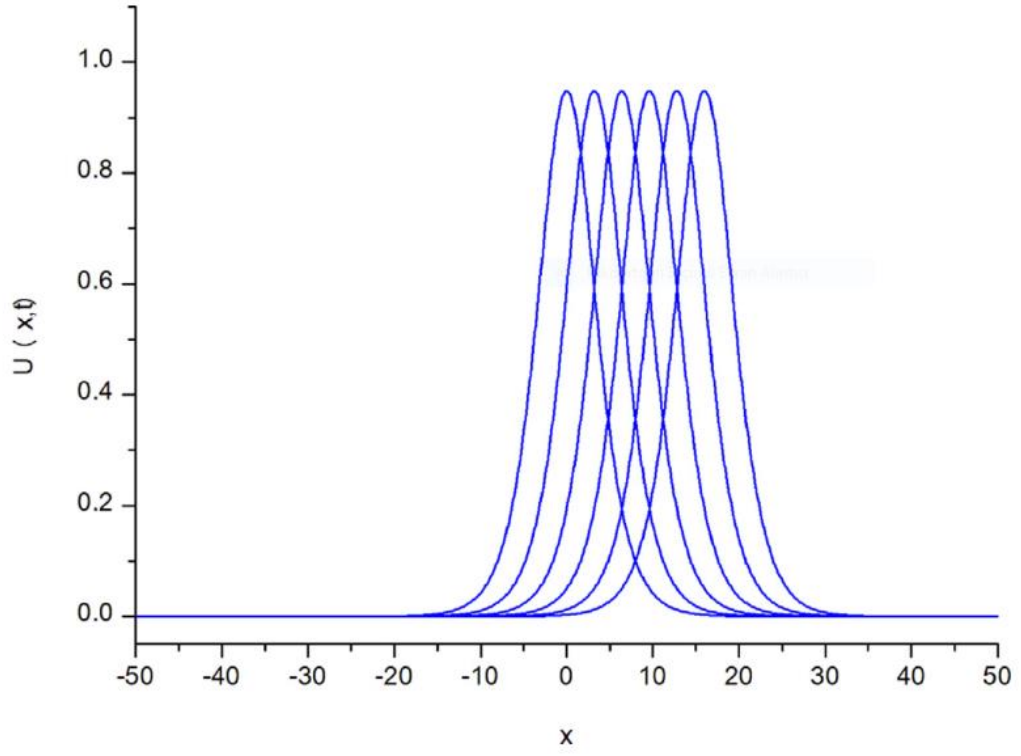
$t = 100$ zamanında tek dalga için hataların dağılımı Şekil 2.3 de sunulmuştur. Şekilden

görüldüğü gibi yapılan hatalar daha çok çalışılan bölgenin orta kısımlarında meydana

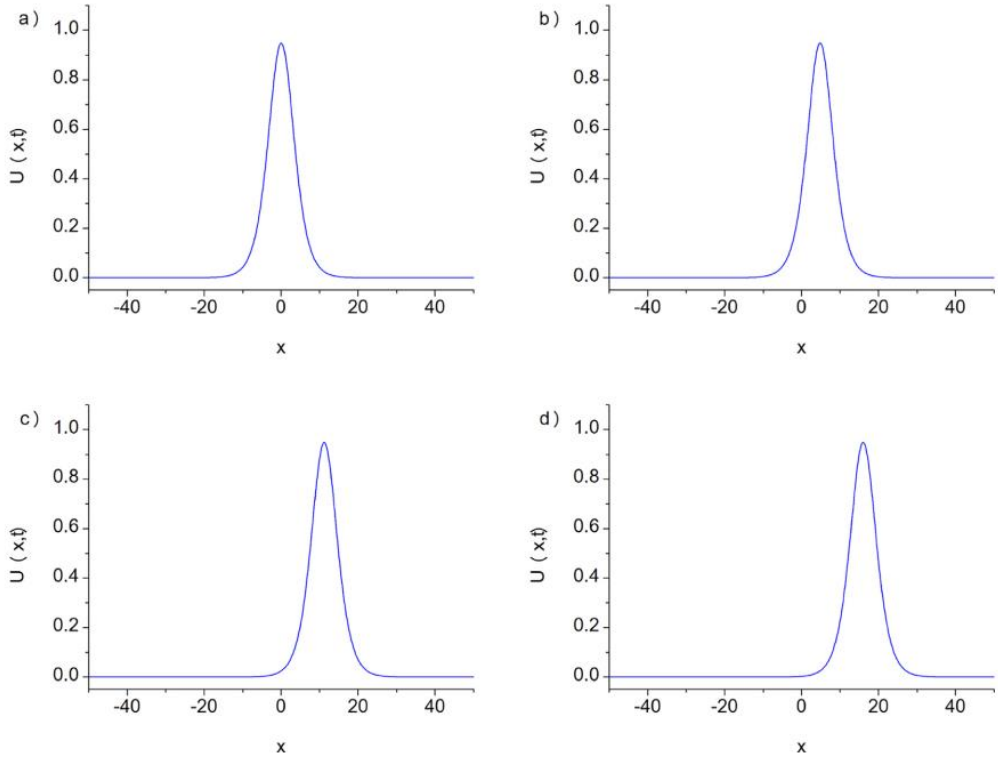
gelmiştir. Bu ise bize sınır şartlarının doğru uygulandığını göstermektedir.

Tablo 2.1 $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ değerleri için tek soliter dalganın değişmezleri ve hata normları

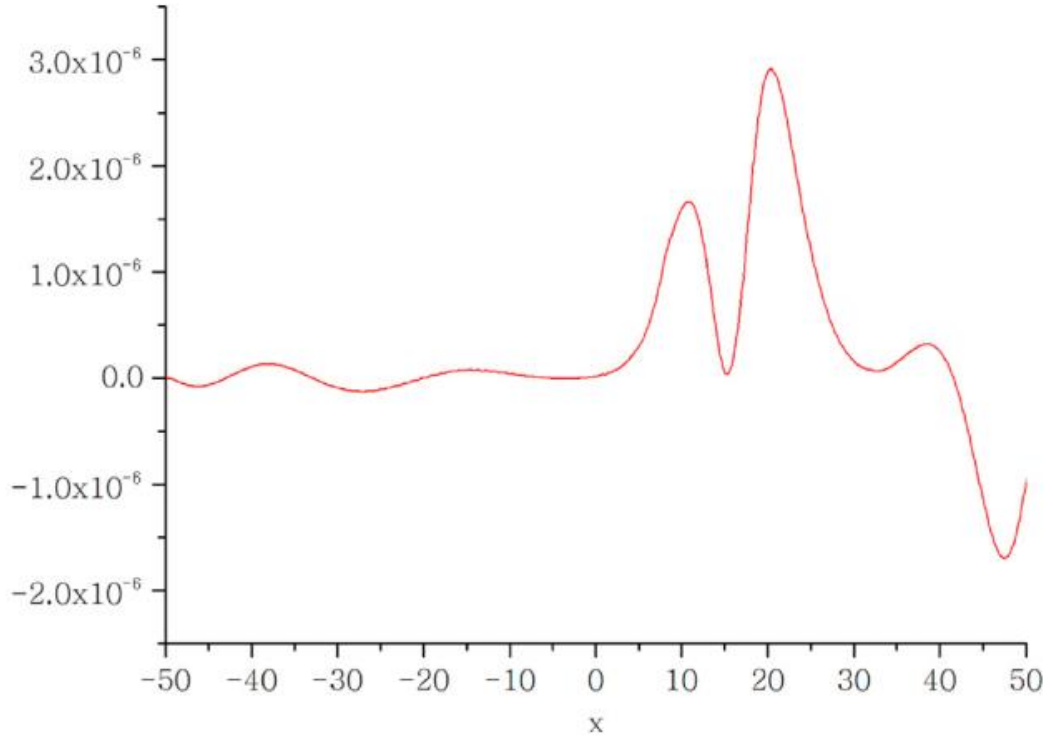
t	I_1	I_2	$L_2 - Error$	$L_\infty - Error$
0	8.4852829335	5.3665642087	.0000000000	.0000000000
20	8.4852829848	5.3665642087	2.747538e-6	1.260529e-6
40	8.4852830757	5.3665642086	4.045791e-6	1.620782e-6
60	8.4852821848	5.3665642087	5.629183e-6	2.617156e-6
80	8.4852800315	5.3665642087	6.811939e-6	2.680477e-6
100	8.4852730550	5.3665642087	8.275389e-6	2.909858e-6



