

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Ayşe ATA**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENOL**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Temmuz 2017
NEVŞEHİR**

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENOL danışmanlığında Ayşe ATA tarafından hazırlanan "Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

13.07.2017

JÜRİ

Başkan : Doç. Dr. Adnan TUNA

imza

Üye :Yard. Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

imza

Üye :Yard. Doç.Dr. Mehmet ŞENOL

imza

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun **19/07/2017**..tarih ve.. **33 -238**..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

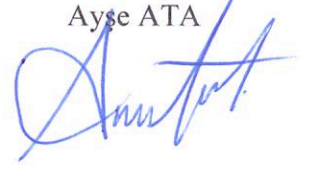


TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atf yapıldığını bildiririm.

(İmza)

Ayşe ATA



TEŞEKKÜR

“Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri” konulu bu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan tez danışmanım çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENOL’a ayrıca bu zorlu süreçte desteklerini esirgemeyen aileme ve eşime sonsuz teşekkür eder Őükranlarımı sunarım.



KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Ayşe ATA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2017

ÖZET

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini Rezidual Kuvvet Serisi Metodu (RPSM) ile vermektir.

Bu amaçla 1. Bölüm kesirli analiz ile ilgili genel bilgiler, kesirli analizin tarihi ve matematiksel arka planı hakkında bilgi vermeye ayrılmış, 2. Bölümde integral ve diferansiyel kavramları ile birinci mertebeden diferansiyel denklemler hakkında bilgi verilmiştir. 3. Bölümde integral dönüşümleri ile Gama, Beta ve Mittag-Leffler fonksiyonlarının tanımlarına, 4. Bölümde kesirli integral ve türev tanımları ile Riemann–Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo operatörleri tanımları ile kesirli diferansiyel denklemler tanımlarına yer verilmiştir. 5. Bölümde Rezidual Kuvvet Serisi Metoduna, 6. Bölümde ise Rezidual Kuvvet Serisi Metodunun kesirli kısmi diferansiyel denklemlere ve denklem sistemlerine uygulamasına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Rezidual kuvvet serisi metodu, lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem ve denklem sistemleri, Caputo kesirli türevi, kesirli kısmi diferansiyel denklemler.*

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

Sayfa Adedi: 66

NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Ayşe ATA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2017

ABSTRACT

The aim of this work, which consists of six parts, is to give approximate solutions of linear and nonlinear fractional order partial differential equations and equation systems by using Residual Power Series Method (RPSM).

For this purpose, Part 1 is devoted to general information about fractional analysis, history and mathematical background of it, and in Chapter 2, the concepts of integration, differentiation and first order differential equations are given. Chapter 3 focused on the definitions of Gamma, Beta and Mittag-Leffler functions with integral transformations, fractional integral and derivative definitions are given. In Chapter 4, definitions of Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov and Caputo operators and fractional differential equations are discussed. In Section 5, theoretical approach to Residual Power Series Method and in Chapter 6, the application of the method to fractional partial differential equations and equation systems are studied.

Keywords: *Residual Power Series Method, linear and non-linear fractional differential equations and systems, Caputo fractional derivative, fractional partial differential equations.*

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet ŞENOL

Page Number: 66

İÇİNDEKİLER

KABÜL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLOLAR LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	x
1. BÖLÜM	
1.1. Kesirli Analizin Tarihi Ve Matematiksel Arka Planı.....	1
2. BÖLÜM	
2.1. İntegral ve Diferansiyel Kavramları.....	6
2.2. Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler.....	6
3. BÖLÜM	
3.1. İntegral Dönüşümleri.....	10
3.2. Euler' in GamaFonksiyonu.....	10
3.3. Beta Fonksiyonu.....	11
3.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu	12
4. BÖLÜM	
4.1. Kesirli İntegral ve Türev	14
4.1.1. Riemann–Liouville Kesirli İntegral Ve Türev Operatörü	14
4.1.2. Grünwald-Letnikov Operatörü	18
4.1.3. Caputo Operatörü	18

4.2.	Kesirli Diferansiyel Denklemler.....	21
5. BÖLÜM		
5.1.	Rezidual Kuvvet Serisi Metodu.....	23
5.2.	Rezidual Kuvvet Serisi Metodu Algoritması.....	24
6. BÖLÜM		
6.1.	Rezidual Kuvvet Serisi Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması.....	27
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....		61
KAYNAKLAR		62
ÖZGEÇMİŞ		66

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 1.1.	Kesirli mertebeden türevlerin tanımları	5
Tablo 6.1.	Örnek 6.1. de elde edilen $u_5(x, t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	32
Tablo 6.2.	Örnek 6.2. de elde edilen $u(x, y)$ değerlerinin $\alpha = 1$ için sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	39
Tablo 6.3.	Örnek 6.3 de elde edilen $u_3(x, y, t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması	48
Tablo 6.4.	Örnek 6.4 de elde edilen $u(x, y, t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	57
Tablo 6.5.	Örnek 6.4. de elde edilen $v(x, y, t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	57

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 6.1.	Örnek 6.1. da elde edilen $u_5(x, t)$ ' nin grafiği.....	32
Şekil 6.2.	Örnek 6.1. de çözülen FADE denkleminin tam çözüm grafiği.....	32
Şekil 6.3.	Örnek 6.1. de elde edilen $u_5(x, t)$ ve tam çözümü karşılaştırma grafiği.....	33
Şekil 6.4.	Örnek 6.2. da elde edilen $u_5(x, t)$ 'in $\alpha = 1$ için grafiği.....	40
Şekil 6.5.	Örnek 6.2. da çözülen zaman kesirli KDV denkleminin tam çözüm grafiği.....	40
Şekil 6.6.	Örnek 6.2. da elde edilen $u_5(x, t)$ ve tam çözümü karşılaştırma grafiği.....	41
Şekil 6.7.	Örnek 6.3. da elde edilen $u_3(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için grafiği.....	49
Şekil 6.8.	Örnek 6.3. da çözülen Kesirli Zakharov-Kuznetsov denkleminin tam çözüm grafiği.....	49
Şekil 6.9.	Örnek 6.3. da da elde edilen $u_5(x, t)$ ve tam çözümü karşılaştırma grafi.....	50
Şekil 6.10.	Örnek 6.4. da elde edilen $u_3(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için grafiği.....	58
Şekil 6.11.	Örnek 6.4. da çözülen (2+1) Boyutlu Zaman Kesirli Coupled Burger denkleminin $\alpha = 1$ için grafiği için tam çözüm grafiği.....	58
Şekil 6.12.	Örnek 6.4. de elde edilen $u_3(x, t)$ ve tam çözümü karşılaştırma grafiği.....	59
Şekil 6.13.	Örnek 6.4. de elde edilen $v_3(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için grafiği.....	60
Şekil 6.14.	Örnek 6.4. de elde edilen $v_3(x, t)$ ve tam çözümü karşılaştırma grafiği.....	60

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\Gamma(x)$	Gama Fonksiyonu
$\beta(z, x)$	Beta Fonksiyonu
$E_\mu(z)$	Mittag-Leffler Fonksiyonu
$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$	Lacroix Kesirli Türevi
$\frac{d^v x^{-\alpha}}{dx^v}$	Liouville Kesirli Türevi
$\frac{d^m}{dx^m} [{}_c D_x^{-p} f(x)]$	Laurent Kesirli Türevi
$f_+^{(\alpha)}$	Cauchy Kesirli Türevi
$D_*^\alpha f(t)$	Caputo Kesirli Türevi
$J^\alpha f(x)$	Riemann –Liouville İntegral Operatörü
$D^\alpha f(x)$	Riemann –Liouville Kesirli Türev Operatörü
${}^{GL}D^\alpha f(x)$	Grünwald-Letnikov Operatörü
RPSM	Rezidual Kuvvet Serisi Metodu
FDE	Kesirli Diferansiyel Denklem
\mathbb{N}	Doğal Sayılar
\mathbb{R}	Reel Sayılar

1. BÖLÜM

Keyfi mertebeden türev ve integrali ihtiva eden kesirli analiz, klasik tamsayı mertebeden türev ve integralin genelleştirilmiş halidir. Kesirli analizin başlangıcı neredeyse tamsayı mertebeden analizin başlangıcı kadar eskidir. Ancak geçtiğimiz yıllara kadar kesirli hesaplardaki işlemlerin karmaşıklığı nedeniyle ve birçok matematikçinin konunun uygulamalarına yabancı olmalarından dolayı genellikle matematik dersleri arasında yer bulmamıştır. Aslında daha sonra bahsedileceği üzere 1695’de L-Hospital ve Leibniz ile başlayarak Lacroix, Lioville, Laurent ve Caputo gibi birçok matematikçi konu üzerine çalışmalar yapmış ve kendilerince bazı kesirli mertebeden türev tanımı vermişlerdir. Fakat son yıllarda sembolik hesaplamalar yapan bilgisayar programları ve daha güçlü özelliklere sahip bilgisayarlar yardımıyla kesirli hesap, matematikçiler tarafından önceki yıllara göre daha fazla kullanılır olmuştur. Özellikle akışkanlar mekaniği, fizik, biyoloji, ve kontrol teorisi gibi mühendisliğin birçok alanında ortaya çıkan kesirli diferansiyel denklemler sayısız uygulamaları nedeniyle bir çok problemin modellenmesinde iyi bir araç olmuştur. Çoğu durumda kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek oldukça zor olduğundan bu tip denklemlerin nümerik ve yaklaşık çözümünü veren yöntemlerin sayısında son yıllarda bir artış olmuştur [1].

1.1. Kesirli Analizin Tarihi ve Matematiksel Arka Planı

Bu konuyla ilgili yazarların çoğu belirli bir tarihi ‘Kesirli Analiz’ olarak adlandırılan ifadenin, doğum tarihi olarak göstermiştir. L-Hospital 30 Eylül 1695 tarihinde Leibniz’e yazdığı mektupta $f(x) = x$ lineer fonksiyonunun n. türevi için $\frac{D^n x}{Dx^n}$ ifadesini kullandığını ve eğer $n = \frac{1}{2}$ olursa nasıl bir sonuç vereceğini soruyordu. Leibniz’in cevabı ise ‘Bir gün kullanışlı sonuçlara yol açacağı açık olan bir paradokstur’ şeklindedir. Kesirli analiz bu şekilde doğmuştur [2].

L-Hospital ve Leibniz’in ilk incelemelerini takiben kesirli analiz, birçok parlak matematikçinin ilgisini çekmiş ve çalışma alanı olmuştur. Fourier, Euler ve Laplace bu matematikçilerden bazılarıdır.

Birçoğu kendi gösterimini ve metodolojisini kullanarak tamsayı olmayan mertebeden integral ve türev kavramları için bazı tanımlar bulmuşlardır. Bu tanımlardan, en popüler

olanları Rieman-Liouville ve Grünwald-Letnikov tanımlarıdır. Fiili tanımların sayısı şüphesiz bu alanı inceleyen kadın ve erkeklerin sayısı kadar fazladır.

1730' da Euler, bir türevin integral mertebeleri arasındaki interpolasyondan bahsetmiştir. 1812' de Laplace bir integral vasıtasıyla bir kesirli türev tanım yapmıştır ve kesirli mertebeden türevle ilgili ilk tartışması 1819 da Lacroix tarafından yapılan bir çalışmada ortaya çıkmıştır [1, 3]

Lacroix

Lacroix ($n \leq m$) için n . türevin Legendre sembolü olan ' Γ ' cinsinden şöyle ifade etmiştir.

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (1.1)$$

Örneğin $y = x^m$ fonksiyonun türevini Lacroix şu şekilde ifade etmiştir.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.2)$$

Böylece $n = \frac{1}{2}$ ve $m = 1$ alınırsa x fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. türevi şu şekilde elde edilir.

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \quad (1.3)$$

Liouville

Kesirli analiz ile ilgili ilk büyük çalışmaları yapan matematikçi Liouville dir. Liouville'in keyfi bir ν . mertebeden türev ile ilgili ilk tanımı, bazı ν ler için yakınsak olan sonsuz bir seri içeriyordu. Liouville'nin ikinci tanımı ise, x ve α nın her ikisinin de pozitif olduğu durumda $x^{-\alpha}$ 'nın kesirli türevini hesaplama konusunda başarılı olmuştur. Euler'in gama integrali cinsinden, $x^{-\alpha}$ nın integral formülü

$$\int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-xu} du, \quad (1.4)$$

şeklindedir. Eğer $t = xu$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-xu} du = \int \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-t} \frac{1}{x} dt = \int \frac{t^{\alpha-1}}{x^{\alpha} x^{-1}} e^{-t} \frac{1}{x} dt = \frac{1}{x^{\alpha}} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (1.5)$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-xu} du = \frac{1}{x^{\alpha}} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (1.6)$$

dir. Bu eşitlik ve (1.1) eşitliğinden

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-xu} du. \quad (1.7)$$

integral formülü elde edilir. Sonuç olarak her $v > 0$ için $\frac{d^v}{dx^v}(e^{\alpha x}) = \alpha^v e^{\alpha x}$ olduğu kabul edilerek

$$\frac{d^v x^{-\alpha}}{dx^v} = \frac{\Gamma(\alpha + v)}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-v} = (-1)^v \frac{\Gamma(\alpha + v)}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-v}. \quad (1.8)$$

eşitliği elde edilir. Son denklemdaki $(-1)^v$ terimi, kesirli analiz teorisini kompleks sayıları da içine alacak şekilde genişletme ihtiyacını doğurmuştur.

Aslında güncel tanımlar açısından kesirli analiz teorisi, operatörler teorisi ile yakından ilgilidir. Klasik analizde D_x^n sembolü $n \geq 0$ için n . türev operatörü olarak kullanılırken, daha az yaygın olarak D_x^{-1} ifadesi anti-türev (veya integral) operatörü için kullanılır.

Davis tarafından uygun bir notasyon şöyle verilmiştir: Eğer v pozitif bir reel sayı ise ${}_c D_x^v f(x)$ x eksenini boyunca f fonksiyonunun v . mertebeden türevini gösterir. Benzer şekilde ${}_c D_x^{-v} f(x)$ operatörü x eksenini boyunca f fonksiyonunun v . Mertebeden integralini ifade eder.

Kesirli analiz hala keyfi mertebeden türev ve integrallerin geometrik yorumundan yoksundur. Bu nedenle, c ve x indisleri integralin sınırları yerine integralin terminalleri olarak adlandırılır. Bu adlandırma gereksiz karışıklığı önler.

Laurent

1884 yılında Laurent, kesirli analizin temelleri kabul edilen bir çalışma yayınlamıştır. Cauchy'nin kompleks değerli analitik fonksiyonlar için integral formülünü kullanarak ve negatif bir ν yerine pozitif bir ν kullanarak notasyonda basit bir değişiklikle $\nu > 0$ keyfi mertebeden integral tanımını Laurent şu şekilde vermiştir.

$${}_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} = \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt. \quad (1.9)$$

Buradan hareketle keyfi mertebeden türev tanımını ise

$$\frac{d^m}{dx^m} [{}_c D_x^{-\rho} f(x)] = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_c^x (x-t)^{\rho-1} f(t) dt \right] \quad (1.10)$$

şeklinde yapmıştır.

Cauchy

Cauchy'nin bazı önemli özellikler içeren tanımı ise aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$f_+^{(\alpha)} = \int f(\tau) \frac{(t-\tau)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} d\tau. \quad (1.11)$$

Burada $\Gamma(\alpha)$ fonksiyonu, (1.1) de tanımlanan faktöriyel fonksiyonunun genelleştirilmiş halidir.

Aslında, diferansiyel ve integral analizin doğuşundan beri, türev ve integral kavramlarının tamsayı olmayan mertebeden türev ve integrale genişletilmesi çeşitli yaklaşımlara konu olmuştur. Bu nedenle, literatür de eşdeğerliği kanıtlanmış çeşitli tanımlar mevcuttur ve farklı bilimsel alanlarda ki araştırmacılar tarafından kullanılmaktadır.

Caputo

m , α 'dan büyük en küçük tamsayı olmak üzere, $\alpha > 0$ mertebenden Caputo kesirli türev tanımı şu şekilde verilir.

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \quad m-1 < \alpha < m \quad (1.12)$$

bu tanım günümüzde en sık kullanılan tanımdır.

Çünkü Caputo türev tanımı klasik diferansiyel denklemlerdeki başlangıç ve sınır şartlarının herhangi bir dönüşüme gerek olmaksızın aynen kullanımına olanak vermektedir. Açıkçası çok sayıda matematikçi temel bir problemi çözmeye çalışarak kesirli analizin tarihçesine katkıda bulunmuşlardır [4].

Yukarıda bahsi geçen, kesir mertebeden türev tanımlarının bazıları aşağıdaki tabloda özet olarak verilmiştir.

Tablo 1.1. Kesirli mertebeden türevlerin tanımları [1]

Lacroix	$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$
Liouville	$\frac{d^v x^{-\alpha}}{dx^v} = (-1)^v \frac{\Gamma(\alpha+v)}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-v}$
Laurent	$\frac{d^m}{dx^m} [{}_c D_x^{-p} f(x)] = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_c^x (x-t)^{\rho-1} f(t) dt \right]$
Cauchy	$f_+^{(\alpha)} = \int f(\tau) \frac{(t-\tau)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} d\tau$
Caputo	$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}$

2. BÖLÜM

2.1. İntegral ve Diferansiyel Kavramları

Birçok fiziksel olgu, matematik analiz yoluyla modellenenebilir. Örneğin gözlemsel kanıtlar, sabit sıcaklıktaki bir odada bir fincan çayın (ya da diğer sıvıların) oda sıcaklığı ve çayın sıcaklığı arasındaki farkla orantılı olarak zamanla soğuyacağını ortaya koymaktadır [5].

