T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EN FAZLA İKİ ADET ÖZDEĞERİ ∓ 1'DEN FARKLI OLAN İŞARETLİ GRAFLARIN SINIFLANDIRILMASI

Tezi Hazırlayan
Meliha AKCAN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Hatice TOPCU

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

EYLÜL 2023
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EN FAZLA İKİ ADET ÖZDEĞERİ $\mp$1'DEN FARKLI OLAN İŞARETLİ GRAFLARIN SINIFLANDIRILMASI

Tezi Hazırlayan
Meliha AKCAN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Hatice TOPCU

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

EYLÜL 2023

Doç. Dr. Hatice TOPCU danışmanlığında Meliha AKCAN tarafından hazırlanan **''En Fazla İki Adet Özdeğeri ∓ 1'den Farklı Olan İşaretli Grafların Sınıflandırılması''** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

../../2023

JÜRİ

Başkan :

Üye :

Üye :

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun………………….tarih ve……………..
sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…/…/ 20..

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Meliha AKCAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışması sürecince bütün bilgi birikimini benimle paylaşan, tezimde en az benim kadar çabası ve emeği olan, çalışma disiplinine her zaman hayranlık duyduğum ve kişilik olarak da bana çok şey katan Sayın Hocam Doç. Dr. Hatice TOPCU'ya,

Bütün eğitim-öğretim hayatım boyunca hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen, akademik eğitimimi her zaman devam ettirmemi teşvik eden sevgili babam Osman AKCAN ve sevgili annem Döndü AKCAN'a, tez çalışmam boyunca beni her zaman motive eden kardeşlerim Merve AKCAN ve Medine AKCAN YAŞAR'a

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanlığına ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne teşekkür ederim.

EN FAZLA İKİ ADET ÖZDEĞERİ ∓ 1'DEN FARKLI OLAN İŞARETLİ GRAFLARIN SINIFLANDIRILMASI
(Yüksek Lisans Tezi)

Meliha AKCAN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2023

ÖZET

Spektral graf teori; graf matrislerinden elde edilen spektral bilgiler sayesinde, grafın belli özelliklerinin belirlenebilmesini sağlayan graf teorinin çok önemli bir alt dalıdır. Grafların spektral açıdan karakterize edilmesi problemi literatürde uzun süre çalışılan bir problemdir. Graf spektrasında var olan yapılan birçok durumun son yıllarda işaretli graf spektrasına da taşınmaya çalışıldığı görülmektedir. Örneğin, grafların spektral karakterizasyonuyla ilgili olarak literatürde [19]'daki gibi çok sayıda problem çalışılmıştır. Bu problemler günümüzde işaretli graflara da taşınmaya çalışılmaktadır. Özel olarak komşuluk matrislerinin en fazla iki özdeğeri ± 1'den farklı olan graflar literatürde sınıflandırılmıştır ve bunun işaretli graflara taşınması yani en fazla iki özdeğeri ± 1'den farklı olan bütün işaretli grafların sınıflandırılması ile ilgili literatürde [18], [22]'de çalışmalar mevcuttur. Bu tez çalışmasında da bu sınıflandırmaya dair bilgi ve bulgular incelenmiş, bu incelemelerden elde edilmiş sonuçlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde tez çalışmasında yer alan ana bölümlere dair temel graf teori bilgileri ve kullanılmış olan cebirsel kavramlar sunulmuştur. Sonrasında işaretli graflarla ilgili kullanılan bütün temel bilgiler de bu bölümde yer almaktadır. Üçüncü bölümde ise 'en fazla iki adet özdeğeri ± 1'den farklı olan işaretli graflar' $\mathcal{G}$ kümesiyle gösterilmiştir ve $\mathcal{G}$'de yer alan bazı özelliklere sahip graflar (bağlantısız graf, iki parçalı graf, tam graf) sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise $\mathcal{G}$'de yer alan ve üçüncü bölümde var olan özelliklerin dışında kalan diğer tüm grafların belirlenmesine yönelik yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Son bölümde ise, bu çalışmalara ve bunlar dışında şimdiye kadar yapılmış çalışmalara dair düşüncelere ayrıca bu konuyla ilgili ileride yapılabilecek önerilere yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: *İşaretli graf, graf spektrumu, komşuluk matrisi*
Tez Danışman: Doç. Dr. Hatice TOPCU
Sayfa Adeti: 67

ON THE CLASSIFICATION OF SIGNED GRAPHS WITH AT MOST TWO EIGENVALUES DIFFERENT FROM ∓ 1
(M. Sc. Thesis)

Meliha AKCAN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

SEPTEMBER 2023

ABSTRACT

Spectral graph theory; thanks to the spectral information obtained from graph matrices, it is a very important sub-branch of graph theory that allows the graph to be changed in a certain way. The problem of spectral characterization of graphs is a problem that has been studied for a long time in the literature. It is seen that many situations made in the graph spectra have been tried to be transferred to the signed graph spectra in recent years. For example, many problems regarding the spectral characterization of graphs have been studied in the literature, such as in [19]. Today, these problems are tried to be transferred to signed graphs. In particular, graphs whose adjacency matrices have at most two eigenvalues different from ± 1 have been classified in the literature, and there are studies in the literature [18], [19], [22] on the classification of all signed graphs with a maximum of two eigenvalues different than ± 1 . In this thesis, the information and findings about this classification from the literature were examined and the results obtained from these studies were included.

In the second chapter, the basic graph theory information about the main sections in the chapters and the algebraic concepts used in the thesis study are presented. Afterwards, all the basic information used about the signed graphs are included in this section. In the third chapter, 'signed graphs with maximum of two eigenvalues different from ± 1' are shown with the set $\mathcal{G}$, and graphs with some properties in $\mathcal{G}$ (disconnected graph, bipartite graph, complete graph) are presented. In the fourth chapter, the studies carried out to determine all the other graphs except the features in $\mathcal{G}$ and in the third chapter are given. In the last section, thoughts on these studies and other studies done so far, as well as suggestions that can be made in the future on this subject are given.

