

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİ ÜZERİNDE
TANIMLANABİLEN GRAFLAR**

**Tezi Hazırlayan
Mehmet Uğur KARACA**

**Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hatice TOPCU**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2020
NEVŞEHİR**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli bilgilerini benimle paylaőan ve kıymetli zamanını ayıran saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hatice TOPCU'ya,

Hayatımın her alanında olduğu gibi, tez çalıőmamı hazırlarken de maddi ve manevi olarak her aőamada bana yardımcı olan hayat arkadaőım, sevgili eőim Maide BALAKAR KARACA'ya,

İlgi ve alakalarından dolayı değerli hocalarım Doç. Dr. Sezer SORGUN, Doç. Dr. Yasin YAZLIK, Dr. Öğr. Üyesi Esmā DEMİR ÇETİN ve Hakan KÜÇÜK'e,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Erkan SARIKAYA, İbrahim POYRAZ ve Vildan AKTUĖ'a teőekkürlerimi sunarım.

Mehmet Uğur KARACA

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİ ÜZERİNDE TANIMLANABİLEN GRAFLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Mehmet Uğur KARACA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2020

ÖZET

Yıllarca popülerliğini korumuş ve ilgi duyulan bir alan haline gelmiş olan graf teorisi üzerine yapılan birçok çalışma literatürde bulunmaktadır [1-10]. Son yıllarda ise lineer cebir ile graf teorisi, daha fazla birlikte ele alınmaya başlanmıştır [1-10]. Hazırladığımız bu çalışma ise graf teorisini sayı dizileri ile olan bazı ilişkilerini incelemektedir.

1997’ de Christopher ve Kennedy [1] tarafından çalışılmış olan “binomial graflar ve spektrumları (binomial graphs and their spectra)” isimli makale, bu çalışmada detaylı bir şekilde incelenerek burada yer alan binomial graflar çalışmamızın odak noktalarından biri olarak ele alınmıştır. Benzer bir durum sergileyen, Kar ve Yılmaz [2] tarafından hazırlanan “balans-binomial grafların lineer cebirsel incelenmesi (on linear algebra of balance-binomial graphs)” isimli makale de detaylı bir şekilde incelenmiş ve gerekli araştırmalar yapılarak burada elde edilen bulgulara da bu çalışmamızda yer verilmiştir.

Birbirinden bağımsız olarak hazırlanan bu iki çalışmada, aslında iki farklı sayı dizisi (doğal sayılar, balans sayıları) kullanılmış olmasına rağmen, tamamen aynı özelliklere sahip, eş graf kümeleri elde edilmiştir.

Bu çalışmada ayrıca, incelenen binomial ve balans-binomial grafların, farklı sayı dizilerine uyarlanması için araştırmalar yapılmış olup elde edilen bulgulara son bölümde yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: *Binomial graf, balans-binomial graf, graf spektrumu*

Tez Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hatice TOPCU

Sayfa Adeti: 61

GRAPHS WHICH CAN BE DEFINED ON SOME SPECIAL NUMBER SEQUENCES

(M. Sc. Thesis)

Mehmet Uğur KARACA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
August 2020

ABSTRACT

There are many studies in the literature on graph theory, which has maintained its popularity for years and has become a field of interest [1-10]. In recent years, linear algebra and graph theory have started to be handled more and more together [1-10]. In study, we have prepared examines some of the relations between graph theory and series of numbers.

The article named "binomial graphs and their spectra", which was studied by Christopher and Kennedy [1] in 1997, was examined in detail in this study and the binomial graphs included here were considered as one of the focal points of our study. The article named "on linear algebra of balance-binomial graphs" written by Kar and Yılmaz [2] which exhibits a similar situation, was also examined in detail and the necessary researches were made and the findings obtained here were also included in this work.

Although two different sequences of numbers (natural numbers, balance numbers) were used in these two independently articles, identical sets of graphs with exactly the same properties were obtained.

Additionally, in this thesis constructions of the binomial and balance-binomial graphs were tried to carry on to different sequences of numbers and the findings about this were given in the final section.

Keywords: *Binomial graph, balance-binomial graph, graph spectrum*

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hatice TOPCU

Page Number: 61

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
RESİMLER LİSTESİ	xi
HARİTALAR LİSTESİ	xii
TABLolar LİSTESİ.....	xiii
KISALTMALAR	xiv
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1. Graf Teorisinin Kısa Tarihi.....	1
1.1.1. İlk Graf Sözcüğü	3
1.1.2. Kirchhoff'un Gerilim Yasası.....	4
1.1.3. Kirchhoff'un Akım Yasası.....	5
1.1.4. Dört Renk Teoremi.....	5
1.1.5. VLSI (Very Large Scale Integration) Teknolojisi.....	7
1.1.6. Graf Teorisinin Başlıca Kullanım Alanları	8
BÖLÜM 2	
ÖNBİLGİLER.....	11
2.1. Bir Matrisin Determinantı.....	11
2.1.1. Bir Matrisin Determinantının Minörler ve Kofaktörler ile Hesaplanması....	12

2.2. Bir Matrisin Permanenti.....	15
2.3. İki Matrisin Kronecker Çarpımı.....	15
2.4. Bir Matrisin Özdeğer ve Özvektörlerinin Bulunması.....	16
2.5. Graf Teorisinde Bazı Temel Tanımlar.....	20
2.6. Balans Sayı Dizisi.....	27
2.7. Üçgensel Sayılar.....	30
2.8. Karesel Sayı Dizisi.....	30
2.9. Küpsel Sayı Dizisi.....	31
2.10. Dörtsele Sayı Dizisi.....	31
2.11. Fibonacci Sayı Dizisi.....	32
2.12. Tribonacci Sayıları.....	32
2.13. Mersenne Sayıları.....	33
2.14. Palindromik Sayılar.....	33
BÖLÜM 3	
GRAFLAR.....	34
3.1. Binomial Graflar.....	34
3.1.1. Binomial Graflar için Karakteristik Polinomlar.....	36
3.1.2. Binomial Graflarda Kapalı Yürüyüşler.....	38
3.2. Balans-Binomial Graflar.....	40
3.2.1. Balans-Binomial Graflarda Komşuluk Matrisi.....	41
3.2.2. Balans-Binomial Grafların Derece Dizisi.....	45
3.2.3. Balans-Binomial Grafların Özellikleri.....	45
3.2.4. Balans-Binomial Graflar için Enerji.....	50
3.3. Karesel-Binomial Graflar.....	53
3.4. Küpsel-Binomial Graflar.....	54
3.5. Dörtsele-Binomial Graflar.....	55

3.6. Tribonacci-Binomial Graf.....	56
3.7. Üçgensel-Binomial Graf.....	56
3.8. Mersenne-Binomial Graf.....	58
BÖLÜM 4	
SONUÇ.....	60
KAYNAKÇA.....	61
ÖZGEÇMİŞ.....	63



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Königsberg köprüleri	2
Şekil 1.2. Königsberg probleminin graf teorisi ile gösterimi.....	3
Şekil 1.3. Kirchhoff gerilim yasası	4
Şekil 1.4. Kirchhoff akım yasası	5
Şekil 1.5. Dört renk ile boyanmış deneysel bir harita	5
Şekil 1.6. VSLI çip.....	7
Şekil 1.7. Bilgisayar ağları	8
Şekil 2.1. Derece dizisi örneği	20
Şekil 2.2. Basit ve Basit olmayan graf örneği.....	21
Şekil 2.3. 1,2,4 ve 5 noktalı null graflar	22
Şekil 2.4. 2,3 ve 4 noktalı yol graflar	22
Şekil 2.5. 3,4 ve 5 noktalı döngü graflar	22
Şekil 2.6. 3,4 ve 5 noktalı tam graflar	23
Şekil 2.7. 3,4 ve 5 noktalı tekerlek graflar	23
Şekil 2.8. 4,5 ve 6 noktalı yıldız graflar	24
Şekil 2.9. İki parçalı tam graf örneği.....	24
Şekil 2.10. 3,5 ve 8 noktalı ağaç graf örnekleri	24
Şekil 2.11. İzomarf graf örnekleri	25
Şekil 2.12. Üçgensel sayıların geometrik gösterimi.....	30

Şekil 2.13. Karesel sayıların geometrik gösterimi	30
Şekil 2.14. Küpsel sayı dizisinin geometrik gösterimi.....	31
Şekil 2.15. Fibonacci sayı dizisinin geometrik gösterimi	32
Şekil 2.16. Tribonacci sayı dizisinin geometrik gösterimi (beyaz üçgenler).....	32
Şekil 3.1. İlk üç Balans-Binomial Graf.....	41
Şekil 3.2. İkinci balans-binomial grafın birinciyi kapsamaması.....	46
Şekil 3.3. Üçüncü balans-binomial grafın birinciyi kapsamaması.....	46
Şekil 3.4. Üçüncü balans-binomial grafın ikinciyi kapsamaması.....	47

RESİMLER LİSTESİ

Resim 1.1. Euler'in Marinoni'ye yazdığı mektup.....	2
Resim 1.2. James Joseph Sylvester.....	4
Resim 1.3. Graf teori ile ilgili yazılan ilk kitap ve yazarı dénes kónig (1936).....	8
Resim 1.4. Türkçe kurallı cümle yapısının graf teori ile gösterimi [3].....	9
Resim 1.5. Bilgisayar devre kartları.....	10
Resim 1.6. Google Maps ve graf teori	10

HARİTALAR LİSTESİ

Harita 1.1. Dört renk problemi ve Türkiye iller haritası	6
Harita 1.2. Dört renk problemi ve Dünya ülkeler haritası.....	7
Harita 1.3. İstanbul şehrinin metro hatları haritası.....	8



TABLULAR LİSTESİ

Tablo 1.1. Graf teorisinin kronolojik gelişimi	3
Tablo 3.1. Binomial graflara ait 32×32 tipindeki komşuluk matrisi.....	54
Tablo 3.2. Tribonacci-binomial grafına ait 32×32 tipindeki komşuluk matrisi.....	56
Tablo 3.3. Üçgensel-binomial grafına ait 32×32 tipindeki komşuluk matrisi.....	57
Tablo 3.4. Mersenne-binomial grafına ait 32×32 tipindeki komşuluk matrisi.....	58



KISALTMALAR

$\det A$:	A matrisinin determinanı
$\text{per} A$:	A matrisinin permanenti
S_n	:	Simetrik grup
$\text{sgn}(\)$:	İşaret fonksiyonu
$M_{m,n}(F)$:	F cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ matrisler uzayı
$A \otimes B$:	A matrisi ile B matrisinin Kronecker çarpımı
$G = (V, E)$:	Nokta kümesi V ve kenar kümesi E olan graf
B_n	:	n -nci balans sayısı
$B_{[n,k]}$:	Balans sayılarının binom katsayısı
G_n	:	n -inci balans-binomial grafi
$G_s \subseteq G_r$:	G_s altgraf G_r
λ_i	:	i -inci özdeğer
$\varepsilon(G_n)$:	G_n balans-binomial grafının enerjisi
$\text{tr}(A_n)$:	A_n matrisinin izi
$s(A)$:	A kümesinin eleman sayısı
$\text{spec}(M(G))$:	G grafının $M(G)$ matrisinin spektrumu
$\wp(B_n; x)$:	B_n balans-binomial grafına ait karakteristik polinom
d_i	:	Noktanın derecesi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

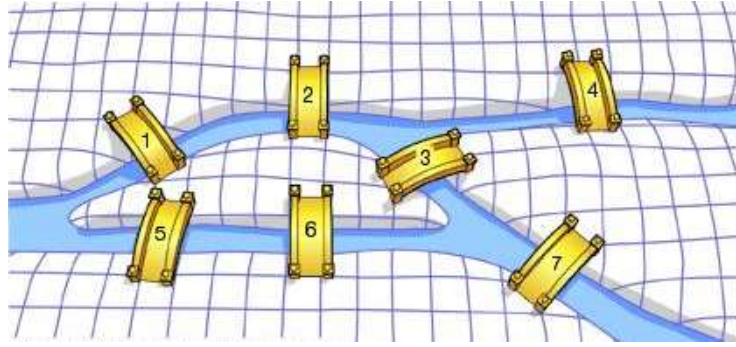
Yıllarca popülerliğini korumuş ve son yıllarda fazlaca ilgi duyulan bir alan haline gelmiş olan graf teorisi birçok alanın odak noktası haline gelmiştir. Türkçe, Edebiyat, Tıp, Bilişim, Tarih, Psikoloji ve Siyaset gibi birçok alanda graflar kullanılmaktadır. Bu çalışmada graf teorisinin, sayı dizileri ile olan bazı ilişkileri incelenmiştir.

1997’ de Christopher ve Kennedy [1] tarafından çalışılmış olan “binomial graflar ve spektrumları (binomial graphs and their spectra)” isimli makale, bu çalışmada detaylı bir şekilde incelenerek burada yer alan binomial graflar tez çalışmamızın odak noktalarından biri olarak ele alınmıştır. Benzer bir durum sergileyen, Kar ve Yılmaz [2] tarafından hazırlanan “balans-binomial grafların lineer cebirsel incelenmesi (on linear algebra of balance-binomial graphs)” isimli makale de detaylı bir şekilde incelenmiş ve gerekli araştırmalar yapılarak bu tez çalışmasına eklenmiştir. Binomial graf yapısının farklı sayı dizileri üzerine taşınarak yeni graflar inşa edilmesi üzerine yaptığımız çalışmalar eklenmiş ve elde edilen bulgulara dair gerekli açıklamalar yapılmıştır.

1.1. Graf Teorisinin Kısa Tarihi

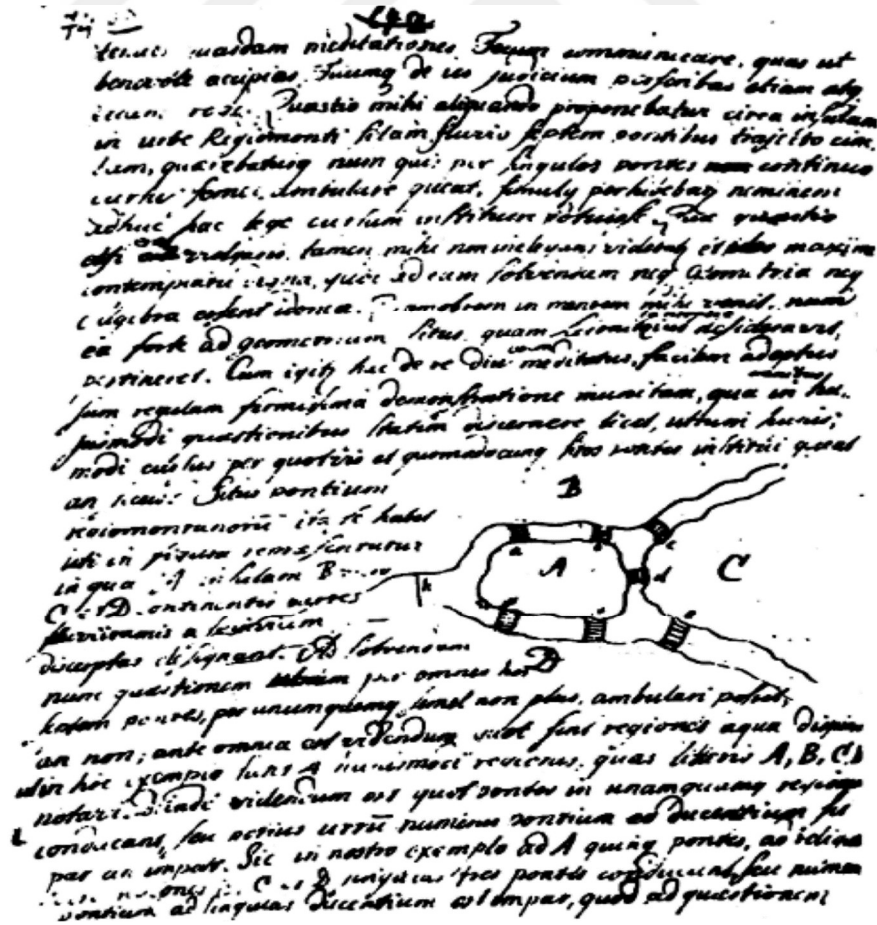
XVIII. yüzyılda Prusya’daki Königsberg kasabası Pergel Nehri ile ikiye ayrılmaktaydı ve nehrin içinde iki adacık bulunmaktaydı. Bu şehirdeki adaları kasabaya bağlayan 7 köprüye dair o bölgenin insanları arasında yayılan bir problem sonradan dönemin ünlü matematikçilerinden biri olan Leonhard Euler’e kadar ulaştı. Bu olaydan uzun yıllar sonra 1852 yılında bir başka ünlü matematikçi Augustss De Morgan, Sir William R. Hamilton’a gönderdiği bir mektupta öğrencisinin, İngiltere haritasındaki şehirleri, birbirlerine komşu olanları farklı renklerde boyamak için 4 rengin yeterli olduğunu tespit ettiğini fakat bunu matematiksel olarak ispatlayamadığını yazmıştı. 4 Renk Problemi olarak anılan bu problem, uzun yıllar sonra 1976 yılında K. Appel ve W. Hakken tarafından bilgisayar yardımıyla ispatlandı. Bu iki problemin çözümü matematikte yeni bir çığır açtı.