Şekil 2.1. Tek dalganın $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 0, 20, 40, \dots, 100$ zaman adımlarındaki hareketi



Şekil 2.2. Tek dalganın $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 0, 30, 70, 100$ zaman adımlarındaki hareketi



Şekil 2.3. $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0$ ve $\Delta t = 0.05$ için $t = 100$ zamanındaki hataların dağılımı

2.4 İki Dalganın Girişimi Hareketi

Bu bölümde aynı doğrultuda hareketini sürdüren iki pozitif solitary dalganın girişimi

hareketi $U(x,0) = \sum_{i=1}^2 a_i \operatorname{sech}^2[b_i(x-x_i)]$ başlangıç şartı ile ele alınmıştır. Burada

$a_i = \sqrt{\frac{45 c_i}{8 \alpha}}$, $b_i = \sqrt{\frac{5 c_i}{16 \beta}}$, $i = 1, 2$ olup c_i ve x_i de keyfi sabitlerdir. İki dalganın

girişimi hareketini görebilmek için $[-50, 100]$ aralığında $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve

$\Delta t = 0.05, c_1 = 0.85, c_2 = 0.35, x_1 = 0, x_2 = 20$ parametreleri alınmıştır. I_1 ve I_2

değişmezlerinin değerlerini hesaplayabilmek için program $t = 0$ dan $t = 100$ adımına

kadar hesaplanmış ve değerler Tablo 2.2 de listelenmiştir. Tablodan değişmezlerin

değerlerinin programın çalışması boyunca hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir.

Şekil 2.4 iki dalganın girişimi hareketini grafiksel olarak göstermektedir. Şekilden

$t = 0$ zamanında başlangıçta büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalganın solunda

olduğu, zaman ilerledikçe $t = 30$ zamanında büyük genlikli dalganın küçük genlikli

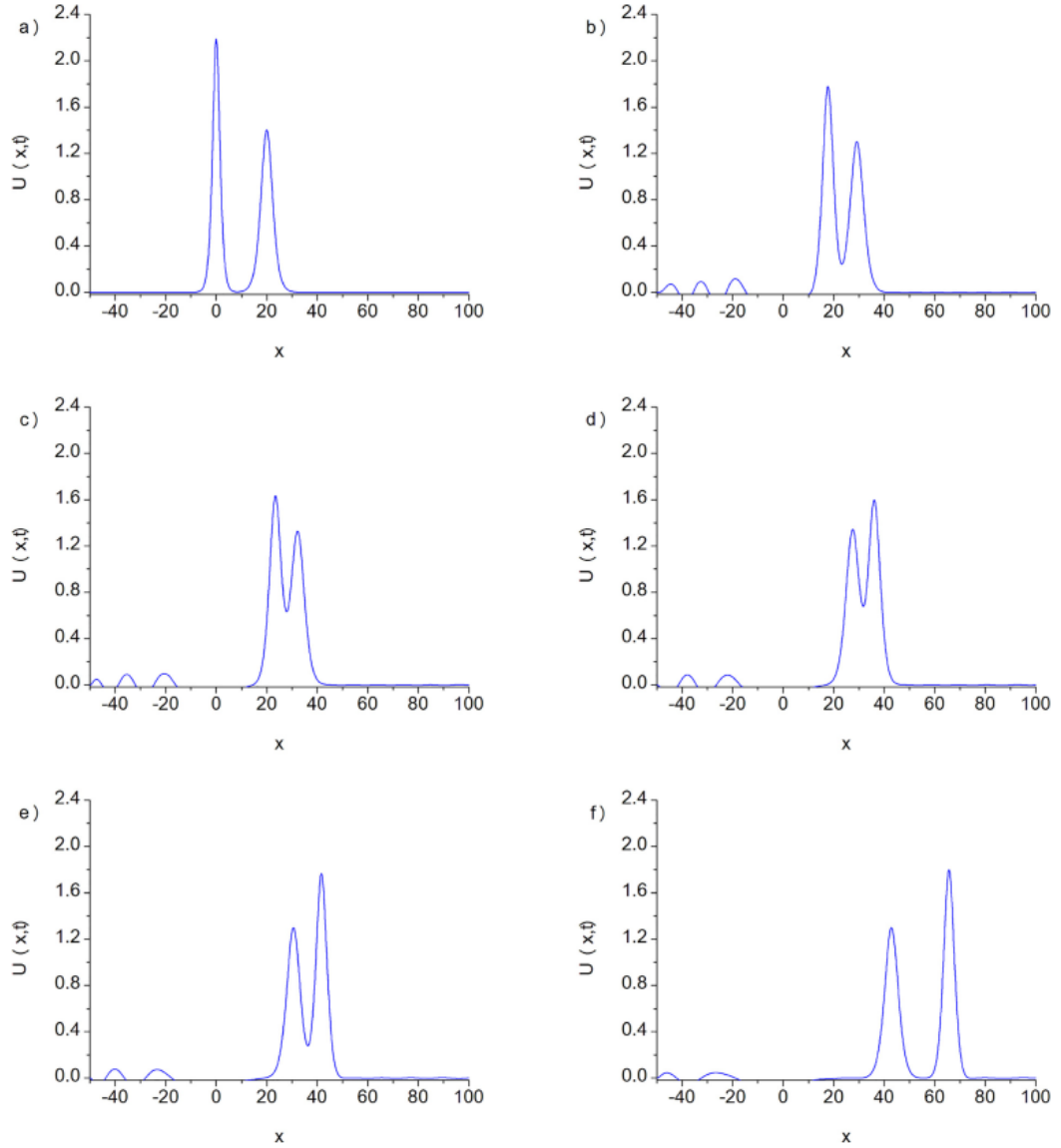
dalgayı yakaladığı, absorbe ettiği ve bu durumun $t = 60$ zamanına kadar devam ettiği

görülmektedir. Bu zaman adımımdan sonra büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgadan tamamen ayrıldığı ve $t=100$ zamanında girişimin tamamlandığı açıkça izlenmektedir.

