T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ VE ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI

Tezi Hazırlayan
Müjdet GÜNGÖR

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

MAYIS 2017
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ VE ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI

Tezi Hazırlayan
Müjdet GÜNGÖR

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

MAYIS 2017
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında **Müjdet GÜNGÖR** tarafından hazırlanan "Bazı Fark Denklemlerinin Çözülebilirliği ve Çözümlerinin Davranışları" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

03/05/2017

JÜRİ

Başkan	:	Prof. Dr. Necdet BATIR
Üye	:	Doç. Dr. Yasin YAZLIK
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

ONAY:

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitü Yönetim Kurulunun..10..05..2017..tarih ve..21..164.... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

15/05/2017

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Müjdet GÜNGÖR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince ve tez çalışmam esnasında tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan Sayın Hocam Doç. Dr. Yasin YAZLIK'a ve teknik desteklerden dolayı Cahit Köme ve Merve KARA'ya,

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Birnaz GÜNGÖR'e, babam Hacı GÜNGÖR'e, değerli eşim Şenay GÜNGÖR'e ve oğlum Kayra GÜNGÖR'e,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına sonsuz teşekkür ederim.

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ VE ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Müjdet GÜNGÖR

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2017

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklemlerinin önemi ve uygulama alanı ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, bazı fark denklemlerinin ve sistemlerinin çözülebilirliği ve çözümlerinin asiptotik davranışları hakkında bilgiler verildi. Ayrıca fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremlere de yer verildi. Üçüncü bölümde, (a_n), (b_n) iki reel dizi ve $x_{-6}, x_{-5}, \ldots, x_{-1}$ başlangıç şartları reel sayılar olan $x_n = \dfrac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a_n + b_n x_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})}$, $n \in \mathbb{N}_0$, rasyonel fark denkleminin çözülebildiği gösterildi. Daha sonra (a_n), (b_n) dizileri sabit olduğu durumlar için, yani $a_n = a$, $b_n = b$, lineer olmayan $x_n = \dfrac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a + bx_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})}$, $n \in \mathbb{N}_0$, fark denkleminin çözülebilir olduğu gösterildi. Ayrıca, aynı durumlar için iyi tanımlı çözümlerin davranışları incelendi. Son bölümde ise elde edilen sonuçların bazı nümerik uygulamaları verildi.

Anahtar kelimeler: Fark Denklemi, Asimptotik Davranış, Periyodiklik.

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Sayfa sayısı: 62

SOLVABILITY OF SOME DIFFERENCE EQUATIONS AND BEHAVIORS OF THEIR SOLUTIONS

(Ms Thesis)

Müjdet GÜNGÖR

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATUREL AND APPLIED SCIENCES

May 2016

ABSTRACT

This study consists of four sections. In the first section, the general information about the importance of difference equations and its application areas is given. In the second section, information about the solvability of some difference equtions and systems and the asymptotic behaviour of the solutions was given. In addition, general definitions and theorems for difference equations were given. In the third section, firstly, it was shown that the the rational difference equation $x_n = \dfrac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a_n + b_n x_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})}$, $n \in \mathbb{N}_0$, where (a_n) and (b_n) are two real sequences and the initial values $x_{-6}, x_{-5}, \ldots, x_{-1}$ are real numbers, can be solved. Later, it was shown that the nonlinear difference equation for the case when (a_n) and (b_n) sequences are constant, that is $a_n = a$, $b_n = b$, $x_n = \dfrac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a_n + b_n x_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})}$, $n \in \mathbb{N}_0$, can be solved. Asymptotic behaviour of well defined solutions for same cases is also investigated. In the last section, some numerical applications of obtained results are given.

Keywords: Difference equation, Asymptotic behaviour, periodicity.

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Pages: 62

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
E	Kaydırma operatörü
I	Birim operatörü
Δ	İleri fark operatörü
F_n	Fibonocci dizindeki n. terim
Δ^{-1}	Ters fark operatörü
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{N}_0$	Doğal sayılar
Σ	Toplam sembolü
Π	Çarpım senbolü
!	Faktöriyel
log	Logaritma
lim	Limit
O(1)	Sabit
O(log (n))	Logaritmik
O(log (log (n))	Çift logaritmik
o(n)	Alt Lineer
O(n)	Lineer
O(n log (n))	Loglineer, Linearitmik,
$O(n^2)$	Kuadratik
$O(n^3)$	Kübik
$O(n^c)$	Polinom (her c > 1 için)
$O(c^n)$	Üstel (her c > 1 için)
O(n!)	Faktöriyel

1. GİRİŞ

Matematiksel hesaplamalar sıklıkla belirli bir değer kümesinden bir fonksiyonun değerini tekrar hesaplamamızı sağlayan denklemlere dayanır. Böyle bir denklem, fark denklemi veya rekürans denklemi olarak adlandırılır[29]. Fark denklemleri bazen üreteç fonksiyonlarından bazen difereansiyel denklemlerin nümerik yaklaşımlardan doğabildiği gibi bazen de fiziksel bir olayın matematiksel modeli olarak ortaya çıkar[44].

Fark denklemleri, lineer ve lineer olmayan fark denklemleri olarak sınıflandırılabilir. Lineer fark denklemleri için en klasik örnekler iyi bilinen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}=\{0,1,1,2,3,5,7,...\}$ Fibonacci dizisi ve $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}=\{2,1,3,4,7,11,18,...\}$ Lucas dizileridir[31]. Lineer olmayan fark denklemlerinin teorik matematikte ve ilgili alanlarda sayısız uygulamaları vardır. Örneğin, Newton-Raphson yöntemi kök bulma algoritması olarak bilinir ve $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n\in N_0$, lineer olmayan fark denklemi, $f(x)=0$ reel değerli fonksiyonun köklerini (sıfırlarını) yaklaşık olarak bulmak için kullanılır. Başka bir örnek ise, iki boyutlu lineer olmayan fark denklem sistemi $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{a+y_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{y_n}{a+x_n}$, $n\in N_0$, iki farklı rakip popülasyonun bir jenerasyondan diğerine büyüme kuralını gösterir. Burada x_n ve y_n faz değişkenleri n. jenerasyondaki büyüme miktarıdır. Belirtilen $\{(x_n,y_n)\}_{n=0}^{\infty}$, popülasyonun zamanla nasıl değiştiğini ve popülasyonlar arası rekabeti tanımlar[33].

Fark denklemlerinin doğada biyoloji, ekoloji, epidomoloji[31]; ekonomi[32] ve fizik[7] alanlarında da bolca uygulamaları vardır. Bilimdeki öneminden dolayı fark denklemlerinin bilim adamlarının özellikle matematikçilerin ilgisini çekmeye devam edecektir. Büyük ilgi yaratmasının diğer sebepi ise, bu tip denklemlerin çözümlerinin davranışlarını anlamaktaki zorluktur. Gerçektende bazı fark denklemleri basit formlarda olsa da, çözümlerin davranışları bahsettiğimiz gibi karmaşık ve anlaşılması zordur[33].

II. BÖLÜM

2.1. Kaynak Araştırması

Bu bölümde fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili literatür de yapılmış olan çalışmalarından bahsedilecektir.

Chatterjee, Grove, Kostrov ve Ladas (2003), *"On the trichotomy character of* $x_{n+1}=\dfrac{\alpha+\gamma x_{n-1}}{A+Bx_n+x_{n-2}}$ " isimli çalışmalarında

$$x_{n+1}=\frac{\alpha+\gamma x_{n-1}}{A+Bx_n+x_{n-2}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini, çözümlerin sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir. Burada α, γ, A ve B parametreler x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılardır.

Çınar (2004), "*On the posive solutions of difference equation* $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{1+x_nx_{n-1}}$" isimli çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{1+x_nx_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olan ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini elde etmiştir.

Çınar (2004), *"On the positive solutions of the difference equation* $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{1+ax_nx_{n-1}}$" isimli çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{1+ax_nx_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olan ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini elde etmiştir.

Andruch ve Migda (2006), *"Further properties of the rational recursive sequence* $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-1}}{b+cx_nx_{n-1}}$ " isimli çalışmalarında

$$x_{n+1}=\frac{ax_{n-1}}{b+cx_nx_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini ve asimptotik davranışını incelemişlerdir. Burada a ve c pozitif parametreler, b negatif parametre ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar olarak verilmiştir.

Karataş, ve Çınar (2007), "*On the solutions of the difference equation* $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-(2k+2)}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{n-i}}$" isimli çalışmalarında $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-(2k+2)}}{-a+\prod_{i=0}^{2k+2}x_{n-i}}$ $(2k+3)$. mertebeden fark denkleminin çözümleri ve çözümlerinin çekimliliği hakkında çalışmışlardır.

Elsayed (2009), "*Dynamics of a rational recursive sequence*" isimli çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-5}}{\pm 1\pm x_{n-1}x_{n-3}x_{n-5}},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin başlangıç koşullarının sıfırdan farklı reel sayılar olduğu durumlarda incelemiş ve çözümlerini elde etmiştir.

İbrahim (2009), "*On the third order rational difference equation* $x_{n+1}=\dfrac{x_nx_{n-2}}{x_{n-1}(a+bx_nx_{n-2})}$" isimli çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{x_nx_{n-2}}{x_{n-1}(a+bx_nx_{n-2})},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini ve çözümlerin sınırlılığını incelemiştir. Burada x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç değerleri negatif olmayan reel sayılar ve $bx_0x_{-2}\neq -a$ ve $x_{-1}\neq 0$ dır.

Zayed ve El-Moneam (2009), "*On the rational recursive sequence* $x_{n+1}=\dfrac{Ax_n+(\beta x_n+\gamma x_{n-k})}{Bx_n+Cx_{n-k}}$" isimli çalışmalarında

$$x_{n+1}=\frac{Ax_n+(\beta x_n+\gamma x_{n-k})}{Bx_n+Cx_{n-k}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin çözümünü ve çözümünün davranışlarını incelemişlerdir. Burada $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_0$ başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar ve A, B, C, β ve γ parametreleri pozitif sabitler iken k pozitif bir tam sayıdır.

Berg ve Steviç (2011), *"On some systems of difference equations"* isimli çalışmalarında

$$u_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n},\quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$u_{n+1} = \frac{v_n}{1+u_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n}{1+v_n},\quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+v_n},\ v_{n+1} = \frac{v_n}{1+u_n},\quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sistemlerinin Riccati denklemleri yardımıyla çözümlerini elde etmişlerdir. Burada u_0 ve v_0 başlangıç değerleri kompleks sayılardır.

Steviç (2011), *"On a system of difference equations"* isimli çalışmasında

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{(by_n x_{n-1} + c)},\ y_{n+1} = \frac{\alpha y_{n-1}}{(\beta x_n y_{n-1} + \gamma)},\quad n \in \mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmiştir. Burada a, b, c, α, β, γ parametreler x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç şartlarıdır.

Steviç (2011), *"On the difference equation* $x_n = \frac{x_{n-2}}{(b_n + c_n x_{n-1} x_{n-2})}$ " isimli çalışmasında

$$x_n = \frac{x_{n-2}}{(b_n + c_n x_{n-1} x_{n-2})},\quad n \in \mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin elde edilen formüllerinin bazı uygulamalarını vermiştir. Burada $n \in \mathbb{N}_0$ için (b_n) ve (c_n) iki periyotlu dizi ve x_{-1}, x_{-2} başlangıç şartları reel sayılardır.

Raouf (2012), *"Global behavior of the rational Riccati difference equation of order two: the general case"* isimli çalışmasında

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

İkinci mertebeden Riccati fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı ve kararlılık özellikleri incelemiştir. Burada parametreler a,b,c ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları reel sayılardır.

El-Metwally ve Elsayed (2012), *"Qualitative study of solutions of some difference equations"* isimli çalışmalarında başlangıç koşulları reel sayılar olan

$$x_{n+1}=\frac{x_n x_{n-3}}{x_{n-2}(\pm 1\pm x_n x_{n-3})},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denklemlerinin çözümlerini elde etmiştir. Ayrıca, çözümlerin davranışlarını inceleyerek sınırlılık, periyodiklikliğini incelediler.

Touafek ve Elsayed (2012), *"On the periodicity of some systems of nonlinear difference equations"* isimli çalışmalarında başlangıç koşulları sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-1}(\pm 1\pm y_n)},\ y_{n+1}=\frac{x_n}{y_{n-1}(\pm 1\pm x_n)},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

ikinci mertebeden rasyonel fark sistemlerinin çözümlerini incelemişlerdir.

Steviç, Diblik, Iricanin ve Smarda (2012), *"On the difference equation* $x_{n+1}=\frac{x_n x_{n-k}}{x_{n-k+1}(a+bx_n x_{n-k})}$*"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1}=\frac{x_n x_{n-k}}{x_{n-k+1}(a+bx_n x_{n-k})},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerini ve elde edilen formülleri kullanarak fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişler.

Steviç (2012), *"On some solvable systems of difference equations"* isimli çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{u_n}{1+v_n},\ y_{n+1}=\frac{w_n}{1+s_n},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

Riccati fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmiştir. Burada u_n, v_n, w_n, s_n, x_n veya y_n dizilerinden biridir.

Steviç (2012), *"On a solvable rational system of difference equations"* isimli çalışmasında,

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_{n-k}}{y_{n-k+1}\left(a_n+b_n x_n y_{n-k}\right)},\quad y_{n+1}=\frac{y_n x_{n-k}}{x_{n-k+1}\left(c_n+d_n y_n x_{n-k}\right)},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

Fark denklem sisteminin iyi tanımlanmış çözümlerini elde etmiştir. Elde edilen çözümlerin asimptotik davranışlarını incelemiştir.

Elsayed (2013), *"Behavior and expression of the solutions of some rational diference equations"* isimli çalışmasında başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olan

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-2}x_{n-4}}{x_{n-1}(\pm1\pm x_{n-2}x_{n-4})},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denklemlerin çözümlerini ve çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Elsayed (2013), *"Solution of a rational recursive sequences of order three"* isimli çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{a x_n x_{n-2}}{x_{n-1}\left(-b+c x_n x_{n-2}\right)},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denklemini çözümlerini tümevarm metodunu kullanark elde etmiştir. Burada *a, b* ve *c* pozitif reel sayılar ve başlangıç koşuları keyfi pozitif reel sayılardır.

Elsayed ve El-Metwally (2013), *"On the solutions of some nonlinear systems of difference equations"* isimli çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_{n-2}}{y_{n-1}\left(\pm1\pm x_n y_{n-2}\right)},\quad y_{n+1}=\frac{y_n x_{n-2}}{x_{n-1}\left(\pm1\pm y_n x_{n-2}\right)},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmiştir.

Tollu, Yazlik veTaşkara (2013), *"On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers"* isimli çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n},\quad y_{n+1}=\frac{1}{-1+y_n}$$

iki özel Riccati fark denkleminin çözümlerinin Fibonacci sayılarıyla ilişkili olarak elde etmişlerdir.