Sembollerle gösterildiğinde eğer t zamanı, M oda sıcaklığını ve $f(t)$ çayın t anındaki sıcaklığı ifade ediyor ise, k çayın türüne (ya da daha genel olarak cinsine) bağımlı olan hem odanın hem de çayın sıcaklığından farklı pozitif bir sabit olmak üzere $f'(t) = k(M - f(t))$ dir. Bu Newton'un soğuma kanunudur ve yazdığımız denklem bir diferansiyel denklem örneğidir. Burada amacımız, zaman içindeki sıcaklık olan $f(t)$ 'yi bulmaktır. Bu çoğu zaman imkânsızdır ve yaklaşık çözüm teknikleri kullanılmalıdır. Diferansiyel denklemlerin kullanımı ve çözümü matematiğin önemli bir alanıdır [5].

En basit tarifiyle bir fonksiyonun bir ya da daha fazla türevini ihtiva eden denklemlere diferansiyel denklem denir. Tipik olarak, bilimsel teoriler bazı fiziksel olayları tanımlayan ya da modelleyen diferansiyel denklemler (ya da denklem sistemleri) üretirler. Fakat bu teoriler genellikle, istenen fonksiyonu ya da fonksiyonları doğrudan üretemezler.

2.2. Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.1. (Birinci mertebeden diferansiyel denklem): $F(t, y, y') = 0$ formunda bir denklemdir [5].

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin bir çözümü, t 'nin her değeri için $F(t, f(t), f'(t)) = 0$ olan bir $f(t)$ fonksiyonudur.

Burada F , t , y ve y' değişkenlerine bağlı 3 değişkenli bir fonksiyondur.

Örnek 2.1. Newton'un soğuma kanunu olarak adlandırılan $y' = k(M - y)$ denklemi, birinci mertebeden diferansiyel denklemdir ve $F(t, y, y') = k(M - y) - y'$ şeklinde ifade edilir [5].

Örnek 2.2. $y' = t^2 + 1$ birinci dereceden diferansiyel denklemdir ve $F(t, y, y') = y' - t - 1$. Bu denklemin bütün çözümleri $\frac{t^3}{3} + t + c$ formunda ifade edilir [5].

Tanım 2.2. Birinci mertebeden başlangıç değer problemi, $F(t, y, y') = 0$, $y(t_0) = y_0$ şeklinde ifade edilen bir denklem sistemidir. Burada t_0 belirli bir zamanı ve y_0 ise bir sabit sayıyı gösterir. Bir başlangıç değer probleminin çözümü, $f(t_0) = y_0$ başlangıç şartını sağlayan diferansiyel denklemin $f(t)$ çözümüdür [5].

Örnek 2.3. Newton'un soğuma kanununun özel bir hali olan $y' = 2 \cdot (25 - y)$, $y_0=40$ denklemini göz önüne alalım. İlk önce $y(t_0) = 25$ olarak alınırsa diferansiyel denklemin sağ tarafı 0 olup $y(t) = 25$ sabit fonksiyonu diferansiyel denklemin bir çözümü olur. Bu durumda $y_0 \neq 40$ olacağından bu çözüm başlangıç değer probleminin bir çözümü olmaz (bu sabit çözümünün fiziksek yorumu; eğer bir sıvı, çevresi ile aynı sıcaklıkta ise sıvı bu sıcaklık da kalmaya devam edecektir) [5].

$y \neq 25$ olduğunda diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dt} \frac{1}{25 - y} = 2$$

ya da

$$\frac{1}{25 - y} dy = 2dt$$

şeklinde yeniden yazabiliriz.

$$\int \frac{1}{25 - y} dy = \int 2dt$$

eşitliğinde iki integral, sabitleri hariç eşit olmalıdır. Bu integralleri şu şekilde hesaplayabiliriz.

$$\int \frac{1}{25 - y} dy = \int 2dt$$

$$(-1) \ln|25 - y| = 2t + C_0$$

$$\ln|25 - y| = -2t - C_0 = -2t + C$$

$$|25 - y| = e^{-2t+C} = e^{-2t}e^C$$

$$y - 25 = \pm e^C e^{-2t}$$

$$y = 25 \pm e^C e^{-2t} = 25 + Ae^{-2t}.$$

Burada $A = \pm e^C = e^{-C_0}$ sıfırdan farklı bir sabittir. $y(0) = 40$ olmasını istediğimiz için bu değerleri yerine yazdığımızda

$$40 = 25 + Ae^0$$

$$15 = A,$$

olup $y = 25 + 15e^{-2t}$ başlangıç değer probleminin bir çözümü olur. y , 25 den farklı olduğunda bu çözüm t 'nin bütün değerleri için geçerlidir. Ancak $A = 0$ alırsak $y = 25$ sonucunu elde ederiz ki bu sonuç $y_0 = 25$ başlangıç şartına sahip problemin çözümüdür. Bu nedenle $y = 25 + Ae^{-2t}$, $y' = 2(25 - y)$ diferansiyel denkleminin ve ilişkili başlangıç değerli problemlerin tüm çözümünü ifade eder.

Örnek 2.4. $y' = 2t(25 - y)$ diferansiyel denklemi çözelim. Bu, neredeyse bir önceki örneğe benzemektedir. Daha önce olduğu gibi $y(t) = 25$ bir çözümdür. Eğer $y \neq 25$ ise

$$\int \frac{1}{25 - y} dy = \int 2t dt$$

$$(-1) \ln|25 - y| = t^2 + C_0$$

$$\ln|25 - y| = -t^2 - C_0 = -t^2 + C$$

$$|25 - y| = e^{-t^2+C} = e^{-t^2}e^C$$

$$y - 25 = \pm e^C e^{-t^2}$$

$$y = 25 \pm e^C e^{-t^2} = 25 + Ae^{-t^2}.$$

olur [5].

Tanım 2.3. Birinci dereceden bir diferansiyel denklem, eğer $y' = f(t)g(y)$ formunda yazılabilirse bu denkleme değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem denir [5].

Örneklerde olduğu gibi, değişkenlerine ayrılabilir bir denklemi

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt \quad (2.1)$$

formuna dönüştürerek çözmeye çalışabiliriz. Bu tekniğe değişkenlerine ayırma tekniği denir. Değişkenlerine ayrılabilir denklemlerin en basit türü $g(y) = 1$ olanıdır. Bu durumda çözmeye çalıştığımız denklem

$$\int 1 dy = \int f(t) dt. \quad (2.2)$$

dir. Eğer $f(t)$ 'nin bir integralini bulabileceksek yapabiliriz. Ayrıca şimdiye kadar gördüğümüz gibi bir diferansiyel denklemin, sonsuz sayıda çözümü vardır. Her zaman değil ama genelde bir başlangıç değer problemi bir tek çözüme sahiptir. Bilinmeyen sabitler kalmadığı çözüme ise özel çözüm denir.

3. BÖLÜM

3.1. İntegral Dönüşümleri

İntegral dönüşümleri klasik analizde sıkça kullanılan bir araçtır. Bu durum kesirli analiz için de geçerlidir. Bu bölümde kesirli analizde kullanılacak olan Euler'in Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu ve Mittag-Lefter fonksiyonunun bazı özellikleri verilecektir.

3.2. Euler' in Gama Fonksiyonu

Euler'in gama fonksiyonunun incelenmesiyle, özel fonksiyonların bir köşe taşı ifade edilmiş olur. Bu fonksiyon ile konunun neredeyse bütün kısımlarında karşılaşılabılır ve dahası birçok fonksiyon, Gama fonksiyonu ile direk olarak ifade edilebilir [6].

Gama fonksiyonu $\Gamma(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır [6].

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (3.1)$$

$\text{Re}(z) > 0$ için yakınsaktır.

Gama fonksiyonunun limit tanımı ise

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)} \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.1. Euler'in Gama fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir [7]:

1. $x \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x) \quad (3.3)$$

$$2. k \in \mathbb{N} \text{ için } \Gamma(k) = (k-1)! \quad (3.4)$$

$$3. x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ için } \Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x) \quad (3.5)$$

4. Limit tanımı: $\text{Re}(z) > 0$ için

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)} \quad (3.6)$$

Limit gösterimi, Euler'in sonsuz çarpımına eşdeğerdir;

$$\frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (1/n))^z}{1 + z/n} \quad (3.7)$$

5. Weierstrass tanımı: Euler'in gama fonksiyonu $x \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanabilir.

6. Euler'in gama fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için analitiktir.

7. Euler'in gama fonksiyonu asla sıfır değildir

8. (Yansıma teoremi) $\forall x \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (3.9)$$

ve

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x} \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir.

3.3. Beta Fonksiyonu

Özel bir fonksiyon olan Beta fonksiyonunun, Euler'in gama fonksiyonu cinsinden tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\beta(z, x) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(x)}{\Gamma(z+x)} \quad (3.11)$$

Beta fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir [8].

$$1. \beta(z, x) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{x-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt \quad (3.12)$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2z-1} (\cos t)^{2w-1} dt$$

2. $\beta(z+1, x+1)$ ifadesi Beta integralinin çözümüdür

$$\int_0^1 t^z (1-t)^x dt = \beta(z+1, x+1) \quad (3.13)$$

3.

$$(a) \beta(z, x) = \beta(x, z), \quad (3.14)$$

$$(b) \beta(z, x) = \beta(z+1, x) + \beta(z, x+1), \quad (3.15)$$

$$(c) \beta(z, x+1) = \frac{x}{z} \beta(z+1, x) = \frac{x}{z+x} \beta(z, x). \quad (3.16)$$

3.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu

$E_\mu(z)$ şeklinde gösterilen, tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu k + 1)}, \quad \mu > 0 \quad (3.17)$$

ifadesiyle tanımlanır. Fakat iki parametreyle genelleştirilen Mittag-Leffler fonksiyonu

$E_{\mu, \theta}(z)$

$$E_{\mu, \theta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu k + \theta)}, \quad \mu, \theta > 0. \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilir [9].

Aşağıda verilen teoremden Mittag-Leffler fonksiyonunun özelliklerinde bazıları verilmiştir.

Teorem 3.2. Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir [9]:

1. $|z| < 1$ için genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\theta-1} E_{\mu, \theta}(t^\mu z) dt = \frac{1}{z-1} \quad (3.19)$$

ifadesi ile verilir.

2. $|z| < 1$ için Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü $E_\mu(z^\mu)$

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} E_\mu(z^\mu) dt = \frac{1}{z - z^{1-\mu}} \quad (3.20)$$

ile ifade edilir.

3. Her özel μ değeri için Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki eşitliklere sahiptir [6,9]

$$(a) E_0(z) = \frac{1}{1-z} \quad (3.21)$$

$$(b) E_1(z) = e^z \quad (3.22)$$

$$(c) E_2(z^2) = \cos h(z) \quad (3.23)$$

$$(d) E_2(-z^2) = \cos(z) \quad (3.24)$$

4. Mittag-Leffler fonksiyonunun bazı temel özellikleri

$$(a) E_{\mu,\theta}(x) = x E_{\mu,\mu+\theta}(x) + \frac{1}{\Gamma(\theta)} \quad (3.25)$$

$$(b) E_{\mu,\theta}(x) = \beta E_{\mu,1+\theta}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\mu,1+\theta}(x) \quad (3.26)$$

$$(c) \frac{d}{dx} E_{\mu,\theta}(x) = \frac{1}{\alpha x} [E_{\mu,\theta-1}(x) - (\beta - 1) E_{\mu,\theta}(x)] \quad (3.27)$$

$$(d) \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(x^{\theta-1} E_{\mu,\theta}(x^\mu)\right) = x^{\theta-m-1} E_{\mu,\theta-m}(x^\mu), \theta - m > 0, m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.28)$$

$$(e) \int_0^x E_{\mu,\theta}(\lambda t^\mu) t^{\theta-1} dt = x^\beta E_{\mu,\theta+1}(\lambda x^\mu) \quad (3.29)$$

$$(f) \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} E_{\mu,\theta}(\lambda t^\mu) t^{\theta-1} dt = x^{\theta+v-1} E_{\mu,\theta+v}(\lambda t^\mu), v > 0 \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilir [6,9].

4.BÖLÜM

4.1. Kesirli İntegraller ve Türevler

4.1.1. Riemann–Liouville Kesirli İntegral ve Türev Operatörü

Tanım 4.1. $\alpha \in R_+$ için α . Mertebeden Riemann –Liouville integral operatörü $J^\alpha f(x)$;

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > 0 \quad (4.1)$$

ve

$$\alpha = 0 \text{ için } J^0 f(x) = I \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir [10]. $f \in C_\alpha$, $\alpha, \theta > 0$, $a \geq 0$ ve $\mu > -1$ olacak şekilde Riemann –Liouville integral operatörünün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir [11]:

$$(a) J^\alpha J^\theta f(x) = J^{\alpha+\theta} f(x) \quad (4.3)$$

$$(b) J^\alpha J^\theta f(x) = J^\theta J^\alpha f(x) \quad (4.4)$$

$$(c) J^\alpha (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 J^\alpha f_1(x) + c_2 J^\alpha f_2(x) \quad (4.5)$$

Teorem 4.1. Riemann –Liouville kesirli integralin bazı temel özellikleri [12]

$$J^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} x^{\alpha+\mu}, \quad \mu > -1 \quad (4.6)$$

$$(a) J^\alpha p = \frac{p}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha, \quad p \text{ sabit} \quad (4.7)$$

$$(b) J^\alpha e^{bx} = \frac{e^{bx}}{b^\alpha \Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, bx), \quad (\gamma(\alpha, bx) \text{ alt tamamlanmamış gama fonksiyonu}) \quad (4.8)$$

$$(d) J^\alpha \sin(kx) = kx^{\alpha+1} E_{2,\alpha+2}(-(kx)^2) \quad (4.9)$$

$$(e) J^\alpha \cos(kx) = x^\alpha E_{2,\alpha+1}(-(kx)^2) \quad (4.10)$$

İspat:

$$(a) J^\alpha x^\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\mu dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} t^\mu dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} (ux)^\mu x du$$

$u = \frac{t}{x}$ eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^1 (x-u)^{a-1} u^\mu x^{a+\mu} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a+\mu} B(\mu+1, a) \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(a+\mu+1)} x^{a+\mu}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(b) Teoremin (a) maddesinde $\mu = 0$ için açıktır.

$$\begin{aligned}
(c) J^\alpha e^{bx} &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} e^{bt} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x \left(\frac{b(x-t)}{b}\right)^{a-1} e^{bt} dt
\end{aligned}$$

$u = b(x-t)$ eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{bx} \frac{u^{a-1}}{b^{a-1}} e^{bx-u} \frac{du}{b}, \\
&= \frac{e^{bx}}{b^a \Gamma(a)} \int_0^{bx} u^{a-1} e^{-u} du \\
&= \frac{e^{bx}}{b^a \Gamma(a)} \gamma(a, bx). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) J^\alpha \sin(kx) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} \sin(kt) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} \frac{\sin(kt)}{kt} kt dt \\
&= \frac{k}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} E_{2,2}(-(bt)^2) t dt \\
&= kx^{\alpha+1} E_{2,\alpha+2}(-(bx)^2). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$(e) J^\alpha \cos(kx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \cos(kt) dt$$

$$E_2(-z^2) = \cos(z)$$

ve

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} E_{\mu,\theta}(\lambda t^\mu) t^{\theta-1} dt = x^{\theta+v-1} E_{\mu,\theta+v}(\lambda t^\mu)$$

özelliklerinden faydalanarak

$$= x^\alpha E_{2,\alpha+1}(-(bx)^2)$$

yazılabilir. ■

Tanım 4.2. $\alpha > 0$ ve $q - 1 < \alpha < q$ için Riemann –Liouville kesirli türev operatörü $D^\alpha f(x)$;

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^q}{dx^q} \left[\frac{1}{\Gamma(q-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-q}} dt \right] \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilir [10, 12].