Keywords: *Signed graph, graph spectrum, adjacency matrix*
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hatice TOPCU
Page Number: 67

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	A matrisinin transpozu
$\overline{\boldsymbol{A}}$	A matrisinin eşleniği
$\boldsymbol{A}^{*}$	A matrisinin eşlenik transpozu
$\boldsymbol{O}$	Sıfır matrisi
$\boldsymbol{J}$	Birler matrisi
diag(A**)**	Köşegen matris
$\boldsymbol{I}$	Birim matris
$\boldsymbol{I_n}$	n×n tipindeki birim matris
$\boldsymbol{P}$	Permütasyon matrisi
$\boldsymbol{R_n}$	n×n tipindeki ters birim matris
$\boldsymbol{iz}(\boldsymbol{A})$	A matrisinin izi
$\boldsymbol{A}^{-1}$	A matrisinin tersi
$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$	A matrisinin determinantı
$\boldsymbol{M_{ij}}$	Minör
$\boldsymbol{A_{ij}}$	Kofaktör (işaretli minör)
$\boldsymbol{rank}(\boldsymbol{A})$	A matrisinin rankı
$[\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b}]$	Arttırılmış (genişletilmiş veya eklemeli) matris
$\boldsymbol{\Delta_A(\lambda)}$	λ'ya bağlı A matrisinin karakteristik polinomu
$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$	İç çarpım
$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$	G grafı
$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})$	Nokta kümesi

$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})$	Kenar kümesi
$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$	a ve b noktalarının birbirine komşu olması
$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{a})$	a noktasına komşu olan noktaların kümesi
$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a})$	a noktasının derecesi
$\Delta(\boldsymbol{G})$	G grafının maksimum derecesi
$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{G})$	G grafının minimum derecesi
$\overline{\boldsymbol{G}}$	G grafının tümleyen grafı
$\boldsymbol{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	a ile b noktaları arasındaki uzaklık
$\boldsymbol{diam}(\boldsymbol{G})$	G grafının çapı (diameter)
$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{a})$	a noktasının dışmerkezliği
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{G})$	G grafının yarıçapı (radius)
$\boldsymbol{G_1} \dot{\cup} \boldsymbol{G_2}$	G_1 ve G_2 graflarının ayrık birleşimi
$\boldsymbol{P_n}$	n noktalı yol graf
$\boldsymbol{C_n}$	n noktalı döngü graf
$\boldsymbol{K_n}$	n noktalı tam graf
$\boldsymbol{K_{n,m}}$	İki parçalı tam graf
$\boldsymbol{K_{m_1,\dots,m_n}}$	Çok parçalı tam graf
$\boldsymbol{F_k^n}$	Friendship graf
$\boldsymbol{T}$	Ağaç
$\boldsymbol{G} \cong \boldsymbol{H}$	G ve H graflarının birbirine izomorf olması
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$	G grafının komşuluk matrisi
$\boldsymbol{char}(\boldsymbol{G})$	G grafının karakteristik polinomu
$\boldsymbol{spec}(\boldsymbol{G})$	G grafının spektrumu
$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{G})$	G grafının komşuluk spektral yarıçapı
$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{q_{ij}}]$	Bölüm matrisi

$\boldsymbol{S(G) = [s_{ij}]}$	G grafının Seidel matrisi
$\boldsymbol{\Gamma = (G, \sigma)}$	İşaretli graf
$\boldsymbol{\Gamma^{-}}$	Γ grafının negatifi
$\boldsymbol{d^{-}(v_i)}$	v_i noktasının negatif derecesi
$\boldsymbol{d^{+}(v_i)}$	v_i noktasının pozitif derecesi
$\boldsymbol{d^{\pm}(v_i)}$	v_i noktasının net derecesi
$\boldsymbol{S_U}$	Bir işaretli grafın U kümesine göre switching matrisi
$\boldsymbol{\lambda_1(\Gamma)}$	Γ işaretli grafının indeksi

1.BÖLÜM
GİRİŞ

Köşeler olarak adlandırılan noktalar ile köşeleri birleştiren ve kenar olarak adlandırılan çizgilerden oluşan diyagrama graf denir [8]. Graf teorinin tarihsel gelişimine bakıldığında ilk olarak karşımıza Königsberg köprü problemi çıkar. Prusya'daki Königsberg kasabasını birbirine bağlayan yedi adet köprünün hepsini tek seferde geçmenin mümkün olup olamayacağı o bölgenin halkı tarafından çok konuşulmuştur ve 1736 yılında Leonard Euler tarafından yayımlanan 'Königsberg'in yedi köprüsü' makalesiyle beraber graf teorisinin başlangıcını oluşturmuştur. Ayrıca James Joseph Sylvester, 1822 yılında bir yayımında ilk kez 'graf' terimini kullanır ve D. König 1836'da 'graf teorisi' ile ilgili ilk kitabı yayımlamıştır [20]. Dört renk teoremi olarak bilinen diğer bir problemin çözümünün ardından yaşanan birçok gelişmeyle birlikte graf teorisi araştırmacıları tarafından ilgi uyandıran bir alan haline gelmiştir.

Günümüzde matematiğin yanı sıra mühendislik, bilişim, fizik, kimya, tıp gibi çeşitli bilim dallarında kullanılabilen graf teorisi birçok durumda kolaylık ve açıklık sağlamıştır. Sosyal medya ağları, metro ağları, haritalama, kimyada atom ve bağlarını temsiline kadar birçok alanda yer almıştır.

Bir $G = (V, E)$ grafında V noktalar kümesini, E kenarlar kümesini temsil eder. Graf teorisine bakıldığında graf yapısının matrislerle doğrudan ilişkili olduğu açıkça görülür. Graflar çok çeşitli matrislerle temsil edilebilir. Literatüre bakıldığında bir grafı temsil eden komşuluk matrisi, Seidel matrisi, Laplasyan matrisi, işaretsiz Laplasyan matrisi, derece matrisi vb. gibi çok çeşitli matris tanımları verilmiştir. Graf teoride iyi bilinen ve bu çalışmada en çok üzerinde durulan graf matrisi ise komşuluk matrisidir. Komşuluk matrisi şu şekilde tanımlanır; bir $G = (V, E)$ grafının noktaları arasında kenar bağlantısı varsa matriste o noktaların temsil edildiği satır ve sütunların kesişimindeki ögeye 1, noktalar arasında kenar bağlantısı yoksa o noktaların temsil edildiği satır ve sütunların kesişimindeki ögeye 0 yazılarak oluşturulan matristir ve $A(G)$ (ya da A) ile gösterilir. Genel olarak bir grafa dair matrisin karakteristik polinomu ve polinomun kökleri elde edildiğinde grafın o matrise dair spektrumu elde edilmiş olur ve özel olarak ise komşuluk matrisi alındığında, komşuluk matrisinin özdeğerleri o grafın komşuluk spektrumunu oluşturur ve $spec(A(G))$ ile gösterilir.