İbrahim ve Touafek (2013), *"On a third order rational difference equation with variable coefficients"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}x_{n-2}}{x_n\left(a_n+b_nx_{n-1}x_{n-2}\right)},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Yazlik (2014), *"On the solutions and behavior of rational difference equations"* isimli çalışmasında başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olan

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-2}x_{n-3}x_{n-4}}{x_nx_{n-1}(\pm1\pm x_{n-2}x_{n-3}x_{n-4})},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

beşinci mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini ve çözümlerin davranışlarını incelemiştir.

Elsayed, El-Dessoky ve Alzahrani (2014), *"The form of the solution and dynamics of a rational recursive sequence"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-3}x_{n-4}}{x_n\left(\pm1\pm x_{n-3}x_{n-4}\right)},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerini ve çözümlerinin davranışını incelemişlerdir. Burada başlangıç koşulları keyfi reel sayıdır.

Elsayed (2014), *"Solution for systems of difference equations of rational form of order two"* isimli çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{x_ny_{n-2}}{y_{n-1}\left(\pm1\pm x_ny_{n-2}\right)},\ y_{n+1}=\frac{y_nx_{n-2}}{x_{n-1}\left(\pm1\pm y_nx_{n-2}\right)},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmiştir. Ayrıca sistemin çözümlerinin periyodikliğini de incelemiştir.

Elsayed ve T.F İbrahim (2014), *"Solutions and periodicity of a rational recursive sequences of order five"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1}=\frac{x_nx_{n-2}x_{n-4}}{x_{n-1}x_{n-3}(\pm1\pm x_nx_{n-2}x_{n-4})},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerinin kararlılığı ve periyodikliğini incelemişlerdir. Burada $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0$ başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılardır.

Elsayed, Mahmoud ve Ali (2014), *"Expression and dynamics of the solutions of some rational recursive sequences"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}x_{n-3}x_{n-4}}{x_n x_{n-1}(\pm 1 \pm x_{n-2}x_{n-3}x_{n-4})}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

beşinci mertebeden rasyonel fark denklemlerin çözümlerini elde etmişler ve çözümlerin davranışını incelemişlerdir. Burada başlangıç koşulları keyfi reel sayılardır.

Tollu, Yazlik ve Taşkara (2014), *"On fourteen solvable systems of difference equations"* isimli çalışmalarında x_0 ve y_0 başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

Riccati fark denklem sistemlerinin 16 durumdan 14 tanesi çözülmüş ve bunlardan 12 tanesi Fibonacci sayıları ile ilişkilendirmişlerdir. Burada p_n, q_n, r_n ve s_n, x_n veya y_n dizilerinden biridir.

Steviç, Diblik, Iricanin ve Smarda (2014), *"Solvability of nonlinear difference equations of fourth order"* isimli çalışmalarında

$$x_n = \frac{x_{n-3}x_{n-4}}{x_{n-1}(a_n + b_n x_{n-2}x_{n-3}x_{n-4})}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin iyi tanımlanmış çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca elde edilen çözümlerin asimptotik davranışlarını incelemişlerdir.

Elsayed ve T.F İbrahim (2015), *"Periodicity and solutions for some systems of nonlinear ratinol difference equations"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}y_{n-1}}{y_n(\pm 1 \pm x_{n-2}y_{n-1})}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-2}x_{n-1}}{x_n(\pm 1 \pm y_{n-2}x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

üçüncü mertebeden lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerinin periyodik yapısını incelediler. Burada $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılardır.

Yazlik, Tollu ve Taskara (2015), *"On the behaviour of solutions for some systems of difference equations"* isimli çalışmlarında

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-2}x_{n-3}y_{n-4}}{y_n x_{n-1}\left(\pm 1\pm y_{n-2}x_{n-3}y_{n-4}\right)},\ y_{n+1}=\frac{x_{n-2}y_{n-3}x_{n-4}}{x_n y_{n-1}\left(\pm 1\pm x_{n-2}y_{n-3}x_{n-4}\right)}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca bu sistemlerin çözümlerinin davranışlarını da incelemişlerdir.

Alzahrani, El-Dessoky, Elsayed ve Kuang (2015), *"Solutions and properties of some degernerate systems of difference equations"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1}=\frac{y_n y_{n-1}}{x_n(\pm 1\pm y_n y_{n-1})},\ y_{n+1}=\frac{x_n x_{n-1}}{y_n(\pm 1\pm x_n x_{n-1})},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini elde etmişlerdir. Burada x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılardır.

El-Dessoky, Elsayed ve Alghamdi (2015), *"Solutions and periodicity for some systems of fourth order rational difference equations"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_{n-3}}{y_{n-2}\left(\pm 1\pm x_n y_{n-3}\right)},\ y_{n+1}=\frac{y_n x_{n-3}}{x_{n-2}\left(\pm 1\pm y_n x_{n-3}\right)},\ n\in\mathbb{N}_0$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini incelemişlerdir.

Steviç, Iricanin ve Smarda (2015), *"On a close to symmetric system of difference equations of second order"* isimli çalışmalarında

$$x_n=\frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_{n-1}\left(a_n+b_n y_{n-1}y_{n-2}\right)},y_n=\frac{x_{n-1}x_{n-2}}{y_{n-1}\left(\alpha_n+\beta_n x_{n-1}x_{n-2}\right)},$$

rasyonel fark denklem sisteminin iyi tanımlanmış çözümlerini elde etmişlerdir. Elde edilen çözümlerin asimptotik davranışlarını da incelemişlerdir.

Khaliq ve Elsayed (2016), *"The dynamics and solution of some difference equations"* isimli çalışmalarında $x_{-5}, x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0$ başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olan

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}x_{n-5}}{x_{n-3}(\pm 1\pm x_{n-1}x_{n-5})},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

altıncı mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini elde etmişlerdir.

Ahmed ve Elsayed (2016), *"The expressions of solutions and the periodicity of some rational difference equations systems"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{y_n(-1 \pm x_{n-1}x_{n-2})}, \; y_{n+1} = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{x_n(\pm 1 \pm y_{n-1}x_{n-2})}, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliği incelmişlerdir. Burada başlangıç koşulları $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}$ ve y_0 sıfırdan farklı reel sayılardır.

Elsayed (2016), *"Expression and behavior of the soltions of some rational recursive sequences"* isimli çalışmasında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}x_{n-4}}{x_n\left(\pm 1 \pm x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}x_{n-4}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

beşinci mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini ve çözümlerinin davranışını incelemiştir.

El-Metwally ve Elsayed (2016), *"Qualitative behavior of some rational difference equations"* isimli çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_{n-4}}{x_{n-2}(\pm 1 \pm x_{n-1}x_{n-4})}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

beşinci mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini ve çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

El-Dessoky (2016), *"On a solvable for some systems of rational difference equations"* isimli çalışmasında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}}{\pm 1 \pm t_n z_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}}, \; y_{n+1} = \frac{y_{n-3}}{\pm 1 \pm x_n t_{n-1} z_{n-2} y_{n-3}}, \; z_{n+1} = \frac{z_{n-3}}{\pm 1 \pm y_n x_{n-1} t_{n-2} z_{n-3}}, \; t_{n+1} = \frac{t_{n-3}}{\pm 1 \pm z_n y_{n-1} x_{n-2} t_{n-3}}$$

dört boyutlu dördüncü mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliği ve sınırlılığını incelemiştir.

Steviç, Diblik, Iricanin ve Smarda (2016), *" On a fifth-order difference equation"* isimli çalışmalarında

$$x_n = \frac{x_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}}{x_{n-1}x_{n-2}\left(a_n + b_n x_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}\right)},\ n \in \mathbb{N}_0$$

beşinci mertebeden rasyonel fark denkleminin iyi tanımlanmış çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca elde edilen çözümlerin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Stevic, Alghamdi, Alotaibi ve Elsayed (2017), "*On a class of solvable higher-order difference equations*" isimli çalışmalarında başlangıç şartları reel sayılar olan

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-k-2}}{x_{n-k}\left(a_n + b_n x_{n-2}x_{n-k-2}\right)},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

$(k+2)$. Mertebeden fark denkleminin iyi tanımlanmış kapalı çözümlerini elde etmişlerdir. Elde edilen çözümlerin asimptotik davranışını da incelemişlerdir.

2.2 Ön Bilgiler

Bu bölümde verilen temel bilgiler genel olarak [4], [10] ve [11] kaynaklarından alınmıştır.

2.2.1. Fark denklemleri ile ilgili temel kavramlar

Tanım 2.2.1.1. (**E operatörü (Kaydırma operatörü)**) $x:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. E öteleme operatörü

$$Ex(n) = x(n+1)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.1.2. **Δ operatörü (İleri fark operatörü)** Bir $x:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya x' in birinci basamaktan farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.1.3. (**Δ^{-1} ters fark operatörü**) $n \geq n_0$ için $\Delta F(n) = f(n)$ olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$$\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c$$

şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü denir ve $F(n)$ fonksiyonuna da $f(n)$ ' nin ters farkı denir. Burada c keyfi sabittir.

Teorem 2.2.1.4 Bir $f(n)$ fonksiyonu $n \geq n_0$ için tanımlı ise bu durmda

$$\Delta^{-1} f(n) = c + \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)$$

dir. Burada c keyfi bir sabittir.

Tanım 2.2.1.5 (Fark Denklemi) $n \in \mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere $F(n, x(n), x(n+1), \ldots, x(n+k)) = 0$ eşitliğine *Fark Denklemi* denir.

Tanım 2.2.1.6 (Lineer Fark Denklemi) $a_1(n), a_2(n), \ldots, a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $\mathbb{N}_{n_0}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere $x_{n+k} + a_1(n) x_{n+k-1} + \ldots + a_k(n) x_n = g(n)$

Biçiminde ki bir denkleme lineer fark denklemi denir. Aksi halde ki fark denklemine lineer olmayan fark denklemi denir.

Lineer fark denklemleri katsayıları ve $g(n)$ 'nin durumuna göre sınıflandırılılar.

i) Eğer $x_{n+k} + a_1(n) x_{n+k-1} + \ldots + a_k(n) x_n = g(n)$ denkleminde $g(n) = 0$ ise denkleme *Lineer Homojen Fark Denklemi* denir.

ii) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $a_i(n) = a_i$ şeklinde katsayıları sabit iseler, denkleme *Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir.

iii) $\exists i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $a_i(n)$ katsayılarından en az biri bağımsız değişkenin fonksiyonu ise denkleme *Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir.

Tanım 2.2.1.7 $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$, $n \in \mathbb{N}_0$, fark denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$

çözümü p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p sayısına da asal periyot denir.

Teorem 2.2.1.8 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y_{kn+i} = a y_{k(n-1)+i} + b$ denkleminin çözümü

$$y_{kn+i} = \begin{cases} a^{n+1} y_{i-k} + b \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a \neq 1 \\ y_{i-k} + (n+1)b, & a = 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.1.9 (a_n) ve (b_n) birer dizi olmak üzere $y_{kn+i} = a_n y_{k(n-1)+i} + b_n$ denkleminin çözümü

$$y_{kn+i} = \left(\prod_{j=0}^{n} a_j \right) y_{i-k} + \sum_{r=0}^{n} \left(\prod_{j=r+1}^{n} a_j \right) b_r$$

şeklindedir.

2.2.2. Algoritmaların karşılaştırılması

Bu bölümde verilen temel bilgiler P. Danzinger' in Big O Notation isimli çalışmasından çevrilmiştir.

Genel olarak bir algoritmanın verimliliği, belli bir büyüklükte girilen fonksiyonun algoritmada ne kadar süre aldığı ile değerlendirilir. Örneğin, bir graf algoritmasının verimliliği girilen grafın m kenarlı ve n köşeli olduğunu belirten bir fonksiyon ile ölçülebilir. Euler algoritması yaklaşık olarak m adım sonunda, burada girilen graftaki kenar sayısı, Euler devresini (circuit) bulur. Hamilton algoritması ise kabaca n^k adımda, k grafın maksimum derecesi sonucu elde eder.

Bir algoritmanın verimliliğini her zaman en kötü ihtimal dahilinde ele alınır. Mesela Hamilton devresinde problem kabaca n^k adımda bütün devreler göz önüne alınrak çözülebilir. Eğer büyük n değerleri için $f(n) \approx g(n)$ aynı davranışları gösteriyor ise, f ve g aynı derecedir denir. $f(n) = n^2$ ve $g(n) = n^2 + 2n + 3$ fonksiyonlarını ele alalım.

Tablo 2.1: n, n^2 ve n^2+2n+3 fonksiyonlarının derecelerinin karşılaştırılması

n	1	10	20	50	100	200	300	400	500	1000
n^2	1	100	400	2500	10000	40000	90000	160000	250000	1000000
n^2+2n+3	6	123	443	2603	10203	40403	90603	160803	251003	1002003
2^n	2	1024	1048576	10^{15}	10^{30}	10^{60}	2.10^{90}	$2.5.10^{120}$	3.10^{150}	10^{301}

Açıkça görülür ki n^2 ve n^2+2n+3 aynı derecelidir. Fakat 2^n değildir.

2.2.2.1 Büyük *O* notasyonu

Tanım 2.2.2.1 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon veya $f(n)=a_n$ bir dizi olsun.

1. $\Omega(f)$ f'den daha büyük ya da f' ye eşit fonksiyonlardır. Yeterince büyük x değerleri için bütün fonksiyonlar $|f(x)|$ değeri ile bazı sabitlerin çarpımından büyüktür. $\Omega(f)=\{g(x)\,|\,\exists A,a\in\mathbb{R}^+, A|f(x)|\le|g(x)|, \forall x>a\}$.

2. $O(f)$ f'den küçük ya da f' ye eşit fonksiyonlardır. Yeterince büyük x değerleri için bütün fonksiyonlar $|f(x)|$ değeri ile bazı sabitlerin çarpımından küçüktür. $O(f)=\{g(x)\,|\,\exists A,a\in\mathbb{R}^+, |g(x)|\le A|f(x)|,\ \forall x>a\}$

3. $\Theta(f)$ f ile aynı derecedeki fonksiyonlardır. Yeterince büyük x değerleri için bütün fonksiyonlar iki sabit ile çarpılmış $|f(x)|$ değerleri arasındadır

$$\Theta(x)=\{g(x)\,|\,\exists A,B,a\in\mathbb{R}^2, A|f(x)|\le tg(x)\le B|f(x)|,\ \forall x>a\}$$

4. $o(f)$ f'nin derecesinden kesinlikle küçük fonksiyonlardır. $o(f)=O(f)-\Theta(f)$.

Eğer $g\in O(f)$ ise g, f'nin derecesindedir denir.

Alternatif olarak, dereceyi bir değere yaklaşan dizilerin oranlarının limiti notasyonunu kullanarakta belirleyebiliriz.

Tanım 2.2.2.2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon veya $f(n)=a_n$ bir dizi olsun.