Königsberg Problemi: Kasabanın bir yakasından gezinti yapmak için çıkan biri tüm köprüleri sadece bir kez geçerek başladığı noktaya dönebilir mi?

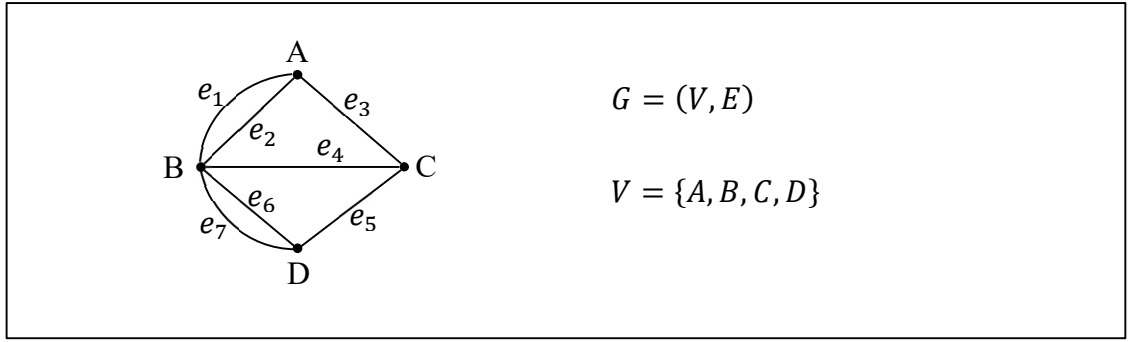


Şekil 1.1. Königsberg köprüleri

Euler bu problemin çözümünün neden mümkün olmadığını ispatları ile birlikte Marinoni'ye yazdığı bir mektup (Resim 1.1.) ile açıkladı ve matematiğin yeni bir uygulama alanı olan Graf Teorisinin öncüsü oldu. Graf Teorisine ve uygulamalarına olan ilgi son yirmi yılda büyük bir artış gösterdi. Bu artışın sebebi günlük hayatta karşılaştığımız birçok soruna Graf Teorisi ile çözüm bulunabilmesidir.



Resim 1.1. Euler'in Marinoni'ye yazdığı mektup



Şekil 1.2. Königsberg probleminin graf teorisi ile gösterimi

Leonhard Euler tarafından, 1736 yılında, Königsberg'in yedi köprüsü adında günümüzde hala popülerliğini koruyan bir problem ile ilgili olarak yazılan bir makale, Graf Teorisinin kesin başlangıç tarihi olarak kabul edilmektedir.

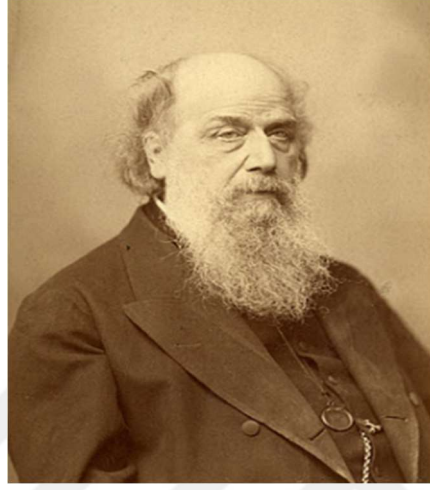
Tablo 1.1. Graf teorisinin kronolojik gelişimi

Yıllar	Bilim Adamları	Graf teorisine katkıları
1736	Leonard Euler	" Könisberg'in yedi köprüsü" makalesini yayımlayarak graf teorisinin başlangıcını oluşturduğu ve topoloji ile ilişkisini göstermiştir.
1822	J.J. Sylvester	İlk kez graf sözcüğünü kullanmıştır.
1845	Gustav Kirchhoff	Elektrik devrelerinde akım ve gerilimleri hesaplamaya yardımcı olan ünlü Kirchhoff devre kuramını yayımlamıştır.
1852	Francis Guthrie	Yanıtlaması zor olan 4 renk problemini ortaya atmıştır.
1927	Pontryagin	Sonralar VLSI teknolojisinde önemli kullanım alanı bulan düzlemsel grafların özelliklerini bulunmuştur.
1930	K.Kuratovski	
1936	D.König	Graf teorisi ile ilgili ilk kitap yayınlanmıştır.
1976	Kenneth Appel, Wolfgang Haken	1200 saati aşan bilgisayarlı hesaplamalar neticesinde haritanın renklendirmesi için 4 rengin gereklilik ve yeterliliği sağladığı ispatlanmıştır.

1.1.1. İlk Graf Sözcüğü

James Joseph Sylvester (7 Şubat 1822) "Chemistry and algebra," *Nature*, 17 : 284. sayfadan itibaren: "Every invariant and covariant thus becomes expressible by a *graph* precisely identical with a Kekuléan diagram or chemicograph."

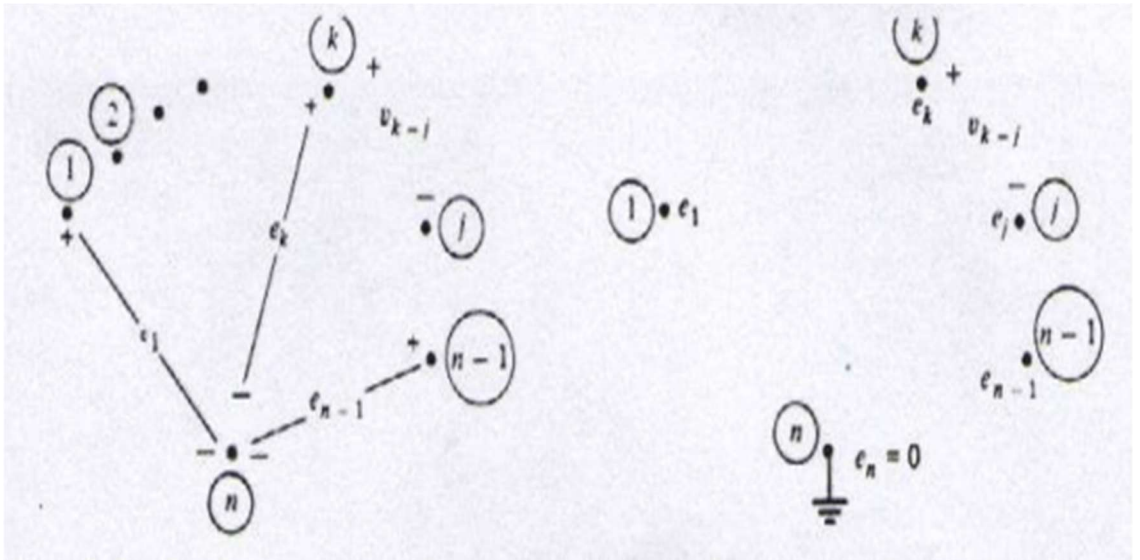
J. J. Sylvester (1822) "On an application of the new atomic theory to the graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics, – with three appendices," *American Journal of Mathematics, Pure and Applied*, 1 (1) : "graf" terimi ilk kez bu yayımda sayfa 65'te geçer.



Resim 1.2. James Joseph Sylvester

1.1.2. Kirchoff'un Gerilim Yasası

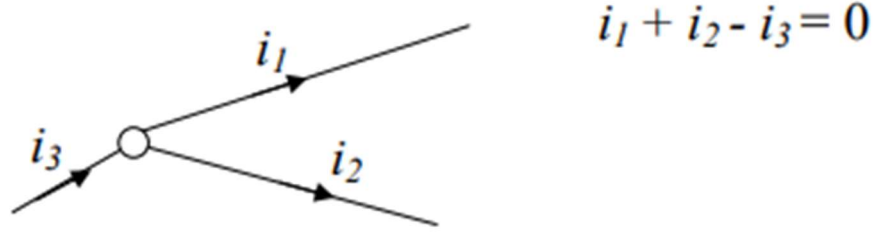
n kenarlı birleşik ve toplu parametrel bir devrede herhangi bir noktayı Şekil 1.3. deki gibi referans seçerek, $(n - 1)$ nokta gerilimi tanımlayalım. $V_{k-j} = e_k - e_j$ Tüm kapalı nokta dizileri için, noktalar arası gerilimlerin toplamı sıfırdır.



Şekil 1.3. Kirchoff gerilim yasası

1.1.3. Kirchoff'un Akım Yasası

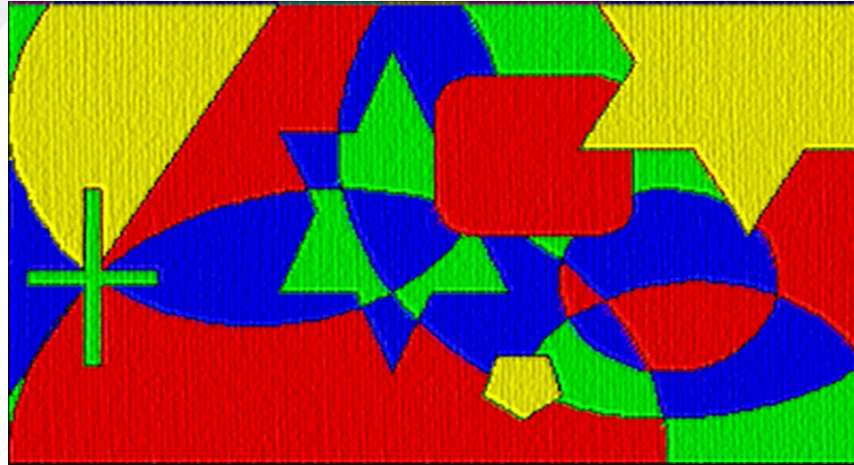
Bir noktadan çıkan akımların toplamı sıfırdır (Şekil 1.4.).



Şekil 1.4. Kirchoff akım yasası

1.1.4. Dört Renk Teoremi

Bir haritanın renklendirilmesinde, birbirine komşu iki bölgenin farklı renkte olması koşulu ile en az kaç renk kullanmak gerekir?



Şekil 1.5. Dört renk ile boyanmış deneysel bir harita

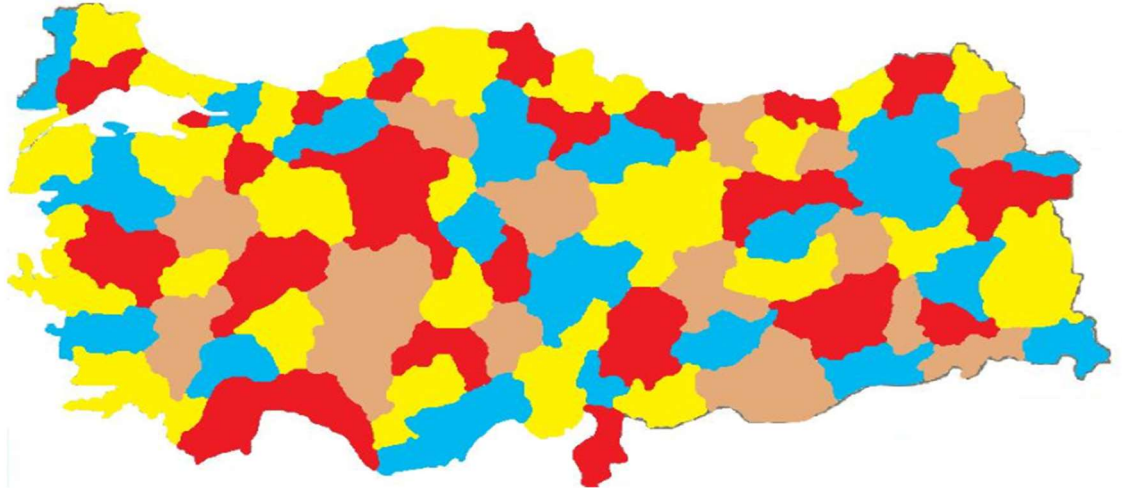
Bu problemi ilk olarak 1852 yılında Francis Guthrie sezinledi. Daha sonra problemi kardeşine mektupla sordu. Soruya cevap bulamayan Francis'in kardeşi, Frederick problemi hocası olan ve ünlü matematikçi De Morgan'a sordu. De Morgan bu problemle uğraştı ancak kabul gören bir ispat elde edemedi.

1878 yılında Yine ünlü bir matematikçi olan Arthur Cayley, problemi Londra Matematik Cemiyeti'ne sundu. Böylece problem ünlü bir problem haline geldi. Problemin sunulmasının üzerinden bir sene geçmeden Kempe, geliştirdiği bir yöntemi sundu. Problemi tam olarak çözememişti fakat dört renk problemi ile uğraşan matematikçiler bu

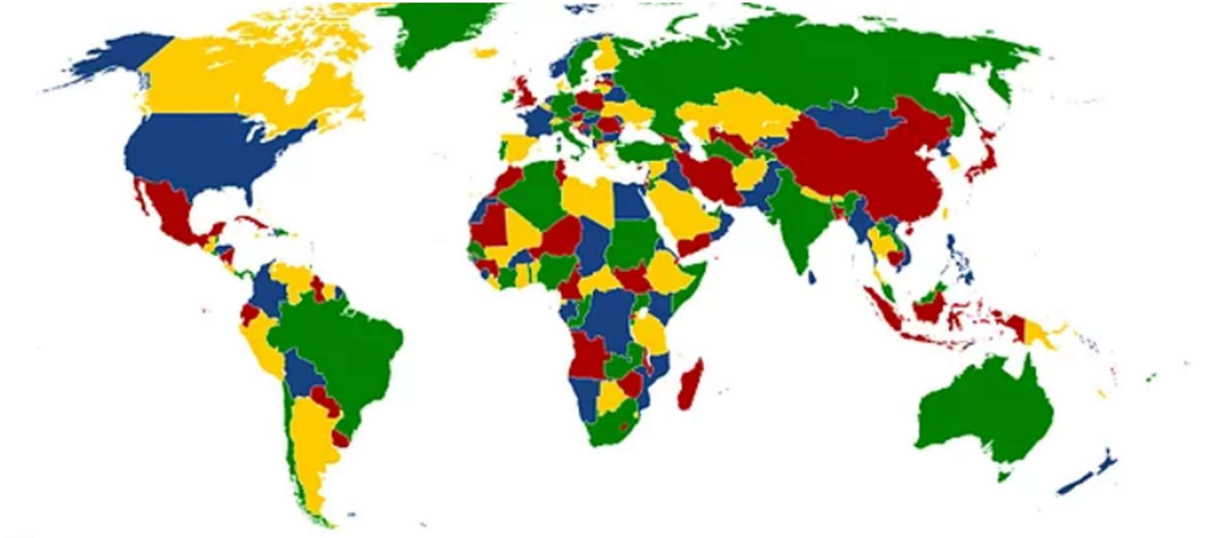
yöntemle problemi çözmeye çalıştılar. Kempe'nin yöntemi, problemi durumlara bölmektir. Fakat yine tek tek incelenemeyecek kadar çok durum vardı. Matematikçiler, uzun yıllar Kempe'nin izinden gittiler. Fakat dört renk problemine bir çözüm bulamadılar. Ta ki bilgisayarlar olaya el atana kadar.

1970 yılında Kempe'nin indirgediği olasılıkları incelemek, Appel ve Haken isimli matematikçilere göre o zamanki bilgisayarların hızına göre 12 sene 2 aydan biraz fazla sürecekti. Nihayet 1976 yılında Appel ve Haken, bu durumların sayısını biraz azaltmayı başarak 1936'ya indirdiler ve bir yandan da bilgisayarların hızı artınca bu iş için 1200 saat bilgisayar kullanmak yetti. 1996 yılında ise Neil Robertson, Daniel Sandersi Paul Seymour ve Robin Thomas incelenmesi gereken durumu 633'e indirmişlerdir.

Böylece problem çözülmüş oldu ve artık dört renk problemi, dört renk teoremi olarak adlandırılmayı hak etti.