Riemann –Liouville kesirli türevin özellikleri [13]

$$(a) D^\alpha (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 D^\alpha f_1(x) + c_2 D^\alpha f_2(x) \quad (4.12)$$

$$(b) D^\alpha J^\alpha f(x) = f(x) \quad (4.13)$$

$$(c) J^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} [D^{\alpha-k-1} f(0)] \frac{x^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \quad (4.14)$$

$$(d) D^\theta D^\alpha f(x) = D^{\theta+\alpha} f(x) = D^\alpha D^\theta f(x), n-1 < \alpha < n, m \in \mathbb{N} \quad (4.15)$$

$$(e) D^\theta D^\alpha f(x) = D^{\theta+\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} [D^{\alpha-k-1} f(0)] \frac{x^{-\theta-k-1}}{\Gamma(\theta-k)} \quad (4.16)$$

$n-1 < \alpha < n, m-1 < \theta < m, n$ ve $m \in \mathbb{N}$

Teorem 4.2. Riemann–Liouville kesirli türevin bazı temel kuralları aşağıda verilmiştir [14]

$\alpha > 0, x > 0, k, b$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ olsun

$$(a) D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, \beta > L, L = \max(-1, \alpha - 1) \quad (4.15)$$

$$(b) D^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}, \alpha \neq 1, 2, 3, \dots \quad (4.16)$$

$$(c) D^\alpha e^{bk} = x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(bx) \quad (4.17)$$

$$(d) D^\alpha \sin(kx) = bx^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-(kx)^2) \quad (4.18)$$

$$(e) D^\alpha \cos(kx) = x^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(-(kx)^2) \quad (4.19)$$

İspat : $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim

$$\begin{aligned} (a) D^\alpha x^\beta &= D^\alpha [J^{n-\alpha} x^\beta] = D^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} x^{\beta+n-\alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha-n+1)} x^{\beta+n-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(b) (4.15) de $\beta = 0$ yerleştirilir

$$\begin{aligned} (c) J^\alpha e^{bx} &= x^\alpha E_{1,\alpha+1}(bx) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bx)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k x^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1) x^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{\Gamma(k+1)} J^\alpha x^k \\ D^\alpha e^{bx} &= D^n [J^{n-\alpha} e^{bx}] = D^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{\Gamma(k+1)} J^{n-\alpha} x^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1) x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} = x^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bx)^k}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &= x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(bx). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) D^\alpha \sin(kx) &= D^n [J^{n-\alpha} \sin(kx)] = D^n [kx^{n-\alpha+1} E_{2,n-\alpha+2}(-(kx)^2)] \\ &= kx^{n-\alpha+2-n-1} E_{2,n-\alpha+2-n}(-(kx)^2) \end{aligned}$$

$$= bx^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-(kx)^2). \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned} \text{(e) } D^\alpha \cos(kx) &= D^n [J^{n-\alpha} \cos(kx)] \\ &= D^n [x^{n-\alpha} E_{2,n-\alpha+1}(-(kx)^2)] \\ &= x^{n-\alpha+1-n-1} E_{2,n-\alpha+1-n}(-(kx)^2) \\ &= x^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(-(kx)^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorem 4.3. (Kesirli Taylor Açılımı) $\alpha > 0$ ve $n = [\alpha]$ f nin $J^{n-\alpha} f \in A^n[\alpha, b]$ olduğunu kabul edelim, böylece $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-\alpha)^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n+1)} \lim_{z \rightarrow \alpha^+} J^{n-\alpha} f(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-\alpha)^{k+\alpha-n}}{\Gamma(\alpha+k-n+1)} \lim_{z \rightarrow \alpha^+} D^{k+\alpha-n} f(z) \\ &\quad + J^\alpha D^\alpha f(x) \end{aligned} \quad (4.20)$$

formunda ifade edilir [6].

4.1.2. Grünwald-Letnikov Operatörü

Riemann-Liouville'nin kesirli integral ve türev tanımlarının gelişmesiyle hemen hemen eş zamanlı olarak Grünwald ve Letnikov tarafından da tamsayı olmayan türevlerin başka tanımları geliştirilmiştir. Bunların tanımlanması, daha sonra, Riemann Liouville veya Caputo türevleri ile tanımlanan, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için sayısal yöntemler oluşturmamızı sağlayacaktır. Biz formal bir tanımla başlayalım.

Tanım 4.3. Bu operatör $\alpha \in \mathbb{R}_+$ için Grünwald ve Letnikov tanımı;

$${}^{GL}D^\alpha f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Delta_t^\alpha)(x)}{t^\alpha} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kt), \quad \alpha > 0 \quad (4.21)$$

ifadesiyle verilir [15].

Teorem 4.4. $\alpha > 0, n = [\alpha]$ ve $f \in C^n[a, b]$ olmak üzere

$${}^{GL}D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(t) dt \quad (4.22)$$

dir [16].

4.1.3. Caputo Operatörü

Tanım 4.4. $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 < \alpha < n$ için Caputo operatörü D_*^α şeklinde verilir ve

$$D_*^\alpha f(x) = J^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) dt \quad (4.23)$$

formunda tanımlanır [17].

Caputo türevine ait aşağıdaki özellikler verilebilir [17];

$$(a) (D_*^\alpha J^\alpha) f(x) = f(x) \quad (4.24)$$

$$(b) (J^\alpha D_*^\alpha) f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(\alpha) \frac{(x-\alpha)^k}{k!}, \quad \alpha \geq 0 \quad (4.25)$$

$$(c) D_*^\alpha (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 D_*^\alpha f_1(x) + c_2 D_*^\alpha f_2(x) \quad (4.26)$$

$$(d) D_*^\beta D_*^\alpha f(x) = D_*^{\beta+\alpha} f(x) = D_*^\alpha D_*^\beta f(x), \quad n-1 < \alpha < n, m \in \mathbb{N}. \quad (4.27)$$

Riemann –Liouville ve Caputo kesirli türevleri arasındaki ilişki aşağıda verilen teoremlerle ifade edilmiştir.

Teorem 4.5. $\alpha > 0$, $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D^k f(0) \quad (4.28)$$

dır [18].

Teorem 4.6. Caputo kesirli türevin bazı temel kuralları aşağıda verilmiştir [18,19].

$n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, k, b ve $\beta \in \mathbb{R}$

$$(a) D_*^\alpha b = 0 \quad (4.29)$$

$$(b) D_*^\alpha x^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, & \beta \in \mathbb{N} \text{ ve } \beta \geq n \text{ yada } \beta \notin \mathbb{N} \text{ ve } \beta > n-1 \\ 0, & \beta \in \{0,1,2,3, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (4.30)$$

$$(c) D_*^\alpha e^{kx} = k^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(kx) \quad (4.31)$$

$$(d) D_*^\alpha \sin(kx) = -\frac{1}{2}i(ik)^n x^{n-\alpha} [E_{1,n-\alpha+1}(ikx) - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-ikx)] \quad (4.32)$$

$$(e) D_*^\alpha \sin(kx) = \frac{1}{2}(ik)^n x^{n-\alpha} [E_{1,n-\alpha+1}(ikx) + (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-ikx)] \quad (4.33)$$

İspat:

$$(a) D^n k = 0, n \in \mathbb{N}$$

$$D_*^\alpha k = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} D^n k dt = 0 \quad \blacksquare$$

(b) İkinci durumun ispatı $D^n x^\beta = 0$, $\beta \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için geçerlidir.

İlk durumun ispatı:

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_\alpha^x (x-t)^{n-1-\alpha} D^n t^\beta dt. \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_\alpha^x (x-t)^{n-1-\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-n} dt \end{aligned}$$

$t = xu$ eşitliği yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} \int_0^1 (xu)^{\beta-n} ((1-n)x)^{n-\alpha-1} x du \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} B(\beta-n+1, n-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$(c) D_*^\alpha e^{kx} = D^\alpha e^{kx} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{b-\alpha}}{\Gamma(b+1-\alpha)} D^k e^{kx} \Big|_{x=0}$$

$$= x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(kx) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{b-\alpha} k^b}{\Gamma(b+1-\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-\alpha}(kx)^b}{\Gamma(b+1-\alpha)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{b-\alpha}(k)^b}{\Gamma(b+1-\alpha)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{b-\alpha}(k)^b}{\Gamma(b+1-\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{b+n-\alpha}(k)^{b+n}}{\Gamma(b+n+1-\alpha)} \\
&= k^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(kx) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(d) $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
D_*^\alpha \sin(kx) &= D_*^\alpha \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \frac{1}{2i} (D_*^\alpha e^{ikx} - D_*^\alpha e^{-ikx}) \\
&= \frac{1}{2i} [(ik)^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(ikx) - (-ik)^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(-ikx)] \\
&= -\frac{1}{2} i (ik)^n x^{n-\alpha} [E_{1,n-\alpha+1}(ikx) - (-i)^n E_{1,n-\alpha+1}(-ikx)] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(e) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ kullanılarak bir önceki ispata benzer bir yol takip edilir. ■

Teorem 4.7. (Caputo türevi için Taylor açılımı)

$\alpha > 0$ ve $n = [\alpha]$ $f \in A^n[\alpha, t]$ olduğunu kabul edelim ve $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k + J^\alpha D_*^\alpha f(x) \quad (4.34)$$

olarak ifade edilir [20,21].

4.2. Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde, kesirli türevleri içeren diferansiyel denklemlerin varlığı ve teklik özellikleri verilecektir. D^α , D_*^α , ve ${}^{GL}D^\alpha$ ifadeleri sırasıyla Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov kesirli türev operatörünü temsil etmektedir [17-21].

Tanım 4.5. $\alpha > 0$, $\alpha \notin N$, $n = [\alpha]$ ve $f: A \subseteq R^2 \rightarrow R$

$$D^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \quad (4.35)$$

şeklinde verilen ifade Riemann-Liouville'nin kesirli diferansiyel denklemdir. Kesirli diferansiyel denklemin bu türü için başlangıç şartları, aşağıdaki gibi kullanılır.

$$D^{\alpha-k}y(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1), \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} J^{n-\alpha}y(z) = b_n. \quad (4.36)$$

Benzer şekilde Caputo'nun kesirli diferansiyel denklemi

$$D_*^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \quad (4.37)$$

şeklinde tanımlanır ve bu durumda başlangıç şartı olarak

$$D^k y(0) = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 1). \quad (4.38)$$

şeklinde verilen ifade kullanılır [21].

5. BÖLÜM

5.1. Rezidual Kuvvet Serisi Metodu (RPSM)

Son yıllarda, kesirli diferansiyel denklemler (FDE), akışkanlar mekaniği, elektrik ağı, sinyal yönlendirme, dinamik sistemlerin kontrol teorisi, görüntü yönlendirme, optik ve viskoelastisite gibi fen ve mühendislik bilimlerinin farklı dallarında sayısız uygulama alanı bulmuştur. Nonlinear kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık ya da analitik çözümlerini bulmak için literatürde Adomian ayrıştırma metodu (ADM) [22], Laplace analiz metodu [23], homotopi analiz metodu [24], homotopi perturbasyon metodu [25], diferansiyel dönüşüm metodu ve perturbasyon-iterasyon algoritması (PIA) [26-29] gibi farklı yöntemler mevcuttur.

Bu tez çalışmasında yeni bir metod olan Rezidual kuvvet serisi metodu (RPSM) kullanıldı. Bu metotta rezidual hata kavramı vasıtasıyla bir ya da daha fazla değişkenli cebirsel denklem zinciri yardımıyla kuvvet serilerinin katsayıları hesaplanır ve son olarak pratikte kesik seri çözümü denilen çözüm elde edilir [30].

Bu metodun diğer metotlara göre asıl avantajı ise, lineerizasyon, perturbasyon ya da diskretizasyon gerekmeksizin farklı nonlinear denklemler için kuvvet serisi açılımına dayanması ve uygun başlangıç şartları seçilerek herhangi bir dönüşüm yapmadan alınan probleme direkt olarak uygulanabilmesidir [31].

Tanım 5.1. Kuvvet serisi açılımı

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (t - t_0)^{m\alpha} = c_0 + c_1 (t - t_0)^{\alpha} + c_2 (t - t_0)^{2\alpha} + \dots, \quad 0 \leq n - 1 < \alpha \leq n, \\ t \geq t_0$$

(5.1)

şeklinde ifade edilir [32]. Bu açılım $t = t_0$ alındığında katlı kesirli kuvvet serisi olarak adlandırılır.

Teorem 5.1. Kesirli kuvvet serisi $\sum_{m=0}^{\infty} c_m t^{m\alpha}, t \geq 0$ için sadece üç durum vardır [33].

1) Seri sadece $t = 0$ olduğunda yakınsaktır.

2) Seri her $t \geq 0$ için yakınsaktır.

3) $t \geq R$ serinin ıraksak, $0 \leq t < R$ için ise yakınsak olduğu pozitif bir R reel sayısı vardır.

Not 5.1. [33] Bir önceki teoremden R sayısı kesirli kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı olarak adlandırılır. 1. durumda $R = 0$ ve 2. durumda $R = \infty$ dur.

Teorem 5.2. Kabul edelim ki f fonksiyonu t_0 da

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^{n\alpha}, \quad 0 < m - 1 < \alpha \leq m \text{ ve } t_0 \leq t < t_0 + R \quad (5.2)$$

şeklinde bir kesirli kuvvet serisi gösterimine sahip olsun. Eğer

$n = 0, 1, 2, \dots$ için $f(t) \in C[t_0, t_0 + R]$ ve $D_{t_0}^{n\alpha} f(t) \in C(t_0, t_0 + R)$

ise denklemdaki c_n katsayıları

$$c_n = \frac{D_{t_0}^{n\alpha} f(t_0)}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad D_{t_0}^{n\alpha} = D_{t_0}^{\alpha} \cdot D_{t_0}^{\alpha} \cdot D_{t_0}^{\alpha} \dots D_{t_0}^{\alpha} \text{ (n defa)} \quad (5.3)$$

halini alır [10, 33].

5.2. Rezidual Kuvvet Serisi Metodu Algoritması

RPSM'nin temel fikrini göstermek için bir nonlinear kesirli diferansiyel denklem alalım.

$$f_0(x) = u(x, 0) = f(x) \quad (5.4)$$

başlangıç koşulu ile ifade edilen

$$D_t^{n\alpha} u(x, t) + R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t) = g(x, t), \quad t > 0, \quad x \in R, \\ n - 1 < n\alpha \leq n \quad (5.5)$$

denkleminde $R[x]$ x de genel bir lineer operatör, $N[x]$ ise yine x de genel bir nonlinear operatör ve $g(x, t)$ sürekli fonksiyonlardır.

RPSM metodu, aşağıda verilen

$$f_{n-1}(x) = D_t^{(n-1)\alpha} u(x, 0) = h(x) \quad (5.6)$$

denkleminin çözümünü, $t = 0$ başlangıç noktası etrafındaki kesirli kuvvet serisi açılımı olarak ifade etmekten oluşur. Çözümün açılım formu

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R \quad (5.7)$$

şeklindedir.

Daha sonraki adımda $u(x, t)$ nin k . kesik serisi olan $u_k(x, t)$

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R, \\ k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.8)$$

şeklinde elde edilir. $u(x, t)$ nin 1. RPS yaklaşık çözümünü bulmak için $u_k(x, t)$ ifadesinde $k = 1$ için $u_1(x, t)$ ifadesi;

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (5.9)$$

yazılır. $u_k(x, t)$ ifadesinin kullanılacağı Res fonksiyonu

$$Res(x, t) = D_t^{n\alpha} u(x, t) + R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t) - g(x, t) \quad (5.10)$$

şeklinde ifade edilir ve k . rezidual fonksiyonu Res_k ise

$$Res_k(x, t) = D_t^{n\alpha} u_k(x, t) + R[x]u_k(x, t) + N[x]u_k(x, t) - g(x, t),$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.11)$$

formunda oluşturulur.

$k = 1$ için $Res_1(x, t)$ ifadesi yazılır. Bu ifade de $t = 0$ için $Res_1(x, 0) = 0$ ifadesi düzenlendiğinde $f_1(x)$ elde edilir. Bulunan bu ifade 1. RPS yaklaşık çözümü olan $u_1(x, t)$ nin bulunmasını sağlar. Bundan sonraki her adımda $k = 1, 2, 3, \dots, n$ nin her biri için farklı $f_k(x)$ ler elde edilir. $k = 2, 3, 4, \dots$ için ilk adımdan farklı olarak

$$D_t^{(n-1)\alpha} Res_k(x, t) = 0, 0 < \alpha \leq 1, x \in I, 0 \leq t < R, n = 1, 2, 3, \dots, k \quad (5.12)$$

ifadesi RPSM yönteminin önemli bir işlem basamağıdır. Yani ikinci adımda her tarafın α ya göre 1. türevi alınıp $t = 0$ için ifade sıfıra eşitlenir, üçüncü adımda her tarafın α ya göre 2. türevi alınır ve böylece devam edilerek önce f_k değerleri daha sonra u_k yaklaşık çözümleri sırasıyla elde edilir [30-40].

Bu yöntemde, alınan denkleme ait kesirli kuvvet serileri sayesinde her bir adımda kesin sonuca daha çok yaklaşılabileceği söylenebilir.



6. BÖLÜM

6.1. Rezidual Kuvvet Serisi Metodunun Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Örnek 6.1. Yöntemi ilk olarak zaman kesirli advection dispersion denklemine (FADE) uygulayalım [41]. Bu denklem

$$D_t^\alpha u - \mu u_{xx} + u_x = 0 \quad t \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanır. Denklemin başlangıç şartı

$$u(x, 0) = e^{-x} \quad (6.2)$$

ve tam çözümü ise

$$u(x, t) = e^{-x} E_\alpha((1 + \mu)t^\alpha) \quad (6.3)$$

olarak verilmiştir. Kesirli advection dispersion denklemini çözmek için RPSM algoritmasının adımları sırasıyla uygulanır. Çözümün kuvvet serisi açılımı

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{na}}{\Gamma(1 + na)}, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R \quad (6.4)$$

şeklindedir.

$u(x, t)$ nin k . kesik serisi $u_k(x, t)$

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{na}}{\Gamma(1 + na)}, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t \leq R \quad (6.5)$$

olarak ifade edilir.