1. $\Omega(f)$, $$\Omega(f)=\left\{g(x)\,\middle|\,\lim_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|>0\right\}.$$

2. $O(f)$, $$O(f)=\left\{g(x)\,\middle|\,\lim_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|<\infty\right\}.$$

3. $\Theta(f)$, $$\Theta(f)=\left\{g(x)\,\middle|\,\lim_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|=L,\ 0<L<\infty\right\}.$$

4. $o(f)$, $$o(f)=\left\{g(x)\,\middle|\,\lim_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|=0\right\}.$$

a) $g\in\Omega(f)$ olması g' nin f'in derecesinden eşit ya da daha büyük olduğu anlamına gelir.

b) $g\in\Theta(f)$ olması f ve g'nin kabaca aynı büyüklük derecesinde olduğu anlamına gelir.

c) $g\in O(f)$ olması g' nin f' nin büyüklüğünden az ya da eşit olduğu anlamına gelir.

d) $g\in o(f)$ olması g'nin büyüklüğünün f' den az olduğu anlamına gelir.

Büyük O son zamanlarda en yaygın olarak kullanılır ve $f\in O(g)$ (f en çok g derecesindedir) denildiğinde aslında $f\in\Theta(g)$ (f ve g aynı derecededir) olduğu kastederiz.

Örnek 2.2.2.3. $2^n\in o(3^n)$ olduğunu gösteriniz.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$ dır. Dolayısıyla $2^n\in o(3^n)$ dir.

(Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=\infty$ dolayısıyla $3^n\in\Omega(2^n)$ dır.)

Teorem 2.2.3.4. f, g, h ve k aynı negatif olmayan reel sayılar kümesinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun.

1. $\Omega(f)\cap O(f)=\Theta(f)$.

2. $f\in\Omega(g)\Leftrightarrow g\in O(f)$.

3. (O için yansıma) $f\in O(f)$, $f\in\Omega(f)$ ve $f\in\Theta(f)$.

4. (O için geçişme) Eğer $f\in O(g)$ ve $g\in O(h)$ ise $f\in O(h)$ olur.

5. Eğer $f \in O(g)$ ve $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ o zaman $cf(x) \in O(g)$.

6.Eğer $f \in O(h)$ ve $g \in O(k)$ ise, $f(x)+g(x) \in O(\mathrm{G(x)})$ o zaman $\mathrm{G(x)} = \max(|h(\mathrm{x})|, |k(\mathrm{x})|)$

7. Eğer $f(x) \in O(h)$ ve $g \in O(k)$ ise o zaman $f(x)g(x) \in O(h(x)k(x))$ dir.

8. Eğer $f \in O(h)$ ve $g \in O(h)$ ise, $f(x)+g(x) \in O(h)$.

9. Eğer $f \in o(g)$ o zaman $g \in \Omega(f) - \Theta(f)$.

10. $o(f) \subseteq O(f)$.

2.2.2.2 Derecenin tipleri

Dereceler, kendi arasında bir hiyerarşi oluşturur. Mesela g hiyerarşideki büyük üyelere göre düşük sıradaki bir üyeye dahildir. Aşağıdaki liste, yaygın (genel) dereceler ve isimleridir.

Tablo 2.2: Yaygın olarak kullanılan derecelerin isimleri listesi

Gösterim	Adı
$O(1)$	Sabit
O(log (n))	Logaritmik
O(log (log (n))	Çift logaritmik
o(n)	Alt Lineer
O(n)	Lineer
O(n log (n))	Loglineer, Linearitmik, Quasilineer veya Supralineer
$O(n^2)$	Kuadratik
$O(n^3)$	Kübik
$O(n^c)$	Polinom (her c > 1 için)
$O(c^n)$	Üstel (her c > 1 için)
O(n!)	Faktöriyel
$O(n^n)$	-

Örnek 2.2.2.2.1

1. $2^n + n^2 \in O(2^n)$

2. $2n^3 + 3n^2 - 2n + 5$, $O(n^3)$ (Kübik).

3. $(2n^3 + 3n^2 - 2n + 5)^{\frac{1}{3}}$, $O(n)$ (lineer).

Genellikle polinomların derecesi en yüksek dereceli terimden gelir.

Teorem 2.2.2.2.2 f fonksiyonu verilsin, eğer x^r f'nin en büyük kuvveti ise,

i. Eğer $r < s$ ise o zaman $f \in o(x^r) \subseteq O(x^r)$.

ii. Eğer $r = s$ ise o zaman $f \in \Theta(x^r) \subseteq O(x^r)$.

iii. Eğer $r > s$ ise $f \in \Omega(x^r)$.

İspat: f, bir polinom ve en büyük kuvveti x^r ve $f(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + ... + a_1 x + a_0$ olsun. $s \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^s} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + ... + a_1 x + a_0}{x^s}$$

$$= \lim_{x\to\infty} a_r x^{r-s} + a_{r-1}x^{r-1-s} + ... + a_1 x^{1-s} + a_0 x^{-s}$$

$$= \begin{cases} 0 & r < s \\ a_r & r = s \\ \infty & r > s \end{cases}$$

dır.

Örnek 2.2.2.2.3

1. $2n^3 + 3n^2 - 2n + 5 \in 3O(n^3)$

2. $(10^{123})n^2 - 3670n + 5 \in o(n^3)$

3. $0,000000001n^3 \in \Omega(n^2)$

2.2.2.3 Algoritma

Derece notasyonun bilgisayar bilimlerindeki esas kullanımı algoritmaların verimliliğini karşılaştırmak içindir. Büyük O notasyonu özellikle algoritmanın verimliliği analizinde çok kullanışlıdır. Bu durumda n girdinin büyüklüğü ve $f(n)$ de girdinin büyüklüğüne göre algoritmanın çalışma süresi olsun. Farz edelim ki bir problemi çözmek için iki algoritmamız var. Algoritmaların derecelerini karşılaştırarak verimini görebiliriz.

Aşağıdaki tabloda lineer bir algoritmanın 1000 büyüklükteki bir problemi 1 saniyede yaptığını kabul edelim. Bunu bu algoritmanın ne kadar büyük bir problem ile 1 dakikada ve 1 saatte başa çıkabileceğini hesaplayabiliriz. Ayrıca verilen hız ile birlikte ne kadar büyüklükte bir problemi kontrol edilerek hesaplanacağını bulabiliriz.

Tablo 2.3: Çalışma süresinin problemi çözme süresi ile karşılaştırılması

Çalışma Süresi	Problemin maximum çözme süresi		
	1 saniye	1 dakika	1 saat
n	1000	6.10^4	$3,6.10^6$
$n \log(n)$	140	4893	2.10^5
n^2	31	244	1897
n^3	10	39	153
2^n	9	15	21

Bir sonraki tabloda gelecek jenerasyon bilgisayarların 10 kat daha hızlı olduğunu kabul ederek verilen hızda ne kadar büyüklükte bir problemi kontrol ederek hesaplanacağını bulabiliriz.

Tablo 2.4: Çalışma süresinin 10 kat hızlanmasının karşılaştırılması

Çalışma süresi	10 kat hızlandıktan sonra
n	x10
$n \log(n)$	≈x10
n^2	x3,16
n^3	x2,15
2^n	+3,3

Genel olarak bir algoritma polinom tipinde ise, yani bazı k sabitleri için $O(n^k)$ ise, verimlidir. Tabi ki küçük n değeri için bile üstel algoritma polinom tipinden daha iyi performans gösterebilir. İki problem verilsin, eğer polinom tipindeki algoritma problemdeki herhangi bir zamanda azalıyorsa ve aynı şekilde değerinde de azalma oluyorsa bu iki problemle polinom zamanlı (tipinde) eşittir denir. Açık olarak iki problem polinom tipinde eşit ise, ikisinde de polinom tipinde algoritma kullanılmıştır.

Polinom tipinde algoritmalar kümesi P ile gösterilir. Başka bir algoritmaların kümesi ise NP (nondeterministic polynomial) belirleyici olmayan algoritmalar kümesidir.

$P \subseteq NP$ olduğu bilinen bir gerçektir fakat $P = NP$ olup olmadığı henüz tespit edilememiştir. NP içinde polinom tipinde eşit (NP-complete) NP- tam algoritmalar kümesi vardır. NP-tam problemleri NP problemleri kadar zordur. Herhangi NP-tam problemi için polinom tipinde bir algoritma bulunur ise P=NP olduğu gösterilmiş olur.

III. BÖLÜM

3.1 $x_n=\dfrac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a_n+b_nx_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})}$ Fark Denkleminin Çözümü

Bu bölümde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ iki reel dizi ve başlangıç şartları $x_{-6},x_{-5},\ldots,x_{-1}\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$x_n=\frac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a_n+b_nx_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})} \tag{3.1.1}$$

rasyonel fark denkleminin çözülebilir olduğu gösterilmiştir. Bu alt bölümde çözümlerin iyi tanımlı olduğu kabul edilmiştir. Yani $\forall n\in\mathbb{N}_0$ için $x_{n-1}x_{n-2}(a_n+b_nx_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})\neq 0$ olduğu kabul edilmiştir.

Teorem 3.1.1 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ iki reel dizi ve $(x_n)_{n\geq-6}$ (3.1.1) denkleminin iyi tanımlanmış bir çözümü olsun. O zaman $(x_n)_{n\geq-6}$ denkleminin çözümü

$$x_{12m+3j}=x_{3j-12}\prod_{s=0}^{m}\left(\frac{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum\limits_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l+2}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i+2}}{\prod\limits_{i=0}^{4s+j}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum\limits_{l=0}^{4s+j}b_{3l}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i}}\,\frac{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-2}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum\limits_{l=0}^{4s+j-2}b_{3l+1}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-2}a_{3i+1}}{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-2}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum\limits_{l=0}^{4s+j-2}b_{3l+2}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-2}a_{3i+2}}\,\frac{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum\limits_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i}}{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum\limits_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+1}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+1}}\right),$$

$$x_{12m+3j+1}=x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\left(\frac{\prod\limits_{i=0}^{4s+j}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum\limits_{l=0}^{4s+j}b_{3l}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i}}{\prod\limits_{i=0}^{4s+j}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum\limits_{l=0}^{4s+j}b_{3l+1}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i+1}}\,\frac{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-2}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum\limits_{l=0}^{4s+j-2}b_{3l+2}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-2}a_{3i+2}}{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum\limits_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i}}\,\frac{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum\limits_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+1}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+1}}{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum\limits_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+2}\prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+2}}\right),$$

$$x_{12m+3j+2}=x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\left(\frac{\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i+1}}{\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i+2}}\frac{\prod_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i}}{\prod_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i+1}}\frac{\prod_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+2}}{\prod_{i=0}^{4s+j-2}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum_{l=0}^{4s+j-2}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j-2}a_{3i}}\right)$$

Burada $j\in\{2,3,4,5\}$ ve $m\geq -1$' dir.

İspat. (3.1.1) denkleminde $\forall n\geq -3$ için, $\frac{1}{y_n}=x_nx_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}$ değişken değiştirmesi yapılırsa (3.1.1) denklemi

$$\frac{1}{y_n}=\frac{\frac{1}{y_{n-3}}}{a_n+b_n\frac{1}{y_{n-3}}}=\frac{1}{a_ny_{n-3}+b_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.1.2}$$

elde edilir. Buradan (3.1.2) denkleminin çarpma işlemine göre tersi alınırsa üçüncü mertebeden değişken katsayılı lineer fark denklemi

$$y_n=a_ny_{n-3}+b_n,\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.1.3}$$

bulunur. (3.1.3) denklemi $i\in\{0,1,2\}$ için

$$y_{3n+i}=a_{3n+i}y_{3(n-1)+i}+b_{3n+i},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.1.4}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi (3.1.4) denklemine $i\in\{0,1,2\}$ ve $\forall n\geq -1$ için $y_n^{(i)}=y_{3n+i}$ dönüşümü uygulanırsa birinci mertebeden değişken katsayılı katsayılı lineer fark denklemi

$$y_n^{(i)}=a_{3n+i}y_{n-1}^{(i)}+b_{3n+i},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.1.5}$$

elde edilir. (3.1.5) denklemin çözümü Teorem 3.2.9' dan

$$y_m^{(i)}=y_{-1}^{(i)}\prod_{j=0}^{m}a_{3j+i}+\sum_{l=0}^{m}b_{3l+i}\prod_{j=l+1}^{m}a_{3j+i} \tag{3.1.6}$$

bulunur. $\forall n\geq -1$, ve $i\in\{0,1,2\}$ için $y_n^{(i)}=y_{3n+i}$ dönüşümü dikkate alınırsa $(y_{3n+i})_{n\geq -1}$ çözümü

$$y_{3m+i}=y_{i-3}\prod_{j=0}^{m}a_{3j+i}+\sum_{l=0}^{m}b_{3l+i}\prod_{j=l+1}^{m}a_{3j+i},\ m\in\mathbb{N}_0, \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Öte yandan $i_1\in\{0,1,2,3\}$ ve $\forall n\geq -3$ için, $\frac{1}{y_n}=x_nx_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}$ dönüşümünden

$$
\begin{aligned}
x_{4n+i_1} &= \frac{1}{y_{4n+i_1} x_{4n+i_1-1} x_{4n+i_1-2} x_{4n+i_1-3}} \\
&= \frac{1}{y_{4n+i_1} \dfrac{1}{y_{4n+i_1-1} x_{4n+i_1-2} x_{4n+i_1-3} x_{4n+i_1-4}} x_{4n+i_1-2} x_{4n+i_1-3}} \\
&= \frac{y_{4n+i_1-1}}{y_{4n+i_1}} x_{4(n-1)+i_1} \\
&= \frac{y_{4n+i_1-1}}{y_{4n+i_1}} \frac{y_{4n+i_1-5}}{y_{4n+i_1-4}} \frac{y_{4n+i_1-9}}{y_{4n+i_1-8}} x_{4(n-3)+i_1}
\end{aligned}
\tag{3.1.8}
$$

bulunur. (3.1.7) ve (3.1.8) denklemlerinden, $j \in \{2,3,4,5\}$ ve $i \in \{0,1,2\}$ için,

$$
\begin{aligned}
x_{12m+3j+i} &= \frac{y_{12m+3j+i-1}}{y_{12m+3j+i}} \frac{y_{12m+3j+i-5}}{y_{12m+3j+i-4}} \frac{y_{12m+3j+i-9}}{y_{12m+3j+i-8}} x_{12(m-1)+3j+i} \\
&= \frac{y_{12m+3j+i-1}}{y_{12m+3j+i}} \frac{y_{12m+3j+i-5}}{y_{12m+3j+i-4}} \frac{y_{12m+3j+i-9}}{y_{12m+3j+i-8}} \frac{y_{12m+3j+i-13}}{y_{12m+3j+i-12}} \frac{y_{12m+3j+i-17}}{y_{12m+3j+i-16}} \frac{y_{12m+3j+i-21}}{y_{12m+3j+i-20}} x_{12(m-2)+3j+i} \\
&\;\vdots \\
&= x_{3j+i-12} \prod_{s=0}^{m} \frac{y_{12s+3j+i-1}}{y_{12s+3j+i}} \frac{y_{12s+3j+i-5}}{y_{12s+3j+i-4}} \frac{y_{12s+3j+i-9}}{y_{12s+3j+i-8}}
\end{aligned}
\tag{3.1.9}
$$