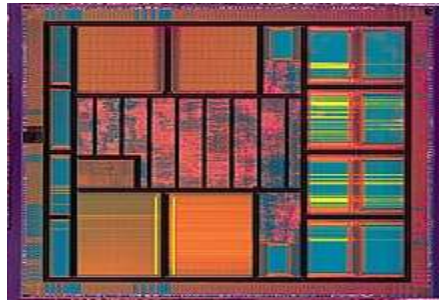
Harita 1.1. Dört renk problemi ve Türkiye iller haritası



Harita 1.2. Dört renk problemi ve Dünya ülkeler haritası

1.1.5. VLSI (Very Large Scale Integration) Teknolojisi

Çok Geniş Ölçekli Tümeleşim (VLSI), binlerce transistörün tek bir yonga üzerinde birleştirilmesi ile Tümeleşik Devrelerin oluşturulması işlemidir. Çok Geniş Ölçekli Tümeleşim, 1970'li yıllarda karmaşık yarı iletken ve iletişim teknolojilerindeki gelişmelerle başlamıştır. Günümüz teknolojilerinde birim alana sığdırılabilen transistör sayısının milyarlar seviyesine çıkması ile bu terim yerini ULSI (En Geniş Ölçekli Tümeleşim) ifadesine bırakmaya başlamıştır.



Şekil 1.6. VLSI çip

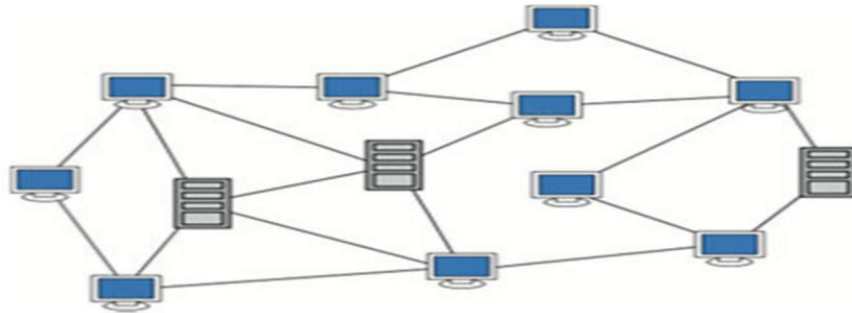


Resim 1.3. Graf teori ile ilgili yazılan ilk kitap ve yazarı dénes kónig (1936)

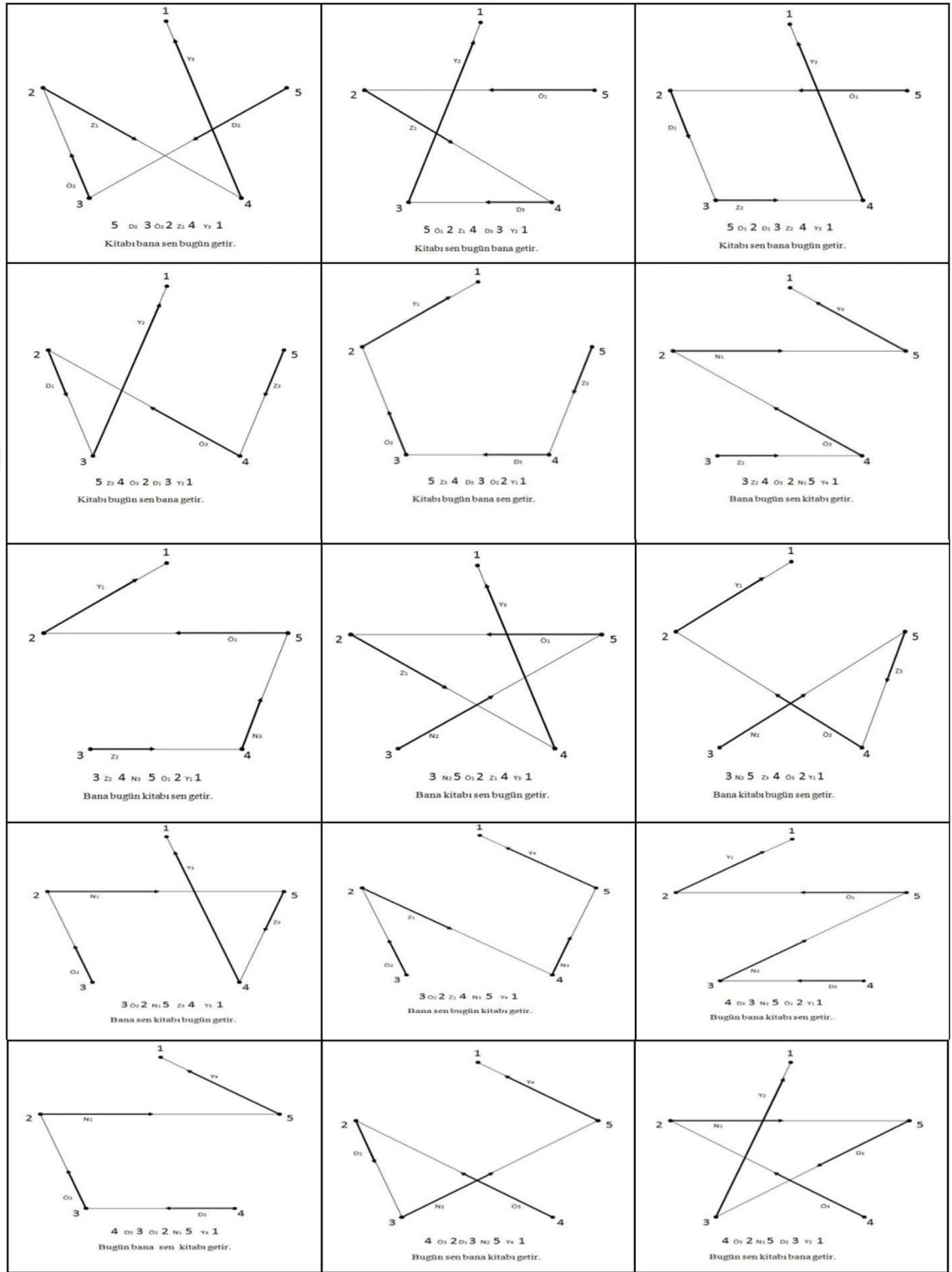
1.1.6. Graf Teorisinin Başlıca Kullanım Alanları



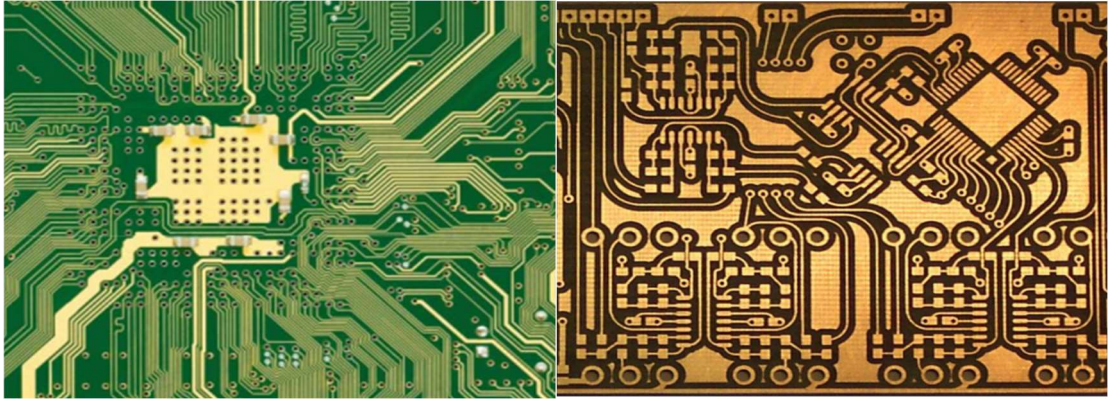
Harita 1.3. İstanbul şehrinin metro hatları haritası



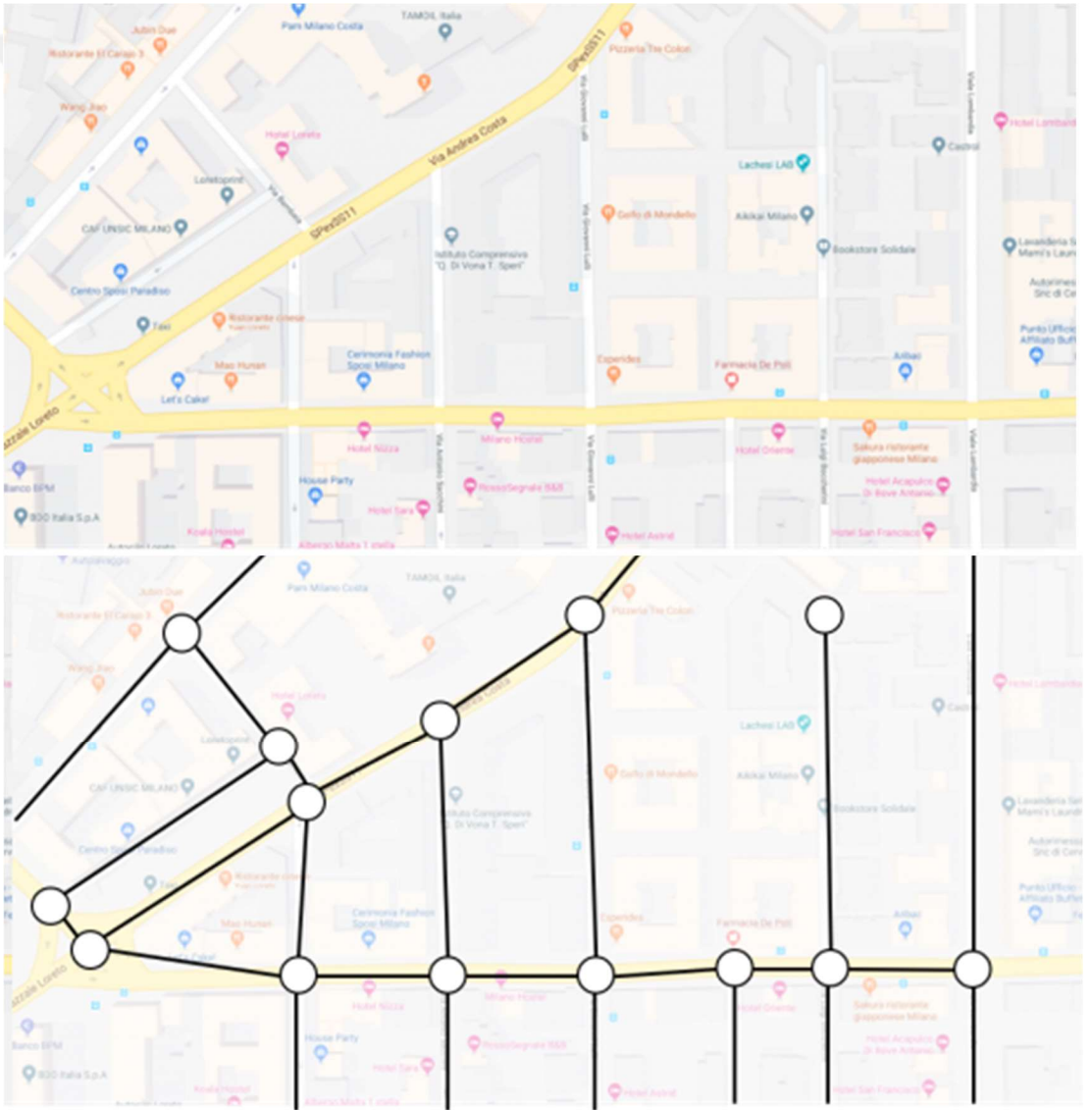
Şekil 1.7. Bilgisayar ağları



Resim 1.4. Türkçe kurallı cümle yapısının graf teori ile gösterimi [3]



Resim 1.5. Bilgisayar devre kartları



Resim 1.6. Google Maps ve graf teori

BÖLÜM 2

ÖNBİLGİLER

2.1. Bir Matrisin Determinantı

Tanım 2.1.1. [4]

$A = (a_{ij})$, $n \times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere A matrisinin determinantı,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde verilir. Burada S_n simetrik (permütasyon) grup ve $\operatorname{sgn}(\sigma)$;

$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ çift ise} \\ -1 & \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan işaret fonksiyonudur.

Örnek

$n = 3$ için

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplayalım. S_3 simetrik grubunun $3! = 6$ tane elemanı olup, bunlardan $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ ve $(3,1,2)$ permütasyonları çift, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ ve $(1,3,2)$ permütasyonları tek olduğundan

$$\operatorname{sgn}(1,2,3) = +1, \quad \operatorname{sgn}(3,2,1) = -1$$

$$\operatorname{sgn}(2,3,1) = +1, \quad \operatorname{sgn}(2,1,3) = -1$$

$$\operatorname{sgn}(3,1,2) = +1, \quad \operatorname{sgn}(1,3,2) = -1$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^3 a_{i\sigma(i)} \\
&= \operatorname{sgn}(1,2,3)a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}(2,3,1)a_{12}a_{23}a_{31} \\
&\quad + \operatorname{sgn}(3,1,2)a_{13}a_{21}a_{32} + \operatorname{sgn}(3,2,1)a_{13}a_{22}a_{31} \\
&\quad + \operatorname{sgn}(2,1,3)a_{12}a_{21}a_{33} + \operatorname{sgn}(1,3,2)a_{11}a_{23}a_{32} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.1.1. Bir Matrisin Determinantının Minörler ve Kofaktörler ile Hesaplanması

Herhangi bir $n \times n$ kare matrisin determinantını, $(n-1) \times (n-1)$ matrislerin determinantları cinsinden ifade eden bir formül aşağıda verilmiştir.

$A = (a_{ij})$ $n \times n$ bir kare matris olmak üzere A matrisinin i -yinci satır ve j -yinci sütununun silinmesiyle elde edilen matrise A matrisinin alt matrisi denir ve A_{ij} ile gösterilir [4].

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alırsak, bu matrisin bazı alt matrisleri;

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

A matrisinin alt matrislerinin determinantlarına A nın minörleri denir ve $\det A_{ij}$ ile gösterilir.

$$(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

işaretili minörüne a_{ij} elemanının kofaktörü denir ve α_{ij} ile gösterilir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrisini göz önüne alalım. Buna göre

$$\det A_{11} = \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A_{12} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A_{13} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = \det A_{11}$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12} = -\det A_{12}$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \det A_{13} = \det A_{13}$$

şeklindedir. Buna göre 3x3 tipindeki bir A matrisinin determinanı

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} = a_{11} \alpha_{11} - a_{12} \alpha_{12} + a_{13} \alpha_{13}$$

olur.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrisinin bütün elemanlarına karşılık gelen kofaktörleri bulunuz ve bu kofaktörlerden yararlanarak determinant değerini hesaplayınız

Çözüm:

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -4$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -5$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -2$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 8$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 8$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -10$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -4$$

olup böylece

$$\det A = a_{11} \alpha_{11} - a_{12} \alpha_{12} + a_{13} \alpha_{13} = 3 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = -14$$

ya da

$$\det A = a_{11} \alpha_{11} - a_{21} \alpha_{21} + a_{31} \alpha_{31} = 3 \cdot (-4) + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 8 = -14$$

olarak hesaplanır.

2.2. Bir Matrisin Permanenti

Tanım 2.2.1. [4]

Bir $A \in M_n(F)$ matrisinin permanenti $per(A)$ ile gösterilir ve

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S_n simetrik grubu ve σ permütasyonu gösterir.

Örnek:

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ matrisinin permanenti

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \prod_{i=1}^3 a_{i\sigma(i)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}$$

olur.

2.3. İki Matrisin Kronecker Çarpımı

Tanım 2.3.1. [4]

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(F)$ ve $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(F)$ matrislerinin Kronecker çarpımı $A \otimes B$ ile gösterilir ve

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A \otimes B \in M_{mp,nq}(F)$ dir. Kronecker çarpımına aynı zamanda matrislerin *Tensör çarpımı* ya da *Direkt çarpımı* da denir. Bu çarpım bir F cismi üzerinde keyfi mertebeli iki matris için tanımlanır.

Lemma 2.3.2. [2]

A n -kare ve B m -kare matris olmak üzere,

A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve özvektörleri x_1, x_2, \dots, x_n B matrisinin özdeğerleri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ ve özvektörleri y_1, y_2, \dots, y_m olsun.

$A \otimes B$ 'nin özdeğerleri $\lambda_i \mu_j$ ve özvektörleri $x_i \otimes y_j$ 'dir. Öyle ki $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ 'dir.

Kronecker çarpımın bazı temel özellikleri şunlardır.