Tablo 2.2 $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.05, c_1 = 0.85, c_2 = 0.35, x_1 = 0$ ve $x_2 = 20$

t	I_1	I_2
0	16.9705316311	20.3069218846
20	16.8465452348	20.1187647065
40	16.9748060046	20.0565572215
60	16.8992214653	19.9988890134
80	17.2676453891	19.9762119420
100	17.0413144553	19.9424422093

değerleri için iki solitary dalganın değişmezlerinin karşılaştırılması



Şekil 2.4 İki soliter dalganın etkileşimi $\alpha = \beta = \gamma = 1, \Delta t = 0.05, h = 0.1,$, $c_1 = 0.85, c_2 = 0.35, x_1 = 0, x_2 = 20$ için a) $t = 0, 30, 40, 50, 60, 100$ zamanlarındaki hareketi

2.5 Üç Dalganın Girişimi Hareketi

Bu bölümde aynı doğrultuda hareketini sürdüren üç pozitif solitary dalganın girişimi

hareketi $U(x,0) = \sum_{i=1}^3 a_i \operatorname{sech}^2[b_i(x-x_i)]$ başlangıç şartı ile ele alınmıştır. Burada

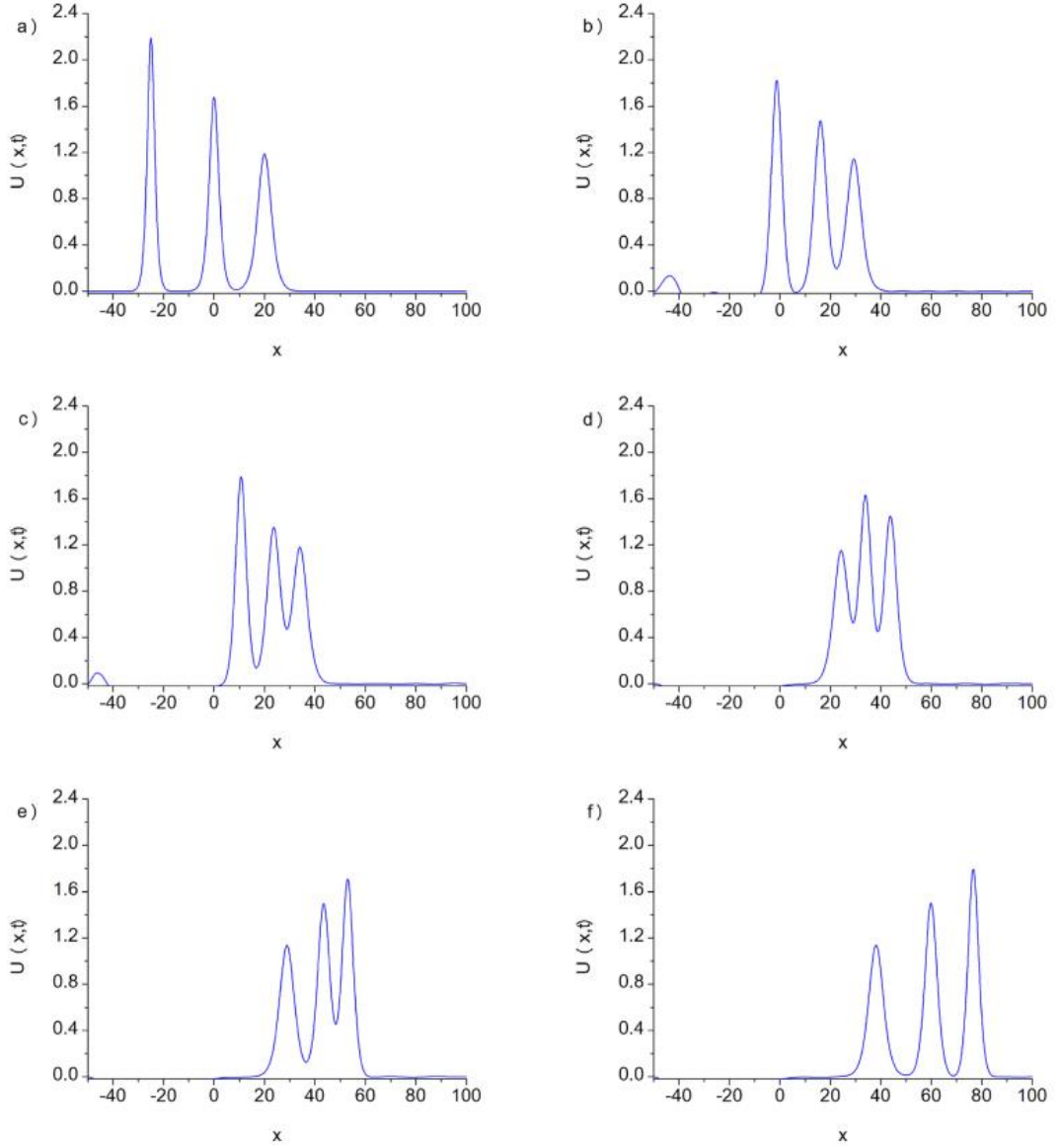
$a_i = \sqrt{\frac{45 c_i}{8 \alpha}}, b_i = \sqrt{\frac{5 c_i}{16 \beta}}, i = 1, 2, 3$ olup c_i ve x_i de keyfi sabitlerdir. Üç dalganın

girişimi hareketini görebilmek için nümerik hesaplamalar $[-50, 100]$ aralığında

$\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05, c_1 = 0.85, c_2 = 0.50, c_3 = 0.25$
 $x_1 = -25, x_2 = 0, x_3 = 20$ parametreleri seçilerek yapılmıştır. I_1 ve I_2 değişmezlerinin değerlerini hesaplayabilmek için program $t = 0$ dan $t = 150$ adımına kadar hesaplanmış ve değerler Tablo 2.3 de sergilenmiştir. Tablo 2.3'den anlaşıldığı gibi değişmezlerin değerleri programın çalışması boyunca hemen hemen sabit kalmıştır. Üç dalganın girişimi hareketi Şekil 2.5 de verilmiştir. Şekilden girişim hareketinin $t = 40$ zamanında başladığı, bu durumun $t = 110$ zamanına kadar devam ettiği ve $t = 150$ zamanında dalgaların orijinal şekillerine geri döndüğü görülmektedir.

Tablo 2.3. $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05, c_1 = 0.85, c_2 = 0.50, c_3 = 0.25$ değerleri için iki solitary dalganın değişmezlerinin karşılaştırılması

t	I_1	I_2
0	25.4557818426	28.5673455186
25	25.6820777780	28.2475921308
50	25.7935768834	28.2118286972
75	25.1357840031	28.0967148921
100	24.9519313985	28.0933900647
125	24.9751678109	28.0875884719
150	25.0303969354	28.0810761856



Şekil 2.5. Üç soliter dalganın etkileşiminin $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$, $c_1 = 0.85$, $c_2 = 0.35$, $x_1 = 0$, $x_2 = 20$ için $t = 0, 40, 60, 90, 110, 150$ zamanlarındaki hareketi

2.6 Dalgaların Gelişimi Hareketi

Kawahara denklemi için bir soliton dizisinin gelişimi

$$U(x, 0) = \exp[-(x - 40)^2]$$

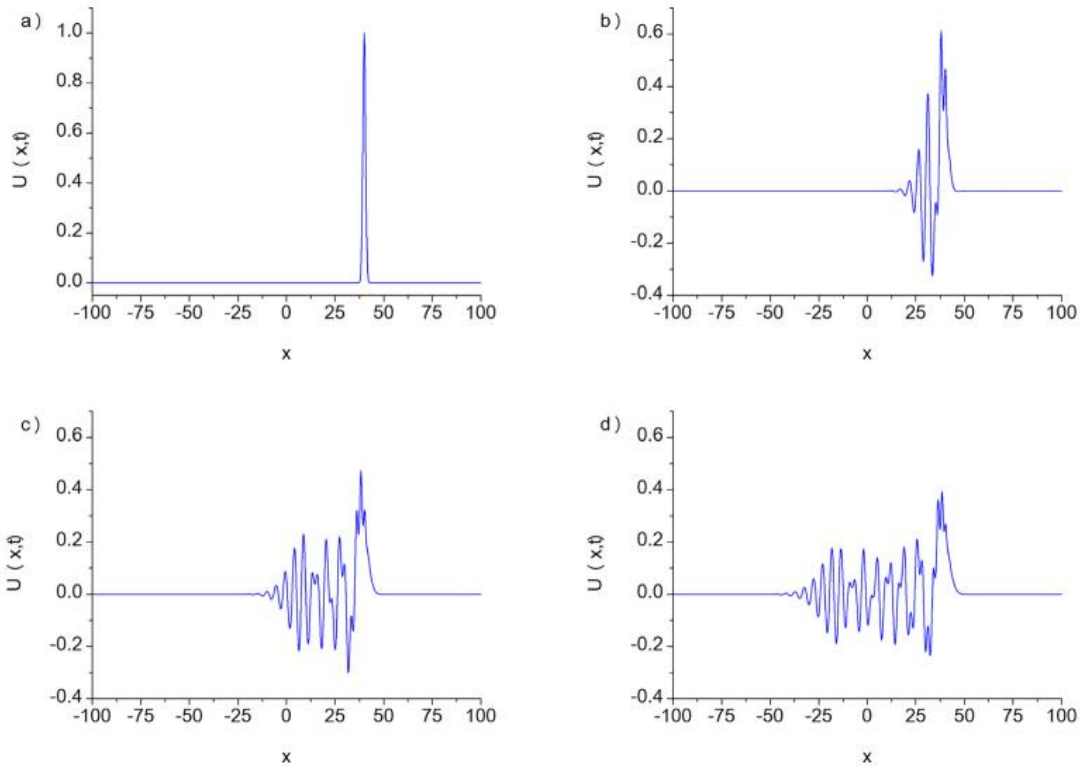
şeklindeki Gaussian başlangıç şartı göz önüne alınarak incelenmiştir. Nümerik hesaplamalar $[-100, 100]$ aralığında $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $h = 0.25$ ve $\Delta t = 0.25$ parametreleri seçilerek $t = 5$ e kadar yapılmıştır. Bulunan değerler Tablo 2.4 de gösterilmiştir.