elde edilir. (3.1.7) ve (3.1.9) denklemlerinden, $(x_n)_{n\geq -6}$ fark denkleminin çözümü

$$
\begin{aligned}
x_{12m+3j} &= x_{3j-12} \prod_{s=0}^{m} \left(\frac{\left(y_{-1} \prod\limits_{i=0}^{4s+j-1} a_{3i+2} + \sum\limits_{l=0}^{4s+j-1} b_{3l+2} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-1} a_{3i+2} \right) \left(y_{-2} \prod\limits_{i=0}^{4s+j-2} a_{3i+1} + \sum\limits_{l=0}^{4s+j-2} b_{3l+1} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-2} a_{3i+1} \right)}{\left(y_{-3} \prod\limits_{i=0}^{4s+j} a_{3i} + \sum\limits_{l=0}^{4s+j} b_{3l} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j} a_{3i} \right) \left(y_{-1} \prod\limits_{i=0}^{4s+j-2} a_{3i+2} + \sum\limits_{l=0}^{4s+j-2} b_{3l+2} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-2} a_{3i+2} \right)} \cdot \frac{y_{-3} \prod\limits_{i=0}^{4s+j-3} a_{3i} + \sum\limits_{l=0}^{4s+j-3} b_{3l} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-3} a_{3i}}{y_{-2} \prod\limits_{i=0}^{4s+j-3} a_{3i+1} + \sum\limits_{l=0}^{4s+j-3} b_{3l+1} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-3} a_{3i+1}} \right) \\
&= x_{3j-12} \prod_{s=0}^{m} \left(\frac{\left(\prod\limits_{i=0}^{4s+j-1} a_{3i+2} + x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} \sum\limits_{l=0}^{4s+j-1} b_{3l+2} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-1} a_{3i+2} \right) \left(\prod\limits_{i=0}^{4s+j-2} a_{3i+1} + x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \sum\limits_{l=0}^{4s+j-2} b_{3l+1} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-2} a_{3i+1} \right)}{\left(\prod\limits_{i=0}^{4s+j} a_{3i} + x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6} \sum\limits_{l=0}^{4s+j} b_{3l} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j} a_{3i} \right) \left(\prod\limits_{i=0}^{4s+j-2} a_{3i+2} + x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} \sum\limits_{l=0}^{4s+j-2} b_{3l+2} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-2} a_{3i+2} \right)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-3} a_{3i} + x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6} \sum\limits_{l=0}^{4s+j-3} b_{3l} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-3} a_{3i}}{\prod\limits_{i=0}^{4s+j-3} a_{3i+1} + x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \sum\limits_{l=0}^{4s+j-3} b_{3l+1} \prod\limits_{i=l+1}^{4s+j-3} a_{3i+1}} \right)
\end{aligned}
$$

$$x_{12m+3j+1}=x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\left(\frac{y_{-3}\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i}+\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i}}{y_{-2}\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i+1}+\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i+1}}\;\frac{y_{-1}\prod_{i=0}^{4s+j-2}a_{3i+2}+\sum_{l=0}^{4s+j-2}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j-2}a_{3i+2}}{y_{-3}\prod_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i}+\sum_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i}}\;\frac{y_{-2}\prod_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+1}+\sum_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+1}}{y_{-1}\prod_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+2}+\sum_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+2}}\right)$$

$$=x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\left(\frac{\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i}}{\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i+1}}\;\frac{\prod_{i=0}^{4s+j-2}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum_{l=0}^{4s+j-2}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j-2}a_{3i+2}}{\prod_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i}}\;\frac{\prod_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+1}}{\prod_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+2}}\right)$$

$$x_{12m+3j+2}=x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\left(\frac{y_{-2}\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i+1}+\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i+1}}{y_{-1}\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i+2}+\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i+2}}\;\frac{y_{-3}\prod_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i}+\sum_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i}}{y_{-2}\prod_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i+1}+\sum_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i+1}}\;\frac{y_{-1}\prod_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+2}+\sum_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+2}}{y_{-3}\prod_{i=0}^{4s+j-2}a_{3i}+\sum_{l=0}^{4s+j-2}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j-2}a_{3i}}\right)$$

$$=x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\left(\frac{\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i+1}}{\prod_{i=0}^{4s+j}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum_{l=0}^{4s+j}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j}a_{3i+2}}\;\frac{\prod_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i}}{\prod_{i=0}^{4s+j-1}a_{3i+1}+x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\sum_{l=0}^{4s+j-1}b_{3l+1}\prod_{i=l+1}^{4s+j-1}a_{3i+1}}\;\frac{\prod_{i=0}^{4s+j-3}a_{3i+2}+x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\sum_{l=0}^{4s+j-3}b_{3l+2}\prod_{i=l+1}^{4s+j-3}a_{3i+2}}{\prod_{i=0}^{4s+j-2}a_{3i}+x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\sum_{l=0}^{4s+j-2}b_{3l}\prod_{i=l+1}^{4s+j-2}a_{3i}}\right)$$

elde edilir.

3.2 $x_n = \dfrac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a+bx_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})}$ Fark Denkleminin Çözümü

Bu bölümde (3.1.1) denkleminde $a_n = a$, $b_n = b$, yani a ve b reel sabitler, olmak üzere sabit katsayılı lineer olmayan

$$x_n = \frac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a+bx_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.2.1}$$

rasyonel fark denkleminin çözümü ve çözümlerinin asimptotik davranışları incelenmiştir. Bu alt bölümde çözümlerin iyi tanımlı, yani $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $x_{n-1}x_{n-2}(a+bx_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}) \neq 0$, olduğu kabul edilmiştir.

Teorem 3.2.1 $(x_n)_{n\geq -6}$, (3.2.1) denkleminin çözümü, $a \neq 1$ ve $i = 1,2,\ldots,6$ için $x_{-j} \neq 0$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denkleminin çözümü

$$x_{12m+3j} = x_{3j-12}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4s+j}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4s+j+1}}\,\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4s+j-1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4s+j-1}}$$
$$\times\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4s+j-2}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4s+j-2}}$$

$$x_{12m+3j+1} = x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4s+j+1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4s+j+1}}\,\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4s+j-1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4s+j}}$$
$$\times\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4s+j-2}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4s+j-2}}$$

$$x_{12m+3j+2} = x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4s+j+1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4s+j+1}}\,\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4s+j}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4s+j}}$$
$$\times\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4s+j-2}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4s+j-1}}$$

şeklindedir. Burada $j \in \{2,3,4,5\}$' dir.

İspat. (3.1.7) denkleminde $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $a_n = a$, $b_n = b$ alınırsa $(y_n)_{n\geq -3}$ denkleminin çözümü

$$y_{3m+i} = y_{i-3}a^{m+1} + b\frac{1-a^{m+1}}{1-a} \tag{3.2.2}$$

şeklinde olacaktır. Öte yandan (3.1.9) denklemi ve $y_{-1} = (x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})^{-1}$, $y_{-2} = (x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})^{-1}$ ve $y_{-3} = (x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})^{-1}$ eşitklikleri dikkate alınırsa, $j \in \{2,3,4,5\}$ için (3.2.1) denkleminin çözümleri

$$x_{12m+3j}=x_{3j-12}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)a^{4s+j}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)a^{4s+j+1}}\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)a^{4s+j-1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)a^{4s+j-1}}$$
$$\times\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)a^{4s+j-2}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)a^{4s+j-2}}$$

$$x_{12m+3j+1}=x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)a^{4s+j+1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)a^{4s+j+1}}\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)a^{4s+j-1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)a^{4s+j}}$$
$$\times\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)a^{4s+j-2}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)a^{4s+j-2}}$$

$$x_{12m+3j+2}=x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)a^{4s+j+1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)a^{4s+j+1}}\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)a^{4s+j}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)a^{4s+j}}$$
$$\times\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)a^{4s+j-2}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)a^{4s+j-1}}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 $(x_n)_{n\geq -6}$, (3.2.1) denkleminin çözümü, $a=1$ ve $i=1,2,\ldots,6$ için $x_{-i}\neq 0$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denkleminin çözümü

$$x_{12m+3j}=x_{3j-12}\prod_{s=0}^{m}\frac{1+(4s+j)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{1+(4s+j+1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\frac{1+(4s+j-1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1+(4s+j-1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\frac{1+(4s+j-2)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{1+(4s+j-2)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}$$

$$x_{12m+3j+1}=x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\frac{1+(4s+j+1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{1+(4s+j+1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\frac{1+(4s+j-1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{1+(4s+j)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\frac{1+(4s+j-2)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1+(4s+j-2)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}$$

$$x_{12m+3j+2}=x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\frac{1+(4s+j+1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1+(4s+j+1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\frac{1+(4s+j)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{1+(4s+j)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\frac{1+(4s+j-2)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{1+(4s+j-1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}$$

şeklindedir. Burada $j\in\{2,3,4,5\}$' dir.

İspat. (3.1.7) denkleminde $\forall n\in\mathbb{N}_0$ için $a_n=1$, $b_n=b$ alınırsa (ya da Teorem 2.2.1.8'den) $(y_n)_{n\geq -3}$ denkleminin çözümü

$$y_{3m+i}=y_{i-3}+(m+1)b \qquad (3.2.3)$$

şeklinde olacaktır. Öte yandan (3.1.9) denklemi ve $y_{-1}=(x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})^{-1}$, $y_{-2}=(x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})^{-1}$ ve $y_{-3}=(x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})^{-1}$ eşitklikleri dikkate alınırsa, $j\in\{2,3,4,5\}$ için (3.2.1) denkleminin

$$x_{12m+3j}=x_{3j-12}\prod_{s=0}^{m}\frac{1+(4s+j)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{1+(4s+j+1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\frac{1+(4s+j-1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1+(4s+j-1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\frac{1+(4s+j-2)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{1+(4s+j-2)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}$$

$$x_{12m+3j+1}=x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\frac{1+(4s+j+1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{1+(4s+j+1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\frac{1+(4s+j-1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{1+(4s+j)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\frac{1+(4s+j-2)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1+(4s+j-2)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}$$

$$x_{12m+3j+2}=x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\frac{1+(4s+j+1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1+(4s+j+1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\frac{1+(4s+j)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{1+(4s+j)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\frac{1+(4s+j-2)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{1+(4s+j-1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}$$

çözümleri elde edilir.

Teorem 3.2.3: $(x_n)_{n\geq-6}$, (3.2.1) denkleminin çözümü, $a=-1$, $b\neq 0$ ve $i=1,2,\ldots,6$ için $x_{-i}\neq 0$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denkleminin çözümü

$$x_{12m+3j}=x_{3j-12}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{4s+j+1}}\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{4s+j-1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j-1}}$$
$$\times\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{4s+j-2}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{4s+j-2}}$$

$$x_{12m+3j+1}=x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{4s+j+1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{4s+j+1}}\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j-1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{4s+j}}$$
$$\times\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{4s+j-2}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j-2}}$$

$$x_{12m+3j+2}=x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{4s+j+1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j+1}}\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{4s+j}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{4s+j}}$$
$$\times\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j-2}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{4s+j-1}}$$

şeklindedir. Burada $j\in\{2,3,4,5\}$' dir.

İspat. Teorem 3.2.1'den ispat açıktır.

Teorem 3.2.4 $(x_n)_{n\geq-6}$, (3.2.1) denkleminin çözümü, $a\neq 0$, $b=0$ ve $i=1,2,\ldots,6$ için $x_{-i}\neq 0$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denkleminin çözümü $x_{12m+k}=\frac{x_{k-12}}{a^{m+1}}$ dir. Burada $k=6,7,\ldots,17$ 'dir.

İspat. Varsayalım ki $a\neq 0$ ve $b=0$ olsun. Bu durumda Denklem (3.2.1)

$$x_n=\frac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{ax_{n-1}x_{n-2}} \tag{3.2.4}$$

şekline indirgenir. Öte yandan Teorem 3.2.1' de ki $(x_n)_{n\geq-6}$ çözümlerinde $b=0$ alınırsa sırasıyla $x_{12m+3j}=\frac{x_{3j-12}}{a^{m+1}}$, $x_{12m+3j+1}=\frac{x_{3j-11}}{a^{m+1}}$ ve $x_{12m+3j+2}=\frac{x_{3j-10}}{a^{m+1}}$ olacaktır. Burada $j\in\{2,3,4,5\}$ ' dir. Bu üç denklem tek bir denklem de yazılacak olursa

$k=6,7,\ldots,17$ olmak üzere Denklem (3.2.1)' in çözümü $x_{12m+k}=\frac{x_{k-12}}{a^{m+1}}$ şeklinde olacaktır.

Teorem 3.2.5: Varsayalım ki $a\neq-1$, $b\neq0$ ve $\{x_n\}_{n=-6}^{\infty}$ (3.2.1) denkleminin iyi tanımlı bir çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

a) Eğer $|a|>1$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1-a}{b}$ ise,

o zaman $m\to\infty$ iken $x_m\to0$ ' dır.

b) Eğer $|a|>1$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}=\frac{1-a}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=\frac{1-a}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1-a}{b}$ ise,

o zaman $m\to\infty$ iken $x_{12m+3j}\to0$, $|x_{12m+3j+1}|\to\infty$, $|x_{12m+3j+2}|\to\infty$ ' dır.

c) Eğer $|a|>1$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}=\frac{1-a}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{1-a}{b}$ ise,

o zaman $m\to\infty$ iken $|x_{12m+3j}|\to\infty$, $x_{12m+3j+1}\to0$, $|x_{12m+3j+2}|\to\infty$ ' dır.

d) Eğer $|a|>1$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=\frac{1-a}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{1-a}{b}$ ise,

o zaman $m\to\infty$ iken $|x_{12m+3j}|\to\infty$, $|x_{12m+3j+1}|\to\infty$, $x_{12m+3j+2}\to0$ ' dır.

e) Eğer $|a|>1$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}=\frac{1-a}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1-a}{b}$ ise,

o zaman $m\to\infty$ iken $x_{12m+3j}\to0$, $x_{12m+3j+1}\to0$, $|x_{12m+3j+2}|\to\infty$ ' dır.

f) Eğer $|a|>1$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=\frac{1-a}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1-a}{b}$ ise,

o zaman $m\to\infty$ iken $x_{12m+3j}\to0$, $|x_{12m+3j+1}|\to\infty$, $x_{12m+3j+2}\to0$ ' dır.

g) Eğer $|a|>1$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{1-a}{b}$ ise,

o zaman $m\to\infty$ iken $|x_{12m+3j}|\to\infty$, $x_{12m+3j+1}\to0$, $x_{12m+3j+2}\to0$ ' dır.

h) Eğer $|a|<1$ ise, $\forall i=0,1,\ldots,11$ için $(x_{12m+i})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizileri yakınsaktır.

i) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}=x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{1-a}{b}$ ya da $a=0$ ise,

$x_{12m+j}=x_{j-12}$ dir. Burada $m\in\mathbb{N}_0$ ve $j=6,7,\ldots,17$' dir.

j) Eğer $a=1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $x_m\to 0$' dır.