$n = 1, 2, 3, \dots, k$ için $u_k(x, t)$ denkleminin seri genişlemesi yapılarak FADE denkleminin rezidual fonksiyonu $Res(x, t)$

$$Res(x, t) = D_t^\alpha u - \mu u_{xx} + u_x \quad (6.6)$$

şeklinde elde edilir ve k . rezidual fonksiyonu $Res_k(x, t)$ ise

$$Res_k(x, t) = D_t^\alpha u_k - \mu u_{k,xx} + u_{k,x} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.7)$$

şeklinde bulunur. 1. RPSM yaklaşık çözümü için $Res_k(x, t)$ ve $u_k(x, t)$ ifadelerinde $k = 1$ yazılırsa

$$Res_1(x, t) = D_t^\alpha u_1 - \mu u_{1xx} + u_{1x} \quad (6.8)$$

olur bu ifadede $u_1(x, t)$ yerine

$$u_1(x, t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} f_1(x) + f(x) \quad (6.9)$$

yazıldığında

$$Res_1(x, t) = f'(x) + \frac{t^\alpha f_1'(x)}{\Gamma(1+\alpha)} - \mu(f''(x) + \frac{t^\alpha f_1''(x)}{\Gamma(1+\alpha)}) \quad (6.10)$$

elde edilir.

$Res_1(x, t) = 0$ eşitlenip $t = 0$ alındığında

$$f_1(x) = -f'(x) + \mu f''(x) \quad (6.11)$$

bulunur. Sonuç olarak 1. RPSM yaklaşık çözümü

$$u_1(x, t) = f(x) + \frac{t^\alpha(-f'(x) + \mu f''(x))}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (6.12)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde $Res_k(x, y)$ ve $u_k(x, t)$ da $k = 2$ yazılırsa

$$Res_2(x, t) = D_t^\alpha u_2 - \mu u_{2xx} + u_{2x} \quad (6.13)$$

elde edilir. Burada $u_2(x, t)$ yerine aşağıdaki ifade

$$u_2(x, t) = f(x) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} f_1(x) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} f_2(x) \quad (6.14)$$

Yazılırsa

$$Res_2(x, t) = f'(x) + \frac{t^\alpha f_1'(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2'(x)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} - \mu \left(f''(x) + \frac{t^\alpha f_1''(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2''(x)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right) \quad (6.15)$$

elde edilir. Bulunan ifadede $D_t^\alpha Res_2 = 0$ ve daha sonra $t = 0$ yazılarak

$$f_2(x) = -f_1'(x) + \mu f_1''(x) \quad (6.16)$$

elde edilir. Böylece 2. RPSM yaklaşık çözümü

$$u_2(x, t) := f(x) + \frac{t^\alpha f_1(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha} (-f_1'(x) + \mu f_1''(x))}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \quad (6.17)$$

olarak bulunur. Aynı işlemler $u_3(x, t)$ 'yi bulmak için tekrarlanır ve

$$Res_3(x, t) = D_t^\alpha u_3 - \mu u_{3xx} + u_{3x} \quad (6.18)$$

ifade edildikten sonra $u_3(x, t)$ yerine aşağıdaki açılım yerleştirilir.

$$u_3(x, t) = f(x) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} f_1(x) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} f_2(x) + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} f_3(x) \quad (6.19)$$

Bu sayede

$$Res_3(x, t) = f'(x) + \frac{t^\alpha f_1'(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3'(x)}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} (-f_1''(x) + \mu f_1^{(3)}(x))}{\Gamma(1 + 2\alpha)} - \mu \left(f''(x) + \frac{t^\alpha f_1''(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3''(x)}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} (-f_1^{(3)}(x) + \mu f_1^{(4)}(x))}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right) \quad (6.20)$$

şeklinde ifade edilir. Bulunan bu ifadede $D_t^{2\alpha} Res_2 = 0$ ve $t = 0$ yazılarak

$$f_3(x) = f_1''(x) - 2\mu f_1^{(3)}(x) + \mu^2 f_1^{(4)}(x) \quad (6.21)$$

elde edilir. Böylece 3. RPSM yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = f(x) &+ \frac{t^\alpha f_1(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha} \left(-f_1'(x) + \mu f_1''(x) \right)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
&+ \frac{t^{3\alpha} \left(f_1''(x) - 2\mu f_1^{(3)}(x) + \mu^2 f_1^{(4)}(x) \right)}{\Gamma(1 + 3\alpha)}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

şeklinde bulunur. Aynı işlemler sırasıyla devam ettirilir. $f_4(x)$ ve $u_4(x, t)$ ü bulmak için $D_t^{3\alpha} Res_2 = 0$ ve $t = 0$ yazılır. $f_5(x)$ ve u_5 ü bulmak için $D_t^{4\alpha} Res_2 = 0$ ve $t = 0$ yazılır. Sırasıyla

$$f_4(x) = f^{(4)}(x) - 4\mu f^{(5)}(x) + 6\mu^2 f^{(6)}(x) - 4\mu^3 f^{(7)}(x) + \mu^4 f^{(8)}(x) \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) &= f(x) + \frac{t^\alpha \left(-f'(x) + \mu f''(x) \right)}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
&+ \frac{t^{2\alpha} \left(f''(x) - \mu f^{(3)}(x) + \mu \left(-f^{(3)}(x) + \mu f^{(4)}(x) \right) \right)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
&+ \frac{t^{3\alpha} \left(-f^{(3)}(x) + \mu f^{(4)}(x) - 2\mu \left(-f^{(4)}(x) + \mu f^{(5)}(x) \right) + \mu^2 \left(-f^{(5)}(x) + \mu f^{(6)}(x) \right) \right)}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \\
&+ \frac{t^{4\alpha} \left(f^{(4)}(x) - 4\mu f^{(5)}(x) + 6\mu^2 f^{(6)}(x) - 4\mu^3 f^{(7)}(x) + \mu^4 f^{(8)}(x) \right)}{\Gamma(1 + 4\alpha)}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

ve

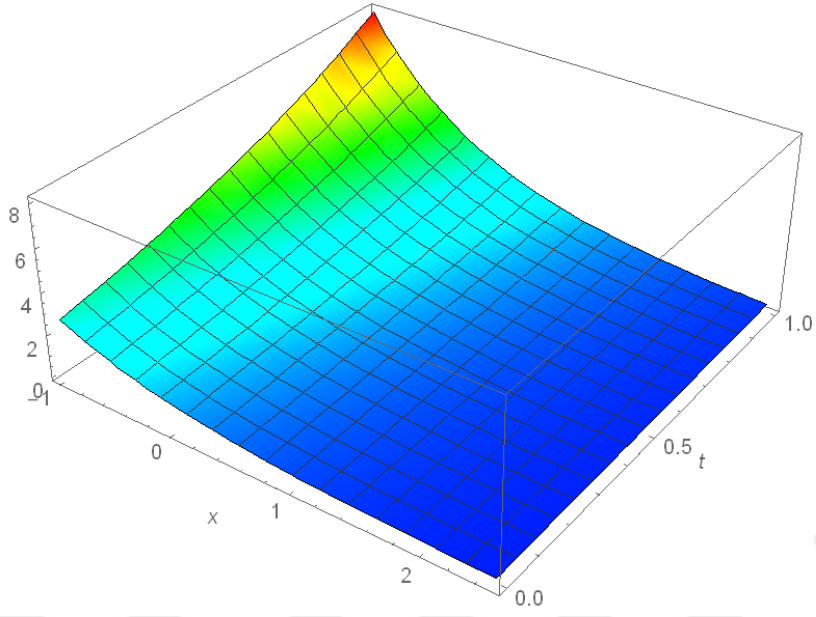
$$\begin{aligned}
f_5(x) = -f^{(5)}(x) &+ 5\mu f^{(6)}(x) - 10\mu^2 f^{(7)}(x) + 10\mu^3 f^{(8)}(x) - 5\mu^4 f^{(9)}(x) \\
&+ \mu^5 f^{(10)}(x)
\end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}
u_5(x, t) = f(x) &+ \frac{t^\alpha \left(-f'(x) + \mu f''(x) \right)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha} \left(f''(x) - \mu f^{(3)}(x) + \mu \left(-f^{(3)}(x) + \mu f^{(4)}(x) \right) \right)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \\
&\frac{t^{3\alpha} \left(-f^{(3)}(x) + \mu f^{(4)}(x) - 2\mu \left(-f^{(4)}(x) + \mu f^{(5)}(x) \right) + \mu^2 \left(-f^{(5)}(x) + \mu f^{(6)}(x) \right) \right)}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \\
&\frac{t^{4\alpha} \left(f^{(4)}(x) - 4\mu f^{(5)}(x) + 6\mu^2 f^{(6)}(x) - 4\mu^3 f^{(7)}(x) + \mu^4 f^{(8)}(x) \right)}{\Gamma(1 + 4\alpha)} + \\
&\frac{t^{5\alpha} \left(-f^{(5)}(x) + 5\mu f^{(6)}(x) - 10\mu^2 f^{(7)}(x) + 10\mu^3 f^{(8)}(x) - 5\mu^4 f^{(9)}(x) + \mu^5 f^{(10)}(x) \right)}{\Gamma(1 + 5\alpha)}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

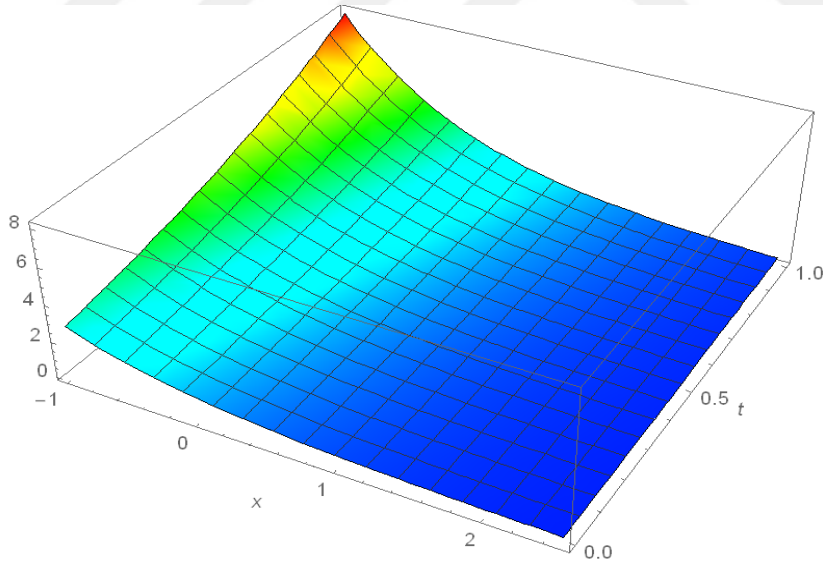
İfadeleri elde edilir.

Tablo 6.1. Örnek 6.1. de elde edilen $u_5(x, t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması;

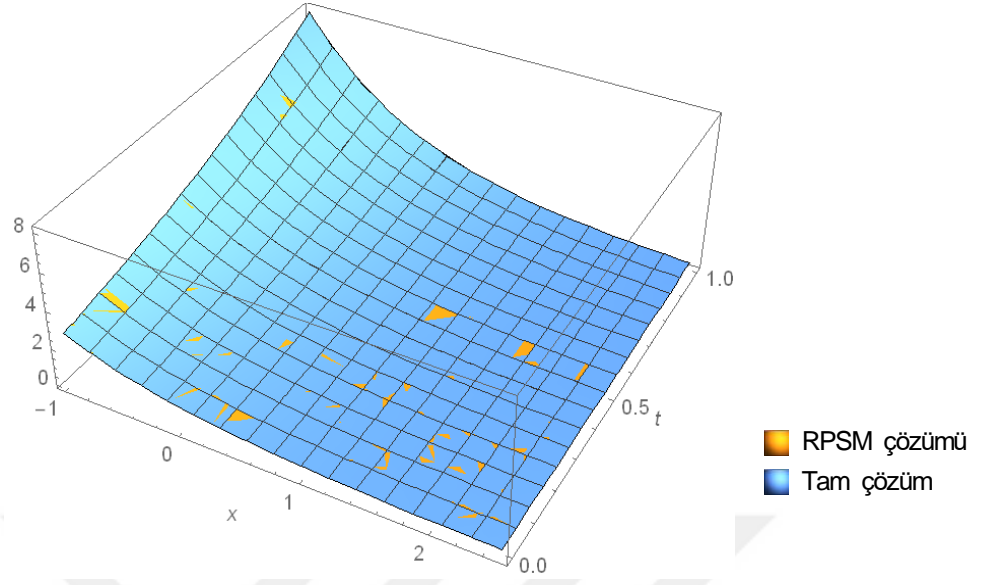
x	μ	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$		
		$u_5(x, t)$	$u_5(x, t)$	$u_5(x, t)$	TAM ÇÖZÜM	MUTLAK HATA
10	0.1	4.539992976E-5	4.539992976E-5	4.539992976E-5	4.539992976E-5	0
		7.055251301E-5	5.651467034E-5	5.067894588E-5	5.067894599E-5	$1.134863822 \times 10^{-13}$
		8.737645070E-5	6.608014229E-5	5.657178866E-5	5.657179604E-5	$7.380245035 \times 10^{-12}$
		1.042898850E-4	7.614281713E-5	6.314976989E-5	6.314985533E-5	$8.543750493 \times 10^{-11}$
		1.220567650E-4	8.705180882E-5	7.049231068E-5	7.049279866E-5	$4.879731850 \times 10^{-10}$
		1.409825374E-4	9.901531337E-5	7.868767267E-5	7.868956527E-5	$1.892593147 \times 10^{-9}$
		1.612357198E-4	1.122019464E-4	8.783368918E-5	8.783943608E-5	$5.746901169 \times 10^{-9}$
		1.829274135E-4	1.267670173E-4	9.803849638E-5	9.805323622E-5	$1.473983950 \times 10^{-8}$
		2.061396993E-4	1.428620821E-4	1.094212644E-4	1.094546773E-4	$3.341285512 \times 10^{-8}$
		2.309380678E-4	1.606391143E-4	1.221129288E-4	1.221818560E-4	$6.892715022 \times 10^{-8}$
2.573776398E-4	1.802525480E-4	1.362569213E-4	1.363889264E-4	$1.320051662 \times 10^{-7}$		



Şekil 6.1. Örnek 6.1. da elde edilen $u_5(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ ve $\mu = 1/10$ için grafiği



Şekil 6.2. Örnek 6.1.de çözülen zaman kesirli advection dispersion denkleminin $\alpha = 1$ ve $\mu = 1/10$ için tam çözüm grafiği



Şekil 6.3. Örnek 6.1. da elde edilen $u_5(x, t)$ ve tam çözümü karşılaştırma grafiği

Örnek 6.2. Zaman kesirli Kortevge de Vries (KdV) Denklemi

$$D_t^a u + 6uu_x + u_{xxx} = 0, 0 < a \leq 1 \quad (6.27)$$

şeklindedir [42]. Denklem başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right) \quad (6.28)$$

ve denklemin tam çözümü ise

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}(x - t)\right) \quad (6.29)$$

dır. Kesirli Kortevge de Vries denkleminin, RPSM yöntemi kullanarak çözebilmek için kuvvet seri açılımı yapılır. Bu da

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + a)} \quad (6.30)$$

şeklinde ifade edilir. Bir sonraki adımda $u(x, t)$ için k . kesik serisi $u_k(x, t)$;

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + a)} \quad (6.31)$$

ifadesi elde edilir. Alınan denklemin Res rezidual fonksiyonu

$$Res(x, t) = D_t^a u + 6uu_x + u_{xxx} \quad (6.32)$$

şeklinde tanımlanır ve ardından k . rezidual fonksiyonu Res_k ;

$$Res_k(x, t) = D_t^a u + 6uu_x + u_{xxx} \quad (6.33)$$

şeklinde ifade edilir. $k = 1$ için

$$Res_1(x, t) = D_t^a u_1 + 6u_1 u_{1x} + u_{1xxx} \quad (6.34)$$

ifadesi yazılır ve denklemden u_1 yerine

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (6.35)$$

yazılarak

$$\begin{aligned} Res_1(x, t) = f_1(x) + 6 \left(f(x) + \frac{t^\alpha f_1(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \left(f'(x) + \frac{t^\alpha f_1'(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) + f^{(3)}(x) \\ + \frac{t^\alpha f_1^{(3)}(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} \end{aligned} \quad (6.36)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede $Res_1(x, t) = 0$ ve daha sonra $t=0$ yazıldığında

$$Res_1(x, 0) = f_1(x) + 6f(x)f'(x) + f^{(3)}(x) \quad (6.37)$$

ve

$$f_1(x) = -6f(x)f'(x) - f^{(3)}(x) \quad (6.38)$$

ifadeleri elde edilir. Bu nedenle 1. RPSM yaklaşık çözümü

$$u_1(x, t) = f(x) + \frac{t^\alpha \left(-6f(x)f'(x) - f^{(3)}(x) \right)}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (6.39)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde Res_k da $k = 2$ yazılarak

$$Res_2(x, t) = D_t^\alpha u_2 + 6u_2 u_{2x} + u_{2xxx} \quad (6.40)$$

elde edilir. Yazılan bu ifade de u_2 yerine

$$u_2(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \quad (6.41)$$

ifadesi yazılarak

$$\begin{aligned}
Res_2(x, t) = & f_2(x) + 6f(x)f'(x) + \frac{6t^\alpha f_1(x)f'(x)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{6t^{2\alpha} f_2(x)f'(x)}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
& + \frac{6t^\alpha f(x)f_1'(x)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{6t^{2\alpha} f_1(x)f_1'(x)}{\Gamma(1+\alpha)^2} + \frac{6t^{3\alpha} f_2(x)f_1'(x)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} \\
& + \frac{6t^{2\alpha} f(x)f_2'(x)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{6t^{3\alpha} f_1(x)f_2'(x)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{6t^{4\alpha} f_2(x)f_2'(x)}{\Gamma(1+2\alpha)^2} + f^{(3)}(x) \\
& + \frac{t^\alpha f_1^{(3)}(x)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(3)}(x)}{\Gamma(1+2\alpha)} \tag{6.42}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan ifadede $D_t^\alpha Res_2(x, t) = 0$ ve daha sonra $t = 0$ yazıldığında

$$f_2(x) = -6f_1(x)f'(x) - 6f(x)f_1'(x) - f_1^{(3)}(x) \tag{6.43}$$

ifadesi elde edilir. Bu nedenle 2. RPSM yaklaşık çözümü ise

$$u_2(x, t) = f(x) + \frac{t^\alpha f_1(x)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} \left(-6f_1(x)f'(x) - 6f(x)f_1'(x) - f_1^{(3)}(x) \right)}{\Gamma(1+2\alpha)} \tag{6.44}$$