Genel olarak bir graf sadece noktalar ve bu noktalar arasındaki kenarlar kümesinden oluşurken işaretli graf; bu grafın kenarlarına pozitif ya da negatif olacak şekilde işaret verilmesiyle oluşur. Bu tez çalışmasında da işaretli graflar incelenmiştir ve işaretli graf $\Gamma = (G, \sigma)$ ile gösterilir. Burada $\sigma: E(G) \to \{+1, -1\}$ işaret fonksiyonu ve G ise baz (underlying) graftır. İşaretlendirilmemiş graflar için tanımlanmış olan graf matrisleri, genişletilmiş bir şekilde işaretli graflara da aktarılabilir ve son zamanlarda bu literatürde [16], [17]'deki gibi sıklıkla yapılmaya çalışılmıştır. Aynı zamanda işaretli grafların spektrumları da graf spektrası uzmanlarının büyük ilgisini çekmektedir. Aslında, işaretli grafların spektral teorisi işaretlendirilmemiş grafların spektral teorisinin zarif bir şekilde genelleştirilmesidir. Öte yandan, işaretlendirilmemiş graflar; dengeli işaretli grafların özel bir durumu gibi alınabileceğinden, rolleri tamamen ortadan kalkmaz yani işaretli graflar tarafından içerilirler. Bu nedenle işaretlendirilmemiş graflar için tanımlanan ve çalışılan birçok spektral problem, işaretli graflar açısından da ele alınabilir. Hatta bazen bu tür genellemeler, işaretlendirilmemiş graflar açısından elde edilemeyecek kadar güzel özellikler gösterebilir. Bu çalışmada, işaretli grafların komşuluk spektrumları üzerinde bazı genel sonuçlar incelenmiştir ve işaretlendirilmemiş grafların spektral teorisinden ilham alan bazı spektral problemler ele alınmıştır [16].

İşaretli graflar, kenarlarına $\{+1, -1\}$ ağırlık verilmiş ağırlıklı graf olarak da düşünülebilir ama ağırlıklı graf ve işaretli graf teorisi birbirinden çok farklıdır. İşaretli graflarda; işaretlerin çarpımı önemli bir role sahipken, ağırlıklı graflarda ağırlıkların toplamı önemlidir [16].

$\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında G baz grafının komşuluk matrisi A'da , Γ işaretli grafının negatif kenarlarına karşılık gelen bileşenlerin -1 ile değiştirilmesiyle elde edilen matris; Γ işaretli grafının komşuluk matrisidir ve çalışmamızda $A(\Gamma)$ ile gösterilir. Komşuluk matrisi $-A(\Gamma)$ olan işaretli bir grafa, Γ işaretli grafının negatifi denir ve Γ^- ile gösterilir [18].

İşaretli graf komşuluk matrislerine göre spektral açıdan incelenirken işaretsiz graflardaki $\{0,1\}$ simetrik matrisini incelemek yerine $\{0, +1, -1\}$ simetrik matrisi incelenir, bu da negatif olmayan matrisler teorisinden gelen sonuçların işaretli graflarda doğrudan uygulanamayacağını gösterir. Aynı zamanda işaretlendirilmemiş graf spektrası için simetrik matris özelliklerine dayanan tüm sonuçlar, uygun değişikliklerle işaretli graf spektrası için de geçerli olmaya devam edecektir. [16].

$U \subseteq V(G)$ olacak şekilde bir U kümesi için $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında U ile $V\,(G) \setminus U$ arasındaki kenarların işaretlerinin değiştirilmesi ve diğer kenarların işaretlerinin sabit bırakılması işlemine *switching* denir. $A(\Gamma)$ matrisi kullanılarak ifade edilirse; switching işlemi aslında U kümesinde yer alan noktalara $A(\Gamma)$ matrisinde karşılık gelen satır ve sütunların -1 ile çarpılması anlamına gelir. $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafına switching işlemi uygulanarak elde edilen işaretli graf H ise, Γ ve H graflarına switching izomorftur denir. Switching izomorf olan grafların komşuluk matrisleri benzer matristir ve bundan dolayı spektrumları aynı olur [18].

Spektral graf teori literatürüne bakıldığında belli özelliklere sahip spektrumu olan grafların incelenmesi ve sınıflandırılması çalışmaları bulunmaktadır. [19]'daki en fazla iki adet özdeğeri ∓ 1'den farklı olan işaretlendirilmemiş grafların sınıflandırılmasına yönelik çalışmalar örnek gösterilebilir.

Bu tez çalışmasında ise en fazla iki adet özdeğeri ∓ 1'den farklı olan işaretli grafların kümesine dair literatürde mevcut olan çalışmalar incelenerek derlenmiştir.

Bu özelliğe sahip tüm işaretli grafların kümesi $\mathcal{G}$ ile gösterilmiştir ve bu küme özel bir graf türü olan friendship grafları da içermektedir. Dolayısıyla bu kümenin spektral açıdan sınıflandırılması friendship graflarında spektral karakterizasyonu için önemlidir. $\mathcal{G}$ kümesi; switching, negatifini alma, izole kenar ekleme veya silme işlemleri altında kapalı olur [18]. $\mathcal{G}$'de yer alan işaretlendirilmemiş graflar [19]'da sınıflandırılmıştır. Fakat yine de $\mathcal{G}$'de halen daha çok sayıda işaretli graf bulunmaktadır ve bunların belirlenebilmesi tüm pozitif işaretli grafın durumuna göre çok daha karmaşıktır. $\mathcal{G}$'de yer alan işaretli tam grafların (Bölüm 3.2.) belirlenmesi bile aşikar bir durum değildir.