Tabloya bakıldığında değişmezlerin değerlerinin neredeyse değişmediği ve değişmezlerin başlangıç değerlerine göre sırasıyla $\%1.782 \times 10^{-8}$ ve $\%4.048 \times 10^{-8}$ oranında değiştiği görülmektedir. Dalgaların gelişimi hareketi Şekil 2.6 de gösterilmiştir. Şekle bakıldığında $t=0$ zamanında herhangi bir dalga gelişimi görülmemektedir. Burada zaman arttıkça dalgaların giderek artan bir salınım yaptığı fark edilmektedir.

Tablo 2.4. $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.25, \Delta t = 0.25$ ve $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için Gauss başlangıç

t	I_1	I_2
0	1.7724538509	1.2533141373
1	1.7724538507	1.2533141369
2	1.7724538506	1.2533141369
3	1.7724538506	1.2533141368
4	1.7724538506	1.2533141368
5	1.7724538506	1.2533141368

koşulu değişmezleri



Şekil 2.6. Dalgaların gelişiminin $\alpha = \beta = \gamma = 1, h = 0.25$ ve $\Delta t = 0.25$ için $t = 0, 1, 3, 5$ zamanlarındaki hareketi

3.BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU KAWAHARA RLW DENKLEMİNİN TANITILMASI VE YÖNTEMİN DENKLEME UYGULANMASI

Bu bölümde septik B-spline kollokasyon yöntemine dayanan, sığ su dalgalarının dinamiklerini iyi bir şekilde modelleyen genelleştirilmiş Rosenau-Kawahara-RLW denkleminin sayısal çözümleri T.Ak ve S.B.G.Karakoç'un [22] makalelerinde belirtildiği gibi incelenmiştir. Geçen on yıllar boyunca lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler teorisi çok büyük gelişmeler kaydetmiştir. Farklı yöntemler kullanılarak kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için ilerleyen (traveling) dalgaların incelenmesi matematikçiler, fizikçiler, mühendisler ve diğer bilim insanlarının uzun yıllardan beri dikkatlerini çekmiştir. Aynı zamanda, lineer olmayan optikler, optik fiberler, akışkanlar dinamiği, plazmalar, elektro manyetikler ve yoğunlaştırılmış madde gibi birçok fiziksel olaydaki ortak uygulamaları nedeniyle kısmi diferansiyel denklemler için soliton türü çözümlerin varlığı özel bir ilgi kaynağı olmuştur. Bilindiği gibi bir soliton dalga diğer bir soliton dalga ile çarpıştığında hızını, genliğini ve şeklini değiştirmeyen özel bir solitary dalgadır. Soliton çözümler içeren denklemlerden bazıları:

Sığ sularda uzun dalgaların yayılımını temsil eden ve

$$U_t + \alpha UU_x + bU_{xxx} = 0, \quad (3.1)$$

biçiminde olan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi [23,24,25,26,27];

ilk olarak Peregrine tarafından bir kanaldaki küçük genlikli uzun su dalgası için tanımlanan

$$U_t + U_x + \alpha UU_x - bU_{xxt} = 0, \quad (3.2)$$

formunda olan Regularized Long Wave (RLW) denklemi [28,29,30,31];

Sığ su dalgalarında yüzey gerilimi ile ortaya çıkan

$$U_t + U_x + UU_x + U_{xxx} - U_{xxxx} = 0, \quad (3.3)$$

şeklinde olan Kawahara denklemi [32,33,34] ve

$$U_t + U_x + U_{xxx} + UU_x = 0, \quad (3.4)$$

biçimindeki Rosenau denklemi şeklinde sıralanabilir. Yoğun ayrık dinamik sistemler incelendiğinde, dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimlerinin KdV denklemi ile

tanımlanamayacağı görülmüştür. Yine yüksek genlikli dalgaların hareketi ve eğimi, zayıf uyumsuzluk varsayımı altında yine KdV denklemi ile yeterince açıklanamaz. KdV denkleminin bu eksikliğini gidermek için (3.4) ile verilen denklem Rosenau tarafından önerilmiştir [35,36]. (3.4) denklemine U_{xxx} viskozite terimi eklenirse

$$U_t + U_x + U_{xxx} + U_{xxxx} + UU_x = 0. \quad (3.5)$$

şeklindeki Rosenau-KdV denklemi elde edilir [37,38,39,40]. Yine (3.4) denklemine $-U_{xxt}$ viskozite terimi eklenirse

$$U_t + U_x - U_{xxt} + U_{xxxx} + UU_x = 0. \quad (3.6)$$

Biçimindeki Rosenau-RLW denklemi elde edilir [41,42,43]. Eğer (3.5) denklemine diğer bir viskozite terimi olan $-U_{xxxx}$ eklenirse

$$U_t + U_x + U_{xxx} + U_{xxxx} - U_{xxxx} + UU_x = 0. \quad (3.7)$$

Formundaki Rosenau-Kawahara [44] denklemi elde edilir.

Tezin bu bölümünde

$$U_t + \alpha U_x + bU^p U_x + cU_{xxx} - \alpha U_{xxt} + \lambda U_{xxxx} - \zeta U_{xxxx} = 0 \quad (3.8)$$

şeklindeki genelleştirilmiş Rosenau-Kawahara-RLW denklemi (2.2) ile verilen sınır koşulları ve (2.3) ile verilen başlangıç koşulu ile ele alınmıştır. Burada p pozitif bir tam sayı, α ve λ pozitif sabitler ve a, b, c ve ζ ise reel sabitlerdir. Literatürde genelleştirilmiş Rosenau-Kawahara-RLW denkleminin sayısal çözümleriyle ilgili sınırlı sayıda çalışmalar mevcuttur. Zuo [45] denklemin soliton çözümlerini elde etmek için sech ansatz ve tanh ansatz yöntemlerini uygulamıştır. Hea ve Pan [46] denklem için sine-cosine yöntemine dayanan üçüncü mertebeden lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark yöntemini geliştirmişlerdir. Hea [47] pertürbe edilmiş Rosenau-Kawahara-RLW denkleminin tam solitary dalga çözümlerini ve daha sonra denklemin üçüncü mertebeden lineerleştirilmiş kapalı fark yaklaşımını elde etmiştir. Wang ve Dai [48], genelleştirilmiş Rosenau-Kawahara-RLW denklemi için dördüncü mertebeden sonlu fark şeması geliştirmişlerdir.