şeklinde bulunur. Aynı işlemler $Res_k(x, t)$ da $k = 3$ için yazılırsa

$$Res_3(x, t) = D_t^\alpha u_3 + 6u_3 u_{3x} + u_{3xxx} \tag{6.45}$$

ifadesi elde edilir

$$u_3(x, t) = f(x) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} f_1(x) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} f_2(x) + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} f_3(x) \tag{6.46}$$

Res_3 ifadesinde yerine yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
Res_3(x, t) = & f_3(x) \\
& + 6 \left(f(x) + \frac{t^\alpha f_1(x)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3(x)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) \left(f'(x) + \frac{t^\alpha f_1'(x)}{\Gamma(1+\alpha)} \right. \\
& \left. + \frac{t^{2\alpha} f_2'(x)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3'(x)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) + f^{(3)}(x) + \frac{t^\alpha f_1^{(3)}(x)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(3)}(x)}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
& + \frac{t^{3\alpha} f_3^{(3)}(x)}{\Gamma(1+3\alpha)} \tag{6.47}
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Bulunan bu ifadede $D_t^{2\alpha} Res_3 = 0$ ve daha sonra $t = 0$ yazılırsa

$$f_3(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)^2} (-6\Gamma(1+\alpha)^2 f_2(x) f'(x) - 6\Gamma(1+2\alpha) f_1(x) f_1'(x) - 6f(x) \Gamma(1+\alpha)^2 f_2'(x) - \Gamma(1+\alpha)^2 f_2^{(3)}(x)) \quad (6.48)$$

ifadesi elde edilir. Böylece 3. RPSM yaklaşık çözümü

$$u_3(x, t) = f(x) + \frac{t^\alpha f_1(x)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{\left(t^{3\alpha} (-6\Gamma(1+\alpha)^2 f_2(x) f'(x) - 6\Gamma(1+2\alpha) f_1(x) f_1'(x) - 6f(x) \Gamma(1+\alpha)^2 f_2'(x) - \Gamma(1+\alpha)^2 f_2^{(3)}(x)) \right)}{\Gamma(1+\alpha)^2 \Gamma(1+3\alpha)} \quad (6.49)$$

şeklinde bulunur. RPSM yöntemine aynı şekilde devam edildiğinde sırasıyla

$$f_4(x) = \frac{1}{\pi\Gamma(\alpha)} \left(-6\pi\Gamma(\alpha) f_3(x) f'(x) + 18\Gamma(-2\alpha)\Gamma(3\alpha)\sin(2\pi\alpha) f_2(x) f_1'(x) + 18\Gamma(-2\alpha)\Gamma(3\alpha)\sin(2\pi\alpha) f_1(x) f_2'(x) - 6\pi f(x) \Gamma(\alpha) f_3'(x) - \pi\Gamma(\alpha) f_3^{(3)}(x) \right) \quad (6.50)$$

$$u_4(x, t) = f(x) + \frac{t^\alpha f_1(x)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3(x)}{\Gamma(1+3\alpha)} + \frac{1}{\pi\Gamma(\alpha)\Gamma(1+4\alpha)} t^{4\alpha} \left(-6\pi\Gamma(\alpha) f_3(x) f'(x) + 18\Gamma(-2\alpha)\Gamma(3\alpha)\sin(2\pi\alpha) f_2(x) f_1'(x) + 18\Gamma(-2\alpha)\Gamma(3\alpha)\sin(2\pi\alpha) f_1(x) f_2'(x) - 6\pi f(x) \Gamma(\alpha) f_3'(x) - \pi\Gamma(\alpha) f_3^{(3)}(x) \right) \quad (6.51)$$

ve

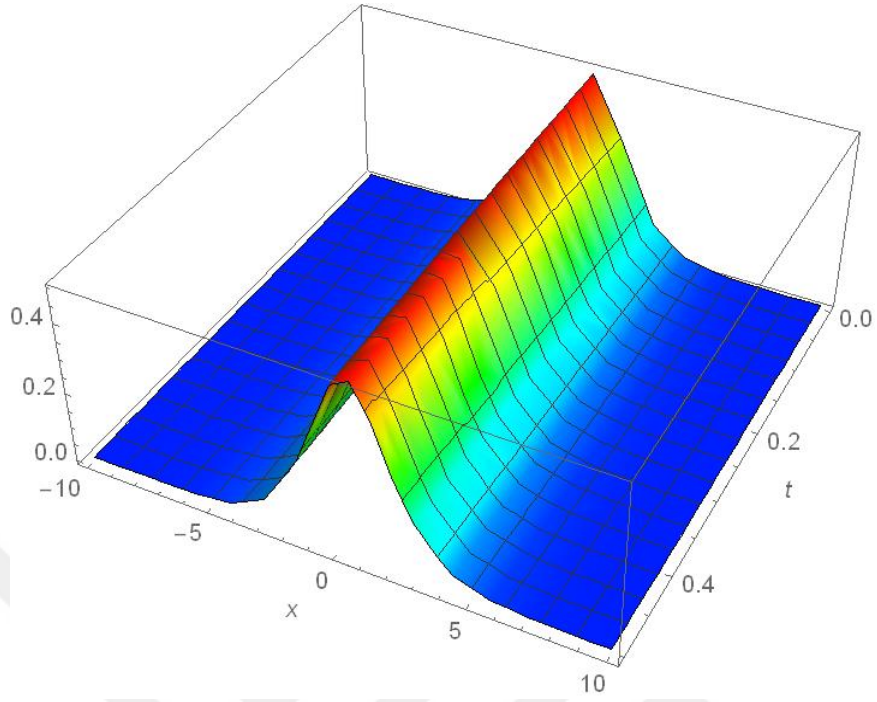
$$f_5(x) = -6f_4(x) f'(x) - \frac{1}{\Gamma(1+3\alpha)^2} 6t^{3\alpha} \left(\frac{16^\alpha \Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\alpha\right) \Gamma(1+3\alpha) f_2(x) f_2'(x)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1+2\alpha)} + \frac{\Gamma(1+4\alpha) \left(f_3(x) f_1'(x) + f_1(x) f_3'(x) \right)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) - 6f(x) f_4'(x) - f_4^{(3)}(x) \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned}
u_5(x, t) = & f(x) + \frac{t^\alpha f_1(x)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3(x)}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \frac{t^{4\alpha} f_4(x)}{\Gamma(1 + 4\alpha)} \\
& + \frac{1}{\Gamma(1 + 5\alpha)} t^{5\alpha} \left(-6f_4(x)f'(x) \right. \\
& - \frac{1}{\Gamma(1 + 3\alpha)^2} 6t^{3\alpha} \left(\frac{16^\alpha \Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\alpha\right) \Gamma(1 + 3\alpha) f_2(x) f_2'(x)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + 2\alpha)} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\Gamma(1 + 4\alpha) \left(f_3(x) f_1'(x) + f_1(x) f_3'(x) \right)}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) - 6f(x) f_4'(x) \right. \\
& \left. - f_4^{(3)}(x) \right)
\end{aligned} \tag{6.53}$$

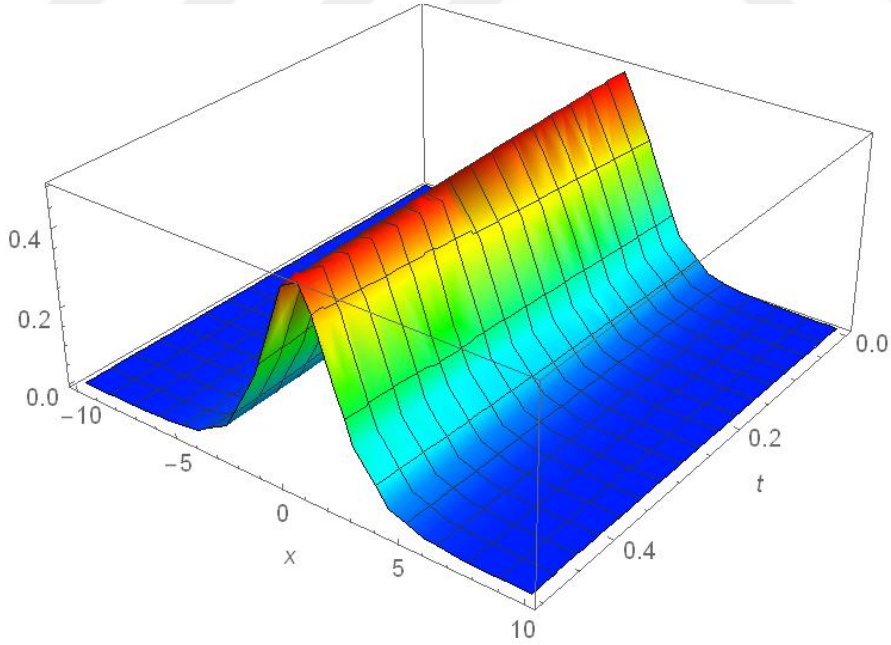
şeklinde bulunur.

Tablo 6.2. Örnek 6.2. de elde edilen $u(x, y)$ değerlerinin $\alpha = 1$ için sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

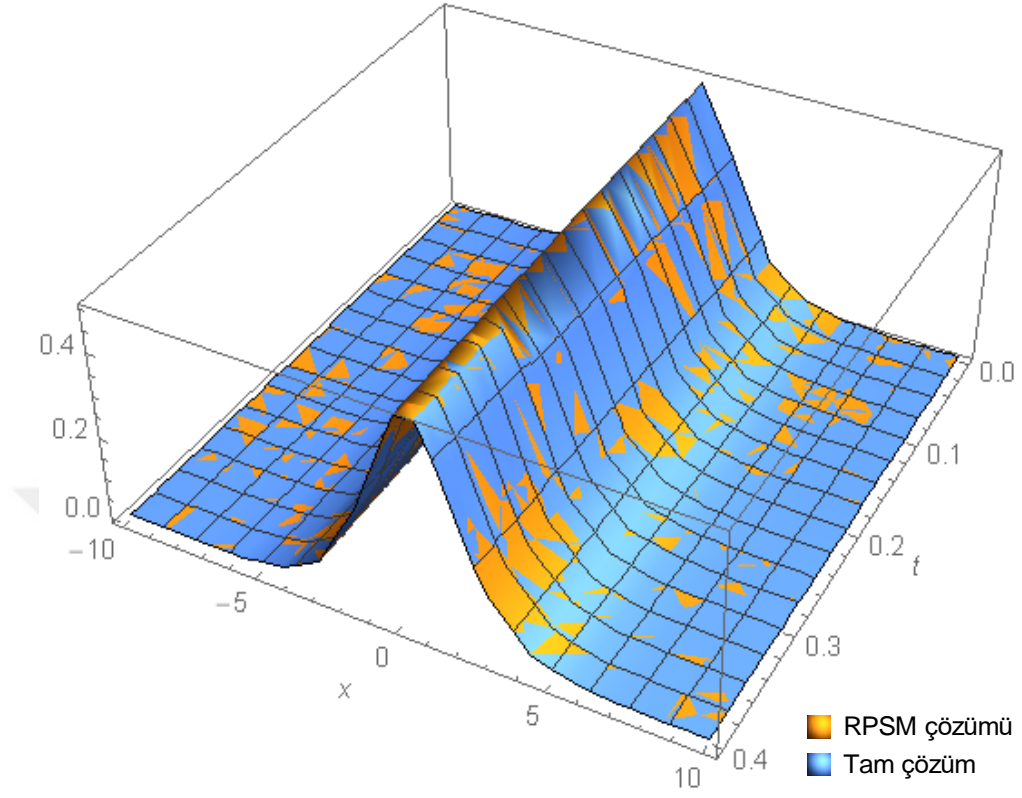
x	t	$u_3(x, t)$	$u_4(x, t)$	$u_5(x, t)$	TAM ÇÖZÜM	MUTLAK HATA
10	0	9.079161547E-5	9.079161547E-5	9.079161547E-5	9.079161547E-5	0
	0.1	1.003389094E-4	1.003392872E-4	1.003392946E-4	1.003392948E-4	$1.848124111 \times 10^{-13}$
	0.2	1.108846061E-4	1.108906506E-4	1.108908902E-4	1.108909003E-4	$1.009994949 \times 10^{-11}$
	0.3	1.225194395E-4	1.225500400E-4	1.225518594E-4	1.225519688E-4	$1.093881087 \times 10^{-10}$
	0.4	1.353341436E-4	1.354308561E-4	1.354385234E-4	1.354391261E-4	$6.026262433 \times 10^{-10}$
	0.5	1.494194521E-4	1.496555667E-4	1.496789674E-4	1.496812511E-4	$2.283611607 \times 10^{-9}$
	0.6	1.648660992E-4	1.653557063E-4	1.654139417E-4	1.654207614E-4	$6.819711597 \times 10^{-9}$
	0.7	1.817648185E-4	1.826718762E-4	1.827977663E-4	1.828150339E-4	$1.726762979 \times 10^{-8}$
	0.8	2.002063442E-4	2.017537446E-4	2.019992411E-4	2.020379740E-4	$3.873286488 \times 10^{-8}$
	0.9	2.202814101E-4	2.227600463E-4	2.232025621E-4	2.232817483E-4	$7.918619579 \times 10^{-8}$
1	2.420807501E-4	2.458585831E-4	2.466082478E-4	2.467586995E-4	$1.504517284 \times 10^{-7}$	



Şekil 6.4. Örnek 6.2. da elde edilen $u_5(x, t)$ 'in $\alpha = 1$ için grafiği



Şekil 6.5. Örnek 6.2. da çözülen zaman kesirli KdV denkleminin $\alpha = 1$ için tam çözüm grafiği



Şekil 6.6. Örnek 6.2. da elde edilen $u_5(x, t)$ ve tam çözümü karşılaştırma grafiği

Örnek 6.3. Bu örnekte kesirli Zakharov-Kuznetsov denklemini ele alalım [43]. Bu denklem

$$D_t^a u + (u^2)_x + \frac{1}{8}(u^2)_{xxx} + \frac{1}{8}(u^2)_{xyy} = 0 \quad (6.54)$$

ifadesiyle tanımlanır.

Denklemin tam çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{4}{3}\rho \sinh^2(x + y - \rho t) \quad (6.55)$$

ve başlangıç şartı ise

$$f_0(x, y) = \frac{4}{3}\rho \sinh^2(x + y) \quad (6.56)$$

şeklindedir.

RPSM yöntemini kullanarak, Zakharov-Kuznetsov denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için önce $u(x, t)$ nin kuvvet serisi açılımı

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y) \frac{t^{na}}{\Gamma(1 + na)}, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R \quad (6.57)$$

şeklinde ifade edilir.

$u(x, y, t)$ nin k . kesik serisi $u_k(x, y, t)$;

$$u_k(x, y, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x, y) \frac{t^{na}}{\Gamma(1 + na)}, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t \leq R \quad (6.58)$$

olarak belirtilir.

$n = 1, 2, 3, \dots, k$ için $f_n(x, y)$ ifadesinin değerlerini bulmak için $u_k(x, y, t)$ denklemde seri açılımı yapılır.

Zakharov-Kuznetsov denkleminin rezidual fonksiyonu $Res(x, y, t)$

$$Res(x, y, t) = D_t^a u + (u^2)_x + \frac{1}{8}(u^2)_{xxx} + \frac{1}{8}(u^2)_{xyy} \quad (6.59)$$

şeklinde tanımlanır ve k . rezidual fonksiyonu $Res_k(x, y, t)$

$$Res_k(x, y, t) = D_t^\alpha u_k + (u_k^2)_x + \frac{1}{8}(u_k^2)_{xxx} + \frac{1}{8}(u_k^2)_{xyy}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.60)$$

şeklinde ifade edilir.