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde ilk olarak $\mathcal{G}$ kümesindeki bağlantısız işaretli graflar ve spektral özellikleri üzerinde durulmuştur. En küçük özdeğeri -1'e eşit olan işaretli grafların baz graflarının, tam grafların ayrık birleşimi olduğu belirlenmiştir. Sonrasında, bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının tüm özdeğerlerinin ± 1 olması için gerek ve yeter koşulun G baz grafın kenarların ayrık birleşimi formunda olması gerektiği söylenmiştir. Daha sonrasında n noktalı ve bağlantılı bir Γ işaretli grafının yalnızca bir özdeğerinin ∓ 1'den farklı olması durumunda, Γ ya da Γ^- grafının $n \neq 2$ olacak şekilde bir işaretsiz K_n tam grafına switching izomorf olduğu görülmüştür. Son olarak da $\mathcal{G}$'de yer alan bağlantısız ve izole kenar içermeyen bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının baz grafı olan G'nin tüm pozitif işaretli tam grafa ya da negatifine switching izomorf olan iki tam grafın ayrık birleşimi durumunda olduğu söylenmiştir [18].

$\mathcal{G}$ kümesindeki işaretli tam graflar ve spektral özelliklerine bakıldığında ise işaretli bir tam grafın komşuluk matrisinin aslında, işaretlendirilmemiş başka bir grafın Seidel matrisine karşılık geldiği görülmüştür. Birbirine switching izomorf olan işaretli iki tam grafın komşuluk matrisleri S_1 ve S_2 olsun. Bu durumda Seidel matrisleri S_1 ve S_2 olan graflarda switching denk olurlar [18]. Bölüm 3.2.'de $\mathcal{G}$'deki tüm işaretli grafların (buna denk olarak en fazla iki Seidel özdeğeri ∓ 1'den farklı olan tüm graflar) belirlenmesine dair sonuçlara yer verilmiştir.

$\mathcal{G}$ kümesinde yer alan iki parçalı işaretli grafların komşuluk matrisi A'ya bakıldığında; $A = \begin{bmatrix} O & N \\ N^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix}$ formunda olduğu görülür [18].

Burada iki parçalı işaretli grafların negatifleri ile switching izomorf olduğu açıktır. Özel olarak A ve $-A$ aynı spektruma sahiptir. Literatüre bakıldığında Van Dam ve Spence [21]'de bağlantılı iki parçalı tüm pozitif işaretli bir G grafı için eğer, G'nin en fazla iki adet özdeğeri ∓ 1'den farklı ise ve $G \neq K_2$ ise N matrisinin aşağıdaki formlarından birinde olması gerektiğini söylemişlerdir.

$N = \begin{bmatrix} J - I_3 & J \\ O & J - I_3 \end{bmatrix}$ veya $N = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{1} & I_4 \end{bmatrix}$, veya $N = J - I_m \quad (m \geq 3)$.

Sonrasında, $\mathcal{G}$'de yer alan bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafı bağlantılı ve iki parçalı ise, yine $\mathcal{G}$'de yer alan tüm pozitif işaretli (full positive) bağlantılı ve iki parçalı bir grafa switching izomorf olduğu [18]'da gösterilmiştir. Bölüm 3.4.'de ise son olarak önceki bölümlerde yer almayan $\mathcal{G}$'deki bazı işaretli graflar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde verilen özelliklere sahip olmayan ama $\mathcal{G}$ kümesinde yer alan halen daha çok sayıda işaretli graf vardır**.** [22]'de $\mathcal{G}$ kümesinde yer alan tüm işaretli graflar komşuluk matrisleriyle temsil edilerek tamamı sınıflandırılmıştır. Dolayısıyla $\mathcal{G}$ kümesinde yer alan tüm işaretli grafların belirlenmesi böylece tamamlanmıştır ve bu sınıflandırmaya ait tüm matris formlarına dördüncü bölümde yer verilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise, bu tez çalışmasında derlenen çalışmaların literatüre sağladığı katkının sonuçlarına ve sonrasında bu bağlamda yapılabilecek çalışmalara dair önerilere yer verilmiştir.

2.BÖLÜM
ÖN BİLGİLER

2.1. Lineer Cebirde Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya matris denir. $i = 1,2,3, \dots, m$ için $r_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ ifadesine matrisin satırları ve, $j = 1,2,3, \dots, n$ için $c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ ifadesine de matrisin sütunları denir. m satırlı ve n sütunlu bir matrise $m \times n$ boyutlu (mertebeli) ya da kısaca bir $m \times n$ matris denir. i-yinci satır ve j-inci sütunun kesişiminde bulunan cismin elemanına matrisin (i, j)-yinci elemanı denir. Matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ notasyonu ile göstereceğiz. Hemen not edelim ki eğer bir matrisin satır ve sütun sayıları eşit ise bu matrise kare matris denir [1].

Örnek $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ matrisi 3×3 bir matristir.

Tanım 2.1.2. $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere A'nın transpozu; A matrisinin satırlarını sütun ve sütunlarını satır yapmakla A matrisinden elde edilen ve A^{T} ile gösterilen $n \times m$ mertebeli bir matris olarak tanımlanır.

Yani $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ olmak üzere $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ olur [1].

Tanım 2.1.3. Eğer $A = [a_{ij}]$ matrisinin elemanları kompleks sayılar ise, o zaman A matrisinin eşlenik transpozu $A^* = [\bar{a}_{ji}]$ olarak tanımlanır. Böylece eğer

$A = [a_{ij}]$ olmak üzere; A nın eşleniği $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ ise, o takdirde $A^* = (\bar{A})^{\mathrm{T}}$ dir. Eğer A matrisinin elemanları reel sayılar ise bu durumda $A = \bar{A}$ olacağından $A^{\mathrm{T}} = A^*$ şeklindedir [1].

Tanım 2.1.4. Eğer bir matrisin bütün elemanları sıfır ise, bu matrise sıfır matrisi denir. Yani genel elemanı a_{ij} olan *A* matrisi her *i,j* için a_{ij} = 0 şeklinde yazılabiliyorsa, o zaman bu matrisin sıfır matrisi olduğu söylenir. Bu çalışmada sıfır matrisi "$\boldsymbol{O}$" ile gösterilmiştir.

Eğer *A* sıfır olmayan bir matris ise, o zaman *A* matrisi ile sıfır matrisinin çarpımının ve toplamının sırasıyla $A\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}A = \boldsymbol{O}$ ve $A + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + A = A$ olduğu açık olarak görülür [1].