- i. Genel olarak Kronecker çarpım değişmeli değildir. Yani,

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

- ii. $\forall a \in F$, $A \in M_{m,n}(F)$ ve $B \in M_{p,q}(F)$ için,

$$(aA) \otimes B = A \otimes (aB)$$

- iii. $A \in M_{m,n}(F)$, $B \in M_{p,q}(F)$ ve $C \in M_{r,s}(F)$ için,

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

- iv. $A, B \in M_{m,n}(F)$ ve $C \in M_{p,q}(F)$ için,

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$$

2.4. Bir Matrisin Özdeğer ve Özvektörlerinin Bulunması

Bir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisi ile x vektörünün çarpımı sonucunda oluşan vektörün orijinal vektöre paralel olduğunu kabul edelim. Yani,

$$Ax = \lambda x$$

olsun. Bu denklemi $I, n \times n$ birim matris olmak üzere,

$$(A - \lambda I)x = 0$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu denklem sisteminin aşikâr olmayan çözümü

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$$

olması halinde mevcuttur.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinantın hesaplanması sonucunda λ ya bağlı n -nci dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu polinoma A nın karakteristik polinomu denir. Bu karakteristik denklemin köklerine A matrisinin özdeğerleri denir [4].

$$Ax = \lambda x \text{ veya } (A - \lambda I)x = 0$$

Denklemlerinde sıfır olmayan x çözümlerine A 'nın λ değerine karşılık gelen özvektörleri adı verilir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

Çözüm:

Önce A matrisinin karakteristik polinomunu bulalım. Buna göre

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \end{aligned}$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

şeklinde karakteristik polinomu buluruz. Böylece A 'nın karakteristik denklemi

$$-(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

şeklinde olup buradan A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ olarak bulunur.

Şimdi ise özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerini bulalım. Bunun için $(A - \lambda I)x = 0$ homojen denklemini açık olarak aşağıdaki gibi yazalım.

$$(1 - \lambda)x_1 + 0x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + (2 - \lambda)x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + (3 - \lambda)x_3 = 0$$

Bu denklem sisteminde $\lambda = 1$ yazarsak;

$$0x_1 + 0x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu homojen lineer denklem sisteminin çözümü $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü verecektir.

$$x_1 = a$$

$$0x_2 - x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 = -a$$

olup buradan $x_2 = -a$ ve $x_3 = 0$ bulunur. Böylece $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektöre X_1 dersek, o zaman

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a \neq 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

olarak bulunur. Şimdi $\lambda_2 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım. Bunun için lineer denklem sisteminde $\lambda = 2$ yazarsak;

$$\begin{aligned} -x_1 + 0x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu homojen lineer denklem sisteminin çözümü $\lambda_2 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü verecektir.

$$\begin{aligned} x_3 &= b \\ x_1 + 0x_2 &= -b \\ 2x_1 + 2x_2 &= -b \end{aligned}$$

olup buradan $x_1 = -b$ ve $x_2 = \frac{b}{2}$ bulunur. Böylece $\lambda_2 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektöre X_2 dersek, o zaman

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ \frac{b}{2} \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad b \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}$$

olarak bulunur. Son olarak $\lambda_3 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım. Bunun için lineer denklem sisteminde $\lambda = 3$ yazarsak;

$$\begin{aligned} -2x_1 + 0x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu homojen lineer denklem sisteminin çözümü $\lambda_3 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü verecektir.

$$\begin{aligned} x_3 &= c \\ -2x_1 &= c \\ x_1 - x_2 &= -c \end{aligned}$$

olup buradan $x_1 = -\frac{c}{2}$ ve $x_2 = \frac{c}{2}$ bulunur. Böylece $\lambda_3 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektöre X_3 dersek, o zaman

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad c \neq 0, \quad c \in \mathbb{R} \text{ şeklinde bulunur.}$$

2.5. Graf Teorisinde Bazı Temel Tanımlar

Tanım 2.5.1. [5]

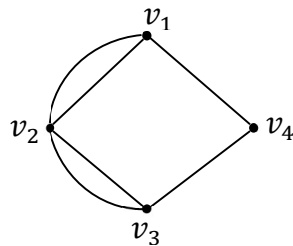
$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ noktalar kümesi ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenarlar kümesi olmak üzere $G = (V, E)$ ifadesine n noktalı ve m kenarlı G grafi denir.

Tanım 2.5.2. [5]

Noktalar kümesinin $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olduğu bir $G = (V, E)$ grafında birbirine komşu olan v_i ve v_j noktaları (v_i, v_j) ya da $v_i \sim v_j$ şeklinde gösterilir. Buna göre kenarlar kümesi $\forall i, j \in \mathbb{N}$ için $E = \{(v_i, v_j) : v_i \text{ ile } v_j \text{ komşudur}\}$ şeklinde belirtilir.

Tanım 2.5.3. [6]

Bir G grafında bir noktaya bağlı olan kenar sayısına o noktanın derecesi adı verilir. Grafta bulunan tüm noktaların derecelerinin küçükten büyüğe doğru sıralanışına ise derece dizisi adı verilir. (Şekil 2.1.)



$$\begin{aligned} \text{der}(v_1) &= 3 \\ \text{der}(v_2) &= 4 \\ \text{der}(v_3) &= 3 \\ \text{der}(v_4) &= 2 \end{aligned}$$

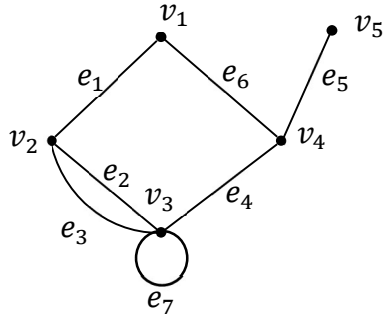
Derece dizisi = 2,3,3,4

Şekil 2.1. Derece dizisi örneği

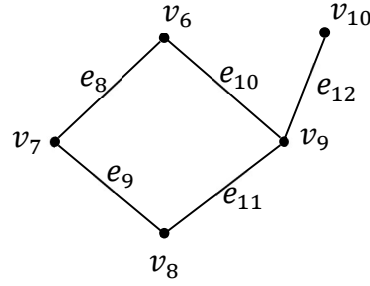
Tanım 2.5.4. [6]

G grafında bir noktanın derecesi 0 ise bu noktaya izole nokta, 1 ise uç (sarkıt) nokta denir. Herhangi bir noktayı kendisine bağlayan kenara ilmek (loop) adı verilir.

Katlı kenar ve ilmek bulundurmayan graflara basit graf denir. (Şekil 2.2.)



Basit olmayan graf



Basit graf

v_5 uç nokta

e_7 düğüm

e_2 ve e_3 çoklu kenar

Şekil 2.2. Basit ve Basit olmayan graf örneği

Tanım 2.5.5. [5]

Bir $G = (V, E)$ grafının keyfi noktaları $v_{k_0}, v_{k_1}, \dots, v_{k_i} \in V$ olmak üzere v_{k_0} noktasında başlayıp v_{k_i} noktasında biten keyfi bir yürüyüş,

$$v_{k_0}, \{v_{k_0}, v_{k_1}\}, v_{k_1}, \{v_{k_1}, v_{k_2}\}, v_{k_2}, \dots, \{v_{k_{i-1}}, v_{k_i}\}, v_{k_i}$$

şeklinde yazılan nokta ve kenarlardan oluşan sonlu bir dizidir. Bir yürüyüşteki kenar sayısı *yürüyüş uzunluğudur*. Herhangi bir yürüyüşte aynı nokta veya kenar birden fazla defa yer alabilir.

Kenar tekrarlamayan bir yürüyüşse *gezi*; nokta tekrarlamayan bir yürüyüşe ise *yol* denir.

Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan bir yürüyüşe *kapalı yürüyüş* denir.

Kenar tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe *devir*; nokta tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe ise *döngü* denir

Tanım 2.5.6. [6]

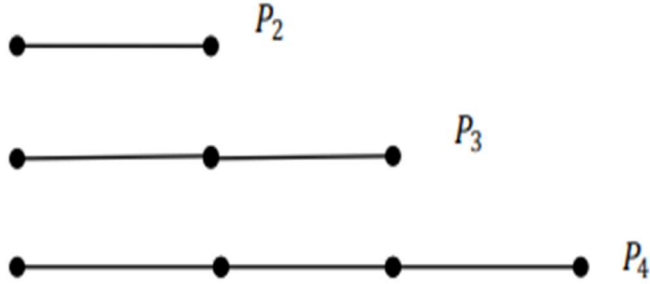
n noktalı bir G grafında bulunan tüm noktaların dereceleri sıfır ise bu grafa null grafi denir ve N_n gösterilir. (Şekil 2.3.)



Şekil 2.3. 1,2,4 ve 5 noktalı null graflar

Tanım 2.5.7. [6]

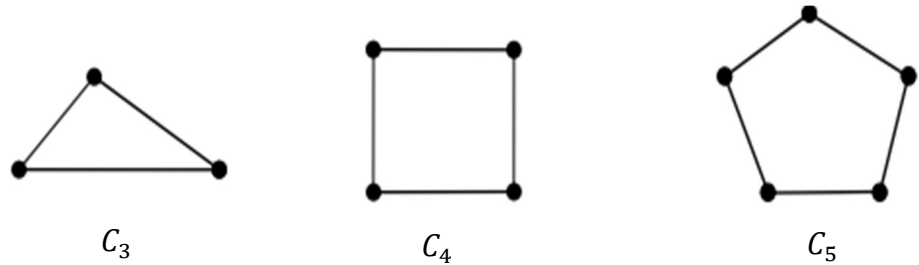
n noktalı bir G grafında uç noktalar dışındaki tüm noktaların dereceleri 2 ise bu grafa yol (path) graf denir ve P_n gösterilir. (Şekil 2.4.) Bu grafların kenar sayısı ise $(n - 1)$ dir.



Şekil 2.4. 2,3, ve 4 noktalı yol graflar

Tanım 2.5.8. [6]

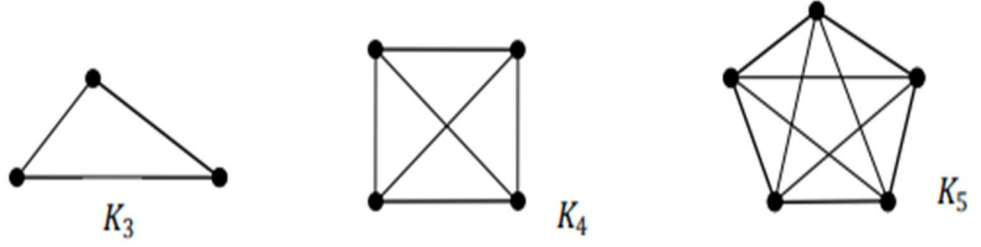
n noktalı bağlantılı ve basit bir G grafında tüm noktaların dereceleri 2 ise bu grafa döngü (cycle) graf denir ve C_n gösterilir. (Şekil 2.5.) Bu grafların kenar sayısı ise n dir.



Şekil 2.5. 3,4 ve 5 noktalı döngü graflar

Tanım 2.5.9. [6]

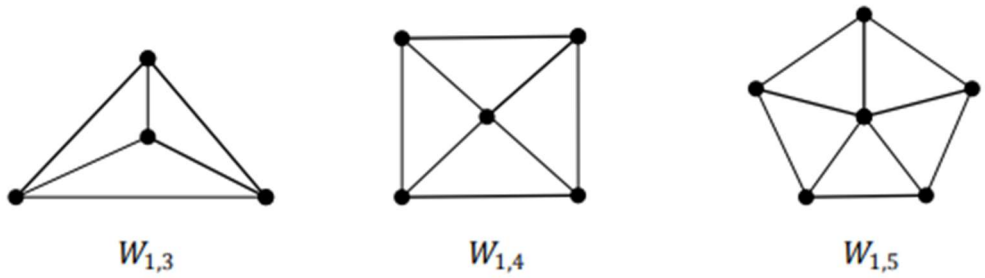
n noktalı bir G grafında herhangi bir nokta kendisi dışındaki diğer tüm noktalara yalnızca bir kenar ile komşu ise bu grafa tam (complete) graf denir ve K_n gösterilir. (Şekil 2.6.) Bu tür grafların kenar sayısı ise $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ şeklinde hesaplanır. Her bir noktanın derecesi ise $n - 1$ dir.



Şekil 2.6. 3,4 ve 5 noktalı tam graflar

Tanım 2.5.10. [6]

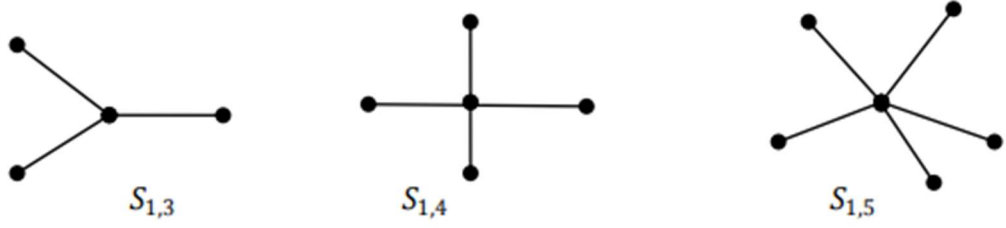
İzole bir noktanın, $n - 1$ noktalı bir döngü grafta bulunan her bir nokta ile komşulaştırılması ile oluşturulan grafa tekerlek (wheel) graf denir ve W_n ile gösterilir. (Şekil 2.7.) Bu grafların kenar sayısı ise $2n - 2$ şeklinde hesaplanır. Derece dizisi ise $n - 1, 3, 3, \dots, 3$ olur.



Şekil 2.7. 3,4 ve 5 noktalı tekerlek graflar

Tanım 2.5.11. [6]

n noktalı bir G grafında bir noktanın derecesi $(n - 1)$ diğer noktaların dereceleri 1 ise bu grafa yıldız (star) graf denir ve S_n gösterilir. (Şekil 2.8.) Bu grafların kenar sayısı ise $n - 1$ şeklinde bulunur. Derece dizisi ise $n - 1, 1, 1, \dots, 1$ olur.



Şekil 2.8. 4,5 ve 6 noktalı yıldız graflar

Tanım 2.5.12. [6]

Bir G grafinin noktalar kümesi A ve B gibi iki ayrık kümeye ayrılıyor ve A ve B kümelerine ait noktalar buldukları kümedeki her bir nokta ile herhangi bir komşuluk oluşturmuyorsa bu grafa iki parçalı graf denir. A kümesindeki her bir noktanın B kümesindeki her bir noktayla yalnızca bir kenar ile bağlanması durumunda ise bu grafa iki parçalı tam graf denir. A' ya ait noktaların sayısı m ve B' ye ait noktaların sayısı n ise; iki parçalı tam graf, $K_{m,n}$ ile gösterilir. (Şekil 2.9.)



Şekil 2.9. İki parçalı tam graf örneği

Tanım 2.5.13. [6]

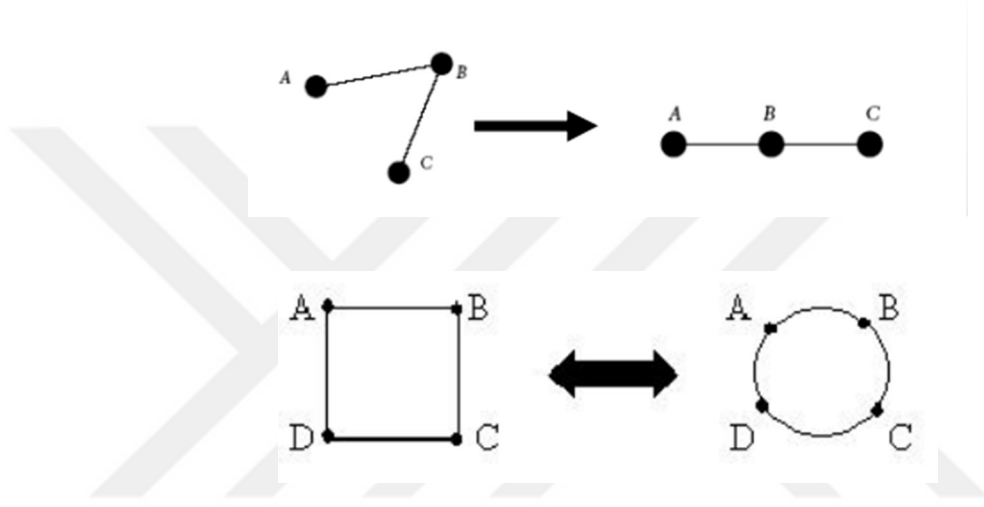
Döngü içermeyen bağlantılı graflara ağaç graf (tree) denir.



Şekil 2.10. 3,5 ve 8 noktalı ağaç graf örnekleri

Tanım 2.5.14. [6]

Kenarların yerleri değiştirilmeden birbirine dönüştürülebilen iki grafa izomorf graflar denir. Kenar ve noktalardan oluşan graflar, geometrik değil ilişki bilgileri içerirler. Kenarların boy ve şeklinin, doğrusal ya da eğrisel oluşunun ve noktaların konumunun bir önemi yoktur. Her bir hat iki düğüm arasındaki bir ilişkiyi simgelediğinden, önemli olan tek şey var olup olmadıklarıdır. (Şekil 2.11.)