3.1 Yöntemin Uygulanışı

$a \leq x \leq b$ aralığı $h = \frac{b-a}{N} = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ şeklinde N tane eşit aralığa bölünmüştür. B-spline fonksiyonların

$\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+3}(x)\}$ kümesi çözüm bölgesi için bir baz oluşturur. $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü septik B-spline fonksiyonları cinsinden (2.4) deki gibi verilir. Her septik B-spline 8 elemanı kapsamakta ve her bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı 8 tane B-Spline tarafından kapsamaktadır. (2.5) eşitlikleri (2.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-3}^{\&} + 120\delta_{m-2}^{\&} + 1191\delta_{m-1}^{\&} + 2416\delta_m^{\&} + 1191\delta_{m+1}^{\&} + 120\delta_{m+2}^{\&} + \delta_{m+3}^{\&} \\
& - \frac{42}{h^4} \alpha (\delta_{m-3}^{\&} + 24\delta_{m-2}^{\&} + 15\delta_{m-1}^{\&} - 80\delta_m^{\&} + 15\delta_{m+1}^{\&} + 24\delta_{m+2}^{\&} + \delta_{m+3}^{\&}) \\
& + \frac{840}{h^4} \lambda (\delta_{m-3}^{\&} - 9\delta_{m-1}^{\&} + 16\delta_m^{\&} - 9\delta_{m+1}^{\&} + \delta_{m+3}^{\&}) \\
& + (a + bZ_m) \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} + 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& + \frac{210\beta}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& + \frac{2520\gamma}{h^5} (-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0,
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada $Z_m = U_m$ dır.

(3.1.1) denklem sisteminde δ_i ve zamana bağlı türevi olan $\dot{\delta}_i$ yerine sırasıyla (2.8) ve (2.9) eşitlikleri yazılırsa (n) inci ve $(n+1)$ inci zaman adımlarında δ_i^{n+1} ve δ_i^n ($i = m-3, m-2, \dots, m+2, m+3$) bilinmeyen parametreler için,

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\
& = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n,
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

İle gösterilen denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [1 - E + M - K(a + bZ_m) - L - T], \\
\gamma_2 &= [120 - 24E - 56K(a + bZ_m) - 8L + 4T], \\
\gamma_3 &= [1191 - 15E - 9M - 245(a + bZ_m) + 19L - 5T], \\
\gamma_4 &= [2416 + 80E + 16M], \\
\gamma_5 &= [1191 - 15E - 9M + 245(a + bZ_m) - 19L + 5T], \\
\gamma_6 &= [120 - 24E - 56K(a + bZ_m) + 8L - 4T], \\
\gamma_7 &= [1 - E + M + K(a + bZ_m) + L + T],
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$m = 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{42}{h^2} \alpha, \quad M = \frac{840}{h^4} D, \quad K = \frac{7\Delta t}{2h}, \quad L = \frac{210\Delta t}{2h^3} c, \quad T = \frac{2520\Delta t}{2h^5}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= 1 - E + M - K(a + bZ_m) - L - T, \\
\eta_2 &= 120 - 24E - 56K(a + bZ_m) - 8L + 4T, \\
\eta_3 &= 1191 - 15E - 9M - 245(a + bZ_m) + 19L - 5T, \\
\eta_4 &= 2416 + 80E + 16M, \\
\eta_5 &= 1191 - 15E - 9M + 245(a + bZ_m) - 19L + 5T, \\
\eta_6 &= 120 - 24E - 56K(a + bZ_m) + 8L - 4T, \\
\eta_7 &= 1 - E + M + K(a + bZ_m) + L + T, \\
m &= 0, 1, \dots, N
\end{aligned}$$

dır.

(3.1) ile verilen denklem sistemi sadeleştirilirse

$$\begin{aligned}
A &= (2382 - 30E - 18M) \cos(\theta) + (240 - 48E) \cos(2\theta) + (2 - 2E + 2M) \cos(3\theta) + (2416 + 80E + 16M) \\
B &= (490K(1 + Z_m) - 38L - 10T) \sin(\theta) + (112K(1 + Z_m) + 16L - 8T) \sin(2\theta) + (2K(1 + Z_m) + 2L + 2T) \sin(3\theta).
\end{aligned}$$

olmak üzere $\xi = \frac{A + iB}{A - iB}$ bulunur. Fourier kararlılık analizine göre algoritmanın kararlı

olabilmesi için $|\xi| < 1$ olması gerekir. Basit bir hesaplama ile $a^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2$ olduğundan $|\xi| = 1$ elde edilir. Böylece lineerleştirilmiş algoritmamızın şartsız kararlı olduğu görülür.

3.3 Nümerik Hesaplamalar ve Sonuçlar

Bu bölümde yöntemimizin doğruluğunu göstermek için bazı test problemleri sayısal olarak çözüldü. Bunun için tam çözümü bilinen tek solitary dalga için iki farklı parametre ailesi seçildi. (3.8)- (3.10) Başlangıç sınır değer problemi

$$I_E = \frac{1}{2} \int_a^b [U^2(x, t) + \alpha U_x^2(x, t) + \lambda \wedge \lambda dx] \quad (3.3.1)$$

şeklinde sığ su dalgasının enerjisine karşılık gelen bir değişmeze sahiptir [47]. Sayısal algoritmanın doğruluğu ve etkinliğini kontrol etmek için (2.2.1) ve (2.2.2) hata normları kullanıldı.

3.3.1 1.Durum

Sayısal hesaplamalar için ilk olarak $[-40, 200]$ aralığında h nın farklı değerleri için $p = 2$ ve $\Delta t = 0.005$ parametreleri alındı. Bu durum için problemin tam çözümü [44]

$$U(x,t) = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{370} - 5\sqrt{10}}{\sqrt{5\sqrt{37} - 29}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{\sqrt{37} - 5}}{4} \left(x - \frac{33 - 5\sqrt{37}}{5\sqrt{37} - 29} t \right) \right]$$

(3.3.1.1)

olduğundan başlangıç şartı

$h = 1.6$	I_E	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$t = 1$	25.4521536	1.91446	0.94469
$t = 5$	25.4515106	1.91446	0.94469
$t = 10$	25.4513649	1.91446	1.30782
$h = 1.0$			
$t = 1$	25.4517802	0.09357	0.04842
$t = 5$	25.4517802	0.13110	0.05753
$t = 10$	25.4517802	0.16745	0.07394
$h = 0.8$			
$t = 1$	25.4517766	0.04106	0.02205
$t = 5$	25.4517766	0.05276	0.02288
$t = 10$	25.4517766	0.06242	0.02787
[11] $t = 10$	25.4514057	266	103.2
[35] $t = 10$	25.4474394	0.3279	0.1177
$h = 0.6$			

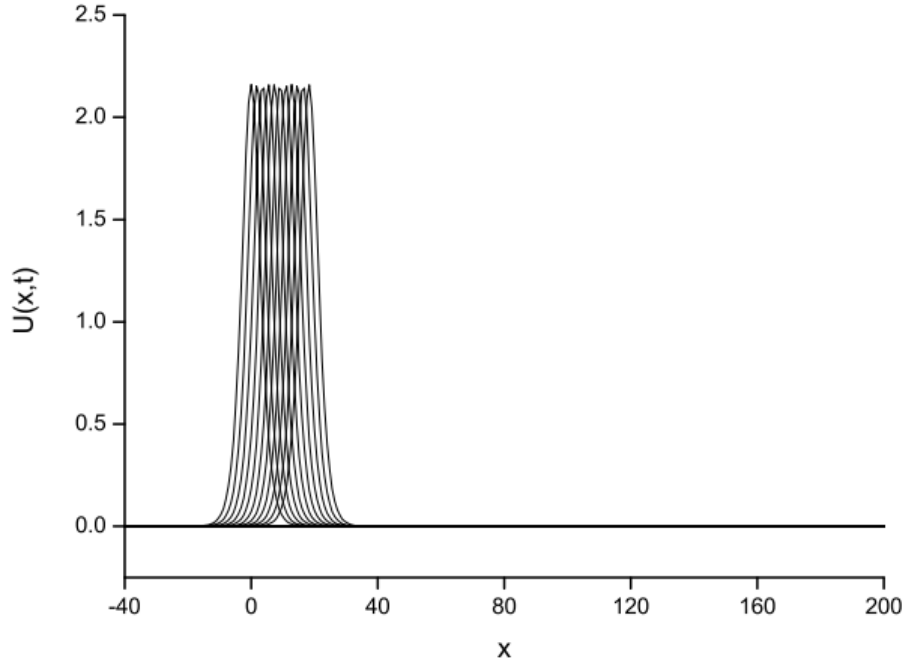
$$U(x,0) = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{370} - 5\sqrt{10}}{\sqrt{5\sqrt{37} - 29}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{\sqrt{37} - 5}}{4} x \right] \quad (3.3.1.2)$$