Örnek

$O_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ biçimindedir

Tanım 2.1.5 Keyfi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için bütün elemanları "1" olan $m \times n$ tipinde matrise birler matrisi denir. Birler matrisi J ile gösterilir [2].

Örnek

$J_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $J_{2\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ biçimindedir

Tanım 2.1.6. $A = [a_{ij}]$, $n\times n$ bir kare matris olmak üzere eğer $i \neq j$ için her zaman a_{ij} = 0 oluyorsa, o taktirde A matrisine köşegen matris denir ve $diag(A)$ şeklinde gösterilir [1].

Örnek Üçüncü mertebeden bir köşegen matrise örnek olarak

$$diag(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{matrisi verilebilir.}$$

Tanım 2.1.7. Köşegen üzerindeki elemanları eşit olan köşegen matrise skaler matris denir. Eğer $A=[a_{ij}]$, $n\times n$ tipinde bir matris ise, o zaman $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarının teşkil ettiği köşegene *A* matrisinin esas köşegeni denir [1].

Tanım 2.1.8. Esas köşegen üzerindeki bütün elemanları "1" diğer tüm elemanları sıfır olan bir kare matrise birim matris denir. Birim matrisi I ile göstereceğiz. Özel olarak

$n\times n$ tipindeki birim matrisi de I_n ile göstereceğiz. A herhangi bir kare matris olmak üzere, $AI_n = I_n A = A$ olduğu kolayca görülür [1].

Örnek Üçüncü mertebeden birim matris $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ şeklinde verilir.

Tanım 2.1.9. $A = [a_{ij}]$, $n\times n$ tipinde bir matris olsun. Buna göre her $1\leq i,\ j\leq$ n için eğer

$i > j$ için $a_{ij} = 0$ ve

$i \leq j$ için $a_{ij} \neq 0$ ise , o taktirde A matrisine üst üçgensel matris, eğer

$i < j$ için $a_{ij} = 0$ ve

$i \geq j$ için $a_{ij} \neq 0$ ise , o zaman A matrisine alt üçgensel matris denir.

Üçüncü mertebeden (boyuttan) bir alt üçgensel matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ve bir üst üçgensel matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$ şeklindedir [1].

Tanım 2.1.10. $A = [a_{ij}]$, kare matrisi için $A^{\mathrm{T}} = A$ ise bu matrise simetrik matris denir. Eğer A matrisi simetrik ise $a_{ij} = a_{ji}$ şartı sağlanır [1].

Örnek Üçüncü mertebeden bir simetrik matrise örnek olarak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$ matrisi verilebilir.

Tanım 2.1.11. $A = [a_{ij}]$ kare matrisi için $A^{\mathrm{T}} = -A$ şartı sağlanıyorsa, A matrisine ters simetrik matris denir. Ters simetrik matrisin genel terimi $a_{ij} = -a_{ji}$ şartını sağlamalıdır. Buradan her $i = j$ için $a_{ij} = 0$ olduğu sonucu ortaya çıkar. Bu da bize bir ters simetrik matrisin esas köşegen elemanlarının sıfır olduğunu ifade eder [1].

Örnek Üçüncü mertebeden bir ters simetrik matrise örnek olarak

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ matrisi verilebilir.

Tanım 2.1.12. $A = [a_{ij}]$ matrisi elemanları kompleks sayılar olan bir kare matris olmak üzere eğer $A^{\mathrm{T}} = \bar{A}$ şartı sağlanıyorsa, o zaman A matrisine hermityen matris denir. Böyle bir matrisin genel elemanı $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ eşitliğini sağlamalıdır. Bu ise $i = j$ için $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$ olmasını gerektirdiğinden, buradan bir hermityen matrisin esas köşegeni üzerinde bulunan elemanların reel sayılar olduğu ortaya çıkar [1].

Örnek Üçüncü mertebeden bir hermityen matrise örnek olarak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2+3i \\ 1-2i & 2 & 3+4i \\ 2-3i & 3-4i & 3 \end{bmatrix}$$ matrisi verilebilir. $i = \sqrt{-1}$'dir.

Tanım 2.1.13. Elemanlarının bazıları ya da hepsi kompleks sayılar olan bir ters simetrik matrisin genelleştirilmiş haline ters hermityen matris denir. Bir ters hermityen matris $A^{\mathrm{T}} = -\bar{A}$ eşitliğini dolayısıyla $a_{ji} = -\bar{a}_{ij}$ eşitliğini sağlar. Buradan $i = j$ için $a_{ii} = -\bar{a}_{ii}$ olduğu görülür. Bu ise bir ters hermityen matrisin esas köşegeni üzerindeki bütün elemanların pürimajiner (sırf sanal) olduğunu ifade eder [1].

Örnek Üçüncü mertebeden bir ters hermityen matrise örnek olarak

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 2+i & 1+2i \\ -2+i & 3i & 4+i \\ -1+2i & 4-i & 4i \end{bmatrix}$$ matrisi verilebilir. $i = \sqrt{-1}$'dir.

Tanım 2.1.14. $A = \left[a_{ij}\right]$, $n \times n$ kare matrisi için $a_{i,i+1} = 1$, $a_{n1} = 1$ ve diğer bütün elemanları sıfır oluyorsa o zaman A matrisine permütasyon matrisi denir ve P ile gösterilir. En genel anlamda bir permütasyon matrisi, birim matrisin satırlarını ya da sütunlarını değiştirmekle elde edilen bir matristir [1].

Örnek $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi üçüncü mertebeden bir permütasyon matrisidir.

Tanım 2.1.15. $A = \left[a_{ij}\right]$ kare matrisinde, $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere, $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I_n$ ise A matrisine *ortogonal matris* denir [7].

Örnek

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ matrisi için;

$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ olur.

$AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$ ve

$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$ olur.

Buradan $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I_3$ olduğundan A ortogonaldir.

Tanım 2.1.16. A bir kare matris olsun. A'nın köşegeni üzerindeki elemanların toplamına A'nın izi denir ve $iz(A)$ ile gösterilir [3].

Örnek $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ olsun. $iz(A) =$ 2+6+(-5) =3 olur.