Şekil 2.11. İzomorf graf örnekleri

Tanım 2.5.15. [5]

$G = (V, E)$, n noktalı bir graf olsun. $\forall i, j \in \mathbb{N}$ için

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad v_i \text{ ile } v_j \text{ komşu ise} \\ 0 & , \quad v_i \text{ ile } v_j \text{ komşu değil ise} \end{cases}$$

olacak şekilde $A = [a_{ij}]$ biçiminde tanımlanan $n \times n$ tipindeki matrise G grafına ait komşuluk matrisi denir.

Tanım 2.5.16. [5]

$M(G)$ ya da kısaca M_G , G grafına ait bir komşuluk matrisi ve I_n birim matris olmak üzere $\det(xI - M_G)$ polinomuna G nin M_G karakteristik polinomu denir ve $\wp(M_G)(x)$ ile gösterilir. Bu polinomun köklerinden yani M_G matrisinin öz değerlerinden oluşan küme

ise G nin M_G spektrumu denir ve $spec(M_G)$ ile gösterilir. Ya da matrisin adına göre komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu denir.

Tanım 2.5.17. [5]

G grafının bir komşuluk matrisi M_G ve $\lambda \in spec(M_G)$ olsun. $(x - \lambda)^k \mid (\varphi(M_G)(x))$ olacak biçimdeki en büyük k pozitif tamsayısına λ özdeğerinin cebirsel katı denir.

Tanım 2.5.18. [6]

Bir G grafında $d_i, v_i \in V_G$ noktasının derecesi olmak üzere, G 'nin nokta derecelerinin derece matrisi,

$$D_G = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

şeklinde bir diyagonal matristir.

Tanım 2.5.19. [6]

Bir G grafının Laplasyan matrisi, L_G $n \times n$ tipinde simetrik bir matris olup,

$$L_G = \begin{cases} d_i & i = j \\ -1 & v_i \sim v_j \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Komşuluk ve derece matrisleri türünden ise,

$$L_G = D_G - M_G$$

şeklinde ifade edilir.

2.6. Balans Sayı Dizisi

İlk defa Behera ve Panda tarafından 1999 yılında Diophantine denklemleri çalışılırken bulunmuştur [7]. Ardışık sayıların toplamının iki türlü belirlenebileceği durumları ifade eden sayılara denir.

$n, r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r)$$

eşitliğinde iki taraftaki n doğal sayısına bağlı ardışık sayı toplamalarının dengelenmesiyle oluşan denklemde n doğal sayısına balans sayısı ve buna karşılık gelen r doğal sayısına da balanslayan (dengeleyici, balancer) denir [7].

Örnek:

$n, r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8$$

$$1 + 2 + \dots + 33 + 34 = 36 + 37 + \dots + 48 + 49$$

$n = 6$ balans sayısına karşılık gelen balanslayan $r = 2$ dir.

$n = 35$ balans sayısına karşılık gelen balanslayan $r = 14$ dür.

Daha farklı biçimde ifade edecek olursak,

$n \in \mathbb{Z}^+$, $B_1 = 1$ ve $B_2 = 6$ olmak üzere,

$$B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2}$$

denklemden elde edilen balans sayılarının oluşturduğu seriye balans sayı dizisi denir. İlk 21 balans sayısı aşağıdaki gibidir.

1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214, 46611179, 271669860, 1583407981, 9228778026, 53789260175, 313506783024, 1827251437969, 10650001844790, 62072759630771, 361786555939836, 2108646576008245, ...

Balans sayı dizisinde herhangi bir balans sayısının kendinden önceki balans sayısına oranı yaklaşık olarak 5,82842712... sayısına eşittir [7].

Balans sayı dizisinin bazı temel özellikleri şunlardır [8-12].

i. $k = 1, 2, \dots, m - 2$ olmak üzere

$$B_{2n} = 2B_n\sqrt{8B_n^2 + 1}$$

ii. $k = 1, 2, \dots, m - 2$ olmak üzere

$$B_m = B_{k+1}B_{m-k} - B_kB_{m-k-1}$$

iii. $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$B_{2^i} \equiv 3 \cdot 2^i \pmod{2^{i+2}}$$

iv. $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$B_{m-n} = B_mB_{n+1} - B_nB_{m+1}$$

Tanım 2.6.1. [13]

Binom katsayıları dikkate alınarak balans-binomial sayıları için, $1 \leq k \leq n$ olmak üzere,

$$\binom{n}{k}_B = \frac{B_n B_{n-1} \cdots B_{n-k+1}}{B_1 B_2 \cdots B_k} = B_{[n,k]}$$

Burada $k = 0$ için

$$B_{[n,0]} = \binom{n}{0}_B = 1 \text{ ve } n < k \text{ için } B_{[n,k]} = \binom{n}{k}_B = 0 \text{ şeklinde verilmiştir.}$$

Bu tanımdan yola çıkılarak

$$\binom{m}{k}_B = B_{k+1} \binom{m-1}{k}_B - B_{m-k-1} \binom{m-1}{k-1}_B$$

$$B_{[m,k]} = B_{k+1} B_{[m-1,k]} - B_{m-k-1} B_{[m-1,k-1]}$$

elde edilir.

Örnek:

$n = 5$ ve $k = 3$ için

$$B_{[n,k]} = \binom{n}{k}_B = \frac{B_n B_{n-1} \cdots B_{n-k+1}}{B_1 B_2 \cdots B_k}$$

$$B_{[5,3]} = \binom{5}{3}_B = \frac{B_5 B_4 B_3}{B_1 B_2 B_3}$$

$$B_1 = 1, B_2 = 6, B_3 = 35, B_4 = 204, B_5 = 1189$$

$$B_{[5,3]} = \binom{5}{3}_B = \frac{B_5 B_4 B_3}{B_1 B_2 B_3} = \frac{1189 \cdot 204 \cdot 35}{1 \cdot 6 \cdot 35} = 40426$$

Örnek:

$n = 4$ ve $k = 2$ için

$$B_{[n,k]} = \binom{n}{k}_B = \frac{B_n B_{n-1} \cdots B_{n-k+1}}{B_1 B_2 \cdots B_k}$$

$$B_{[4,2]} = \binom{4}{2}_B = \frac{B_4 B_3}{B_1 B_2}$$

$$B_1 = 1, B_2 = 6, B_3 = 35, B_4 = 204$$

$$B_{[4,2]} = \binom{4}{2}_B = \frac{B_4 B_3}{B_1 B_2} = \frac{204 \cdot 35}{1 \cdot 6} = 1190$$

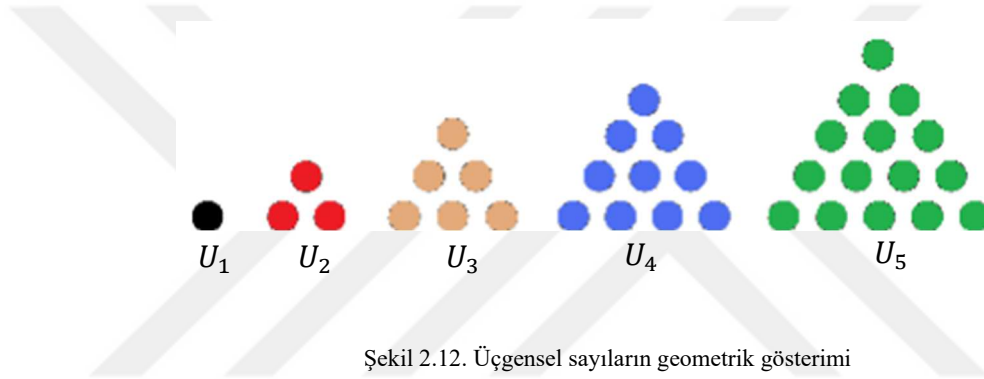
olarak hesaplanır.

2.7. Üçgensel Sayılar

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, 1'den n 'e kadar olan n tane doğal sayının toplamına n -nci üçgensel sayı denir ve aşağıdaki formül ile hesaplanır [14].

$$T_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Bu formülden de görüldüğü üzere, n 'nci üçgensel sayı aynı zamanda, $n + 1$ elemanlı bir kümeden seçilebilecek birbirinden farklı tüm eleman çiftlerinin de sayısını verir.



Şekil 2.12. Üçgensel sayıların geometrik gösterimi

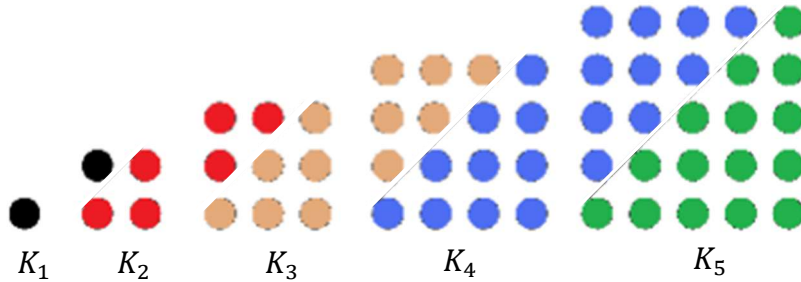
2.8. Karesel Sayı Dizisi

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, genel terimi;

$$(a_n) = n^2$$

olan diziyeye karesel sayı dizisi denir [14].

İlk n tane karesel sayının toplamı, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ formülü ile hesaplanır.



Şekil 2.13. Karesel sayıların geometrik gösterimi

Ardışık iki üçgensel sayının toplamı karesel bir sayıya eşittir. K_n , n -nci karesel sayı ve U_n , n -nci üçgensel sayı olsun. Şekil 2.13. de farklı renklerle belirtilen noktalara bakarak,

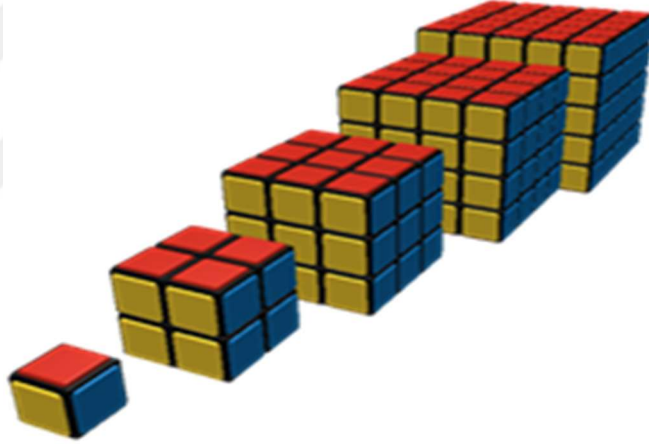
$$K_1 = U_1, K_2 = U_1 + U_2, K_3 = U_2 + U_3, \dots, K_n = U_{n-1} + U_n \text{ olduğu görülür.}$$

2.9. Küpsel Sayı Dizisi

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, genel terimi;

$$(a_n) = n^3$$

olan diziye küpsel sayı dizisi denir. İlk n tane küpsel sayının toplamı, $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ formülü ile hesaplanır. (Şekil 2.14.)



Şekil 2.14. Küpsel sayı dizisinin geometrik gösterimi

2.10. Dörtüsel Sayı Dizisi

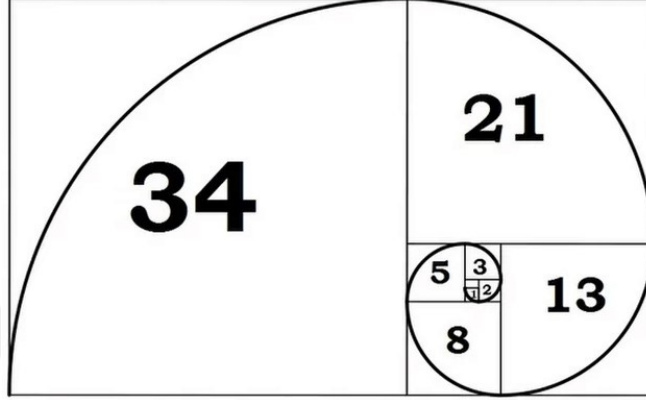
$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, genel terimi;

$$(a_n) = n^4$$

olan diziye dörtüsel sayı dizisi denir.

2.11. Fibonacci Sayı Dizisi

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bir fonksiyon olsun. Başlangıç koşulları $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ olmak üzere, $f(n) = f(n-1) + f(n-2) \mid n \in \{2,3,4, \dots\}$ fonksiyonunun görüntü kümesinde bulunan elemanlara fibonacci sayıları denir.



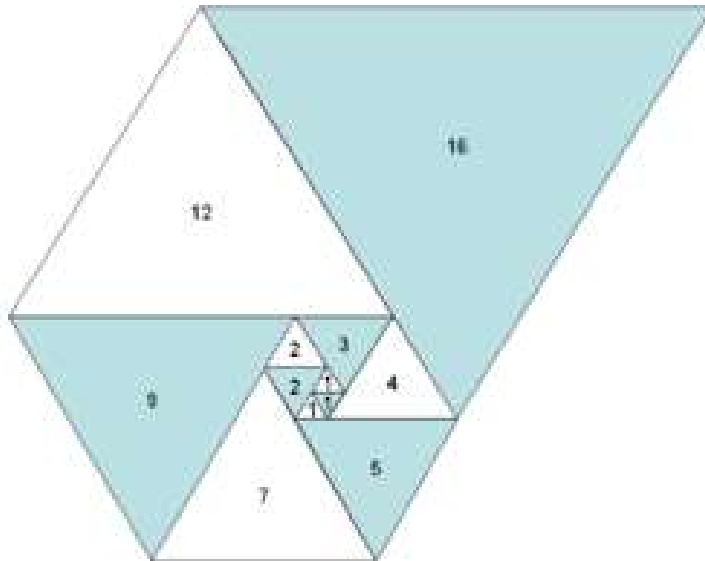
Şekil 2.15. Fibonacci sayı dizisinin geometrik gösterimi

2.12. Tribonacci Sayıları

$t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bir fonksiyon olsun. Başlangıç koşulları $t(0) = 0$, $t(1) = 1$ ve $t(2) = 1$ olmak üzere,

$$t(n) = t(n-1) + t(n-2) + t(n-3); n = \{3,4,5, \dots\}$$

fonksiyonunun görüntü kümesinde bulunan elemanlara tribonacci sayıları denir.



Şekil 2.16. Tribonacci sayı dizisinin geometrik gösterimi (beyaz üçgenler)

2.13. Mersenne Sayıları

Mersenne sayıları, matematikte ikinin kuvvetlerinin bir eksiği şeklinde olan sayılardır. $n \in \mathbb{N}$ için, $M_n = 2^n - 1$ şeklinde hesaplanır.

Adını Fransız matematikçi, filozof, keşiş ve müzik teorisyeni olan ve “akustiğin babası” olarak bilinen Marin Mersenne’den almıştır.

2.14. Palindromik Sayılar

Palindromik sayı, iki taraftan okunduğu zaman okunuş yönüyle aynı olan sayılardır.

Örnek:

Asal palindromik sayılar: {2,3,5,7,11,101,131,151,181,191, ... }

Karesel palindromik sayılar: {0,1,4,9,121,484,676,10201,12321,14641, ... }

Küpsel palindromik sayılar: {0,1,8,343,1331,1030301,1367631,1003003001, ... }

1 basamaklı palindromik sayılar: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

2 basamaklı palindromik sayılar: {11,22,33,44,55,66,77,88,99}

3 basamaklı palindromik sayılar: {101,111,121,131, ...,747,757, ...,989,999}

4 basamaklı palindromik sayılar: {1001,1111,1221, ...,4774,4884, ...,9889,9999}

5 basamaklı palindromik sayılar: {10001,10101,10201, ...,39593, ...,99899,99999}

BÖLÜM 3

GRAFLAR

3.1. Binomial Graflar

1997’de Peter Christopher ve John W. Kennedy tarafından yapılan çalışmada [1], doğal sayıların binom katsayıları ile ilişkilendirmesi sonucu oluşan binomial graflar incelenmiş ve bu grafların Kronecker çarpım yardımıyla üretilebileceği görülmüştür. Binomial grafların, komşuluk matrislerinin karakteristik polinomları ve bu polinomların palindromik olup olmadığı incelenmiştir. Bu polinomlara ait özdeğerler ve cebirsel katları elde edilmiştir. Son olarak bu graflarda bulunan kapalı yürüyüşlerin sayısı araştırılmıştır.

Tanım 3.1.1. [1]

n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere, nokta kümesi ve kenar kümesi, sırasıyla,

$$V_n = \{v_j : j = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\} \text{ ve } E_n = \{(v_i, v_j) : \binom{i+j}{j} \equiv 1 \pmod{2}\}$$

olan grafa B_n binomial grafi denir. Burada $s(V_n) = 2^n$ ve $s(E_n) = \frac{1}{2}(3^n + 1)$ olur.