$t = 1$	25.4517763	0.01333	0.00687
$t = 5$	25.4517763	0.01460	0.00579
$t = 10$	25.4517763	0.01529	0.00604

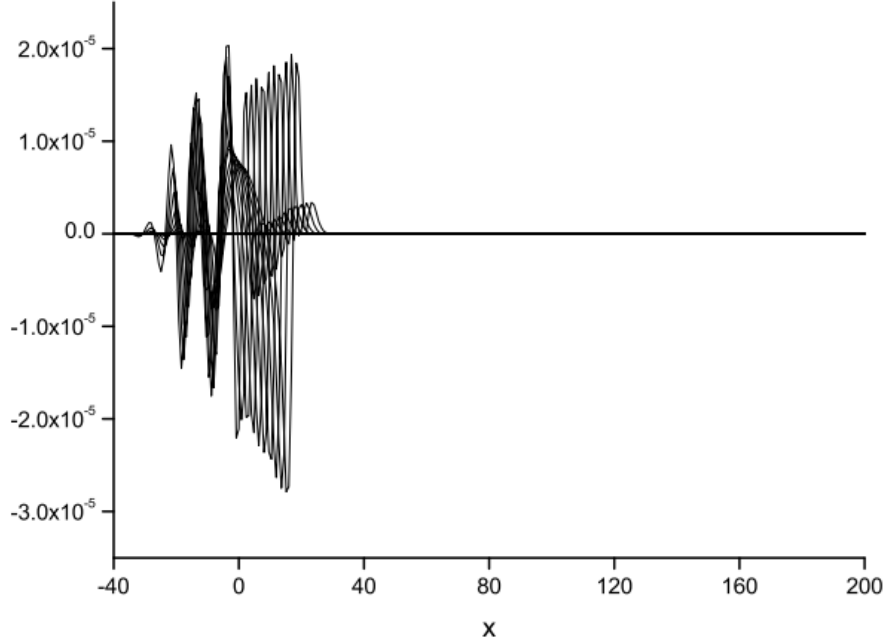
şeklinde olur. $[-40, 200]$ aralığında yukardaki parametreler kullanılarak elde edilen değerler Tablo 3.1 de verilmiştir.

Tablo 3.1. Tek solitary dalganın $-40 \leq x \leq 240$ aralığında $p = 2$ için değişmezi ve dalganın hata normları

Tablo 3.1 den $h = 0.8$ için yöntemimiz ile bulunan hata normlarının değerlerinin diğer yöntemlere göre daha iyi olduğu ve I_E değişmezinin başlangıç değerine göre değişiminin $h = 1.6$ için 7.9×10^{-4} iken $h = 1.0, 0.8$ ve 0.6 için sıfır olduğu görülür. Yine tablodan L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğu gözlemlenir. Dolayısıyla yöntemimizin verilen problem için uygun olduğu söylenebilir. $t = 1, 2, 3, \dots, 10$ zaman adımlarında $\Delta t = 0.005$ ve $h = 0.8$ için tek solitary dalganın davranışı Şekil 3.1 de verilmiştir. Görüldüğü gibi artan zaman adımlarında tek solitary dalganın genliğini ve şeklini muhafaza ederek sağa doğru sabit bir hızla ilerlediği görülür. $t = 0$ zamanında, $x = 0$ konumunda dalganın genliği 2.1597256 iken $t = 10$ zamanında $x = 18.4$ konumunda dalganın genliği 2.1580500 olarak bulunur. $t = 0$ ve $t = 10$ zamanlarındaki genlikler arasındaki mutlak fark 1.67×10^{-3} olup aradaki farkın oldukça küçük olduğu söylenebilir. Tam ve sayısal çözümler arasındaki hataları göstermek için $t = 1, 2, 3, \dots, 10$ zamanlarındaki hata dağılımları Şekil 3.2 de verilmiştir. Şekilden maksimum hataların $-3 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-5}$ aralığında olduğu görülür.



Şekil 3.1. $t = 1, 2, 3, \dots, 10$ zaman adımlarında $p = 2$, $h = 0.8$ ve $\Delta t = 0.005$ için tek solitary dalganın davranışı



Şekil 3.2. $t = 1, 2, 3, \dots, 10$ zamanındaki $p = 2$, $h = 0.8$ ve $\Delta t = 0.005$ için hata dağılımları

3.3.2 2.Durum

Sayısal hesaplamalar için ikinci olarak $[-40, 240]$ aralığında h nın farklı değerleri için $\Delta t = 0.005$ ve $p = 4$ parametreleri seçildi. Problemin tam çözümü [46]

$$U(x,t) = \left(\frac{40(\sqrt{127}-10)^2}{3(10\sqrt{127}-109)}\right)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sech}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{127}-10}}{3}\left(x - \frac{118-10\sqrt{127}}{10\sqrt{127}-109}t\right)\right] \quad (3.3.2.1)$$

olup başlangıç şartı

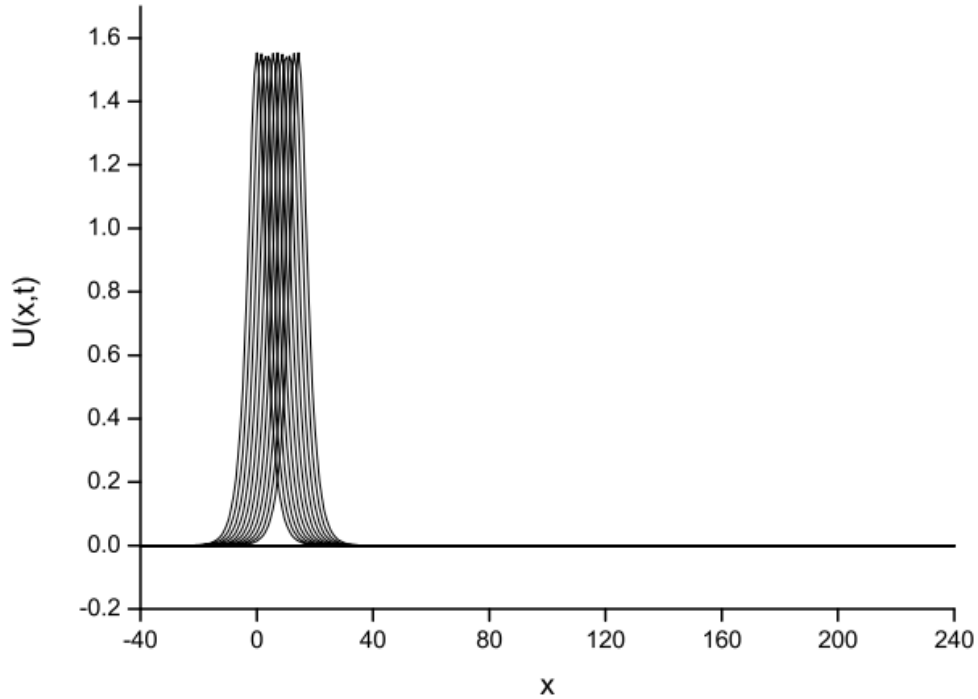
$$U(x,0) = \left(\frac{40(\sqrt{127}-10)^2}{3(10\sqrt{127}-109)}\right)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sech}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{127}-10}}{3}x\right] \quad (3.3.2.2)$$

biçiminde olur. $t=0$ dan $t=10$ zamanına kadar $[-40, 240]$ aralığında yukardaki parametreler kullanılarak elde edilen değerler Tablo 3.2 de verilmiştir.