Teorem 2.1.1. A ve B iki matris ve c bir skaler olsun. Bu takdirde

1) $iz(A + B) = iz(A) + iz(B)$
2) $iz(A.B) = iz(B.A)$
3) $iz(c.A) = c.iz(A)$
4) $iz(A^{\mathrm{T}}) = iz(A)$ olur [3].

Tanım 2.1.17. A, $n\times n$ matris ve I_n, $n\times n$ birim matris olsun.BA=AB =I_n olacak şekilde bir B matrisi varsa B matrisine A matrisinin tersi denir ve B= A^{-1} ile gösterilir [5].

Teorem 2.1.2. Bir kare matrisin tersi varsa o zaman bu ters matris tektir [1].

İspat Bir A kare matrisinin B ve C gibi iki tane tersi olduğu varsayılsın. Bu durumda ters matrisin tanımından dolayı A matrisinin tersi B ise,

$AB = BA = I_n$

ve eğer A matrisinin tersi C ise, benzer düşünceyle

$AC = CA = I_n$ yazılır.

Eğer $B = C$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunun için $AB = BA = I_n$ ve $AC = CA = I_n$ ifadeleri ve matrislerin çarpma işlemine göre birleşme özelliği göz önüne alınırsa $B = I_nB = (CA)B = C(AB) = CI_n = C$ eşitliği elde edilir ve bu da istenendir [1]. ■

Tanım 2.1.18. Bir terse sahip olan bir *A* kare matrisine tekil olmayan (tersinir, regüler, düzenli) veya ters çevrilebilir bir matris denir. Eğer *A* matrisi bir terse sahip değilse, o takdirde *A* matrisine tekil (singüler) ya da ters çevrilemez matris denir [1].

2.1.1. Determinant

Tanım 2.1.19. E^n**,** K cismi (reel veya karmaşık sayılar cismi) üzerinde tanımlanmış ve tabanı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olan n boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bu uzayı K içine dönüştüren, yani E^n uzayının $A_1, A_2, \dots, A_n$ gibi n tane vektörüne K cisminin bir tane elemanına karşılık getiren

$D: E^n \rightarrow K$

$(A_1, A_2, \dots, A_n) \rightarrow D(A_1, A_2, \dots, A_n) \in K$

dönüşümüne determinant fonksiyonu ve $D(A_1, A_2, \dots, A_n)$ değerine de $A_1, A_2, \dots, A_n$ vektörlerinin determinantı denir.

O halde $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. Bu matrisin sütunlarını sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_n$ ile gösterirsek,

$D: E^n \rightarrow K$

$(A_1, A_2, \dots, A_n) \rightarrow D(A_1, A_2, \dots, A_n) \in K$

Değerine $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı denir ve $\det(A)$ ile gösterilir. O halde,

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ şeklinde birbirine paralel iki düz çizgi arasında gösterilir [5].

Tanım 2.1.20. Bir 2×2 matrisin determinantı şu şekilde ifade edilir;

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ reel sayılar olmak üzere 2×2 tipinden bir

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı;

$\det(A) = a_{11}.\, a_{22} - a_{12}.\, a_{21}$ formülü ile tanımlanan bir reel sayıdır [6].

Determinantın hesaplanması permütasyonlar yardımıyla olmasına rağmen bu yolla hesaplama yapmak kolay ama çok uzun ve zaman alıcıdır. Bundan dolayı determinantın hesaplanması için daha değişik metotlar geliştirilmiştir. Bunlardan biri determinantın herhangi bir satır ya da sütuna göre açılarak hesaplanmasıdır. Bu metot daha büyük mertebeli determinantı daha küçük mertebeli determinantlara indirgeyerek, hesaplama yöntemidir [5].

Tanım 2.1.21. $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

determinantındaki a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesinden meydana gelen $(n-1) \times (n-1)$ mertebeli determinanta a_{ij} elemanının minörü denir ve genellikle M_{ij} ile gösterilir.

Yine $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\, M_{ij}$ olarak tanımlanan ifadeye de a_{ij} elemanının işaretli minörü ya da kofaktörü denir [5].

Örnek $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun.

A_{11} ve A_{23} kofaktörleri (işaretli minörleri) hesaplansın

$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}$

$A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}.a_{32} - a_{31}.a_{12})$ bulunur.

Teorem 2.1.3. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı $det(A)$ ve bu determinantın a_{rk} elemanının kofaktörü A_{rk} ise;

$$\det(A) = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn} \quad , \quad (1 \le r \le n)$$

veya,

$\det(A) = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \ldots + a_{nr}A_{nr} \quad , \quad (1 \le r \le n)$ şeklindedir [5].

Örnek $det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ determinantı kofaktör yardımıyla hesaplansın.

Bu determinant birinci satıra göre açarak hesaplansın. Bunun için önce birinci satırdaki elemanların işaretli minörlerini hesaplanırsa;

$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -11$ $\qquad$ $A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -2$

$A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -18$ olur.

Buna göre $det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3.(-11) + 1.(-2) + 4.(-18) =$ -107 bulunur.

Determinant ile ilgili bazı önemli temel teorem ve tanımlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.1.4. Bir determinantta satırların sütun, sütunların satır yapılması halinde determinant değeri bozulmaz. Yani herhangi bir A, $n \times n$ kare matrisin determinantı ile bu matrisin transpozunun determinantı aynıdır [5].

Örnek $det(A) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \big(4.(-2)\big) - \big(2.(-1)\big) = -6$ ve

$det(A^{\mathrm{T}}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = ((-2).4) - ((-1).2) = -6$’dir.

Böylece $det(A) = det(A^{\mathrm{T}})$ olduğu görülür.

Teorem 2.1.5. Eğer bir determinantın iki satırı veya iki sütünü bir defa yer değiştirirse, determinant bir defa işaret değiştirir.

Bu teoremin bir sonucu olarak, eğer bir determinantta iki satır veya sütun eşit ise determinant değeri sıfırdır [5].

Örnek $det(A) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1.(-2)) - (-2.(-1)) = 0$ olur.

Teorem 2.1.6. Bir determinantta herhangi bir satır veya sütun bir k sabiti ile çarpılırsa determinantta k ile çarpılmış olur [5].

Örnek $det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7$ determinantında birinci satır $k = 2$ sabiti ile çarpılırsa, determinant $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 14$ olur.