Rezidual kuvvet serisi algoritmasının ilk adımında çözümü bulunacak olan denklemin içine u 'nun k . kesik serisi yerleştirilir. İkinci olarak $Resu_k$, $k = \overline{1, \infty}$ nın $D_t^{(n-1)\alpha}$ ifadesiyle kesirli türevi bulunur ve son olarak denklem çözülür.

$$D_t^{(n-1)\alpha} Resu_k = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad t = 0, \quad k = \overline{1, \infty} \quad (6.61)$$

Bu sayede

$$Res_1(x, y, t) = D_t^\alpha u_1 + (u_1^2)_x + \frac{1}{8}(u_1^2)_{xxx} + \frac{1}{8}(u_1^2)_{xyy} \quad (6.62)$$

ifadesinde

$$u_1(x, y, t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} f_1(x, y) + f(x, y) \quad (6.63)$$

yazılarak

$$Res_1(x, y, t) =$$

$$\begin{aligned} & 2 \left(f_0(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \left(f_0^{(1,0)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) + \frac{1}{8} \left(2 \left(f_0^{(0,2)}(x, y) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{t^\alpha f_1^{(0,2)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \left(f_0^{(1,0)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) + \right. \\ & 4 \left(f_0^{(0,1)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(0,1)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \left(f_0^{(1,1)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,1)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) + 2 \left(f_0(x, y) + \right. \\ & \left. \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \left(f_0^{(1,2)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,2)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \left. \right) + \\ & \frac{1}{8} \left(6 \left(f_0^{(1,0)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \left(f_0^{(2,0)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(2,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) + 2 \left(f_0(x, y) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \left(f_0^{(3,0)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(3,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.64)$$

elde edilir

$Res_1(x, y, t) = 0$ eşitlenip $t = 0$ alındığında

$$\begin{aligned}
& f_1(x, y) \\
&= \frac{1}{4} \left(-8f_0(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - f_0^{(0,2)}(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - 2f_0^{(0,1)}(x, y)f_0^{(1,1)}(x, y) \right. \\
& - f_0(x, y)f_0^{(1,2)}(x, y) - 3f_0^{(1,0)}(x, y)f_0^{(2,0)}(x, y) \\
& \left. - f_0(x, y)f_0^{(3,0)}(x, y) \right) \tag{6.65}
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan $f_1(x, y)$ sayesinde 1.RPSM yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
& u_1(x, y, t) = \\
& f_0(x, y) + \frac{1}{4\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \left(-8f_0(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - f_0^{(0,2)}(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - \right. \\
& 2f_0^{(0,1)}(x, y)f_0^{(1,1)}(x, y) - f_0(x, y)f_0^{(1,2)}(x, y) - 3f_0^{(1,0)}(x, y)f_0^{(2,0)}(x, y) - \\
& \left. f_0(x, y)f_0^{(3,0)}(x, y) \right) \tag{6.66}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Benzer şekilde $Res_k(x, y, t)$ da $k = 2$ yazılıp

$$Res_2(x, y, t) = D_t^\alpha u_2 + (u_2^2)_x + \frac{1}{8}(u_2^2)_{xxx} + \frac{1}{8}(u_2^2)_{xyy} \tag{6.67}$$

elde edilir. Burada $u_2(x, y, t)$ yerine aşağıdaki ifade

$$u_2(x, y, t) = f(x, y) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} f_1(x, y) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} f_2(x, y) \tag{6.68}$$

yazılır ve

$$\begin{aligned}
Res_2(x, y, t) &= 2 \left(f_0(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) \left(f_0^{(1,0)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \right. \\
& \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \left. \right) + \frac{1}{8} \left(2 \left(f_0^{(0,2)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(0,2)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(0,2)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) \left(f_0^{(1,0)}(x, y) + \right. \right. \\
& \left. \frac{t^\alpha f_1^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) + \\
& 4 \left(f_0^{(0,1)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(0,1)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(0,1)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) \left(f_0^{(1,1)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,1)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \right. \\
& \left. \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,1)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) + 2 \left(f_0(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) \left(f_0^{(1,2)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,2)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,2)}(x,y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) + \frac{1}{8} \left(6 \left(f_0^{(1,0)}(x,y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,0)}(x,y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,0)}(x,y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) \left(f_0^{(2,0)}(x,y) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{t^\alpha f_1^{(2,0)}(x,y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(2,0)}(x,y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) + 2 \left(f_0(x,y) + \frac{t^\alpha f_1(x,y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x,y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) \left(f_0^{(3,0)}(x,y) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{t^\alpha f_1^{(3,0)}(x,y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(3,0)}(x,y)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) \right) \quad (6.69)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeye aşağıda verilen işlemler uygulandığında

$D_t^\alpha Res_2(x, y, t) = 0$ ve $t = 0$ için

$$\begin{aligned}
& f_2(x, y) = \\
& \frac{1}{4} \left(-8f_1(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - f_1^{(0,2)}(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - 8f_0(x, y)f_1^{(1,0)}(x, y) - \right. \\
& f_0^{(0,2)}(x, y)f_1^{(1,0)}(x, y) - 2f_1^{(0,1)}(x, y)f_0^{(1,1)}(x, y) - 2f_0^{(0,1)}(x, y)f_1^{(1,1)}(x, y) - \\
& f_1(x, y)f_0^{(1,2)}(x, y) - f_0(x, y)f_1^{(1,2)}(x, y) - 3f_1^{(1,0)}(x, y)f_0^{(2,0)}(x, y) - \\
& \left. 3f_0^{(1,0)}(x, y)f_1^{(2,0)}(x, y) - f_1(x, y)f_0^{(3,0)}(x, y) - f_0(x, y)f_1^{(3,0)}(x, y) \right) \quad (6.70)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece 2. RPSM yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
& u_2(x, y, t) = f_0(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{4\Gamma(1+2\alpha)} t^{2\alpha} \left(-8f_1(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - \right. \\
& f_1^{(0,2)}(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - 8f_0(x, y)f_1^{(1,0)}(x, y) - f_0^{(0,2)}(x, y)f_1^{(1,0)}(x, y) - \\
& 2f_1^{(0,1)}(x, y)f_0^{(1,1)}(x, y) - 2f_0^{(0,1)}(x, y)f_1^{(1,1)}(x, y) - f_1(x, y)f_0^{(1,2)}(x, y) - \\
& f_0(x, y)f_1^{(1,2)}(x, y) - 3f_1^{(1,0)}(x, y)f_0^{(2,0)}(x, y) - 3f_0^{(1,0)}(x, y)f_1^{(2,0)}(x, y) - \\
& \left. f_1(x, y)f_0^{(3,0)}(x, y) - f_0(x, y)f_1^{(3,0)}(x, y) \right) \quad (6.71)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Aynı işlemler $Res_k(x, y, t)$ de $k = 3$ için yazılır ve

$$Res_3(x, y, t) = D_t^\alpha u_3 + (u_3^2)_x + \frac{1}{8} (u_3^2)_{xxx} + \frac{1}{8} (u_3^2)_{xyy} \quad (6.72)$$

elde edilir.

$$u_3(x, y, t) = f(x, y) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} f_1(x, y) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} f_2(x, y) + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} f_3(x, y) \quad (6.73)$$

$Res_3(x, y, t)$ ifadesinde yerine yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
Res_3(x, y, t) = & 2(f_0(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)})(f_0^{(1,0)}(x, y) + \\
& \frac{t^\alpha f_1^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)}) + \frac{1}{8}(2(f_0^{(0,2)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(0,2)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \\
& \frac{t^{2\alpha} f_2^{(0,2)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3^{(0,2)}(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)})(f_0^{(1,0)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)}) + \\
& 4(f_0^{(0,1)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(0,1)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(0,1)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3^{(0,1)}(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)})(f_0^{(1,1)}(x, y) + \\
& \frac{t^\alpha f_1^{(1,1)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,1)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3^{(1,1)}(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)}) + 2(f_0(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \\
& \frac{t^{3\alpha} f_3(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)})(f_0^{(1,2)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,2)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,2)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3^{(1,2)}(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)}) + \\
& \frac{1}{8}(6(f_0^{(1,0)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3^{(1,0)}(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)})(f_0^{(2,0)}(x, y) + \\
& \frac{t^\alpha f_1^{(2,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(2,0)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3\alpha} f_3^{(2,0)}(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)}) + 2(f_0(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \\
& \frac{t^{3\alpha} f_3(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)})(f_0^{(3,0)}(x, y) + \frac{t^\alpha f_1^{(3,0)}(x, y)}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2^{(3,0)}(x, y)}{\Gamma(1+2\alpha)} + \\
& \frac{t^{3\alpha} f_3^{(3,0)}(x, y)}{\Gamma(1+3\alpha)}) \tag{6.74}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan bu ifadede $D_t^{2\alpha} Res_2 = 0$ ve $t = 0$ yazılarak

$$\begin{aligned}
f_3(x, y) = & \frac{1}{4\Gamma(1+\alpha)}(-8\Gamma(1+\alpha)f_2(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - \Gamma(1 \\
& + \alpha)f_2^{(0,2)}(x, y)f_0^{(1,0)}(x, y) - 8\Gamma(1+\alpha)f_0(x, y)f_2^{(1,0)}(x, y) - \Gamma(1 \\
& + \alpha)f_0^{(0,2)}(x, y)f_2^{(1,0)}(x, y) - 2\Gamma(1+\alpha)f_2^{(0,1)}(x, y)f_0^{(1,1)}(x, y) \\
& - 2\Gamma(1+\alpha)f_0^{(0,1)}(x, y)f_2^{(1,1)}(x, y) - \Gamma(1+\alpha)f_2(x, y)f_0^{(1,2)}(x, y) \\
& - t^\alpha f_2(x, y)f_1^{(1,2)}(x, y) - \Gamma(1+\alpha)f_0(x, y)f_2^{(1,2)}(x, y) \\
& - 3\Gamma(1+\alpha)f_2^{(1,0)}(x, y)f_0^{(2,0)}(x, y) \\
& - 3\Gamma(1+\alpha)f_0^{(1,0)}(x, y)f_2^{(2,0)}(x, y) - \Gamma(1+\alpha)f_2(x, y)f_0^{(3,0)}(x, y) \\
& - t^\alpha f_2(x, y)f_1^{(3,0)}(x, y) - \Gamma(1+\alpha)f_0(x, y)f_2^{(3,0)}(x, y) \tag{6.75}
\end{aligned}$$

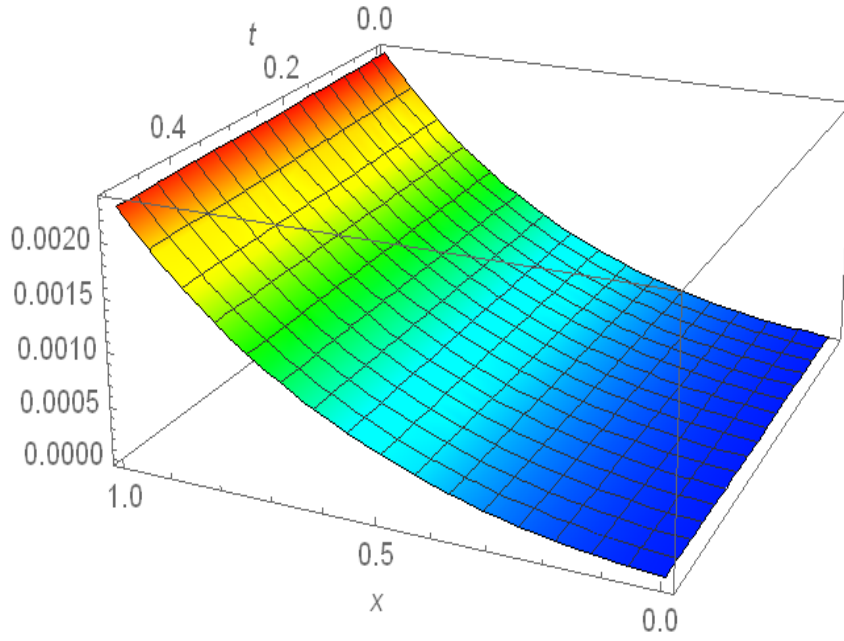
olarak bulunur. Böylece 3. RPSM yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u_3(x, y, t) = & f_0(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x, y)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1 + 3\alpha)} t^{3\alpha} (-2(f_0(x, y) \\
& + f_2(x, y))(f_0^{(1,0)}(x, y) + f_2^{(1,0)}(x, y)) + \frac{1}{8} (-2(f_0^{(0,2)}(x, y) \\
& + f_2^{(0,2)}(x, y))(f_0^{(1,0)}(x, y) + f_2^{(1,0)}(x, y)) - 4(f_0^{(0,1)}(x, y) \\
& + f_2^{(0,1)}(x, y))(f_0^{(1,1)}(x, y) + f_2^{(1,1)}(x, y)) - 2(f_0(x, y) \\
& + f_2(x, y))(f_0^{(1,2)}(x, y) + f_2^{(1,2)}(x, y)) + \frac{1}{8} (-6(f_0^{(1,0)}(x, y) \\
& + f_2^{(1,0)}(x, y))(f_0^{(2,0)}(x, y) + f_2^{(2,0)}(x, y)) \\
& - 2(f_0(x, y) + f_2(x, y)) (f_0^{(3,0)}(x, y) \\
& + f_2^{(3,0)}(x, y))
\end{aligned} \tag{6.76}$$

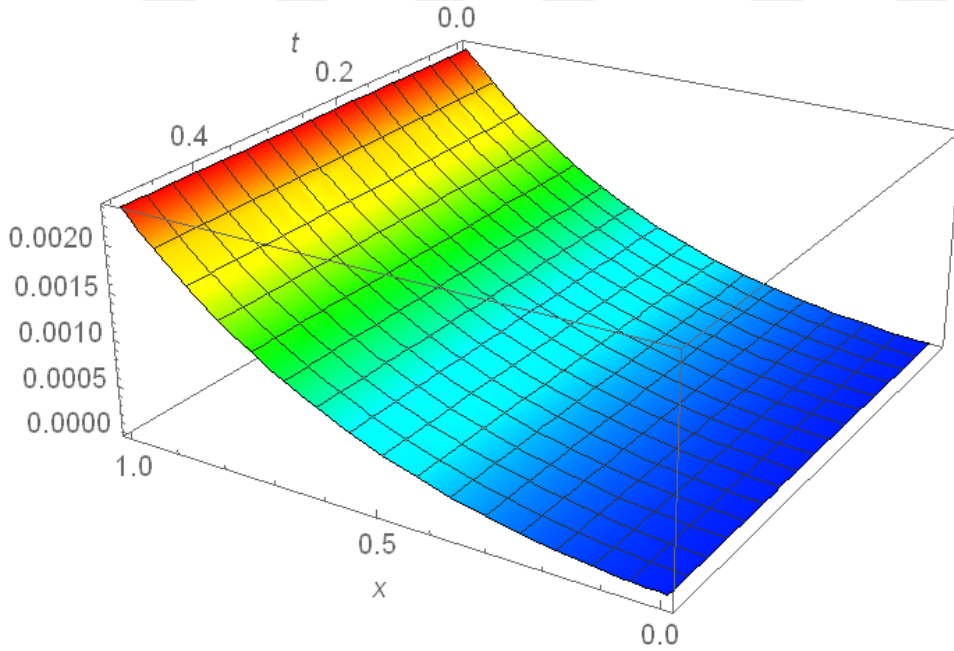
olarak bulunur

Tablo 6.3. Örnek 6.3 de elde edilen $u_3(x, y, t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin $\rho = 0.001$ için karşılaştırılması

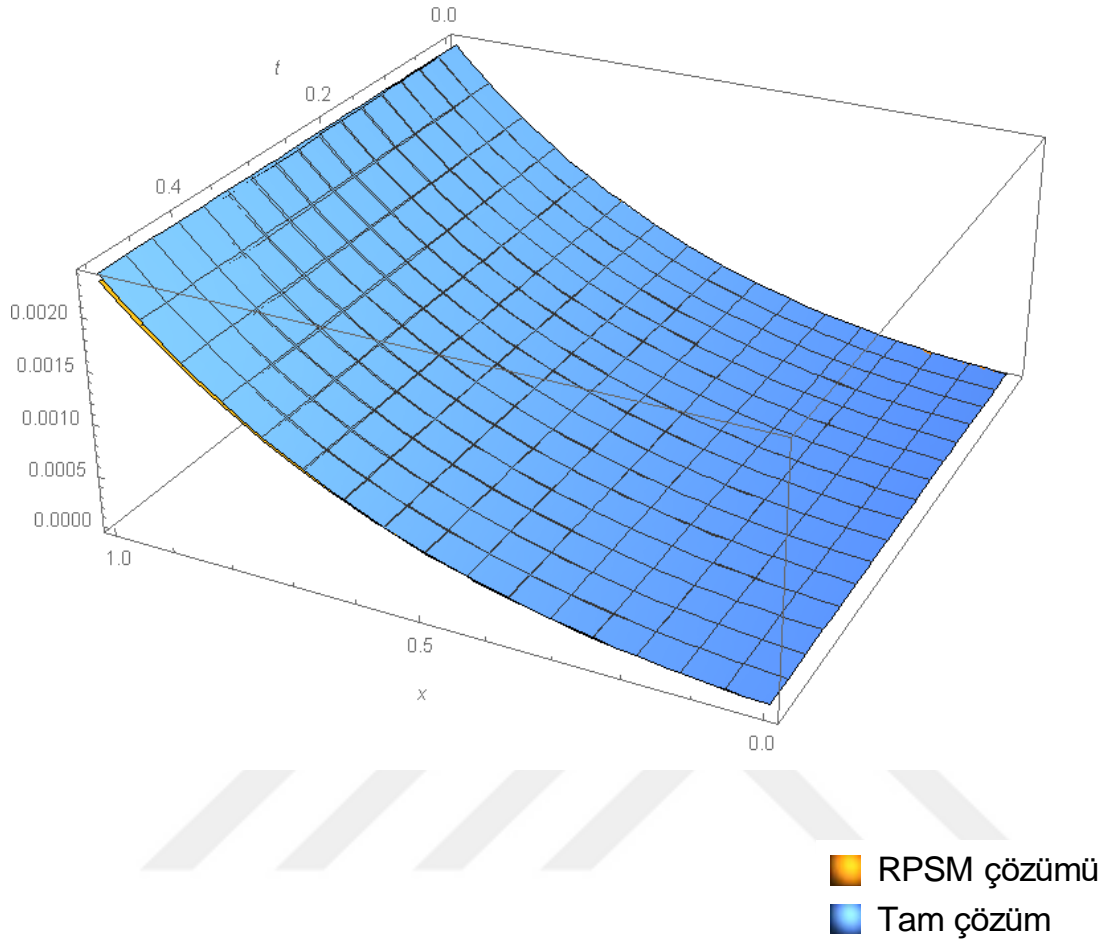
x	y	t	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$		
			$u_3(x, y, t)$	$u_3(x, y, t)$	$u_3(x, y, t)$	TAM ÇÖZÜM	MUTLAK HATA
0.1	0.1	0.2	5.281918833E-5	5.324789468E-5	5.355355947E-5	5.393877159E-5	$3.852121197 \times 10^{-7}$
		0.3	5.254976842E-5	5.296761287E-5	5.330818228E-5	5.388407668E-5	$5.758943982 \times 10^{-7}$
		0.4	5.232448071E-5	5.271208555E-5	5.306409919E-5	5.382941059E-5	$7.653113980 \times 10^{-7}$
0.3	0.3	0.2	5.313209113E-4	5.344320300E-4	5.366985080E-4	5.400346184E-4	$3.336110388 \times 10^{-6}$
		0.3	5.293774913E-4	5.323677095E-4	5.348634892E-4	5.398334775E-4	$4.969988284 \times 10^{-6}$
		0.4	5.277644332E-4	5.305017010E-4	5.330504553E-4	5.396323850E-4	$6.581929664 \times 10^{-6}$
0.6	0.6	0.2	2.926287033E-3	2.962668271E-3	2.989893296E-3	3.036507413E-3	$4.661411638 \times 10^{-5}$
		0.3	2.902884262E-3	2.938196268E-3	2.967231165E-3	3.035778952E-3	$6.854778749 \times 10^{-5}$
		0.4	2.882863732E-3	2.916369941E-3	2.945344163E-3	3.035050640E-3	$8.970647771 \times 10^{-5}$