İspat. $m\geq -1$, $a\neq -1$, $b\neq 0$ ve $\forall j\in\{2,3,4,5\}$ için w_m^{3j}, w_m^{3j+1} ve w_m^{3j+2} ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$w_m^{3j}=\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j+1}}\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j-1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j-1}}\times\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j-2}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j-2}} \quad (3.2.5)$$

$$w_m^{3j+1}=\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j+1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j+1}}\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j-1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j}}\times\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j-2}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j-2}} \quad (3.2.6)$$

$$w_m^{3j+2}=\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j+1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j+1}}\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j}}\times\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j-2}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j-1}} \quad (3.2.7)$$

(a): Varsayalım ki $|a|>1$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\frac{1-a}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1-a}{b}$ olsun. (3.2.5), (3.2.6) ve (3.2.7) denklemlerinden, $\forall j\in\{2,3,4,5\}$ için

$$\lim_{m\to\infty}w_m^{3j}=\frac{1}{a},\quad \lim_{m\to\infty}w_m^{3j+1}=\frac{1}{a},\quad \lim_{m\to\infty}w_m^{3j+2}=\frac{1}{a} \quad (3.2.8)$$

elde edilir. Öte yandan Denklem (3.2.8), Teorem 3.2.1 ve $|a|>1$ kabulünden ispat kolayca görülür.

(b): Varsayalım ki $|a|>1$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}=x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=\frac{1-a}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1-a}{b}$ olsun. (3.2.5), (3.2.6) ve (3.2.7) denklemlerinden, $\forall j\in\{2,3,4,5\}$ için

$$\lim_{m\to\infty}w_m^{3j}=\frac{1}{a^3},\quad \lim_{m\to\infty}w_m^{3j+1}=a,\quad \lim_{m\to\infty}w_m^{3j+2}=a \quad (3.2.9)$$

elde edilir. Öte yandan Denklem (3.2.9), Teorem 3.2.1 ve $|a|>1$ kabulünden ispat kolayca görülür.

(c)-(d)'nin ispatı (b)' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

(e): Varsayalım ki $|a|>1,\ x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}=\dfrac{1-a}{b},\ x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\dfrac{1-a}{b}$ ve $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\dfrac{1-a}{b}$ olsun. O zaman (3.2.5), (3.2.6) ve (3.2.7) denklemlerinden, $\forall j\in\{2,3,4,5\}$ için

$$\lim_{m\to\infty}w_m^{3j}=\frac{1}{a^2},\quad \lim_{m\to\infty}w_m^{3j+1}=\frac{1}{a^2},\quad \lim_{m\to\infty}w_m^{3j+2}=a^2 \tag{3.2.10}$$

elde edilir. Öte yandan Denklem (3.2.10), Teorem 3.2.1 ve $|a|>1$ kabülünden ispat kolayca görülür.

(f)-(g)' nin ispatı (e)' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

(h) : $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ olmak üzere, $(1+x)^{-1}=1-x+o(x^2)$ asimptotik bağıntısı ve $\forall j\in\{2,3,4,5\}$ ve yeterince büyük m değerleri için

$$\begin{aligned}
w_m^{3j}&=\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j+1}}\,\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j-1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j-1}}\\
&\quad\times\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j-2}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j-2}}\\
&=1+\frac{(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\left(\frac{a-1}{a}\right)a^{4m+j}+\frac{(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\left(\frac{a-1}{a^2}\right)a^{4m+j}\\
&\quad+\frac{(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\left(\frac{1}{a^2}-a\right)a^{4m+j}+O(a^{4m})
\end{aligned}\tag{3.2.11}$$

$$\begin{aligned}
w_m^{3j+1}&=\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j+1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j+1}}\,\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j-1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j}}\\
&\quad\times\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j-2}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j-2}}\\
&=1+\frac{(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}(a-1)a^{4m+j}+\frac{(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right)a^{4m+j}\\
&\quad+\frac{(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\left(\frac{1}{a^2}-a\right)a^{4m+j}+O(a^{4m})
\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

$$\begin{aligned}
w_m^{3j+2}&=\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j+1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j+1}}\,\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})a^{4m+j}}\\
&\quad\times\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})a^{4m+j-2}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})a^{4m+j-1}}\\
&=1+\frac{(1-a-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}(a-1)a^{4m+j}+\frac{(1-a-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\left(1-\frac{1}{a}\right)a^{4m+j}\\
&\quad+\frac{(1-a-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\left(\frac{1}{a^2}-a\right)a^{4m+j}+O(a^{4m})
\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

yazılabilir. Öte yandan (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) denklemleri, $|a|<1$ kabulü ve $\left(\prod_{s=0}^{m} w_s^{3j}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\prod_{s=0}^{m} w_s^{3j+1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\prod_{s=0}^{m} w_s^{3j+2}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$, dizilerinin yakınsaklığından $\forall i=0,1,\ldots,11$ için $\left(x_{12m+i}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin yakınsak olduğu kolayca görülür.

(i): Teorem 3.2.1' den ispat açıktır.

(j): $m\geq -1$, $a=1$, $b\neq 0$ ve $j\in\{2,3,4,5\}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
x_{12m+3j} &= x_{3j-12}\prod_{s=0}^{m}\frac{1+(4s+j)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{1+(4s+j+1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\,\frac{1+(4s+j-1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1+(4s+j-1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\,\frac{1+(4s+j-2)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{1+(4s+j-2)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\\
&= x_{3j-12}C_1(m_0)\prod_{s=m_0+1}^{m}\frac{\left(1+\frac{1+jbx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{4sbx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\right)\left(1+\frac{1+(j-1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{4sbx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\right)}{\left(1+\frac{1+(j+1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{4sbx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\right)\left(1+\frac{1+(j-1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{4sbx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\right)}\\
&\quad\times\frac{\left(1+\frac{1+(j-2)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{4sbx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\right)}{\left(1+\frac{1+(j-2)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{4sbx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\right)}\\
&= x_{3j-12}C_1(m_0)\prod_{s=m_0+1}^{m}\left(1+\frac{1}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\left(1-\frac{3}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\\
&= x_{3j-12}C_1(m_0)e^{\sum_{s=m_0+1}^{m}\ln\left(1-\frac{1}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)}\\
&= x_{3j-12}C_1(m_0)e^{\left(-\frac{1}{4}\sum_{s=m_0+1}^{m}\left(\frac{1}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\right)}
\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

$$\begin{aligned}
x_{12m+3j+1} &= x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\frac{1+(4s+j+1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{1+(4s+j+1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\,\frac{1+(4s+j-1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{1+(4s+j)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\,\frac{1+(4s+j-2)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1+(4s+j-2)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\\
&= x_{3j-11}C_2(m_0)\prod_{s=m_0+1}^{m}\frac{\left(1+\frac{1+(j+1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{4sbx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\right)\left(1+\frac{1+(j-1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{4sbx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\right)}{\left(1+\frac{1+(j+1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{4sbx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\right)\left(1+\frac{1+jbx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{4sbx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\right)}\\
&\quad\times\frac{\left(1+\frac{1+(j-2)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{4sbx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\right)}{\left(1+\frac{1+(j-2)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{4sbx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\right)}\\
&= x_{3j-11}C_2(m_0)\prod_{s=m_0+1}^{m}\left(1+\frac{1}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\left(1-\frac{3}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\\
&= x_{3j-11}C_2(m_0)e^{\sum_{s=m_0+1}^{m}\ln\left(1-\frac{1}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)}\\
&= x_{3j-11}C_2(m_0)e^{\left(-\frac{1}{4}\sum_{s=m_0+1}^{m}\left(\frac{1}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\right)}
\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

$$
\begin{aligned}
x_{12m+3j+2} &= x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\frac{1+(4s+j+1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{1+(4s+j+1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\frac{1+(4s+j)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{1+(4s+j)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\frac{1+(4s+j-2)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{1+(4s+j-1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}} \\
&= x_{3j-10}C_3(m_0)\prod_{s=m_0+1}^{m}\frac{\left(1+\frac{1+(j+1)bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{4sbx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\right)}{\left(1+\frac{1+(j+1)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x}{4sbx_{-1}x_{-2}x_{-3}x}\right)}\frac{\left(1+\frac{1+jbx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{4sbx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\right)}{\left(1+\frac{1+jbx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}{4sbx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}}\right)} \\
&\quad\times\frac{\left(1+\frac{1+(j-2)bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}{4sbx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}}\right)}{\left(1+\frac{1+(j-1)bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}{4sbx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}}\right)} \\
&= x_{3j-10}C_3(m_0)\prod_{s=m_0+1}^{m}\left(1+\frac{1}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\left(1-\frac{3}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right) \\
&= x_{3j-10}C_3(m_0)e^{\sum_{s=m_0+1}^{m}\ln\left(1-\frac{1}{4s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)} \\
&= x_{3j-10}C_3(m_0)e^{\left(-\frac{1}{4}\sum_{s=m_0+1}^{m}\left(\frac{1}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.2.16}
$$

Ayrıca $m\to\infty$ iken $\sum_{s=m_0+1}^{m}\frac{1}{s}$ serisi ıraksak olduğundan, $m\to\infty$ iken $\sum_{j=m_0+1}^{m}O\left(\frac{1}{s^2}\right)$ serisi ise yakınsak olacaktır. Öte yandan (3.2.14), (3.2.15) ve (3.2.16) ifadelerinde $m\to\infty$ iken limit alındığında $x_m\to 0$ olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 3.2.6: $(x_n)_{n\geq -6}$, (3.2.1) denkleminin iyi tanımlanmış çözümü, $a=-1$, $b\neq 0$, $i_1=1,2,\dots,6$ için $x_{-i_1}\neq 0$, $t\in\{1,2\}$ ve $i=0,1,2$ için $N_i=bx_{-i-1}x_{-i-2}x_{-i-3}x_{-i-4}-1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_4=x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{2}{b}$ ise $(x_n)_{n\geq -6}$ dizisi 12 periotlu çözümlere sahiptir.

b) Eğer $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{2}{b}$ ve $|N_0|<1$ ise $m\to\infty$ iken $|x_{12m+6t+2i}|\to\infty$, ve $x_{12m+6t+2i+1}\to 0$ dır.

c) Eğer $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{2}{b}$ ve $|N_0|>1$ ise $m\to\infty$ iken $x_{12m+6t+2i}\to 0$ ve $|x_{12m+6t+2i+1}|\to\infty$ dır.

d) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} = x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6} = \frac{2}{b}$ ve $|N_1| < 1$ ise $m \to \infty$ iken $x_{12m+6t+2i} \to 0$ ve $|x_{12m+6t+2i+1}| \to \infty$ dır.

e) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} = x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6} = \frac{2}{b}$ ve $|N_1| > 1$ ise $m \to \infty$ iken $|x_{12m+6t+2i}| \to \infty$ ve $x_{12m+6t+2i+1} \to 0$ dır.

f) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} = x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} = \frac{2}{b}$ ve $|N_2| < 1$ ise $m \to \infty$ iken $x_{12m+6t+2i+1} \to 0$ ve $|x_{12m+6t+2i}| \to \infty$ dır.

g) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} = x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} = \frac{2}{b}$, ve $|N_2| > 1$ ise $m \to \infty$ iken $|x_{12m+6t+2i+1}| \to \infty$ ve $x_{12m+6t+2i} \to 0$ dır.

h) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} = \frac{2}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \neq \frac{1}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6} \neq \frac{1}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \neq \frac{2}{b}$, ve $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6} \neq \frac{2}{b}$ ve $\left|\frac{N_1}{N_2}\right| < 1$ ise $m \to \infty$ iken $|x_{12m+6t+2i+1}| \to \infty$ ve $x_{12m+6t+2i} \to 0$ dır.

i) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} = \frac{2}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \neq \frac{1}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6} \neq \frac{1}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5} \neq \frac{2}{b}$, ve $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6} \neq \frac{2}{b}$ ve $\left|\frac{N_1}{N_2}\right| > 1$ ise $m \to \infty$ iken $x_{12m+6t+2i+1} \to 0$ ve $|x_{12m+6t+2i}| \to \infty$ dır.

j) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} = \frac{2}{b}$, $\frac{N_1}{N_2} = 1$ ise $(x_n)_{n \geq -6}$ dizisi 12 periyotlu çözümlere sahiptir.

k) Eğer $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4} = \frac{2}{b}$ *ve* $\frac{N_1}{N_2} = -1$ ise $(x_n)_{n \geq -6}$ dizisi 24 periyotlu çözümlere sahiptir.

l) Eğer $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=\frac{2}{b}$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{1}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1}{b}$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{2}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1}{b}$ ve $|N_0N_2|<1$ ise $m\to\infty$ iken $x_{12m+6t+2i+1}\to 0$ ve $|x_{12m+6t+2i}|\to\infty$ dır.

m) Eğer $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=\frac{2}{b}$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{1}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1}{b}$ ve $|N_0N_2|>1$ ise $m\to\infty$ iken $|x_{12m+6t+2i+1}|\to\infty$ ve $x_{12m+6t+2i}\to 0$ dır.

n) Eğer $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=\frac{2}{b}$, $N_0N_2=1$ ise $(x_n)_{n\geq -6}$ dizisi 12 periyotlu çözümlere sahiptir.

o) Eğer $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=\frac{2}{b}$, $N_0N_2=-1$ ise $(x_n)_{n\geq -6}$ dizisi 24 periyotlu çözümlere sahiptir.

p) Eğer $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{2}{b}$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{1}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\frac{1}{b}$, ve $\left|\frac{N_0}{N_1}\right|<1$ ise $m\to\infty$ iken $x_{12m+6t+2i+1}\to 0$ ve $|x_{12m+6t+2i}|\to\infty$ dır.

q) Eğer $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{2}{b}$, $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{1}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\frac{1}{b}$, ve $\left|\frac{N_0}{N_1}\right|>1$ ise $m\to\infty$ iken $|x_{12m+6t+2i+1}|\to\infty$ ve $x_{12m+6t+2i}\to 0$ dır.

r) Eğer $x_{-3}x_{-4}x_{-4}x_{-5}=\frac{2}{b}$, $\frac{N_0}{N_1}=1$ ise $(x_n)_{n\geq -6}$ dizisi 12 periyotlu çözümlere sahiptir.

s) Eğer $x_{-3}x_{-4}x_{-4}x_{-5}=\frac{2}{b}$, $\frac{N_0}{N_1}=-1$ ise $(x_n)_{n\geq -6}$ dizisi 24 periyotlu çözümlere sahiptir.