Teorem 3.1.2. [1]

$\varphi = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ olsun. Her $n \geq 0$ için B_n binomial grafi, birbirinden farklı $(n + 1)$ tane öz değere sahiptir. Bu özdeğerler özel olarak $j = 1, 2, \dots, n$ için $(-1)^j \varphi^{n-2j}$ biçimindedir. Cebirsel katları ise $\binom{n}{j}$ ’ye eşit olur.

B_n grafinin spektrumu,

$$\text{spec}(B_n) = \left\{ ((-1)^j \varphi^{n-2j}) \binom{n}{j} : j = 0, 1, \dots, n \right\}$$

olur. Öyle ki burada $\lambda^{(m)}$, λ özdeğerinin cebirsel katının m olduğu anlamına gelir.

Ayrıca $n \geq 1$ için B_n in doğrusal olarak bağımsız 2^n adet özvektörü,

$$X(B_n) = X(B_1) \otimes X(B_{n-1})$$

Kronecker çarpımındaki sütunların skaler katlarıdır.

Burada $X(B_n) = [x_1, x_2, \dots, x_{2^n}]$, B_n in özvektörler matrisidir ve

$$X(B_0) = [1], X(B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/\varphi & -\varphi \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

B_n in karakteristik polinomu ise

$$\wp(B_n)(x) = \prod_{j=0}^{n-1} \{x - (-1)^j \varphi^{n-2j}\}^{\binom{n}{j}}$$

biçiminde olur.

İspat:

$A(B_0) = [1]$ olduğundan, açıkça görülebileceği gibi $\text{spec}(B_0) = \{1\}$, $\wp(B_0; x) = x - 1$ olur.

$A(B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan,

$$\wp(B_1; x) = \det \begin{bmatrix} x - 1 & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 - x - 1$$

ve

$$\text{spec}(B_1) = \left\{ \varphi, -\frac{1}{\varphi} \right\}$$

elde edilir. B_1 'in iki özvektörü $x_1^T = [1, \varphi^{-1}]$ ve $x_2^T = [1, -\varphi]$ olur.

Böylece

$$X(B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/\varphi & -\varphi \end{bmatrix}$$

yazılır.

Her $n > 1$ için

$$A(B_n) = A(B_1) \otimes A(B_{n-1}) = \underbrace{A(B_1) \otimes A(B_1) \otimes \dots \otimes A(B_1)}_{n \text{ tane}}$$

olduğundan, B_n 'in spektrumu, B_1 'in spektrumu kullanılarak bulunur.

Yani B_n in j -nci özdeğeri aşağıdaki eşitliğin $\binom{n}{j} t^j$ katsayısıdır.

$$\left(\varphi - \frac{t}{\varphi}\right)^n = \sum (-1)^j \binom{n}{j} \varphi^{n-2j} t^j$$

λ_i 'nin cebirsel katı $\binom{n}{j}$ olur.

Bu durumda $X(B_n) = X(B_1) \otimes X(B_{n-1})$ yazılır.

3.1.1. Binomial Graflar için Karakteristik Polinomlar

Derecesi n olan $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$, $c_0 \neq 0$ polinomunda her $k = 0, 1, \dots, n$ için $|c_k| = |c_{n-k}|$ oluyorsa bu polinoma *palindromik* denir. Karakteristik polinomu palindromik olan graflarla ilgili literatürde çeşitli çalışmalar mevcuttur. [15,16]

Palindromik bir polinomda her k için $c_k = c_{n-k}$ oluyorsa bu polinoma özel olarak *kesin palindromik*; $c_k = -c_{n-k}$ oluyorsa bu polinoma *skew-palindromik* denir.

Ayrıca, çift dereceye sahip palindromik bir polinomda her k için $c_k = (-1)c_{n-k}$ oluyorsa *çift pseudo palindromik*; $c_k = -(-1)^k c_{n-k}$ oluyorsa *tek pseudo palindromik* denir.

Binomial grafların karakteristik polinomlarının Lucas sayılarını da içeren kuadratik çarpanların çarpımı biçiminde ifade edilmesi yoluyla, bu grafların palindromik oldukları gösterilmiştir [1].

$n > 0$ olsun. Teorem 3.1.2.'den $\wp(B_n; x) = x - 1$ polinomunun skew palindromik bir polinom olduğu açıktır.

n çift olmak üzere incelenirse;

$$\begin{aligned}\wp(B_n; x) &= \prod_{j=0}^n [x - (-1)^j \varphi^{n-2j}]^{\binom{n}{j}} \\ &= \left(x - (-1)^{\frac{n}{2}}\right)^{\binom{n}{n/2}} \prod_{j=0}^{\frac{(n-2)}{2}} [x^2 - (-1)^j (\varphi^{n-2j} + \hat{\varphi}^{n-2j})x + (-1)^n]^{\binom{n}{j}}\end{aligned}$$

öyle ki $\hat{\varphi} = -\frac{1}{\varphi} \left(= \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ olur. n çift sayı olduğundan ortadaki binom katsayısı $\binom{n}{n/2}$ de çift olacaktır. Böylece

$$\wp(B_n; x) = \left(x^2 - (-1)^{\frac{n}{2}} L_0 x + 1\right)^{\frac{1}{2} \binom{n}{n/2}} \prod_{j=0}^{(n-2)/2} [x^2 - (-1)^j L_{n-2j} x + 1]^{\binom{n}{j}}$$

elde edilir.

Burada $L_0 = 2, L_1 = 1$ için her $k \geq 1$ için $L_k, k - ncı$ Lucas sayısıdır.

Sonuç olarak, n çift iken $\wp(B_n; x)$ polinomu kesin palindromik (kuadratik) polinomların çarpımı şeklindedir. Böylece $\wp(B_n; x)$ polinomu da kesin palindromik polinom olur.

n tek olmak üzere incelenirse;

$$\wp(B_n; x) = \prod_{j=0}^{(n-1)/2} [x^2 - (-1)^j L_{n-2j} x - 1]^{\binom{n}{j}}$$

olur.

Yani $\wp(B_n; x)$ polinomu 2^{n-1} adet tek pseudo palindromik polinomun çarpımı biçimindedir. Böylece $\wp(B_n; x)$ polinomu da tek pseudo palindromik polinom olur.

3.1.2. Binomial Graflarda Kapalı Yürüyüşler

P. W. Kasteleyn [17] tarafından gözlemlendiği gibi, bir G grafinin karakteristik polinomu olan $\wp(G; x)$ polinomu, G grafindaki sabit uzunluktaki kapalı yürüyüşlerin sayısının bulunması için kullanılabilir.

Lemma 3.1.3. [1]

Bir G grafindaki k uzunluğundaki toplam kapalı yürüyüş sayısı, aşağıda verilen üreteç fonksiyonundaki t^k 'nin katsayısıdır.

$$W(G; t) = \frac{\wp'(G; \frac{1}{t})}{t\wp(G; \frac{1}{t})} \text{ öyle ki } \wp'(G; x) = \frac{d}{dx} \wp(G; x) \text{ olur.}$$

Bu Lemmanın B_n graflarına uygulanmasıyla, binomial graflar ve Lucas sayıları arasında bir ilişki elde edilir.

Teorem 3.1.4. [1]

B_n binomial grafinda bulunan k uzunluğundaki kapalı yürüyüşlerin toplam sayısı $W(B_n; t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k^n t^k$ olur.

İspat:

Lemma 3.1.3'e göre

$$W(B_n; t) = \frac{\wp'(B_n; \frac{1}{t})}{t\wp(B_n; \frac{1}{t})}$$

dir.

Burada Teorem 1'den

$$\wp(B_n; x) = \prod_{j=0}^n [x - (-1)^j \hat{\varphi}^j \varphi^{n-j}] \binom{n}{j}$$

polinomunda $\hat{\varphi} = -\frac{1}{\varphi} \left(= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$ yazıp, her iki tarafın aynı anda logaritması ve x 'e göre türevi alınarak,

$$\frac{\wp'(B_n; x)}{\wp(B_n; x)} = \sum_{j=0}^n \frac{\binom{n}{j}}{x - \hat{\varphi}^j \varphi^{n-j}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} W(B_n; t) &= \sum_{j=0}^n \frac{\binom{n}{j}}{1 - \hat{\varphi}^j \varphi^{n-j} t} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}^{jk} \varphi^{(n-j)k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{\varphi}^{jk} \varphi^{(n-j)k} \right) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi^k \hat{\varphi}^k)^n t^k = L_k^n t^k \end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Şimdi de B_n 'de bulunan, başlangıç ve bitim noktası v_0 olan k uzunluğundaki kapalı yürüyüşlerin sayısının bulunması için yapılan [1]'deki incelemeye bakalım. Bunun için üreteç fonksiyonu $W_0(B_n; t)$ olsun. Bu üreteç fonksiyonun katsayılarını belirlemek için aşağıdaki Lemma gereklidir.

Lemma 3.1.5. [1]

$j \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1}\}$ olmak üzere, $v_j \in V(B_n)$ olsun. j 'nin n uzunluklu ikilik tabandaki gösterimi (binary word) ise $w_n(j)$ olsun. O zaman $\{v_i, v_j\} \in E(B_n)$ olması için gerek ve yeter koşul $w_n(i)$ ve $w_n(j)$ kelimelerinin ortak bir bileşeninde 1 bulunmamasıdır.

Teorem 3.1.6. [1]

B_n 'de bulunan, başlangıç noktası v_0 olan k uzunluğundaki kapalı yürüyüşlerin sayısı, aşağıda verilen üreteç fonksiyonundaki t^k 'nin katsayısıdır.

$$w_0(B_n; t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k+1}^n t^k$$

Burada F_k , k -ncı Fibonacci sayısıdır.

İspat:

$k = 0$ veya 1 için teoremden verilen ifade kolayca ispatlanabilir. B_n 'de bulunan, başlangıç ve bitiş noktası v_0 olan k uzunluğundaki kapalı yürüyüşlerin sayısı, bu iki durumda da 1 'e eşittir.

$k \geq 2$ için; B_n 'de bulunan, k uzunluğundaki bir yürüyüş, $k + 1$ adet ikilik kelimenin sıralı bir listesi olur. $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ olmak üzere; her v_j noktası, j 'ye karşılık gelen n uzunluğundaki ikilik kelime $w_n(j)$ ile etiketlenir. O zaman B_n 'de bulunan, k uzunluğundaki bir yürüyüşte yani $k + 1$ adet ikilik kelimenin sıralı bir listesinde peşpeşe gelen iki adet kelimenin ortak bir pozisyonunda 1 bulundurmadığı görülür.

Açıkça, v_0 noktasında başlayan ve biten bir kapalı yürüyüş için, ilk ve son ikilik kelime $w_n(0)$ olur.

$(k - 1) \times n$ tipinde bir M matrisinin satırları, B_n 'de bulunan, başlangıç ve bitiş noktası v_0 olan k uzunluğundaki kapalı yürüyüşün ikilik kelimelerinden oluşuyor olsun öyle ki ilk ve son temsil olan $w_n(0)$ silinsin. Burada M matrisinin sütunları, n adet $k - 1$ uzunluklu $\{0, 1\}$ 'lerden oluşan sıralı bağımsız vektörler biçiminde olur. Öyle ki burada 1 içeren komşu pozisyonlar bulunmamaktadır. F_k k -ncı Fibonacci sayısını göstermek üzere Burada kesin olarak F_{k+1} tane bu biçimde vektör bulunduğundan peşpeşe gelen iki kelimenin ortak bir pozisyonda 1 bulundurmadığı n uzunluklu F_{k+1} , n adet ikilik kelime elde edilir. Bu da v_0 da başlayıp biten k uzunluklu kapalı yürüyüş sayısının F_{k+1} n e eşit olduğu anlamına gelir.

3.2. Balans-Binomial Graflar

2018'de Kar ve Yılmaz tarafından yapılan bir çalışmada [2], balans sayı dizisi kullanılarak tanımlanan balans-binomial katsayıları ele alınarak oluşturulan graflar incelenmiştir. Elde edilen graflar, [1] de verilen binomial graflar ile birebir aynıdır. Her ne kadar [2] de bu durum belirtilmemiş olsa da, aynı grafların özdeğerleri farklı biçimlerde her iki çalışmada da elde edilmiştir. [1]'de elde edilen bulgularda olduğu gibi balans-binomial grafların komşuluk matrislerinin, Kronecker çarpımının bir sonucu olarak

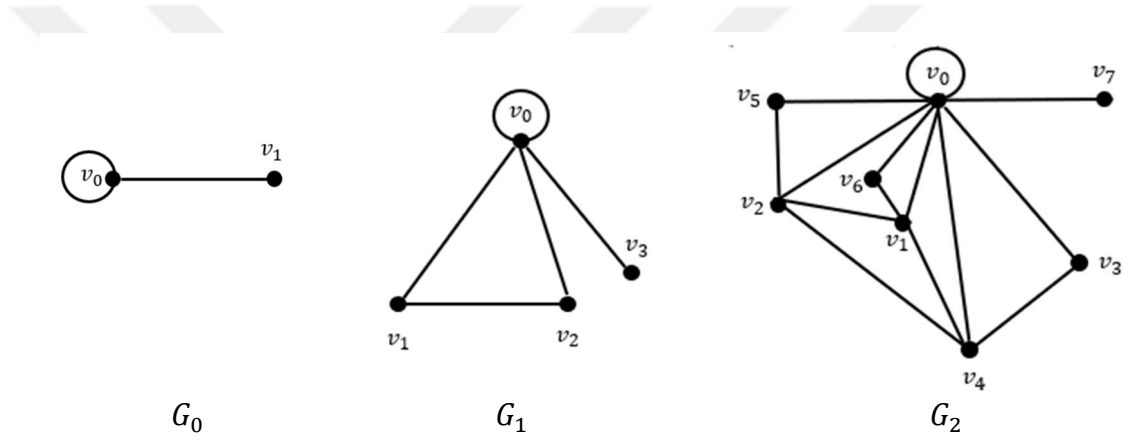
üretilebildiği [2] de de görülmüştür. [1]'den farklı olarak [2] de oluşan grafların nokta kenar ilişkilerini inceleyen bazı farklı özellikleri incelenmiş ve çalışmanın sonunda balans-binomial grafların enerji hesabı yapılarak Laplasyan matrisleri verilmiştir.

Tanım 3.2.1. [13]

Nokta kümesi ve kenar kümesi sırası ile,

$$E_n = \{(v_i, v_j) : B_{[i+j,j]} \equiv 1(mod 2)\} \text{ ve } V_n = \{v_t : t = 0,1,2, \dots, 2^{n+1} - 1\}$$

olan $G_n = (V_n, E_n)$ grafına balans-binomial graf denir. İlk üç balans-binomial graf aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3.1. İlk üç Balans-Binomial Graf

3.2.1. Balans-Binomial Graflarda Komşuluk Matrisi

A_n , 2^{n+1} mertebeli kare matris olmak üzere;

$$A_n = [a_{ij}]_{i,j=0}^{2^{n+1}-1} \text{ öyle ki } a_{ij} \equiv B_{[i+j,j]}(mod 2)$$

olacak şekilde A_n matrisi G_n balans-binomial grafı için komşuluk matrisidir.

İlk üç balans-binomial grafı inceleyelim;

$n = 0$ için, $V_0 = \{v_0, v_1\}$ olur. Buna göre

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

matrisi, G_0 balans-binomial grafi için komşuluk matrisidir. $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$ elemanları hesaplanmaya çalışılırsa,

$$a_{ij} \equiv B_{[i+j,j]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[n,k]} = \binom{n}{k}_B = \frac{B_n B_{n-1} \cdots B_{n-k+1}}{B_1 B_2 \cdots B_k}, k = 0 \text{ için } B_{[n,0]} = 1$$

$$a_{00} \equiv B_{[0,0]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[0,0]} = \binom{0}{0}_B = 1 \quad , \quad a_{00} = 1$$

$$a_{01} \equiv B_{[1,1]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[1,1]} = \binom{1}{1}_B = \frac{B_1}{B_1} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad a_{01} = 1$$

$$a_{10} \equiv B_{[1,0]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[1,0]} = \binom{1}{0}_B = 1 \quad , \quad a_{10} = 1$$

$$a_{11} \equiv B_{[2,1]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[2,1]} = \binom{2}{1}_B = \frac{B_2}{B_1} = \frac{6}{1} = 6 \quad , \quad a_{11} = 0$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur ve kenar kümesi, $E_0 = \{(v_0, v_0), (v_0, v_1)\}$ dir.