Şekil 6.7. Örnek 6.3. da elde edilen $u_3(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için grafiği



Şekil 6.8. Örnek 6.3. da çözülen Kesirli Zakharov-Kuznetsov denkleminin $\alpha = 1$ için tam çözüm grafiği



Şekil 6.9. Örnek 6.3. da da elde edilen $u_5(x, t)$ ve tam çözümü karşılaştırma grafiği

Örnek 6.4. Son örneğimizde (2+1) boyutlu zaman kesirli coupled burger denklemini çözelim [44]. Denklem

$$D_t^\alpha u + uu_x + vv_y = \frac{1}{R}(u_{xx} + u_{yy}) \quad (6.77)$$

$$D_t^\beta v + uv_x + vv_y = \frac{1}{R}(v_{xx} + v_{yy}) \quad (6.78)$$

şeklinde ifade edilir. Verilen kesirli diferansiyel denklem sisteminin başlangıç koşulları

$$u(x, y, 0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp((R/32)(-4x + 4y)))}, \quad (6.79)$$

$$v(x, y, 0) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((R/32)(-4x + 4y)))} \quad (6.80)$$

şeklinde dir ve $\alpha = \beta = 1$ için kesin çözümü ise

$$u(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp((R/32)(-4x + 4y - t)))} \quad (6.81)$$

$$v(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((R/32)(-4x + 4y - t)))} \quad (6.82)$$

olarak verilmiştir. Verilen bu denklem sistemi RPSM yöntemiyle çözmek için kesirli kuvvet serisi açılımı yapalım. Bu kuvvet serisi açılımları

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (6.83)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x, y) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (6.84)$$

$$0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad y \in I, \quad 0 \leq t < R.$$

şeklinde ifade edilir. Daha sonra $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ için k .kesik serisi $u_k(x, y, t)$ ve $v_k(x, y, t)$;

$$u_k(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (6.85)$$

$$v_k(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x, y) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.86)$$

olarak ifade edilir. Daha sonra alınan denklem için Res_u ve Res_v residual fonksiyonları

$$Res_u(x, y, t) = D_t^\alpha u + uu_x + vu_y - \frac{1}{R}(u_{xx} + u_{yy}) \quad (6.87)$$

$$Res_v(x, y, t) = D_t^\beta v + uv_x + vv_y - \frac{1}{R}(v_{xx} + v_{yy}) \quad (6.88)$$

olarak tanımlanır ve ardından k . residual fonksiyonları $Res_{u,k}$, $Res_{v,k}$

$$Res_{u,k} = D_t^\alpha u_k + u_k u_{kx} + v_k u_{ky} - \frac{1}{R}(u_{kxx} + u_{kyy}) \quad (6.89)$$

$$Res_{v,k} = D_t^\beta v_k + u_k v_{kx} + v_k v_{ky} - \frac{1}{R}(v_{kxx} + v_{kyy}) \quad (6.90)$$

şeklinde ifade edilir.

RPSM algoritmasını devam ettirmek için $Res_{u,k}$ ve $Res_{v,k}$ olarak ifade edilen denklemlerde $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nin k . kesik serileri yerleştirilir. Ardından $Res_{u,k}(x, y, t)$ ve $Res_{v,k}(x, y, t)$ nin $n = 1, 2, 3, \dots$ için kesirli türev formülü $D_t^{(n-1)\alpha}$ şeklinde ifade edilir. Daha sonra

$$D_t^{(n-1)\alpha} Res_{u,k}(x, y, 0) = 0, \quad t = 0 \quad (6.91)$$

$$D_t^{(n-1)\beta} Res_{v,k}(x, y, t) = 0, \quad t = 0 \quad (6.92)$$

denklemleri sayesinde $n = 1, 2, 3, \dots, k$ için $f_n(x, y)$ ve $g_n(x, y)$ her bi adımda bulunur.

1. Adım

$f_1(x, y)$ ve $g_1(x, y)$ elde etmek için $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nin 1. kesik seri açılımı

$$u_1(x, y, t) = f(x, y) + f_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (6.93)$$

$$v_1(x, y, t) = g(x, y) + g_1(x, y) \frac{t^\beta}{\Gamma(1 + \beta)} \quad (6.94)$$

şeklinde yazılır ve bu ifadeler $Res_{u,1}(x, y, t)$ ve $Res_{v,1}(x, y, t)$ de yerine yazılır.

$$Res_{u,1}(x, y, 0) = 0 \quad (6.95)$$

$$Res_{v,1}(x, y, 0) = 0 \quad (6.96)$$

denklemleri kullanılarak

$$f_1(x, y) = \frac{1}{R} \left(-Rg(x, y)f^{(0,1)}(x, y) + f^{(0,2)}(x, y) - Rf(x, y)f^{(1,0)}(x, y) + f^{(2,0)}(x, y) \right) \quad (6.97)$$

$$g_1(x, y) = \frac{1}{R} \left(-Rg(x, y)g^{(0,1)}(x, y) + g^{(0,2)}(x, y) - Rf(x, y)g^{(1,0)}(x, y) + g^{(2,0)}(x, y) \right) \quad (6.98)$$

elde edilir. Bu sayede 1. RPSM yaklaşık çözümleri

$$u_1(x, t) = f(x, y) + \frac{1}{R\Gamma(1 + \alpha)} t^\alpha \left(-Rg(x, y)f^{(0,1)}(x, y) + f^{(0,2)}(x, y) - Rf(x, y)f^{(1,0)}(x, y) + f^{(2,0)}(x, y) \right) \quad (6.99)$$

$$v_1(x, t) = g(x, y) + \frac{1}{R\Gamma(1 + \beta)} t^\beta \left(-Rg(x, y)g^{(0,1)}(x, y) + g^{(0,2)}(x, y) - Rf(x, y)g^{(1,0)}(x, y) + g^{(2,0)}(x, y) \right) \quad (6.100)$$

şeklinde bulunur.

2. Adım

$f_2(x, y)$ ve $g_2(x, y)$ elde etmek için $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nin 2. kesik seri açılımı

$$u_2(x, y, t) = f(x, y) + f_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x, y) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \quad (6.101)$$

$$v_2(x, y, t) = g(x, y) + g_1(x, y) \frac{t^\beta}{\Gamma(1 + \beta)} + g_2(x, y) \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(1 + 2\beta)} \quad (6.102)$$

olacak şekilde ifade edilir. 2. rezidual fonksiyonları $Res_{u,2}(x, y, t)$ ve $Res_{v,2}(x, y, t)$ de bu ifadeler yerine yazılır ve her ikisinde de eşitliğin her iki tarafı D_t^α uygulanıp

$$D_t^\alpha Res_{u,2}(x, y, t) \quad (6.103)$$

ve

$$D_t^\beta Res_{v,2}(x, y, t) \quad (6.104)$$

ifadeleri bulunur. Elde edilen ifadelerde $t = 0$ yazılır ve

$$D_t^\alpha Res_{u,2}(x, y, 0) = 0 \quad (6.105)$$

$$D_t^\beta Res_{v,2}(x, y, 0) = 0 \quad (6.106)$$

denklemleri çözümlürse

$$f_2(x, y) = \frac{1}{R} (-Rg(x, y)f_1^{(0,1)}(x, y) + f_1^{(0,2)}(x, y) - Rf_1(x, y)f^{(1,0)}(x, y) - Rf(x, y)f_1^{(1,0)}(x, y) + f_1^{(2,0)}(x, y)) \quad (6.107)$$

ve

$$g_2(x, y) = \frac{1}{R} (-Rg_1(x, y)g^{(0,1)}(x, y) - Rg(x, y)g_1^{(0,1)}(x, y) + g_1^{(0,2)}(x, y) - Rf(x, y)g_1^{(1,0)}(x, y) + g_1^{(2,0)}(x, y)) \quad (6.108)$$

$$u_2(x, y, t) = f(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{1}{R\Gamma(1 + 2\alpha)} t^{2\alpha} (-Rg(x, y)f_1^{(0,1)}(x, y) + f_1^{(0,2)}(x, y) - Rf_1(x, y)f^{(1,0)}(x, y) - Rf(x, y)f_1^{(1,0)}(x, y) + f_1^{(2,0)}(x, y)) \quad (6.109)$$

ve

$$\begin{aligned}
v_2(x, y, t) = & g(x, y) + \frac{t^\beta g_1(x, y)}{\Gamma(1 + \beta)} \\
& + \frac{1}{R\Gamma(1 + 2\beta)} t^{2\beta} \left(-Rg_1(x, y)g^{(0,1)}(x, y) - Rg(x, y)g_1^{(0,1)}(x, y) \right. \\
& \left. + g_1^{(0,2)}(x, y) - Rf(x, y)g_1^{(1,0)}(x, y) + g_1^{(2,0)}(x, y) \right) \quad (6.110)
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

3. Adım

Denklemin sisteminin yaklaşık çözümünü elde etmek için $u(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ nin 3. kesik seri açılımı olan

$$\begin{aligned}
u_3(x, y, t) = & f(x, y) + f_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x, y) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
& + f_3(x, y) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} \quad (6.111)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
v_3(x, y, t) = & g(x, y) + g_1(x, y) \frac{t^\beta}{\Gamma(1 + \beta)} + g_2(x, y) \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(1 + 2\beta)} \\
& + g_3(x, y) \frac{t^{3\beta}}{\Gamma(1 + 3\beta)} \quad (6.112)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadeler $Res_{u,3}(x, y, t)$ ve $Res_{v,3}(x, y, t)$ de yerine yazılıp ve her ikisinde de denklemin her iki tarafına $D_t^{2\alpha}$ ve $D_t^{2\beta}$ uygulanıp

$$D_t^{2\alpha} Res_{u,2}(x, y, 0) = 0 \quad (6.113)$$

ve

$$D_t^{2\beta} Res_{v,2}(x, y, 0) = 0 \quad (6.114)$$

denklemleri çözüldüğünde

$$\begin{aligned}
f_3(x, y) &= \frac{1}{R\Gamma(1 + \alpha)^2} \left(-Rg(x, y)\Gamma(1 + \alpha)^2 f_2^{(0,1)}(x, y) + \Gamma(1 + \alpha)^2 f_2^{(0,2)}(x, y) \right. \\
&\quad - R\Gamma(1 + \alpha)^2 f_2(x, y)f^{(1,0)}(x, y) - R\Gamma(1 + 2\alpha)f_1(x, y)f_1^{(1,0)}(x, y) \\
&\quad \left. - Rf(x, y)\Gamma(1 + \alpha)^2 f_2^{(1,0)}(x, y) + \Gamma(1 + \alpha)^2 f_2^{(2,0)}(x, y) \right) \quad (6.115)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&g_3(x, y) \\
&= \frac{(-R\Gamma(1 + 2\beta)g_1(x, y)g_1^{(0,1)}(x, y) - Rg(x, y)\Gamma(1 + \beta)^2 g_2^{(0,1)}(x, y) + \\
&\quad Rf(x, y)\Gamma(1 + \beta)^2 g_2^{(1,0)}(x, y) + \Gamma(1 + \beta)^2 g_2^{(2,0)}(x, y))}{(R\Gamma(1 + \beta)^2(1 + g^{(0,1)}(x, y)))} \quad (6.116)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, y, t) &= f(x, y) + \frac{t^\alpha f_1(x, y)}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{t^{2\alpha} f_2(x, y)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
&\quad + \frac{1}{R\Gamma(1 + \alpha)^2 \Gamma(1 + 3\alpha)} t^{3\alpha} \left(-Rg(x, y)\Gamma(1 + \alpha)^2 f_2^{(0,1)}(x, y) \right. \\
&\quad + \Gamma(1 + \alpha)^2 f_2^{(0,2)}(x, y) - R\Gamma(1 + \alpha)^2 f_2(x, y)f^{(1,0)}(x, y) \\
&\quad - R\Gamma(1 + 2\alpha)f_1(x, y)f_1^{(1,0)}(x, y) - Rf(x, y)\Gamma(1 + \alpha)^2 f_2^{(1,0)}(x, y) \\
&\quad \left. + \Gamma(1 + \alpha)^2 f_2^{(2,0)}(x, y) \right) \quad (6.117)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&v_3(x, y, t) \\
&= g(x, y) + \frac{t^\beta g_1(x, y)}{\Gamma(1 + \beta)} + \frac{t^{2\beta} g_2(x, y)}{\Gamma(1 + 2\beta)} \\
&\quad + \frac{(t^{3\beta}(-R\Gamma(1 + 2\beta)g_1(x, y)g_1^{(0,1)}(x, y) - Rg(x, y)\Gamma(1 + \beta)^2 g_2^{(0,1)}(x, y) \\
&\quad + \Gamma(1 + \beta)^2 g_2^{(0,2)}(x, y)Rf(x, y)\Gamma(1 + \beta)^2 g_2^{(1,0)}(x, y) + \Gamma(1 + \beta)^2 g_2^{(2,0)}(x, y))}{(R\Gamma(1 + \beta)^2 \Gamma(1 + 3\beta)(1 + g^{(0,1)}(x, y)))} \quad (6.118)
\end{aligned}$$

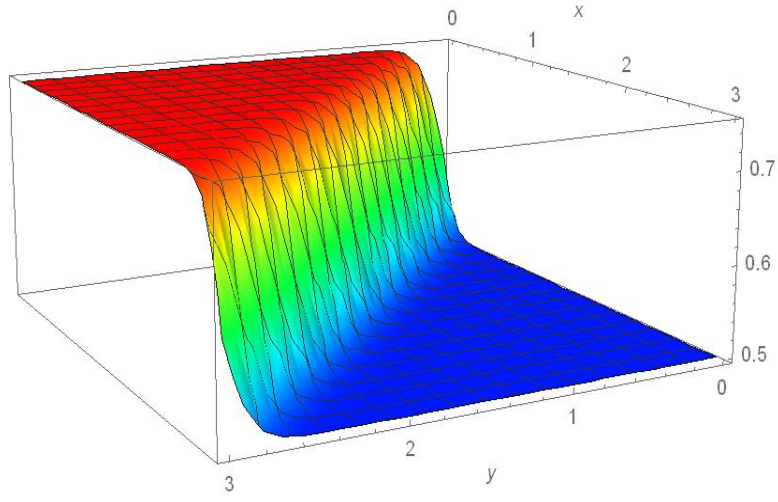
ifadeleri elde edilir.