İspat. Varsayalım ki $a=-1$, $b\neq 0$ ve $i_1=1,2,\ldots,6$ için $x_{-i_1}\neq 0$ ve $i=0,1,2$ için $N_i=bx_{-i-1}x_{-i-2}x_{-i-3}x_{-i-4}-1$ olsun. Bu durumda;

<u>(a)'nın ispatı:</u> Teorem 3.2.5'in (i) öncülünde $a=-1$ alınırsa sonuç açıktır.

<u>(b)-(c)' nin ispatı:</u> Varsayalım ki $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}=x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}=\frac{2}{b}$ ve $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\neq\frac{2}{b}$ olsun. Teorem 3.2.3' ten

$$x_{12m+3j}=x_{3j-12}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j-1}}$$

$$=\frac{x_{3j-12}}{\left(\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{j-1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{j}}\right)^{m+1}} \tag{3.2.17}$$

$$x_{12m+3j+1}=x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j-1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j-2}}$$

$$=\frac{x_{3j-11}}{\left(\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{j-2}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{j-1}}\right)^{m+1}} \tag{3.2.18}$$

$$x_{12m+3j+2}=x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j-2}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{4s+j+1}}$$

$$=\frac{x_{3j-10}}{\left(\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{j+1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{j-2}}\right)^{m+1}} \tag{3.2.19}$$

yazılabilir. Öte yandan $j\in\{2,3,4,5\}$ olduğundan $t\in\{1,2\}$ için $j=2t$ ve $j=2t+1$ dönüşümleri (3.2.17), (3.2.18) ve (3.2.19) denklemlerinde yerine yazılırsa, sırasıyla,

$$x_{12m+6t}=\frac{x_{6t-12}}{\left(\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{2t-1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{2t}}\right)^{m+1}}=\frac{x_{6t-12}}{(bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}-1)^{m+1}} \tag{3.2.20}$$

$$x_{12m+6t+3}=\frac{x_{6t-9}}{\left(\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{2t}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{2t+1}}\right)^{m+1}}=\frac{x_{6t-9}}{\left(\frac{1}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}-1}\right)^{m+1}} \tag{3.2.21}$$

$$x_{12m+6t+1}=\frac{x_{6t-11}}{\left(\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{2t-2}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{2t-1}}\right)^{m+1}}=\frac{x_{6t-11}}{\left(\frac{1}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}-1}\right)^{m+1}} \tag{3.2.22}$$

$$x_{12m+6t+4}=\frac{x_{6t-8}}{\left(\frac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{2t-1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4})(-1)^{2t}}\right)^{m+1}}=\frac{x_{6t-8}}{(bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}-1)^{m+1}} \tag{3.2.23}$$

$$x_{12m+6t+2}=\frac{x_{6t-10}}{\left(\dfrac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)(-1)^{2t+1}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)(-1)^{2t-2}}\right)^{m+1}}=\frac{x_{6t-10}}{\left(bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}-1\right)^{m+1}} \qquad (3.2.24)$$

$$x_{12m+6t+5}=\frac{x_{6t-7}}{\left(\dfrac{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)(-1)^{2t+2}}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}+\left(2-bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}\right)(-1)^{2t-1}}\right)^{m+1}}=\frac{x_{6t-7}}{\left(\dfrac{1}{bx_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}-1}\right)^{m+1}} \qquad (3.2.25)$$

elde edilir. (3.2.20)-(3.2.25) denklemlerinden (b)-(c) öncüllerinin geçerliliği kolaylıkla görülür.

(d)-(e) ve (f)-(g)'nin ispatı : (b)-(c)' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

(h)-(k)' nin ispatı: Varsayalım ki $x_{-1}x_{-2}x_{-3}x_{-4}=\frac{2}{b}$, $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\frac{1}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{1}{b}$ ve $x_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\neq\frac{2}{b}$, $x_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\neq\frac{2}{b}$ olsun. Teorem 3.2.3' ten

$$x_{12m+3j}=x_{3j-12}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{4s+j-1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{4s+j+1}}\,\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{4s+j-2}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{4s+j-2}}$$

$$=\frac{x_{3j-12}}{\left(\dfrac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{j+1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{j-1}}\right)^{m+1}\left(\dfrac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{j-2}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{j-2}}\right)^{m+1}}$$

$$x_{12m+3j+1}=x_{3j-11}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{4s+j+1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{4s+j+1}}\,\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{4s+j-2}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{4s+j}}$$

$$=\frac{x_{3j-11}}{\left(\dfrac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{j+1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{j+1}}\right)^{m+1}\left(\dfrac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{j}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{j-2}}\right)^{m+1}}$$

$$x_{12m+3j+2}=x_{3j-10}\prod_{s=0}^{m}\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{4s+j+1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{4s+j-1}}\,\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{4s+j}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{4s+j}}$$

$$=\frac{x_{3j-10}}{\left(\dfrac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{j-1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{j+1}}\right)^{m+1}\left(\dfrac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+\left(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}\right)(-1)^{j}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+\left(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}\right)(-1)^{j}}\right)^{m+1}}$$

elde edilir. Öte yandan $j\in\{2,3,4,5\}$ olduğundan $t\in\{1,2\}$ için $j=2t$ ve $j=2t+1$ dönüşümleri yukarıdaki x_{12m+3j}, $x_{12m+3j+1}$, $x_{12m+3j+2}$ denklemlerinde sırasıyla yazılırsa,

$$x_{12m+6t}=\frac{x_{6t-12}}{\left(\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t+1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t-1}}\right)^{m+1}\left(\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t-2}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t-2}}\right)^{m+1}}$$

$$=\frac{x_{6t-12}}{\left(\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}-1}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}-1}\right)^{m+1}}$$

$$x_{12m+6t+3}=\frac{x_{6t-9}}{\left(\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t+2}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t}}\right)^{m+1}\left(\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t-1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t-1}}\right)^{m+1}}$$

$$=\frac{x_{6t-9}}{\left(\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}-1}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}-1}\right)^{m+1}}$$

$$x_{12m+6t+1}=\frac{x_{6t-11}}{\left(\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t+1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t+1}}\right)^{m+1}\left(\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t-2}}\right)^{m+1}}$$

$$=\frac{x_{6t-11}}{\left(\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}-1}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}-1}\right)^{m+1}}$$

$$x_{12m+6t+4}=\frac{x_{6t-8}}{\left(\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t+2}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t+2}}\right)^{m+1}\left(\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t+1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t-1}}\right)^{m+1}}$$

$$=\frac{x_{6t-8}}{\left(\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}-1}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}-1}\right)^{m+1}}$$

$$x_{12m+6t+2}=\frac{x_{6t-10}}{\left(\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t-1}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t+1}}\right)^{m+1}\left(\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t}}\right)^{m+1}}$$

$$=\frac{x_{6t-10}}{\left(\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}-1}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}-1}\right)^{m+1}}$$

$$x_{12m+6t+5}=\frac{x_{6t-7}}{\left(\frac{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t}}{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t+2}}\right)^{m+1}\left(\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}+(2-bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5})(-1)^{2t+1}}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}+(2-bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6})(-1)^{2t+1}}\right)^{m+1}}$$

$$=\frac{x_{6t-7}}{\left(\frac{bx_{-2}x_{-3}x_{-4}x_{-5}-1}{bx_{-3}x_{-4}x_{-5}x_{-6}-1}\right)^{m+1}}$$

elde edilir. x_{12m+6t}, $x_{12m+6t+1}$, $x_{12m+6t+2}$, $x_{12m+6t+3}$, $x_{12m+6t+4}$, $x_{12m+6t+5}$ denklemlerinden (h)-(k) öncüllerinin geçerliliği kolaylıkla görülürür.

(l)-(o) ve (p)-(s)'nin ispatı : (h)-(k)' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.2.7 $(x_n)_{n\geq -6}$, (3.2.1) denkleminin iyi tanımlanmış çözümü, $a \neq 0$, $b = 0$ ve $i = 1, 2, \ldots, 6$ için $x_{-i} \neq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) Eğer $|a| > 1$ ise $m \to \infty$ iken $x_m \to 0$ dır.

b) Eğer $|a| < 1$ ise $m \to \infty$ iken $|x_m| \to \infty$ dur.

c) Eğer $a = 1$ ise $(x_n)_{n\geq -6}$ dizisi 12 periyotludur.

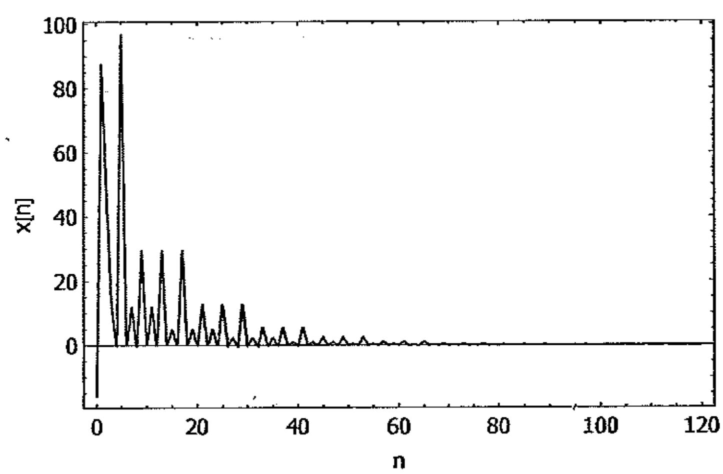
d) Eğer $a = -1$ ise $(x_n)_{n\geq -6}$ dizisi 24 periyotludur.

İspat. Varsayalım ki $a \neq 0$ ve $b = 0$ olsun. Teorem 3.2.4' ten $(x_n)_{n\geq -6}$' nin çözümü $x_{12m+k} = \dfrac{x_{k-12}}{a^{m+1}}$ dir. Burada $k = 6, 7, \ldots, 17$ 'dir. Teoremin ispatı $(x_n)_{n\geq -6}$' nin çözümünden açıktır.

4. NÜMRİK UYGULAMALAR

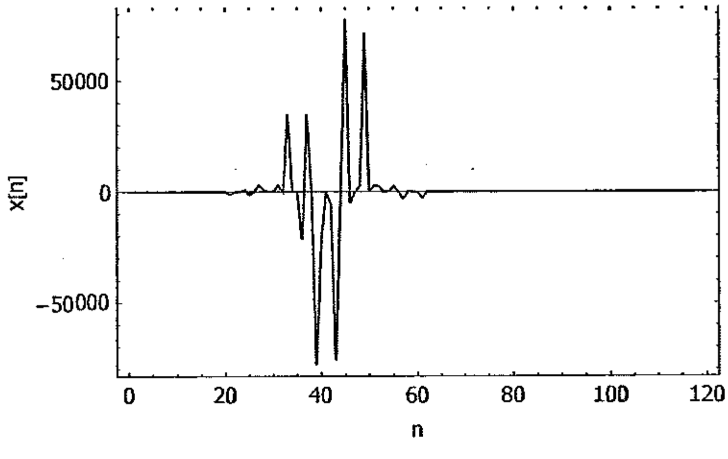
Bu bölümde, üçüncü bölümde çalışılan fark denklemi için nümerik uygulamalar verildi.

Örnek 4.1: Aşağıda, Teorem 3.2.5.'nin a bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=2,27$ ve $b=1,34$ parametreleri için $x_0=-15.71, x_1=87,76, x_2=48.97, x_3=12.23$ $x_4=-0.45$ ve $x_5=97.01$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



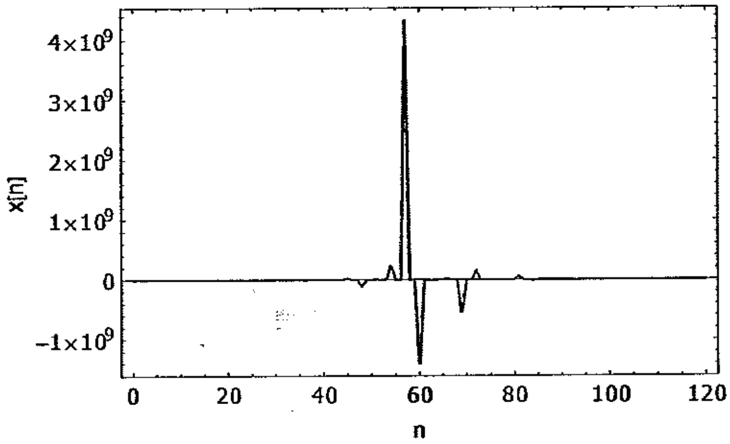
Grafik 4.1: Teorem 3.2.5' in a öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.2: Aşağıda, Teorem 3.2.5.'nin b bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-26.2$ ve $b=5$ parametreleri için $x_0=1.25, x_1=0.4, x_2=2.56, x_3=4.25$, $x_4=1.25$ ve $x_5=2.25$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



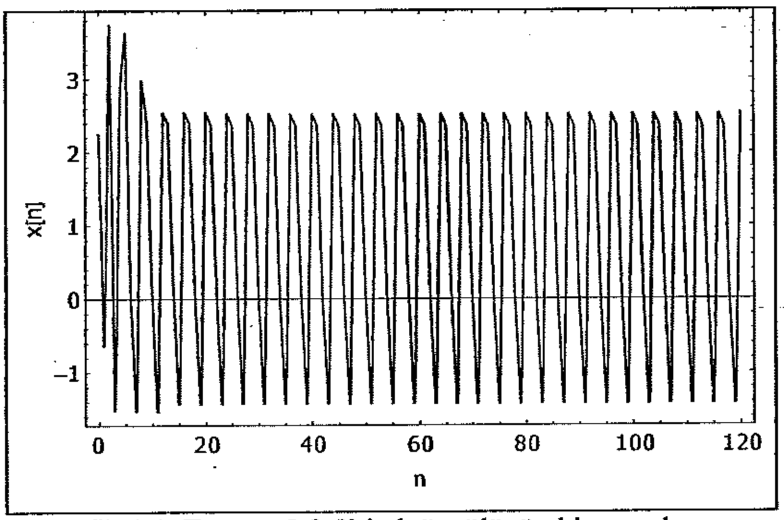
Grafik 4.2: Teorem 3.2.5' in b öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.3: Aşağıda, Teorem 3.2.5.'nin e bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-9.24$ ve $b=1.6$ parametreleri için $x_0=0.25, x_1=4, x_2=40, x_3=0.16, x_4=2.18$ ve $x_5=3.75$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