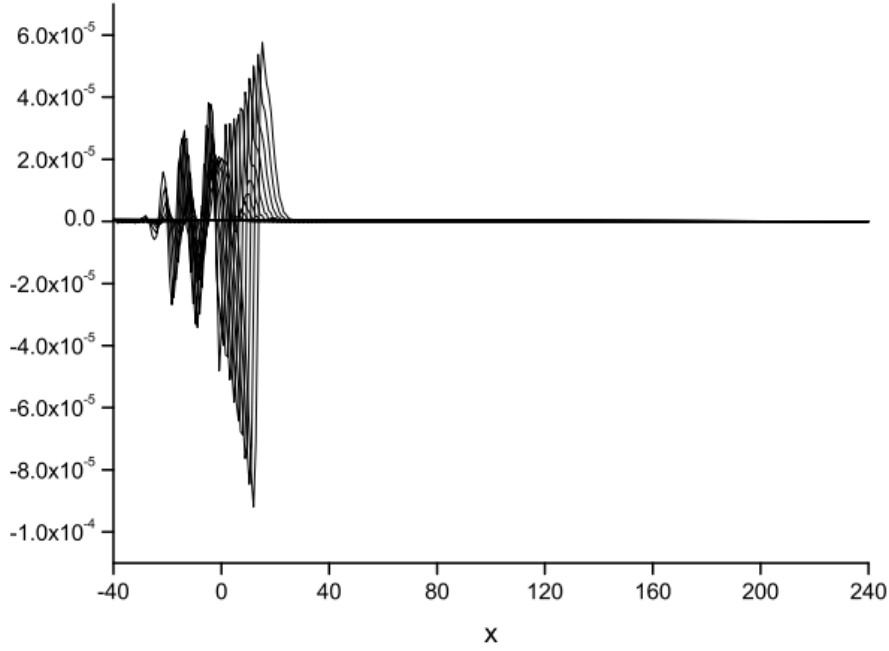
Tablo 3.2. Tek solitary dalganın $-40 \leq x \leq 240$ aralığında $p=4$ için değişmezi ve dalganın hata normları

$h = 1.6$	I_E	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$t = 1$	13.5736473	8.40940	4.09076
$t = 5$	13.5549680	17.44637	7.88485
$t = 10$	13.5725435	31.25806	1185995
$h = 1.0$			
$t = 1$	13.5658554	0.17182	0.09781
$t = 5$	13.5658605	0.25653	0.12195
$t = 10$	13.5658562	0.39970	0.18451
$h = 0.8$			
$t = 1$	13.5658560	0.07310	0.04803
$t = 5$	13.5658560	0.12211	0.05817
$t = 10$	13.5658560	0.20207	0.09192
[11] $t = 10$	13.5656656	154.3	58.39
[35] $t = 10$	13.5637615	1.684	0.7812
$h = 0.7$			
$t = 1$	13.5658553	0.04322	0.02816
$t = 5$	13.5658553	0.06912	0.03244
$t = 10$	13.5658553	0.11088	0.05002

Tablo 3.2 den $h=0.8$ için yöntemimiz ile elde edilen hata normlarının değerlerinin diğer yöntemlere göre daha iyi olduğu ve I_E değişiminin başlangıç değerine göre değişiminin $h=1.6$ için 1.10×10^{-3} ve $h=1.0$ için 8×10^{-7} iken $h=0.8$ ve 0.7 için sıfır olduğu görülür. Ayrıca yine tablodan L_2 ve L_∞ hata normlarının oldukça küçük olduğu görülmektedir. Dolayısıyla yöntemimizin verilen problem için oldukça uygun olduğu söylenebilir. $t=1,2,3,\dots,10$ zaman adımlarında $h=0.8$ ve $\Delta t=0.005$ için tek solitary dalganın davranışı Şekil 3.3 de gösterilmiştir. Şekilden anlaşıldığı gibi artan zaman adımlarında tek solitary dalganın genliğini ve şeklini koruyarak sağa doğru sabit bir hızla ilerlediği görülür. $t=0$ zamanında, $x=0$ konumunda dalganın genliği 1.5529458 iken $t=10$ zamanında $x=14.4$ konumunda dalganın genliği 1.5528307 olarak bulunur. $t=0$ ve $t=10$ zamanlarındaki genlikler arasındaki mutlak fark 1.15×10^{-4} olup aradaki fark oldukça küçüktür. Tam ve sayısal çözümler arasındaki hataları göstermek için $t=1,2,3,\dots,10$ zamanlarındaki hata dağılımları Şekil 3.4 de verilmiştir. Şekilden maksimum hataların $1 \times 10^{-4} - 6 \times 10^{-5}$ aralığında olduğu görülür.



Şekil 3.3. $t=1, 2, 3, \dots, 10$ zaman adımlarında $\Delta t=0.005$, $p=4$, ve $h=0.8$ için tek solitary dalganın davranışı



Şekil 3.4. $t = 1, 2, 3, \dots$ zamanındaki $\Delta t = 0.005, p = 4,$ ve $h = 0.8$ için hata dağılımlar

4. BÖLÜM

SONUÇLAR

Bu çalışma bahsedilen konulara ilgi duyanlar için bir başvuru niteliği taşımaktadır.

Bu çalışmada, göz önüne alınan [5] ve [22] refanslarında da belirtildiği gibi doğrusal olmayan modifiye edilmiş Kawahara ve genelleştirilmiş Rosenau-Kawahara-RLW denklemlerinin sayısal çözümleri için septik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar metodu başarıyla uygulanmıştır. Her bir denklem için yöntemin kararlılık analizi yapılmış ve yöntemin şartsız kararlı olduğu görülmüştür. Kullanılan yöntemin yeterliliği ve etkinliği her iki denklem için L_2, L_∞ hata normları ile modifiye edilmiş Kawahara denklemi için I_1, I_2 değişmezleri ve genelleştirilmiş Rosenau-Kawahara-RLw denklemi için ise I_E ile belirtilen değişmez hesaplanarak gösterilmiştir. Hesaplanan değerler, tablolar ve grafikler ile verilmiştir. Tablolara bakıldığında bulunan değerlerin yeterince küçük ve literatürdeki sonuçlarla uyumlu bazı durumlarda da daha iyi olduğu söylenebilir. Böylece tezde ele alınan yöntemin modifiye edilmiş Kawahara ve genelleştirilmiş Rosenau-Kawahara-RLW denklemleri gibi önemli ve fiziksel olarak

geniş uygulama alanlarına sahip olan kısmi diferansiyel denklemlerine de kolayca uygulanabileceğini söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

- [1] Clough, R.W., “The finite element in plane stress analysis”, *Proc.2nd A.S.C.E.Conf.on Elektronik Computation*, 345-378, 1960.
- [2] Davies, A. J., “The Finite Element Method: A First Approach” , *Oxford University Press*, 1986.
- [3] Reddy, J.N., “An introduction to nonlinear Finite Element Analysis” , *Oxford University Press Inc.*, 2004.
- [4] Karakoç, S.B.G., “Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri” , *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, 11-29 , 2011.
- [5] Ak, T., Karakoç, S. B. G., “A numerical technique based on collocation method for solving modified Kawahara equation”, *Journal of Ocean Engineering and Science*, 3, 67-75, 2018.
- [6] Wazwaz, A. M., “New solitary wave solutions to the modified kawahara equation”, *Phys. Lett. A*, 360, 588-592, 2007.
- [7] Parkes, E.J., “B.R. Duffy, P.C. Abbott, The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations”, *Phys. Lett. A.*, 295, 280–286, 2002.