Tablo 6.4. Örnek 6.4 de elde edilen $u(x, y, t)$ değerlerinin $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $y = 1$,
 $R = 100$ ve $t = 0.1$ için sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

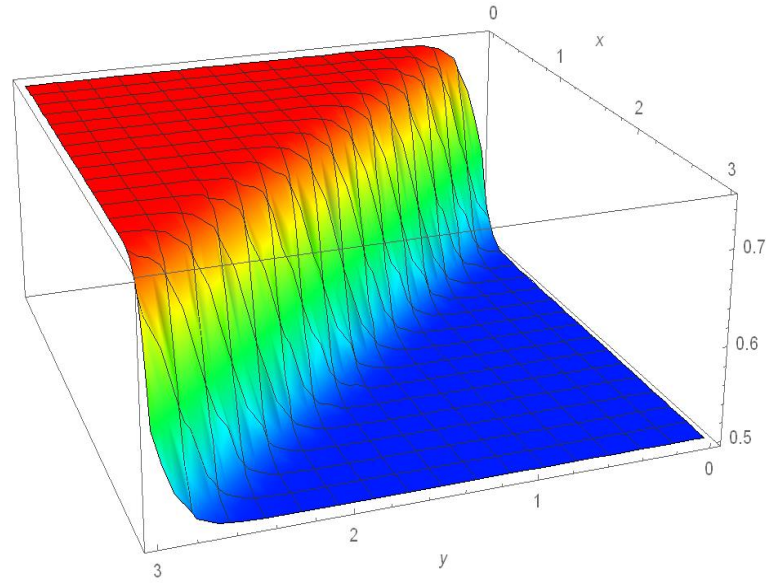
x	$u_1(x, y, t)$	$u_2(x, y, t)$	$u_3(x, y, t)$	TAM ÇÖZÜM	MUTLAK HATA
0.1	0.749995732	0.749995573	0.749995556	0.749995555	$1.380585201 \times 10^{-9}$
0.2	0.749985103	0.749984549	0.749984492	0.749984487	$4.847085843 \times 10^{-9}$
0.3	0.749948015	0.749946082	0.749945881	0.749945863	$1.726334686 \times 10^{-8}$
0.4	0.749818643	0.749811910	0.749811213	0.749811148	$6.445109124 \times 10^{-8}$
0.5	0.749368080	0.749344741	0.749342357	0.749811148	$2.756019520 \times 10^{-7}$

Tablo 6.5. Örnek 6.4. de elde edilen $v(x, y, t)$ değerlerinin $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $y = 1$,
 $R = 100$ ve $t = 0.1$ için sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

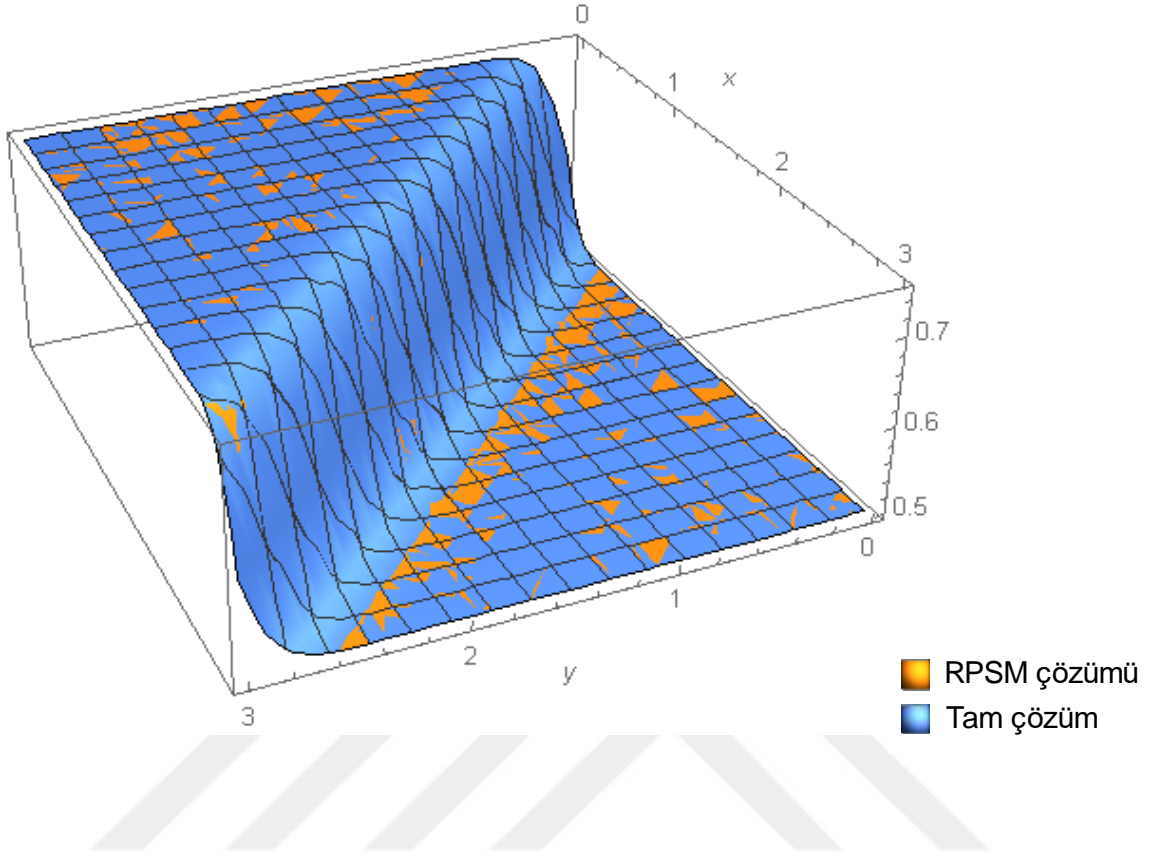
x	$v_1(x, y, t)$	$v_2(x, y, t)$	$v_3(x, y, t)$	TAM ÇÖZÜM	MUTLAK HATA
0.1	0.750004267	0.750004426	0.750004443	0.750004444	$1.380128122 \times 10^{-9}$
0.2	0.750014896	0.750015450	0.750015507	0.750015512	$4.841521072 \times 10^{-9}$
0.3	0.750051984	0.750053917	0.750054118	0.750054136	$1.719569731 \times 10^{-8}$
0.4	0.750181356	0.750188089	0.75188787	0.750188851	$6.363299287 \times 10^{-8}$
0.5	0.750631919	0.750655258	0.750657652	0.750657918	$2.658903179 \times 10^{-7}$



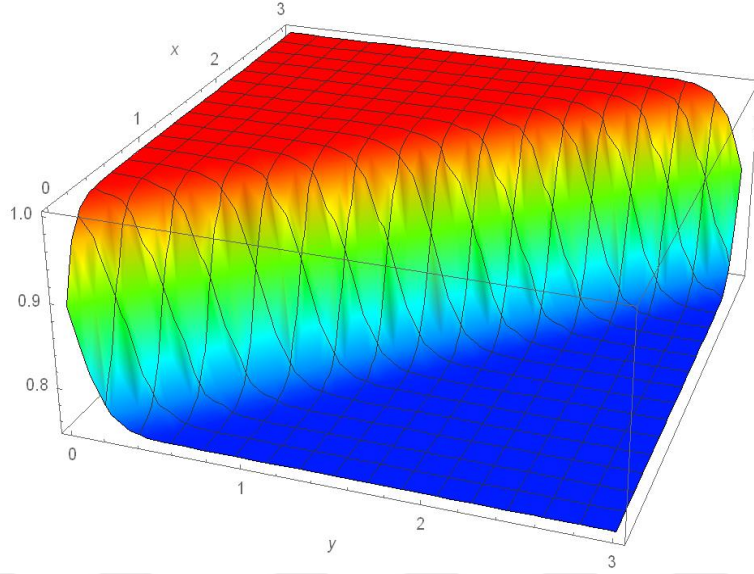
Şekil 6.10. Örnek 6.4. da elde edilen $u_3(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için grafiği



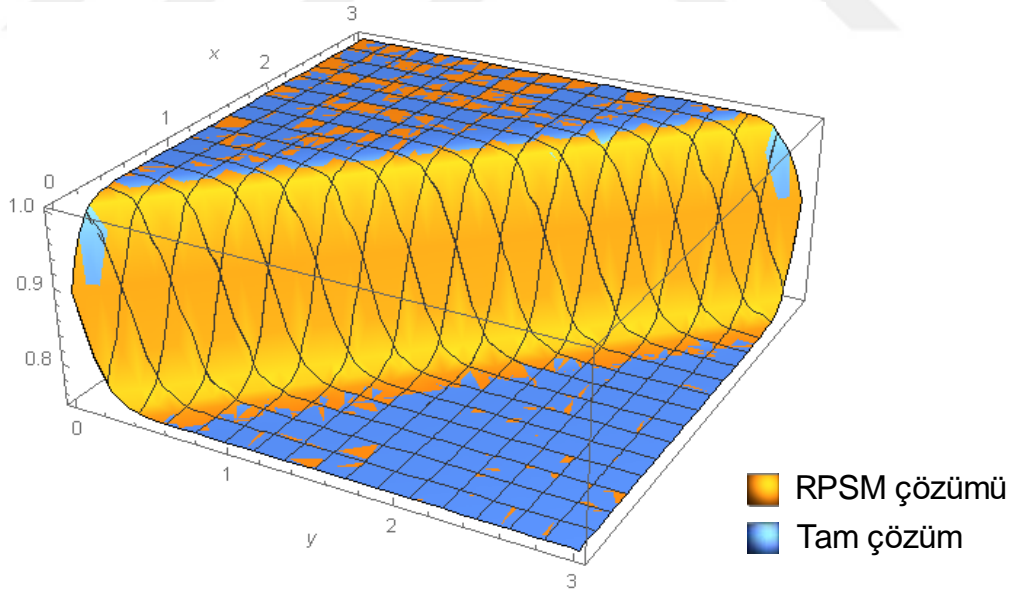
Şekil 6.11. Örnek 6.4. da çözülen (2+1) boyutlu zaman kesirli coupled burger denkleminin $\alpha = 1$ için tam çözüm grafiği



Şekil 6.12. Örnek 6.4. de elde edilen $u_3(x, t)$ ve tam çözüm karşılaştırma grafiği



Şekil 6.13. Örnek 6.4. da elde edilen $v_3(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için grafiği



Şekil 6.14. Örnek 6.4. de elde edilen $v_3(x, t)$ ve tam çözümünü karşılaştırma grafiği

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer ve non-lineer kesirli kısmi diferansiyel denklem tiplerinin Rezidual Kuvvet Serisi Metodu yardımıyla yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bulunan bu çözümler tam çözüm ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve elde edilen sonuçların oldukça yakın olduğu gösterilmiştir. Bu durum ise söz konusu metodun daha birçok türdeki kesirli diferansiyel denklem ve denklem sistemlerine başarıyla uygulanabileceğini göstermektedir.



KAYNAKLAR

- [1] David, S. A., Linares, J. L., & Pallone, E. M. J. A. "Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications", *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(4), 4302-4302, 2011.
- [2] Leibniz, G. W., "1695 A Letter from Hanover, Germany to GFA L'Hospital, September 30", *Math. Schriften* (1849), 301-302, 1695.
- [3] Lacroix, S. F., "Traité du calcul différentiel et du calcul integral", *Courcier*, (Vol. 1). 1810.
- [4] Loverro, A. "Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer", *Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering*, 1-28, 2004.
- [5] İnternet: <https://www.whitman.edu/mathematics/multivariable/multivariable.pdf>
- [6] Weilbeer, M. "Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background" , *Papierflieger*, 2005.
- [7] Ross, B., "Fractional Calculus", *Mathematics Magazine*, 115-122, 1977.
- [8] Podlubny, I., "Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications", *Academic Press*, 198, 1998.
- [9] Kilbas, A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. New book:" Theory and applications of fractional differential equations", *Elsevier, North-Holland Mathematics Studies*, 204. *Fractional Calculus And Applied Analysis*, 9(1), 71, 2006.
- [10] Ahmad, R. S. "An analytical solution of the fractional navier-stokes equation by residual power series method.", *Zarqa University, Doctoral dissertation*, 10-90, 2015.
- [11] Das, S., "Functional fractional calculus", *Springer*, 2011.
- [12] Diethelm, K., "The analysis of fractional differential equations", *Springer*, 2010
- [13] Oldham, K., Spanier, J., "The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order", *Academic Press, INC.*, 1974.
- [14] Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. "Fractional integrals and derivatives." *Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon*, 1993.

- [15] Sabatier, J. , Agrawal, O. P. , & Machado, J. T. “Advances in fractional calculus” (Vol. 4, No. 9). *Dordrecht: Springer* , 2007.
- [16] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., & Trujillo, J. J. “ Fractional calculus: Models and numerical methods (Vol. 5).” *World Scientific*, 2016
- [17] Caputo, M., "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II", *Geophys. J. Int.*, 13.5, 529-539, 1967.
- [18] Caputo, M., *Elasticità e dissipazione*. Zanichelli, 1969.
- [19] Podlubny, L. , “The laplace transform method for linear differantial equations of fractional order” *Slovak Academy of Science, Slovak Republic*, 1994
- [20] Özen, S., & Öztürk, İ. “Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville Ve Caputo kesirsel türevleri üzerine/On Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives”.*Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 20(1-2), 2016.
- [21] Momani, S., Odibat, Z., "A novel method for nonlinear fractional partial differential equations: Combination of DTM and generalized Taylor's formula", *J. Comput. Appl. Math.*, 220.1, 85-95, 2008.
- [22] Wazwaz, A. M. “A reliable modification of Adomian decomposition method”, *Applied Mathematics and Computation*, 102(1), 77-86, 1999.
- [23] Durbin, F. “Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method”, *The Computer Journal*, 17(4), 371-376, 1974.
- [24] Liao, S. “Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4), 983-997, 2009.
- [25] Esen, A., Taşbozan, O., & Yağmurlu, N. M. “Approximate analytical solutions of the fractional sharma-tasso-olver equation using homotopy analysis method and a comparison with other methods”, *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, 9(2), 2012.
- [26] Şenol, M., “Bazı kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri üzerine”, *Nevşehir Hacıbekaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, , *Doktora Tezi*, s.10-74, Nevşehir, 2014.

- [27] Şenol, M., & Dolapci, I. T. “On the Perturbation–Iteration Algorithm for fractional differential equations”, *Journal of King Saud University-Science*, 28(1), 69-74, 2016.
- [28] Dolapçı, İ. T., Şenol, M., & Pakdemirli, M. “New perturbation iteration solutions for Fredholm and Volterra integral equations”, *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 2013.
- [29] Şenol, M., Timuçin Dolapçı, İ., Aksoy, Y., & Pakdemirli, M. “Perturbation-iteration method for first-order differential equations and systems”, In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013), *Hindawi Publishing Corporation*, 2013.
- [30] Kumar, A., Kumar, S., & Singh, M., “Residual power series method for fractional Sharma-Tasso-Oleever equation”, *Commun. Numer. Anal*, 10, 2016.
- [31] Jaradat, H. M., Al-Shara, S., Khan, Q. J., Alquran, M., & Al-Khaled, K. “Analytical solution of time-fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson system using residual power series method”, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 46(1), 64-70, 2016.
- [32] Alquran, M. “Analytical solutions of fractional foam drainage equation by residual power series method”, *Mathematical sciences*, 8(4), 153, 2015.
- [33] El-Ajou, A., Arqub, O. A., Zhou, Z. A., & Momani, S. “New results on fractional power series: theories and applications”, *Entropy*, 15(12), 5305-5323, 2013.
- [34] Kumar, S., Kumar, A., & Baleanu, D., “Two analytical methods for time-fractional nonlinear coupled Boussinesq–Burger’s equations arise in propagation of shallow water waves”, *Nonlinear Dynamics*, 85(2), 699-715, 2016.
- [35] Al-Smadi, M. “Solving initial value problems by residual power series method”, *Theoretical Mathematics and Applications*, 3(1), 199-210, 2013.
- [36] Shatnawi, M. T. “Solving Boundary-Layer problems by residual power series Method”, *Journal of Mathematics Research*, 8(3), 68, 2016.
- [37] Tchier, F., Inc, M., Korpınar, Z. S., & Baleanu, D. “Solutions of the time fractional reaction–diffusion equations with residual power series method”, *Advances in Mechanical Engineering*, 8(10), 1687814016670867, 2016.
- [38] Arqub, O. A., & Rashaideh, H. “Solution of Lane-Emden Equation by residual power series method”, In *ICIT 2013 The 6th International Conference on Information Technology*, 2-7, 2013.

- [39] Zhanga, Y., Kumarb, A., Kumarb, S., Baleanuc, D., & Yange, X. J. “Residual power series method for time-fractional Schrödinger equations”, *Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA)*, 9(11), 2016.
- [40] Abu-Gdairi, R., Al-Smadi, M., & Gumah, G. “An expansion iterative technique for handling fractional differential equations using fractional power series scheme”, *Journal of Mathematics and Statistics*, 11(2), 29, 2015.
- [41] İbiş, B., & Bayram, M. “Approximate solution of time-fractional advection-dispersion equation via fractional variational iteration method”, *The Scientific World Journal*, 2014.
- [42] Momani, S., Odibat, Z., & Alawneh, A. “Variational iteration method for solving the space-and time-fractional KdV equation”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1), 262-271, 2008.
- [43] Molliq, R. Y., Noorani, M. S. M., Hashim, I., & Ahmad, R. R. “Approximate solutions of fractional Zakharov–Kuznetsov equations by VIM”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(2), 103-108, 2009.
- [44] S.S. Ray, “A new coupled fractional reduced differential transform method for the numerical solutions of (2+1)-dimensional time fractional coupled burger equations”, *Simul. Eng.*, 2014, 1–12, 2014.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe ATA 1984 yılında Erzincan'da doğdu. Zonguldak'ta Kilimli Piri Reis İlkokulu, bitirdikten sonra 1995-2002 yılları arasında Zonguldak Atatürk Anadolu Lisesini bitirdi. 2002-2006 yılları arasında Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü tamamladı. 2006-2009 yılları arasında Bursa Mudanya Cafer Yener İlköğretim Okulunda matematik öğretmenliği yaptı. 2009-2013 yılları arasında Nevşehir Özyayla İlköğretim Okulunda matematik öğretmenliği yaptı. 2013 yılında Nevşehir Atatürk Ortaokuluna matematik öğretmeni olarak atandı ve halen mesleğine aynı okulda devam etmektedir. 2015 yılında Nevşehir Hacıbektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. Orta derecede İngilizce bilmekte, evli ve 2 çocuk sahibidir.

Adres: 15 Temmuz Mah. Necmettin Erbakan Cad. Vizyon Kent.
B Blok NO:3 Merkez/NEVŞEHİR

Telefon: 0505 868 99 86

e-posta : ayseataoz@gmail.com.tr