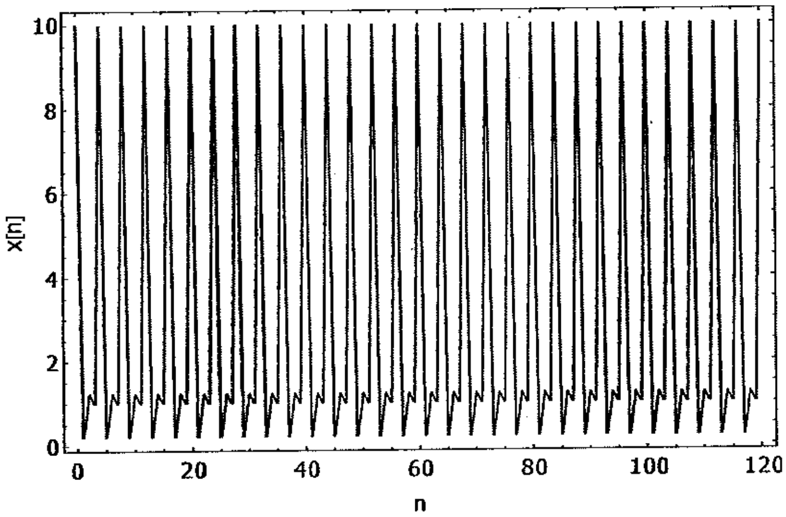
Grafik 4.3: Teorem 3.2.5' in e öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.4: Aşağıda, Teorem 3.2.5.'nin h bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=0.5$ ve $b=2$ parametreleri için $x_0=2.25, x_1=-0.64, x_2=3.75, x_3=-1.52$, $x_4=2.91$ ve $x_5=3.64$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



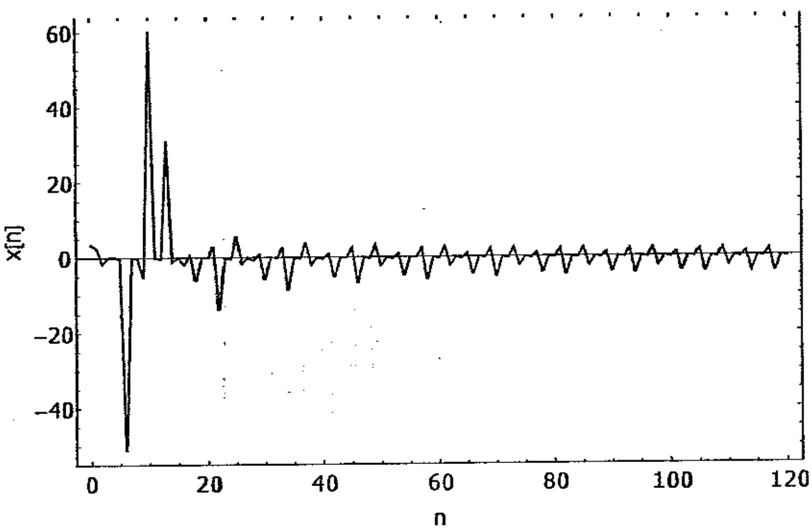
Grafik 4.4: Teorem 3.2.5' in h öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.5: Aşağıda, Teorem 3.2.5.'nin i bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=0.2$ ve $b=0.32$ parametreleri için $x_0=10, x_1=0.2, x_2=1.25, x_3=1, x_4=10$ ve $x_5=0.2$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



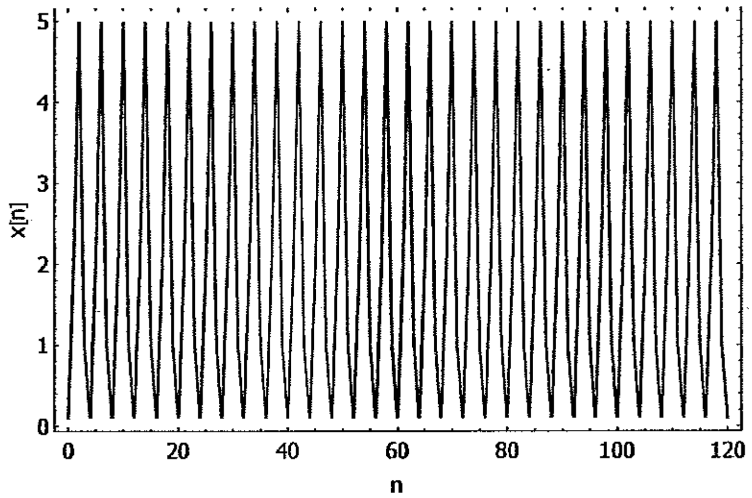
Grafik 4.5: Teorem 3.2.5' in i öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.6: Aşağıda, Teorem 3.2.5.'nin k bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=1$ ve $b=2$ parametreleri için $x_0=3.52, x_1=2.54, x_2=-1.56, x_3=0.13, x_4=0.28$ ve $x_5=-0.37$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



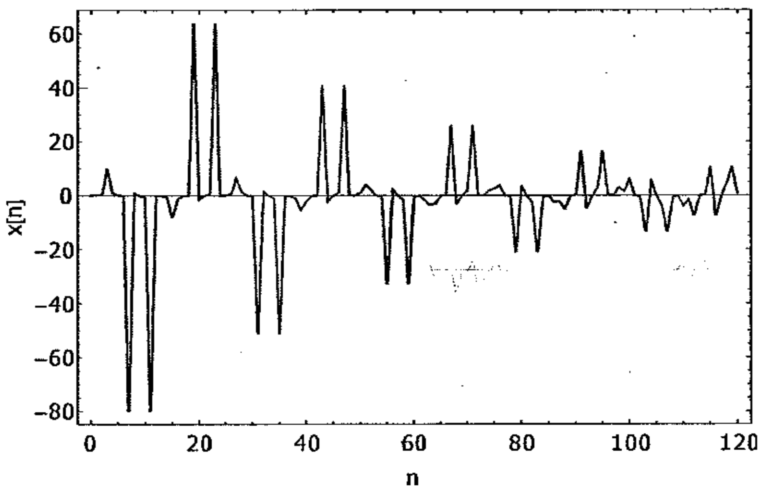
Grafik 4.6: Teorem 3.2.5' in k öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.7: Aşağıda, Teorem 3.2.6.'nin a bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-1$ ve $b=2$ parametreleri için $x_0=0.1, x_1=2, x_2=5, x_3=1, x_4=0.1$ ve $x_5=2$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



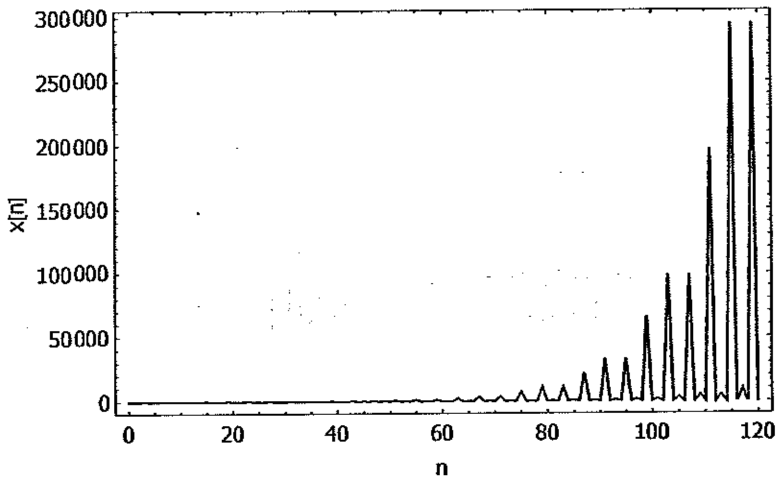
Grafik 4.7: Teorem 3.2.6' ın a öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.8: Aşağıda, Teorem 3.2.6.'nin b bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-1$ ve $b=2$ parametreleri için $x_0=0.1, x_1=0.2, x_2=0.5, x_3=10, x_4=1$ ve $x_5=0.2$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



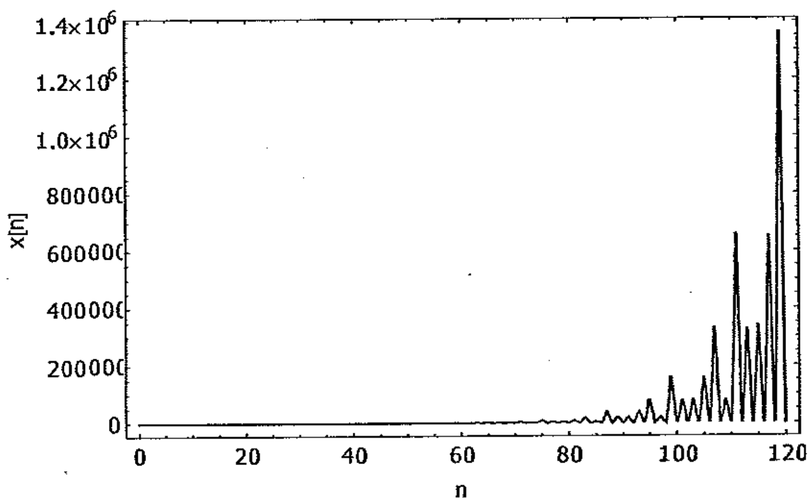
Grafik 4.8: Teorem 3.2.6' ın b öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.9: Aşağıda, Teorem 3.2.6.'nin c bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-1$ ve $b=2$ parametreleri için $x_0=4, x_1=0.25, x_2=0.2, x_3=10, x_4=2$ ve $x_5=0.25$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



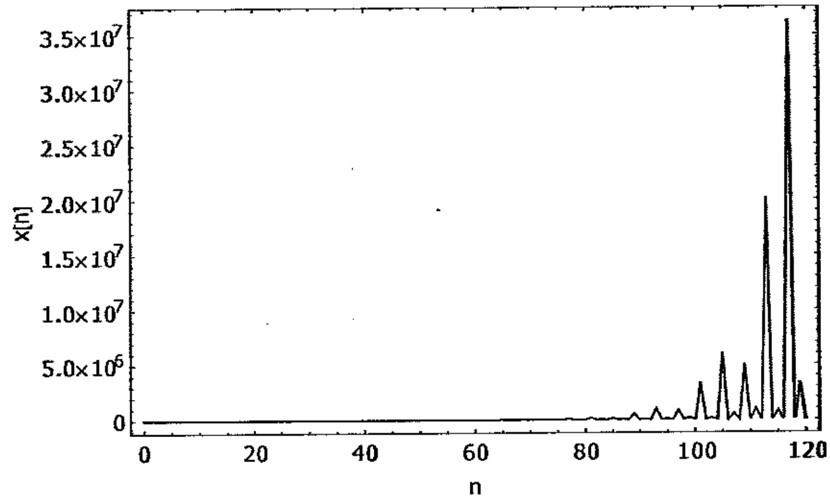
Grafik 4.9: Teorem 3.2.6' ın c öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.10: Aşağıda, Teorem 3.2.6.'nin k bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-1$ ve $b=4$ parametreleri için $x_0=0.2, x_1=0.25, x_2=5, x_3=2, x_4=3$ ve $x_5=1$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



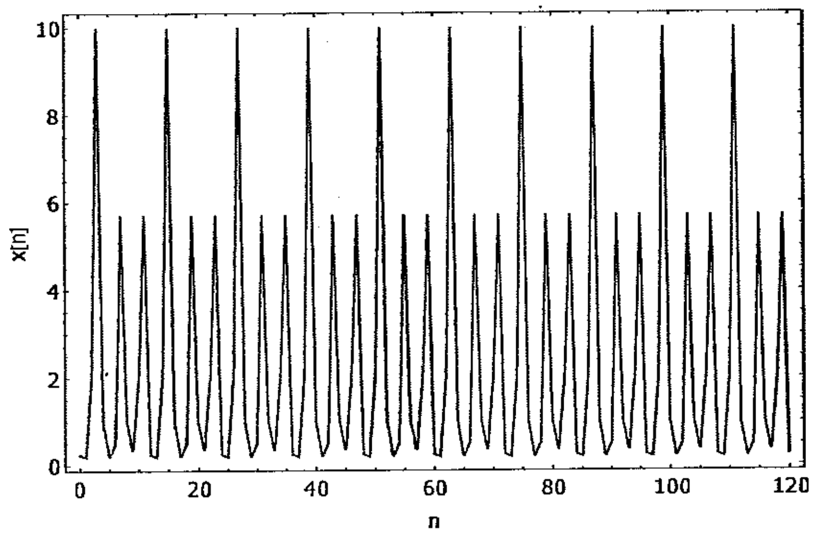
Grafik 4.10: Teorem 3.2.6' ın k öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.11: Aşağıda, Teorem 3.2.6.'nin l bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-1$ ve $b=5$ parametreleri için $x_0=0.8, x_1=0.5, x_2=10, x_3=0.1, x_4=0.5$ ve $x_5=2$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



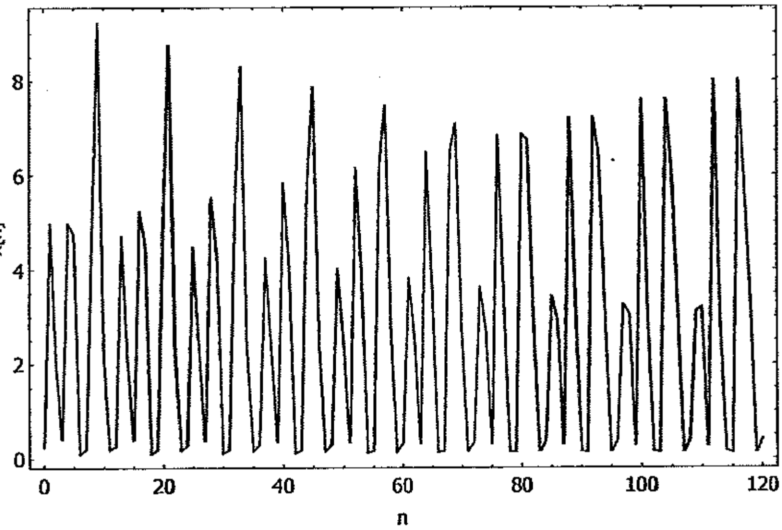
Grafik 4.11: Teorem 3.2.6' ın l öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.12: Aşağıda, Teorem 3.2.6.'nin m bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-1$ ve $b=2$ parametreleri için $x_0=0.25, x_1=0.2, x_2=2, x_3=10, x_4=1$ ve $x_5=0.2$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



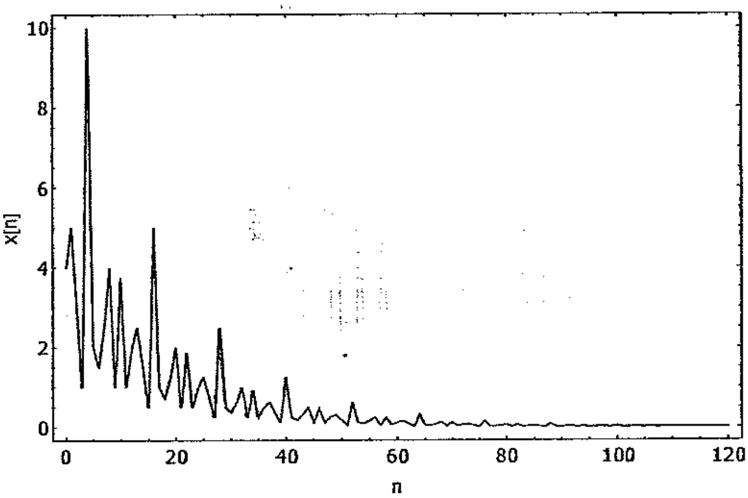
Grafik 4.12: Teorem 3.2.1' in m öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.13: Aşağıda, Teorem 3.2.6.'nin n bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-1$ ve $b=2$ parametreleri için $x_0=0.25, x_1=5, x_2=2, x_3=0.4, x_4=5$ ve $x_5=4.75$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