Teorem 2.1.7. Bir determinantta herhangi bir satır ya da sütun $a_{ir}+ c_{ir}$ şeklinde ise determinant iki determinantın toplamı şeklinde yazılabilir [5].

Örnek $det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -15,$

$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6,$

$det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9$ ise $det(A) = det(B) + det(C)$ olur.

Teorem 2.1.8. Herhangi bir determinantta bir satır veya sütun, sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılır diğer satırlara veya sütunlara eklenirse determinantın değeri değişmez [5].

Örnek $det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5$ determinantında birinci sütunun iki katı ikinci sütuna eklenirse; $\begin{vmatrix} 3 & 3.2-1 \\ 4 & 4.2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5$ olduğu görülür.

Tanım 2.1.22. A, $n \times n$ kare matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise matrise düzgün(regüler) matris, $det(A) = 0$ ise A matrisine tekil (singüler) matris denir [5].

Teorem 2.1.9. Alt üçgensel veya üst üçgensel bir matrisin determinantı, esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir [5].

Örnek $det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15$'tir. A matrisinin köşegenlerindeki elemanların çarpımı da $5.1.3 = 15$ olur.

$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$'tür. B matrisinin köşegenlerindeki elemanların çarpımı da $1.1.3.(-1) = -3$ olur.

Teorem 2.1.10. Köşegen bir matrisin determinantı, köşegen elemanlarının çarpımına eşittir [5].

Örnek $det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$'dir. A matrisinin köşegenlerindeki elemanların çarpımı da $4.1.3 = 12$ olur.

Teorem 2.1.11. I_n, $n \times n$ tipinde birim matris ise $det(I_n)$=1'dir [5].

Tanım 2.1.23. A, $m \times n$ matris olsun. $k \leq m$ ve $k \leq l$ ise A matrisinin herhangi bir k satır ve l sütunundan oluşan matrise, A matrisinin $k \times l$ alt matrisi denir. Yine A'nın herhangi bir $k \times k$ alt matrisinin determinantına A matrisinin k. mertebeden bir minörü denir [5].

Tanım 2.1.24. Sıfırdan farklı bir A matrisinin, sıfırdan farklı en büyük değere sahip mertebeli minörü r. mertebeden ise r'ye A matrisinin rankı denir ve $rank(A)$ ile gösterilir [5].

Tanım 2.1.25. Sıfırdan farklı bir A matrisinin rankını belirleyen maksimum mertebeli minöre (minörlere) *kritik minör* denir.

Yukarıdaki tanımlardan aşağıdaki irdelemeyi yapabiliriz:

$A \neq 0$ olmak üzere $rank(A) = r$ ise;

i. A matrisinin sıfırdan farklı en az bir r. mertebeden minörü vardır.

ii. A matrisinin sıfırdan farklı, mertebesi r'den büyük hiçbir minörü yoktur.

O halde, (ii) şartını sağlayan bir A matrisinin $(r+1)$. ve daha büyük mertebeden bütün minörleri sıfırdır. Tanım 2.1.24.'den sıfırdan farklı A, $m \times n$ matris için, $0 < rank(A) \leq \min(m,n)$ olur. A, n. mertebeden kare matris ise $rank(A) \leq n$ olacağı açıktır [5].

Örnek $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 15 & -12 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

A matrisinin,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 15 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -6 & 15 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

şeklindeki 3. mertebeden dört tane minörü vardır ve hepsi sıfırdır. O halde A matrisinin rankı üçten küçüktür. Şimdi de A matrisinin 2. mertebeden minörlerini kontrol edelim.

A'nın $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ şeklindeki 2. mertebeden minörü sıfırdan farklı olduğundan $rank(A) = 2$'dir. Bu minör aynı zamanda A matrisinin kritik minörüdür.

Tanım 2.1.26. Sıfırdan farklı bir A matrisinin lineer bağımsız satırlarının (sütunlarının) maksimum sayısına A matrisinin *satır (sütun) rankı* denir [5].

Teorem 2.1.12. Herhangi bir A matrisinin rankı, satır rankı ve sütun rankının hepsi birbirine eşittir [5].

İspat Herhangi bir A matrisin satır rankını $rank_r(A)$ ve sütun rankını $rank_c(A)$ olarak alınsın. Şimdi $rank(A) = rank_r(A) = rank_c(A)$ olduğu gösterilsin.

$A = 0$ ise teorem açıktır. A matrisi sıfırdan farklı ve $m \times n$ matris olsun. $rank(A) = r$ $(r \geq 1)$ ise A matrisinin r tane lineer bağımsız satırı vardır. Bu lineer bağımsız satırları $a_1, a_2, \dots, a_n$ ile gösterilsin. Yine A matrisinin diğer satırları bu satırların bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. A matrisinin bütün satırları tarafından gerilen vektör uzayını $\mathcal{A}$ ile gösterelim. $\mathcal{A}$ uzayı aynı zamanda $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektörleri tarafından da gerileceğinden ve bu vektörler lineer bağımsız olduğundan $\mathcal{A}$ uzayının bir bazı olacaktır. O halde $boy(\mathcal{A}) = r = rank(A)$ olacaktır. $rank(A) = rank_c(A)$ olduğu da benzer şekilde gösterilir [5]. ■

2.1.2. Matris Özdeğeri

Tanım 2.1.27. K, bir cisim olsun. b_1,b_2,…,b_m ve a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, K cisminin verilen elemanlar; x_1, x_2,…, x_n bilinmeyenler olmak üzere

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \tag{2.1}$$

ile verilen sisteme n bilinmeyenli $m$denklemden oluşan bir *lineer denklem sistemi* denir [5].

Tanım 2.1.28. (2.1) ile verilen sistemde $b = [b_1, \ldots, b_m]^T$ sütun matrisi sıfır ise sisteme *homojen lineer denklem sistemi* denir.

Homojen lineer denklem sistemlerinin daima x_1=x_2=…=x_n=0 şeklinde bir çözümü mevcuttur. Bu çözüme *sıfır çözüm* veya *aşikar çözüm* denir. Ancak homojen lineer denklem sistemlerinin sıfır çözümden başka çözümleri de olabilir. (2.1) ile verilen sistem,

$$\left.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad\right\} \tag{2.2}$$

şeklinde matris notasyonu ile gösterilebilir. Bunu da; $A, m \times n$ matris; x, $n \times 1$ ve b de, $m \times 1$ vektörler olmak üzere kısaca

$$Ax = b \tag{2.3}$$

olarak gösterilebilir.