$n = 1$ için, $V_1 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ olur. Buna göre

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matrisi, G_1 balans-binomial grafinın komşuluk matrisidir. $a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ elemanları hesaplandığında,

$$a_{ij} \equiv B_{[i+j,j]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[n,k]} = \binom{n}{k}_B = \frac{B_n B_{n-1} \cdots B_{n-k+1}}{B_1 B_2 \cdots B_k}, k = 0 \text{ için } B_{[n,0]} = 1$$

$$a_{00} \equiv B_{[0,0]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[0,0]} = \binom{0}{0}_B = 1 \quad , \quad a_{00} = 1$$

$$a_{01} \equiv B_{[1,1]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[1,1]} = \binom{1}{1}_B = \frac{B_1}{B_1} = 1 \quad , \quad a_{01} = 1$$

$$a_{02} \equiv B_{[2,2]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[2,2]} = \binom{2}{2}_B = \frac{B_2 B_1}{B_1 B_2} = 1 \quad , \quad a_{02} = 1$$

$$a_{03} \equiv B_{[3,3]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[3,3]} = \binom{3}{3}_B = \frac{B_3 B_2 B_1}{B_1 B_2 B_3} = 1 \quad , \quad a_{03} = 1$$

$$a_{10} \equiv B_{[1,0]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[1,0]} = \binom{1}{0}_B = 1 \quad , \quad a_{10} = 1$$

$$a_{11} \equiv B_{[2,1]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[2,1]} = \binom{2}{1}_B = \frac{B_2}{B_1} = \frac{6}{1} = 6 \quad , \quad a_{11} = 0$$

$$a_{12} \equiv B_{[3,2]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[3,2]} = \binom{3}{2}_B = \frac{B_3 B_2}{B_1 B_2} = \frac{35}{1} = 35 \quad , \quad a_{12} = 1$$

$$a_{13} \equiv B_{[4,3]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[4,3]} = \binom{4}{3}_B = \frac{B_4 B_3 B_2}{B_1 B_2 B_3} = \frac{204}{1} = 204 \quad , \quad a_{13} = 0$$

$$a_{20} \equiv B_{[2,0]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[2,0]} = \binom{2}{0}_B = 1 \quad , \quad a_{20} = 1$$

$$a_{21} \equiv B_{[3,1]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[3,1]} = \binom{3}{1}_B = \frac{B_3}{B_1} = \frac{35}{1} = 35 \quad , \quad a_{21} = 1$$

$$a_{22} \equiv B_{[4,2]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[4,2]} = \binom{4}{2}_B = \frac{B_4 B_3}{B_1 B_2} = \frac{204 \cdot 35}{1 \cdot 6} = 1190 \quad , \quad a_{22} = 0$$

$$a_{23} \equiv B_{[5,3]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[5,3]} = \binom{5}{3}_B = \frac{B_5 B_4 B_3}{B_1 B_2 B_3} = \frac{1198 \cdot 204}{1 \cdot 6} = 6 \quad , \quad a_{23} = 0$$

$$a_{30} \equiv B_{[3,0]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[3,0]} = \binom{3}{0}_B = 1 \quad , \quad a_{30} = 1$$

$$a_{31} \equiv B_{[4,1]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[4,1]} = \binom{4}{1}_B = \frac{B_4}{B_1} = \frac{204}{1} = 204 \quad , \quad a_{31} = 0$$

$$a_{32} \equiv B_{[5,2]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[5,2]} = \binom{5}{2}_B = \frac{B_5 B_4}{B_1 B_2} = \frac{1198 \cdot 204}{1 \cdot 6} = 40732 \quad , \quad a_{32} = 0$$

$$a_{33} \equiv B_{[6,3]}(\text{mod } 2) \quad , \quad B_{[6,3]} = \binom{6}{3}_B = \frac{B_6 B_5 B_4}{B_1 B_2 B_3} = 8064936 \quad , \quad a_{33} = 0$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur ve kenar kümesi, $E_1 = \{(v_0, v_0), (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_1, v_2)\}$ dir.

$n = 2$ için, $V_2 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ olur. Benzer şekilde hesaplamalar yapılırsa,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur ve kenar kümesi,

$$E_2 = \{(v_0, v_0), (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_0, v_5), (v_0, v_6), (v_0, v_7), (v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_6), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4)\}$$

olarak elde edilir.

İlk üç balans-binomial grafi için komşuluk matrislerini göz önüne alınarak bu matrisler bölümlenmiş matris olarak belirtilirse,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

buradan A_1 matrisinin A_0 matrisinden ve A_2 matrisinin A_1 matrisinden oluştuğu açıktır.

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_0 & A_0 \\ A_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Başka bir şekilde ifade etmek için $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_0 & A_0 \\ A_0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{B} \otimes A_0$$

şeklinde ifade edilir. Aynı şekilde A_2 matrisi için

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{B} \otimes A_1$$

dir. A_1 matrisini kullanmadan, A_2 matrisi

$$A_2 = \mathfrak{B} \otimes [\mathfrak{B} \otimes A_0] = \left[\bigotimes_{i=0}^2 \mathfrak{B} \right] \otimes A_0$$

şeklinde gösterilmiştir. Bu yöntemin en genel hali ise $A_n = \mathfrak{B} \otimes A_{n-1}$ veya $A_n = [\bigotimes_{i=0}^n \mathfrak{B}] \otimes A_0$ şeklinde ifade edilmiştir [18].

3.2.2. Balans-Binomial Grafların Derece Dizisi

İlk sekiz balans-binomial grafta bulunun her bir noktanın derecesi ele alınıp, bu sayılar büyükten küçüğe sıralandığında oluşan derece dizisi,

$$G_0 : 2, 1$$

$$G_1 : 4, 2, 2, 1$$

$$G_2 : 8, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 1$$

$$G_3 : 16, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1$$

$$G_4 : 32, 16, 16, 16, 16, 16, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1$$

$$G_5 : 64, 32, 32, \dots, 32, 16, 16, \dots, 16, 8, 8, \dots, 8, 4, 4, \dots, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1$$

$$G_6 : 128, 64, 64, \dots, 64, 32, 32, \dots, 32, 16, 16, \dots, 16, 8, 8, \dots, 8, 4, 4, \dots, 4, 2, 2, \dots, 2, 1$$

$$G_7 : 256, 128, 128, \dots, 128, 64, 64, \dots, 64, 32, 32, \dots, 32, 16, 16, \dots, 16, 8, 8, \dots, 8, 4, 4, \dots, 4, 2, 2, \dots, 2, 1$$

şeklinde olur. Bu durumu binom katsayılarını kullanarak genellersek

$$G_n : 2^{n+1}, \underbrace{2^n, 2^n, \dots, 2^n}_{\binom{n+1}{1} \text{ tane}}, \underbrace{2^{n-1}, 2^{n-1}, \dots, 2^{n-1}}_{\binom{n+1}{2} \text{ tane}}, \dots, \dots, \underbrace{2^1, 2^1, \dots, 2^1}_{\binom{n+1}{n} \text{ tane}}, 2^0 \text{ elde edilir.}$$

3.2.3. Balans-Binomial Grafların Özellikleri

$r \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere $s < r \Rightarrow G_s \subseteq G_r$ dir.

Bu durum esasında Kronecker çarpımın bir sonucudur (Şekil 3.2-4.). Komşuluk matrislerinin Kronecker çarpım sonucu oluşmasından dolayı,

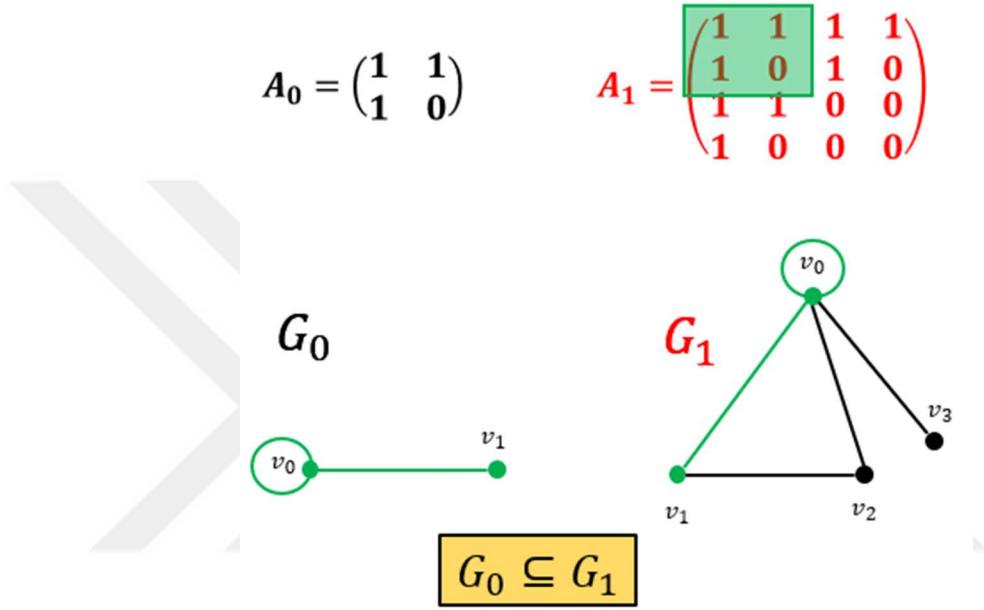
G_1 grafi G_0 grafini içerir,

G_2 grafi G_1 grafini ve aynı zamanda G_0 grafini içerir,

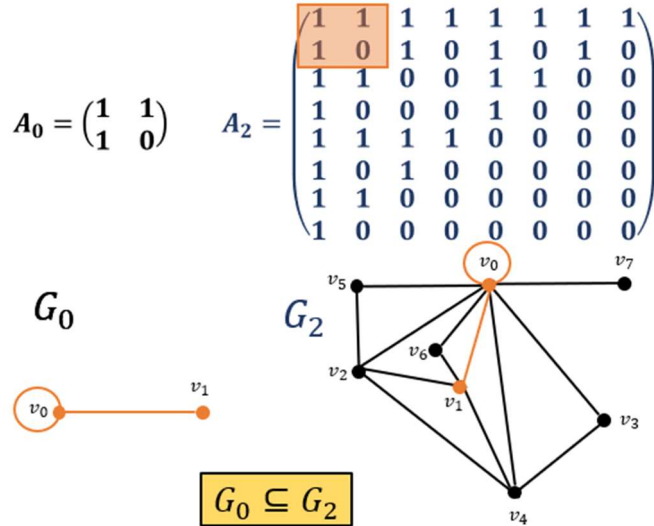
⋮

G_n grafi $G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_0$ graflarını içerir. Böylece aşağıdaki zincir oluşur.

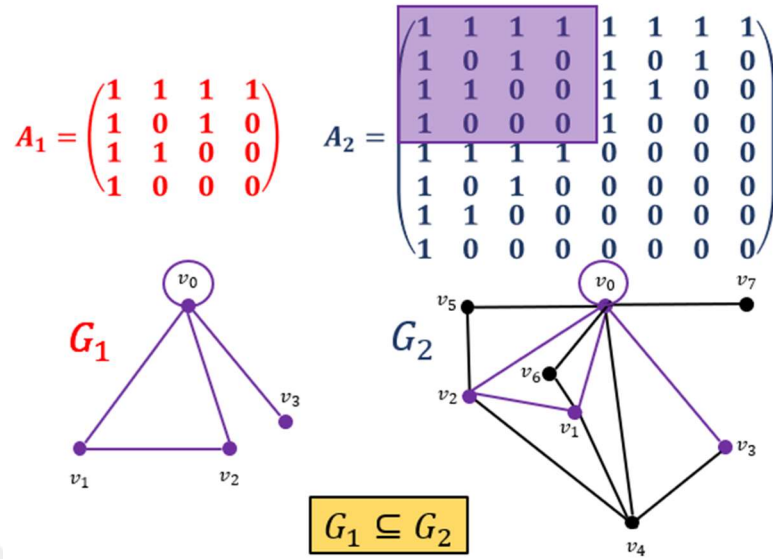
$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n$$



Şekil 3.2. İkinci balans-binomial grafin birinciye kapsaması



Şekil 3.3. Üçüncü balans-binomial grafin birinciye kapsaması



Şekil 3.4. Üçüncü balans-binomial grafın ikinciye kapsaması

Lemma 3.2.2. [2]

G_n Balans-binomial grafında v_0 noktası her nokta ile komşudur.

İspat:

$$A_n = [a_{ij}]_{i,j=0}^{2^{n+1}-1}$$

$$a_{ij} \equiv B_{[i+j,j]} \pmod{2}$$

$$E_n = \{(v_i, v_j) : B_{[i+j,j]} \equiv 1 \pmod{2}\}$$

olduğundan v_i noktası ile v_j noktalarının komşu olabilmeleri için gerek ve yeter şart $B_{[i+j,j]} \equiv 1 \pmod{2}$ olmasıdır.

$i = 0$ ve $\forall j \in \{0,1,2, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ olmak üzere,

$$a_{ij} \equiv B_{[i+j,j]} \pmod{2} \quad , \quad B_{[n,k]} = \binom{n}{k}_B = \frac{B_n B_{n-1} \cdots B_{n-k+1}}{B_1 B_2 \cdots B_k} \quad , \quad k = 0 \text{ için } B_{[n,0]} = 1$$

$$a_{0j} \equiv B_{[j,j]} \pmod{2} \quad , \quad B_{[j,j]} = \binom{j}{j}_B = \frac{B_j B_{j-1} \cdots B_{j-j+1}}{B_1 B_2 \cdots B_j} = 1 \quad , \quad a_{0j} = 1$$

$$a_{j0} \equiv B_{[j,0]} \pmod{2} \quad , \quad B_{[j,0]} = \binom{j}{0}_B = 1 \quad , \quad a_{j0} = 1$$

$a_{0j} = a_{j0} \equiv 1 \pmod{2}$ olduğundan v_0 noktası her nokta ile komşudur. ■

Lemma 3.2.3. [2]

2^n noktalı G_n balans-binomial graflarda $P = \{0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ olmak üzere, $\forall p \in P$ için $v_{2^{n-1}}$ ile v_p daima komşudur.

İspat:

G_n 'de $v_{2^{n-1}}$ ile v_p noktalarının daima komşu olduğunu söyleyebilmek için,

$$a_{2^{n-1}p} \equiv 1 \pmod{2} \text{ ve ya } B_{[2^{n-1}+p,p]} \equiv 1 \pmod{2}$$

olduğunu göstermek gerekir.

$p = 0$ için

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } B_{[n,0]} = 1 \text{ olduğundan}$$

$$B_{[2^{n-1},0]} \equiv 1 \pmod{2}$$

$p = 1$ için

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } B_{[2^{n-1}+1,1]} = B_{2^{n-1}+1} \text{ olduğundan } B_{[2^{n-1}+1,1]} \equiv 1 \pmod{2}$$

$p = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$ için tümevarım uygulandığında, $p - 1$ için doğru olduğu kabul edilirse,

$$B_{[2^{n-1}+p-1,p-1]} = \frac{B_{2^{n-1}+p-1} B_{2^{n-1}+p-2} \cdots B_{2^{n-1}+1}}{B_1 B_2 \cdots B_{p-1}} \equiv 1 \pmod{2}$$

eşitliği elde edilir.

p için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} B_{[2^{n-1}+p,p]} &= \frac{B_{2^{n-1}+p} B_{2^{n-1}+p-1} \cdots B_{2^{n-1}+1}}{B_1 B_2 \cdots B_{p-1} B_p} \\ &= \frac{B_{2^{n-1}+p}}{B_p} B_{[2^{n-1}+p-1,p-1]} \\ &= \frac{B_{p+1} B_{2^{n-1}} - B_p B_{2^{n-1}-1}}{B_p} B_{[2^{n-1}+p-1,p-1]} \end{aligned}$$

$$= \frac{B_{p+1}B_{2^{n-1}}}{B_p} B_{[2^{n-1}+p-1,p-1]} - B_{2^{n-1}-1} B_{[2^{n-1}+p-1,p-1]}$$

Burada $B_{[2^{n-1}+p,p]}$ ve $\frac{B_{p+1}B_{2^{n-1}}}{B_p} B_{[2^{n-1}+p-1,p-1]}$ birer tamsayıdır.

Eğer p çift değil ise B_p tek ve B_{p+1} çifttir. Bu durumda

$$\frac{B_{p+1}B_{2^{n-1}}}{B_p} B_{[2^{n-1}+p-1,p-1]} \equiv 0 \pmod{2} \text{ olur.}$$

Eğer p çift ise $1 \leq p \leq 2^{n-1} - 1$ olduğundan $n \geq 2$ dir. Bu durumda

$obeb(B_{2^{n-1}}, B_p) = B_{(2^{n-1}, p)} = B_{2^i}$, $1 \leq i \leq n - 1$ olur. Yani

$$B_{2^i} \equiv 3 \cdot 2^{n-1} \pmod{2^{n+1}}, \quad i \geq 1, n \geq 2 \text{ ve } B_{2^0} = B_1 = 1$$

bulunur. ■

Lemma 3.2.4. [2]

Balans-binomial graflarda $n \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde “ $\forall n \geq 0$ için $i + j = 2^n - 1 \Rightarrow v_i$ ile v_j komşudur.”