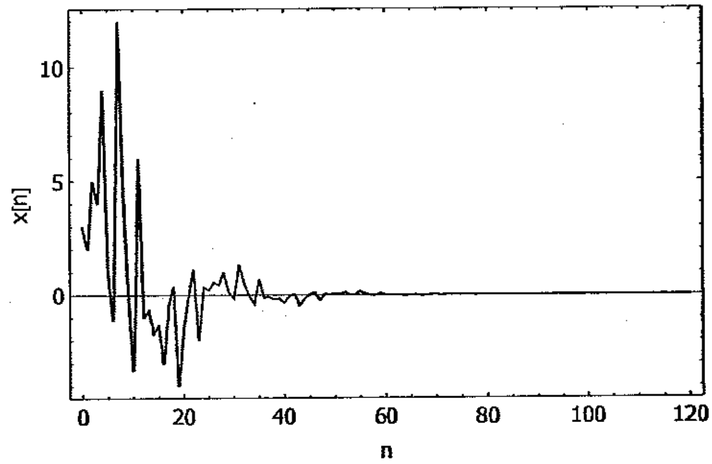
Grafik 4.13: Teorem 3.2.6' ın n öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.14: Aşağıda, Teorem 3.2.7.'nin a bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=2$ ve $b=0$ parametreleri için $x_0=4, x_1=5, x_2=3, x_3=1, x_4=10$ ve $x_5=2$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



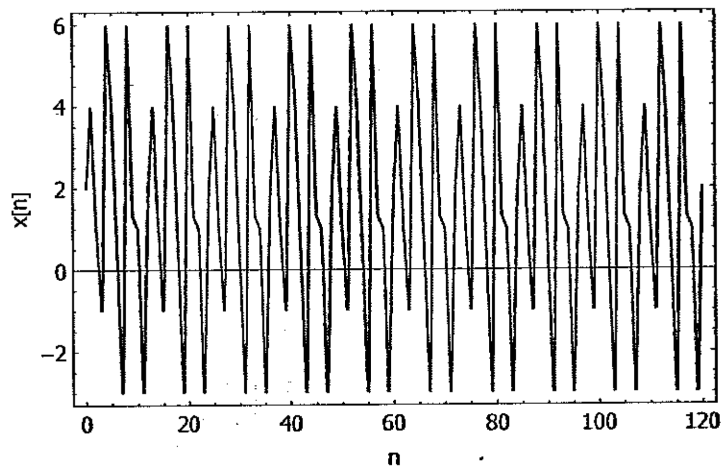
Grafik 4.14: Teorem 3.2.7' in a öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.15: Aşağıda, Teorem 3.2.7.'nin b bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-3$ ve $b=0$ parametreleri için $x_0=3, x_1=2, x_2=5, x_3=4, x_4=9$ ve $x_5=1$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



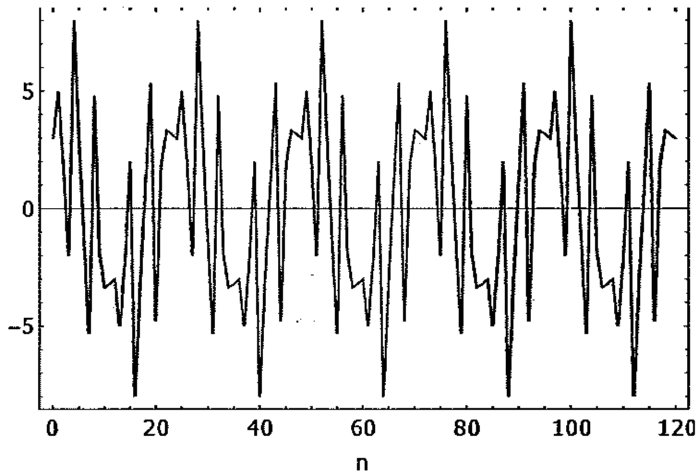
Grafik 4.15: Teorem 3.2.7' in b öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.16: Aşağıda, Teorem 3.2.7.'nin c bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=1$ ve $b=0$ parametreleri için $x_0=2, x_1=4, x_2=1, x_3=-1, x_4=6$ ve $x_5=4$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



Grafik 4.16: Teorem 3.2.7' in c öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.17: Aşağıda, Teorem 3.2.7'nin d bir uygulaması olarak (3.1) denkleminin $a=-1$ ve $b=0$ parametreleri için $x_0=3, x_1=5, x_2=2, x_3=-2, x_4=8$ ve $x_5=3$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



Grafik 4.17: Teorem 3.2.7' in d öncülünün bir uygulaması

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu çalışmada $x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, x_{-4}, x_{-5}, x_{-6}$ başlangıç koşulları reel sayılar ve (a_n) ve (b_n) birer dizi olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a_n + b_n x_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin iyi tanımlanmış çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra $a_n = a,\ b_n = b$ olmak üzere sabit katsayılı lineer olmayan

$$x_n = \frac{x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6}}{x_{n-1}x_{n-2}(a + b x_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}x_{n-6})}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin çözümleri a ve b 'nin durumlarına göre elde edilmiş, elde edilen çözümlerin asimptotik davranışları incelenmiştir.

4.2 Öneriler

Denklem (3.1.1)' i k. mertebeden bir denkleme genişleterek elde edilen denklemin kapalı formda genel çözümleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Ahmed, A. M., Elsayed, E. M., "The expressions of solutions and the periodicity of some rational difference equations systems", *J. Applied Mathematics And Informatics*, 34, 35-48, 2016.
2. Alzahrani, E. O., M. El-Dessoky, M., E. M., Elsayed, Kuang, Y., "Solutions and properties of some degernerate systems of difference equations", *J. Computational Analysis and Applications*, 18, 321-333, 2015.
3. Andruch A., , Migda, S. M., "Further properties of the rational recursive sequence $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{b + cx_n x_{n-1}}$", *Opuscula Math.*, 26, 387-394, 2006.
4. Bereketoglu H. ve Kutay V., "Fark Denklemleri", Gazi Kitabevi, Ankara, 2012.
5. Berg, L., Steviç, S., "On some systems of difference equations", *Applied Mathematics and Computation*, 218, 1713-1718, 2011.
6. Chatterjee, E., E. Grove, A., Kostrov, Y., Ladas, G., "On the trichotomy character of $x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}}$", *Journal of Difference Equations and Applications*, 9, 1113-1128, 2003.
7. Courant, C., Friedrichs, K., Lewy, H. "On the partial difference equations of mathematical physics", *IBM Journal*, 215-234, 1967.
8. Çınar, C., "On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}$", *Applied Mathematics and Computation*, 150, 21-24, 2004.
9. Çınar, C., "On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + ax_n x_{n-1}}$", *Applied Mathematics and Computation*, 158, 809-812, 2004.
10. Danziger P., "Big O Notation" http://www.math.ryerson.ca/~danziger/professor/MTH607/Handouts/bigO.pdf [Ziyaret Tarihi: 27 Nisan 2017].
11. Elaydi, S., "An introduction to difference equations undergraduate texts in mathematics", Springer, New York, USA, second edition, 1999.

12. Elsayed, E.M., İbrahim T.F., "Periodicity and solutions for some systems of nonlinear ratinol difference equations", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44(6), 1361-1390, 2015.
13. El-Dessoky, M. M., , Elsayed, E. M., Alghamdi, M., "Solutions and periodicity for some systems of fourth order rational difference equations", *J. Computational Analysis and Applications*, 18, 179-194, 2015.
14. El-Dessoky, M. M., "On a solvable for some systems of rational difference equations", *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 3744-3759, 2016.
15. El-Metwally, H., Elsayed, E. M., "Qualitative behavior of some rational difference equations", *J. Computational Analysis and Applications*, 20, 226-236, 2016.
16. El-Metwally, H., Elsayed, E. M., "Qualitative study of solutions of some difference equatiaons", *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 248291, 16 pages, 2012.
17. Elsayed, E. M., "Behavior and expression of the solutions of some rational difference equations", *J. Computational Analysis and Applications*, 15, 73-81, 2013.
18. Elsayed, E. M., "Dynamics of a rational recursive sequence", *Intertional Journal of Difference Equations*, 4, 185-200, 2009.
19. Elsayed, E. M., El-Metwally, H., "On the solutions of some nonlinear systems of difference equations", *Advances in Difference Equations*, 161, 1-14, 2013.
20. Elsayed, E. M., "Expression and behavior of the soltions of some rational recursive sequences", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 5682-5694, 2016.
21. Elsayed, E. M., "Solution for systems of difference equations of rational form of order two", *Computational and Applied Mathematics*, 33, 751-765, 2014.
22. Elsayed, E. M., "Solution of a rational recursive sequences of order three", *Funct. Approx. Comment. Math.*, 48, 7-17, 2013.
23. Elsayed, E. M., El-Dessoky, M. M., Alzahrani, E. O., "The form of solution and dynamics of a rational recursive sequence", *J. Computational Analysis and Applications*, 17, 172-186, 2014.
24. Elsayed, E. M., İbrahim, T. F., "Solutions and periodicity of a rational recursive sequences of order five", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 38, 95-112, 2014.
25. Elsayed, E. M., Mahmoud, S. R., Ali, A. T., "Expression and dynamics of the solutions of some rational recursive sequences", *Iranian Journal of Science & Technology*, 38, 295-303, 2014.

26. İbrahim, T.F., "On the third order rational difference equation $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{x_{n-1}(a + bx_n x_{n-2})}$", *İnt. J. Contemp. Math. Sciences*, 4, 1321-1334, 2009.
27. İbrahim, T.F., Touafek, N., "On a third order rational difference equation with variable coefficients", *Dynamics of Discrete and İmpulsive Systems Series B Applications Algorithms*, 20, 251-264, 2013.
28. Karataş, R., Cınar, C., On the solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+2)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+2} x_{n-i}}$", *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 2(31), 1505-1509, 2007.
29. Kelly, W.G., Peterson, A.C., "Difference equations an introduction with applications", Harcourt Academic Press, London, 1991.
30. Khaliq, A., Elsayed, E. M "The dynamics and solution of some difference equations", *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 1052-1063, 2016.
31. Koshy, T., "Fibonacci and Lucas numbers with applications", John Wiley, New York, 2001.
32. Neusser, K. "Difference equations for Economists, 2016 http://www.neusser.ch/downloads/DifferenceEquations.pdf [Ziyaret Tarihi: 11/05/2017].
33. Rabago, J.F.T., "Effective methods on determining the periodicity and form of solutions of some systems of nonlinear difference equations" *International Journal of Dynamical Systems and Differential Euations,* (2017) (baskıda)
34. Raouf, A., "Global behavior of the rational riccati difference equation of order two: the general case", *Journal of Difference Equations and Applications*, 18, 947-961, 2012.
35. Steviç, S., "On the difference equation $x_n = \frac{x_{n-2}}{b_n + c_n x_{n-1} x_{n-2}}$", *Applied Mathematics and Computation*, 218, 4507-4513, 2011.
36. Steviç, S., "On a system of difference equations", *Applied Mathematics and Computation*, 218, 3372-3378, 2011.
37. Steviç, S., Iricanin, B., Smarda, Z., "On a close to symmetric system of difference equations of second order", *Avences in Difference Equations*, 264, 1-34, 2015.

38. Steviç, S., "On a solvable rational system of difference equations", *Applied Mathematics and Computation*, 219, 2896-2908, 2012.

39. Steviç, S., "On some solvable systems of difference equations", *Applied Mathematics and Computation*, 218, 5010-5018, 2012.

40. Steviç, S., Diblik, J., Iricanin, B., Smarda, Z., "Solvability of nonlinear difference equations of fourth order", *Electronic Journal of Differential Equations*, 264, 1-14, 2014.

41. Steviç, S., Diblik, J., Iricanin, B., Smarda Z., "On a fifth-order difference equation", *J. Computational Analysis and Applications*, 20, 1214-1227, 2016.

42. Stevic, S., Alghamdi, M. A., Alotaibi A., Elsayed, E.M., "On a class of solvable higher-order difference equations", *Filomat* 31(2), 461-477, 2017.

43. Stevic, S., Diblik, J., Iricanin B., Smarda Z., "On the difference equation $x_{n+1}=\dfrac{x_n x_{n-k+1}}{x_{n-k+1}\left(a+bx_n x_{n-k}\right)}$, Abstract and Applied Analysis, Volume 2012, Article ID: 108047, 9 sayfa.

44. Tollu, D. T., "Bazı rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri üzerine", *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, 2014.

45. Tollu, D. T., Yazlik, Y., Taskara, N., "On fourteen solvable systems of difference equations", *Applied Mathematics and Computation*, 233, 310-319, 2014.

46. Tollu, D. T., Yazlik, Y., Taskara, N., "On the solutions of two special types of riccati difference equation via fibonacci numbers", *Advances in Diference Equations*, 174, 1-7, 2013.

47. Touafek, N., Elsayed, E. M., "On the periodicity of some systems of nonlinear difference equations", *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie,* 55(103), 217-224, 2012.

48. Yazlik,Y., "On the solutions and behavior of rational difference equations", *Journal Computational Analysis and Applications*, 17(3), 584-594, 2014.

49. Yazlik Y., Tollu D.T., Taskara N., "On the behaviour of solutions for some systems of difference equations" Journal of Computational Analysis and Applications 18(1), 166-178, 2015.

50. Zayed, E. M. E., El-Moneam, M. A., "On the rational recursive sequence $x_{n+1} = \frac{Ax_n + (\beta x_n + \gamma x_{n-k})}{Bx_n + Cx_{n-k}}$", *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, 16, 91-106, 2009.

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Müjdet GÜNGÖR
Uyruğu	:	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	:	DORTMUND, 11.11.1976
Telefon	:	0 505 218 24 20
Faks	:	
e-mail	:	mujdatgungor76@hotmail.com.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Abidinpaşa Teknik ve Endüstri Lisesi, Mamak, Ankara	1995
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Konya	2002

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2002-2004	*Kazımpaşa İlköğretim Okulu*	Matematik Öğretmeni
2004-2005	*Bitlis Beş minare Lisesi*	Matematik Öğretmeni (askeri öğretmen)
2005-2006	*Bitlis Teknik lise ve Endüstri Meslek Lisesi*	Matematik Öğretmeni
2007-2008	*Konya Mesleki Eğitim Merkezi*	Matematik Öğretmeni
2009-2012	*Konya Zeki Özdemir Anadolu Lisesi*	Matematik Öğretmeni
2012-2014	*Konya Bilim Sanat Merkezi*	Matematik Öğretmeni (görevlendirme)
2014-2016	*Nevşehir Avanos Anadolu Lisesi*	Matematik Öğretmeni
2016-	*Nevşehir H.Avni İncekara Fen Lisesi*	Matematik Öğretmeni