- [8] Bibi, N., Tirmizi, S.I.A., Haq, S., “Meshless method of lines for numerical solution of Kawahara type equations”, *Appl. Math.*, 2, 608–618, 2011.
- [9] Suarez, P.U., Morales, J.H., “Fourier splitting method for Kawahara type equations”, *J. Comput. Methods Phys.*, 4, 2014.
- [10] Zarebnia, M., Aghili, M., “A new approach for numerical solution of the modified Kawahara equation”, *J. Nonlinear Anal. Appl.*, 48–59, 2016.
- [11] Yuan, J.M., Shen, J., Wu, J., “A dual-Petrov–Galerkin method for the Kawahara-type equations”, *J. Sci. Comput.*, 34, 48-63, 2008.
- [12] Gong, Y., Cai, J., Wang, Y., “Multi-symplectic Fourier pseudospectral method for the Kawahara equation”, *Commun. Comput. Phys.*, 16 (1), 35-55, 2014.
- [13] Dereli, Y., Dag, I., “Numerical solutions of the Kawahara type equations using radial basis functions”, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 28, 542–553, 2012.
- [14] Bagherzadeh, A.S., “B-spline collocation method for numerical solution of nonlinear Kawahara and modified Kawahara equations”, *TWMS J. App. Eng. Math.*, 7, 188–199, 2017.
- [15] Wen-Jun, C., Yu-Shun, W., “A new explicit multisymplectic integrator for the Kawahara-type equation”, *Chin. Phys. B* 23., 3, 1–5, 2014.
- [16] Safavi, M., Khajehnasiri, A.A., “Solutions of the modified Kawahara equation with time-and space-fractional derivatives”, *J. Modern Methods Numer. Math.*, 7, 10–18, 2016.
- [17] Polat, N., Kaya, D., “A analytic and numerical solution to a modified Kawahara Equation and a convergence analysis of the method”, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 193-199, 2006
- [18] Marinov, T.T., Marinova, R.S., “Solitary wave solutions with non-monotone shapes for the modified Kawahara equation”, *J. Comput. Appl. Math.*, 340, 561–570, 2018.
- [19] Bellman, R., Kashef, B.G., Casti, J., “Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear differential equations”, *J. Comput. Phys.*, 10, 40–52, 1972.
- [20] Başhan, A., “Highly efficient approach to numerical solutions of two different forms of the modified Kawahara equation via contribution of two effective methods”, *Matematics and Computers in Simulation.*, 179, 111-125, 2021.

- [21] Jin, L., “Application of variational iteration method and homotopy perturbation method to the modified Kawahara equation”, *Matematics and Computer Modelling.*, 49,573-578, 2009.
- [22] Ak, T., Karakoç, S. B. G., “Numerical study using finite element method for generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation”, *Computational Methods for Differential Equations*, 7 (3), 319-333, 2019.
- [23] Korteweg, D. J., Vries G. de, “On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves”, *Philos. Mag.*, 39, 422-443, 1895.
- [24] Kudryashov, N. A., “On “new travelling wave solutions” of the KdV and the KdV-Burgers equations”, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, 14, 1891-1900, 2009.
- [25] Wazzan, L., “A modified tanh-coth method for solving the KdV and the KdV-Burgers equations”, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, 14, 443-450, 2009.
- [26] Biswas, A., “Solitary wave solution for KdV equation with power-law nonlinearity and time-dependent coefficients”, *Nonlinear Dynam.*, 58, 345-348, 2009.
- [27] Wang, G.-W., Xu, T.-Z., Ebadi, G., Johnson, S., Strong, A. J., Biswas, A., “Singular solitons, shock waves, and other solutions to potential KdV Equation”, *Nonlinear Dynam.*, 76, 1059-1068, 2014.
- [28] Peregrine, D.H., “Calculations of the development of an Unduiar Bore”, *J. Fluid Mech.*, 25, 321-330, 1966.
- [29] Peregrine, D.H., “Long waves on a beach”, *J. Fluid Mech.*, 27, 815-827, 1967.
- [30] Roshan, T., “A Petrov-Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation”, *Comput. Math. Appl.*, 63, 943-956, 2012.
- [31] Biswas, A., “Solitary waves for power-law regularized long-wave equation and R(m,n) equation”, *Nonlinear Dynam.*, 59, 423-426, 2010.
- [32] Kawahara, T., “Oscillatory solitary waves in dispersive media”, *J. Phys. Soc. Japan*, 33, 260-264, 1972.
- [33] Sirendaoreji, “New exact travelling wave solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations”, *Chaos Soliton. Fract.*, 19, 147-150, 2004.
- [34] Saadatmandi, A., Dehghan, M., “He’s variational iteration method for solving a partial differential equation arising in modelling of the water waves”, *Zeitschriftfuer Naturforschung A*, 64a 12 , 783-787, 2009.

- [35] Rosenau, P., “A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line”, *Phys. Scr.*, 34, 827-829, 1986.
- [36] Rosenau, P., “Dynamics of dense discrete systems”, *Prog. Theor. Phys.*, 79, 1028-1042, 1988.
- [37] Razborova, P., Triki, H., Biswas, A., “Perturbation of dispersive shallow water waves”, *Ocean Eng.*, 63, 1-7, 2013.
- [38] Esfahani, A., “Solitary wave solutions for generalized Rosenau-KdV equation”, *Commun. Theor. Phys.*, 63,1-7, 2013.
- [39] Saha, A., “Topological 1-soliton solutions for the generalized Rosenau-KdV equation”, *Fund. J. Math. Phys.*, 2 (1), 19-25, 2012.
- [40] Hu, J., Xu, Y., Hu, B., “Conservative linear difference scheme for Rosenau-KdV equation”, *Adv. Math. Phys.*, 7. Article ID 423718, 2013.
- [41] Pan, X., Zhang, L., “On the convergence of a conservative numerical scheme for the usual Rosenau-RLW equation”, *Appl. Math. Model.*, 36, 3371-3378, 2012.
- [42] Pan, X., Zheng, K., Zhang, L., “Finite difference discretization of the Rosenau-RLW equation”, *Appl. Anal.*, 92 (12), 2578-2589, 2013.
- [43] Atouani, N., Omrani, K., “Galerkin finite element method for the Rosenau-RLW equation”, *Comput. Math. Appl.*, 66, 289-303, 2013.
- [44] Zuo, J.-M., “Solitons and periodic solutions for the Rosenau-KdV and Rosenau-Kawahara equations”, *Appl. Math. Comput.*, 215 (2), 835-840, 2009.
- [45] Zuo, J.-M., “Soliton Solutions of a General Rosenau-Kawahara-RLW Equation”, *Journal of Mathematics Research*, 7, 24-28, 2015.
- [46] He, D., Pan, K., “A linearly implicit conservative difference scheme for the generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 271, 323-336, 2015.
- [47] He, D., “Exact solitary solution and a three-level linearly implicit conservative finite difference method for the generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation with generalized Novikov type perturbation”, *Nonlinear Dynamics*, 85(1), 479-498, 2016.
- [48] Wang, X., Dai, W., “A new implicit energy conservative difference scheme with fourth-order accuracy for the generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation”, *Computational and Applied Mathematics*, doi 10.1007/s40314-018-0685-4, 1-22, 2018.