İspat:

v_i ile v_j noktalarının komşu olduğunu söylemek için, $B_{[2^{n-1}, j]} \equiv 1 \pmod{2}$ olduğunu göstermek gerekir.

$j = 0$ için $B_{[2^{n-1}, 0]} \equiv 1 \pmod{2}$ olur.

$j = 1$ için $B_{[2^{n-1}, 1]} = B_{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{2}$ olur.

Tümevarım uygulandığında, $j - 1$ için doğru olduğu kabul edilirse,

$$B_{[2^{n-1}, j-1]} = \frac{B_{2^{n-1}} B_{2^{n-2}} \cdots B_{2^{n-j+1}}}{B_1 B_2 \cdots B_{j-1}}$$

eşitliği elde edilir. j için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
B_{[2^{n-1},j]} &= \frac{B_{2^{n-1}}B_{2^{n-2}} \cdots B_{2^{n-j}}}{B_1B_2 \cdots B_{j-1}B_j} \\
&= B_{[2^{n-1},j-1]} \frac{B_{2^{n-j}}}{B_j} \\
&= B_{[2^{n-1},j-1]} \frac{B_{2^n}B_{j+1} - B_jB_{2^{n+1}}}{B_j} \\
&= B_{[2^{n-1},j-1]} \frac{B_{2^n}B_{j+1}}{B_j} - B_{[2^{n-1},j-1]}B_{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Eğer j çift değil ise B_j tek ve B_{j+1} çifttir. Bu durumda

$$B_{[2^{n-1},j-1]} \frac{B_{2^n}B_{j+1}}{B_j} \equiv 0 \pmod{2} \text{ olur.}$$

Eğer j çift ise $1 \leq j \leq 2^n - 1$ olduğundan $n \geq 1$ dir. Bu durumda

$$\text{obeb}(B_{2^n}, B_j) = B_{(2^n, j)} = B_{2^i}, \quad 1 \leq i \leq n \text{ elde edilir.}$$

$$\text{Yani } B_{2^i} \equiv 3 \cdot 2^i \pmod{2^{i+2}}, \quad i \geq 1, n \geq 1 \text{ ve } B_{2^0} = B_1 = 1$$

bulunur. ■

3.2.4. Balans-Binomial Graflar için Enerji

Tanım 3.2.5. [19]

A_n , m -kare matris ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ olmak üzere

$$\varepsilon(G_n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n |\lambda_i| & G_n \text{ basit graf} \\ \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{S}{m} \right| & G_n \text{ basit graf degil} \end{cases}$$

ifadesine G_n grafının enerjisi denir. Burada $S = tr(A_n) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ dir.

I_n , n -kare matris, $\phi = \wp(A_n)(x)$ ve $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$|\phi I_2 - \mathfrak{B}| = \phi^2 - \phi - 1 = \prod_{k=1}^2 \left\{ \phi - \left[1 + 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \right] \right\}$$

$$\phi_1 = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \phi_2 = 1 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

olarak bulunur. Tanım 3.2.5. ve Lemma 3.2.4. yardımıyla G_n grafının özdeğerleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

A_0 matrisinin özdeğeri olan $\lambda_{0,k}$ özdeğeri $k = 1,2$ için,

$$|\lambda_{0,k} - A_0| = \lambda_{0,k}^2 - \lambda_{0,k} - 1 = \prod_{k=1}^2 \left\{ \lambda_{0,k} - \left[1 + 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \right] \right\}$$

$1 \leq k \leq 2$ ve $\lambda_{0,k} = 1 + 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$ dir.

A_1 nin özdeğerleri

$$\lambda_{1,k} = \begin{cases} \binom{1}{r} \lambda_{0,1} \phi_1^{1-r} \phi_2^r \\ \binom{1}{r} \lambda_{0,2} \phi_1^{1-r} \phi_2^r \end{cases} \quad r = 0,1 \text{ için.}$$

A_2 nin özdeğerleri

$$\lambda_{2,k} = \begin{cases} \binom{2}{r} \lambda_{0,1} \phi_1^{2-r} \phi_2^r \\ \binom{2}{r} \lambda_{0,2} \phi_1^{2-r} \phi_2^r \end{cases} \quad r = 0,1,2 \text{ için.}$$

şeklindedir.

Sonuç olarak A_n in özdeğerleri

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{r} \lambda_{0,1} \phi_1^{n-r} \phi_2^r \\ \binom{n}{r} \lambda_{0,2} \phi_1^{n-r} \phi_2^r \end{cases} \quad r = 0,1 \text{ için.}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Teorem 3.2.6. [2]

G_n grafinın enerjisini $\varepsilon(G_n)$ ile ifade edersek,

$$\varepsilon(G_n) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left| \lambda_{0,k} \phi_1^{n-r} \phi_2^r - \frac{1}{2^n} \right|$$

İspat:

Her $n \geq 0$ tamsayısı için $S = \text{tr}(A_n) = 1$ olduğundan $\frac{S}{|V_n|} = \frac{1}{2^n}$ dir.

O zaman,

$$\varepsilon(G_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \left| \lambda_{n,k} - \frac{1}{2^n} \right|$$

olur.

$$\varepsilon(G_n) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left| \lambda_{0,k} \phi_1^{n-r} \phi_2^r - \frac{1}{2^n} \right|$$

denklemden yola çıkarak,

$$\begin{aligned} \varepsilon(G_n) &= \sum_{k=1}^2 \binom{n}{0} \left| \lambda_{0,k} \phi_1^n - \frac{1}{2^n} \right| + \sum_{k=1}^2 \binom{n}{1} \left| \lambda_{0,k} \phi_1^{n-1} \phi_2 - \frac{1}{2^n} \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \binom{n}{2} \left| \lambda_{0,k} \phi_1^{n-2} \phi_2^2 - \frac{1}{2^n} \right| + \dots \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \binom{n}{n-1} \left| \lambda_{0,k} \phi_1 \phi_2^{n-1} - \frac{1}{2^n} \right| + \sum_{k=1}^2 \binom{n}{n} \left| \lambda_{0,k} \phi_2^n - \frac{1}{2^n} \right| \\ &= \sum_{k=1}^2 \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left| \lambda_{0,k} \phi_1^{n-r} \phi_2^r - \frac{1}{2^n} \right| \text{ elde edilir. } \blacksquare \end{aligned}$$

Balans-binomial graflar için derece matrisi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$D_n = [\otimes_{k=1}^{n+1} M] + [\otimes_{k=1}^{n+1} N]$$

burada $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dir.

Balans-binomial grafların laplasyan matrisi şu şekilde verilebilir.

$$L_n = D_n - A_n$$

$$= [\otimes_{k=1}^{n+1} M] + [\otimes_{k=1}^{n+1} N] - [\otimes_{k=1}^{n+1} A_0]$$

Burada $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dir. ■

3.3. Karesel-Binomial Graflar

n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, binomial katsayılarını aşağıdaki küme (karesel sayılar) üzerine inşa ederek bir komşuluk matrisi oluşturalım.

$$X_n = n^2$$

$$a_{ij} \equiv X_{[i+j,j]}(\text{mod } 2) \quad , \quad X_{[n,k]} = \binom{n}{k}_X = \frac{X_n X_{n-1} \cdots X_{n-k+1}}{X_1 X_2 \cdots X_k}, k = 0 \text{ için } X_{[n,0]} = 1$$

olacak şekilde 32×32 tipinde bir komşuluk matrisini hesaplayıp, oluşan deseni daha net görmek adına elemanları renklendirirsek aşağıda verilen tablodaki matrisi elde ederiz.

$$a_{ij} \equiv Y_{[i+j,j]}(\text{mod } 2) \quad , \quad Y_{[n,k]} = \binom{n}{k}_Y = \frac{Y_n Y_{n-1} \cdots Y_{n-k+1}}{Y_1 Y_2 \cdots Y_k}, k = 0 \text{ için } Y_{[n,0]} = 1$$

olacak şekilde 32×32 tipinde bir komşuluk matrisini hesaplayıp, oluşan deseni daha net görmek adına elemanları renklendirirsek Tablo 3.1. de oluşturulmuş matrisi elde ederiz.

Karesel-binomial graflarda olduğu gibi $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olarak kabul edersek, A_1, A_2, \dots, A_n matrislerin, A_0 matrisinin $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile Kronecker çarpımı sonucunda elde edilebileceği görülür. Bu durumda oluşan komşuluk matrisleri [1] ve [2]'de elde edilen komşuluk matrisleri ile birebir aynıdır. Dolayısıyla küpsel sayılar için de çizilecek olan graflar Şekil 3.1. de verilen graflar ile eş graflar olacaktır.

3.5. Dörtsele-Binomial Graflar

n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, binomial katsayılarını aşağıdaki küme (dörtsele sayılar) üzerine inşa ederek bir komşuluk matrisi oluşturalım.

$$Z_n = n^4$$

$$a_{ij} \equiv Z_{[i+j,j]}(\text{mod } 2) \quad , \quad Z_{[n,k]} = \binom{n}{k}_Z = \frac{Z_n Z_{n-1} \cdots Z_{n-k+1}}{Z_1 Z_2 \cdots Z_k}, k = 0 \text{ için } Z_{[n,0]} = 1$$

olacak şekilde 32×32 tipinde bir komşuluk matrisini hesaplayıp, oluşan deseni daha net görmek adına elemanları renklendirirsek Tablo 3.1. de oluşturulmuş matrisi elde ederiz.

Karesel-binomial graflar ve küpsel-binomial graflarda da olduğu gibi burada da $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olarak kabul edersek, A_1, A_2, \dots, A_n matrislerin, A_0 matrisinin $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile Kronecker çarpımı sonucunda elde edilebileceği görülür. Bu durumda oluşan komşuluk matrisleri [1] ve [2]'de elde edilen komşuluk matrisleri ile birebir aynıdır. Dolayısıyla dörtsele sayılar için de çizilecek olan graflar Şekil 3.1. de verilen graflar ile eş graflar olacaktır.

1	1	2	2	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2	0	0	2	2	1	1	0	0	2	2	1	1	0	0	2	2
1	0	2	0	0	0	1	0	2	0	0	0	1	0	2	0	0	0	2	0	1	0	0	0	2	0	1	0	0	0	2	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2	0
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	2	0	1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	2	2	0	0	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	1	1	0	0	1	1	2	2	0	0	0	0
1	0	2	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0



BÖLÜM 4

SONUÇ

1997’ de Christopher ve Kennedy [1] tarafından çalışılmış olan “binomial graflar ve spektrumları (binomial graphs and their spectra)” isimli makale, bu çalışmada detaylı bir şekilde incelenerek burada yer alan binomial graflar tez çalışmamızın odak noktalarından biri olarak ele alınmıştır. Benzer bir durum sergileyen, Kar ve Yılmaz [2] tarafından hazırlanan “balans-binomial grafların lineer cebirsel incelenmesi (on linear algebra of balance-binomial graphs)” isimli makale de detaylı bir şekilde incelenmiş ve gerekli araştırmalar yapılarak tez çalışmamıza eklenmiştir.

Birbirinden bağımsız olarak hazırlanan bu iki çalışmada, aslında iki farklı sayı dizisi (doğal sayılar, balans sayıları) kullanılmış olmasına rağmen, tamamen aynı özelliklere sahip, eş graf kümeleri elde edilmiştir. İncelenen binomial ve balans-binomial grafların, farklı sayı dizilerine uyarlanması için araştırmalar yapılmış ve tez çalışmamıza eklenmiştir.

Doğal sayılar, Lucas sayıları, karesel sayılar, küpsel sayılar, balans sayıları gibi bazı sayı dizileri üzerine inşa edilen binomial grafların tamamen aynı graflar oldukları bu tez çalışmasında görülmüştür. Üçgensel sayılar ve Mersenne sayıları ile inşa edilen binomial graflarına ait komşuluk matrislerinin ise farklı grafları ifade ettikleri tespit edilmiştir. Ancak bu matrisler Kronecker çarpım veya başka bir yöntem kullanılarak geliştirilememiştir. Tribonacci sayıları ile oluşturulan binomial grafların ise verilen hesaplama yöntemleri ile uyumlu olmadıkları görülmüştür.

KAYNAKÇA

- [1] Christopher, P. R., Kennedy, J. W., “Binomial graphs and their spectra”, *Fibonacci Quarterly*, 1997.
- [2] Kar, K., Yılmaz, F., “On linear algebra of balance-binomial Graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, 2018.
- [3] Mete, F., Ceylan, İ., “Türkçe kurallı cümle yapısının graf teori ile gösterilmesi”, *International Periodical for the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*, (10), 461, 2015
- [4] Taşçı, D., “Lineer Cebir, (3 b.)”, *Gazi Kitabevi*, Ankara, 2005.
- [5] Topcu, H., “Graf izomorfizmi ve ko-spektral graflar”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, Nevşehir, 2016.
- [6] Eroğlu, H. H., “Graf teorisinin cebirsel yapıları”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, Nevşehir, 2015.
- [7] Behera A., Panda G.K., “On the square roots of triangular numbers Behera”, *Fibonacci Quart.*, 37, 98-105, 1999.
- [8] Panda, G. K., “Some fascinating properties of balancing numbers,”, *Proc. Eleventh Internat. Conference on Fibonacci Numbers and their Applications, Cong Numeratium.*, vol. 194, 185-189, 2009.
- [9] Olajos, P., “Properties os balancing, cobalancing and generalized balancing numbers”, *Annels Math. Et Informatica* 32, 125-138, 2010.
- [10] Panda, G. K., Ray, P. K., “Some links of balancing and cobalancing numbers with Pell and associated Pell numbers”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.* 6 (1), 41-72, 2011.
- [11] Ray, P. K., “Corious congruences for balancing numbers”, *Int. J. Contemp. Math. Sci.* 7 (18), 881-889, 2012.
- [12] Ray, P. K., “New identities for the common factors of balancing and Lucas-balancing numbers”, *Int. J. Pure Appl. Math.* 85 (3), 487-494, 2013.

- [13] Akbulak M., Kale A., Oteles A., "On the connectivity properties and energy of Fibonomial Graphs", *Discrete Appl. Math.* 169, 1-8, 2014.
- [14] Yılmaz, M., "Gauss Balans ve Gauss Kobalans Sayıları Üzerine" *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, Denizli, 2017.
- [15] Farrell, E. J., Kennedy, J. W., Quintas, L. W., Wahid, S. A. "Graphs with Palindromic Matching and Characteristic Polynomials.", *Vishwa International J. of Graph Theory I*, 59-76, 1992.
- [16] Kennedy, J. W., "Palindromic Graphs.", *In Graph Theory Notes of New York" Academy of Sciences*, New York, 1992.
- [17] Kasteleyn, P. W., "Graph Theory and Theoretical Physics", *ed. F. Harary, New York: Academic Press*, 43-110, 1967.
- [18] Andrews, H. C., Kane, J., "Kronecker matrices, computer implementation and generalized spectra", *J. Assoc. Comput. Mach.* 17 (2), 260-268, 1970.
- [19] Barnett, S. S., "Matrix Methods for Engineers and Scientist", *MacGraw-Hill*, New York, 1979.
- [20] Bacak., G., Beşeri, T., "Çizge Kuramına Genel Bir Bakış", *Matematik Dünyası*, (11), 4-8, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Uğur KARACA 1991 yılında Bakırköy’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya’da tamamladı. Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2017 yılında mezun oldu. Aynı yıl Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde öğrenimine devam etmektedir.

DİPLOMALAR

Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Nevşehir Hacıbektaş Veli Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Nevşehir Hacıbektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik A.B.D.

SERTİFİKALAR

Malatya M.E.B. Halk Eğitim Merkezi Bilgisayar İşletmenliği Sertifikası (160 Saat)
Malatya M.E.B. Halk Eğitim Merkezi Bilgisayarlı Muhasebe ve Finansman Sertifikası (240 Saat)
Adıyaman Üniversitesi Eğitim Fakültesi Pedagojik Formasyon Eğitimi Sertifikası

DENEYİM

T.C. M.E.B. Nevşehir Merkez İcik Ortaokulu – Matematik Öğretmenliği
Nevşehir Uzman Kariyer Kişisel Gelişim Kursu – Matematik Öğretmenliği

İLETİŞİM

Adres: Yeni Mahalle Yibo Küme evler A-Blok No-3 Karayazı / ERZURUM

Telefon: 0 555 091 60 44

e-posta : mhmtgrkrc@gmail.com