(2.3) ile verilen sistemdeki A matrisine sistemin katsayılar matrisi denir [5].

Tanım 2.1.29. (2.2)'deki lineer denklem sistemi verilsin. A katsayılar matrisi ve b de denklemin sağ yanındaki vektör olmak üzere

$[A{:}\,b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & : & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix}$ matrisine *arttırılmış* (*genişletilmiş* veya *eklemeli*) matris denir [5].

Tanım 2.1.30. (2.1) ile verilen sistemi sağlayan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (x_1'ler K'nın elemanları) n-lisine sistemin *çözüm takımı* denir [5].

Tanım 2.1.31. Herhangi iki lineer denklem sisteminin çözüm takımı aynı ise bu sisteme denk sistemler denir [5].

Teorem 2.1.13. Bir lineer denklem sistemindeki herhangi bir denkleme diğer denklemlerin lineer kombinasyonlarını eklemekle veya denklemlerden birisini sıfırdan farklı bir skalerle çarpmakla elde edilen yeni lineer denklem sistemi orijinal sisteme denktir [5].

Teorem 2.1.14. x_1, $Ax = b$ sisteminin ve x_2 de $Ax = 0$ siteminin bir çözümü ise $y = x_1 + x_2$ de $Ax = b$ sisteminin bir çözümüdür [5].

İspat x_1, $Ax = b$ sisteminin herhangi bir çözümü ise $Ax_1 = b$ ve x_2, $Ax = 0$ siteminin bir çözümü ise $Ax_2 = 0$ olur. O halde $Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2) = b$ olup $y = x_1 + x_2$, $Ax = b$ sisteminin bir çözümüdür [5]. ■

Sonuç 2.1.1. $Ax = b$ sisteminin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ çözümleri mevcutsa a_i ler skalerler olmak üzere $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ de sistemin bir çözümüdür [5].

Tanım 2.1.32.

$$\left.\begin{array}{r} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0 \\ -a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (\lambda - a_{nn})x_n = 0 \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

lineer homojen denklem sistemini göz önüne alalım. Bu sistemi,

$(\lambda I - A)x = 0$ veya (2.5)

$$Ax = \lambda x \tag{2.6}$$

şeklinde matrisel olarak gösterebiliriz. (2.4) lineer homojen sisteminin sıfır çözümden başka çözümünün olabilmesi için

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.7}$$

olması gerekir. (2.7) ile verilen determinant açıldığı zaman, n. dereceden λ'ya bağlı bir polinom elde ederiz. $\Delta_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$ polinomuna A matrisinin *karakteristik polinomu* denir. Karakteristik polinomu açık bir şeklide yazarsak

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

şeklinde yazarız [5].

Tanım 2.1.33. $\Delta_A(\lambda) = 0$ denklemine A matrisinin karakteristik denklemi denir. $\Delta_A(\lambda) = 0$ denkleminin köklerine A matrisinin *özdeğerleri* denir [5].

Tanım 2.1.34. λ_i $(1 \leq i \leq n)$ için $(\lambda I - A)x = 0$ denkleminin x_i çözüm vektörüne A matrisinin *özvektörü* denir [5].

Örnek $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ özdeğerleri ve özvektörleri;

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

olup özdeğerler $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 3$ olur. Bu öz değerlere karşılık gelen özvektörler de sırasıyla $v_1 = [-1, 0, 1]^T$, $v_2 = [-2, 2, 1]^T$ ve $v_3 = [-1, 2, 1]^T$ olur.

Teorem 2.1.15. Bir A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ise $iz(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ ve $det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$ şeklindedir [5].

Örnek $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$ ve $iz(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ olduğu gösterilsin.

i. $det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -3 & \lambda-4 & -5 \\ -5 & -6 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda^2 - 12\lambda$ olup özdeğerler $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6 + 4\sqrt{3}$ ve $\lambda_3 = 6 - 4\sqrt{3}$ olur.

$iz(A) = 1 + 4 + 7 = 12$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 6 + 4\sqrt{3} + 6 - 4\sqrt{3}$'dür. Böylece $iz(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ olduğu görülür.

ii. $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$'dır.

$\lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 = 0.\left(6 + 4\sqrt{3}\right).\left(6 - 4\sqrt{3}\right) = 0$ olur. Böylece $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ olduğu görülür.

Teorem 2.1.16. Bir reel bileşenli simetrik A matrisinin bütün özdeğerleri reeldir [1].

İspat İlk olarak hemen hatırlatalım ki; eğer $z = a + ib$ ise, o zaman $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ olur. Bundan başka x kompleks bileşenlere sahip

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ şeklinde bir $n \times 1$ vektör ise; o zaman $\bar{x}$,

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$ ile verilir. Böylece;

$$\bar{x}^{\mathrm{T}} x = x^{\mathrm{T}} \bar{x} = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \cdots + x_n \bar{x}_n \qquad (2.8)$$

yazılır ve açık olarak eğer bir sıfır vektörü değilse, o zaman $\bar{x}^{\mathrm{T}} x$ bir pozitif reel sayıdır.

A bir reel simetrik matris ve $x \neq 0$ olmak üzere $Ax = \lambda x$ olduğu varsayılsın. Buna göre

$$\bar{x}^{\mathrm{T}} A x = \lambda \bar{x}^{\mathrm{T}} x \qquad (2.9)$$

yazılır. Diğer yandan Ax bir vektör olarak göz önüne alınarak,

$$\bar{x}^{\mathrm{T}}Ax = (Ax)^{\mathrm{T}}\bar{x} \tag{2.10}$$

yazılabilir. Bundan dolayı (2.9) ve (2.10) ifadelerinden ayrıca A'nın simetrikliğinden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\lambda\bar{x}^{\mathrm{T}}x = \bar{x}^{\mathrm{T}}Ax = (Ax)^{\mathrm{T}}\bar{x} = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\bar{x} = x^{\mathrm{T}}A\bar{x}, \tag{2.11}$$

halbuki $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$ idi. Dolayısıyla (2.11)'den

$$\lambda\bar{x}^{\mathrm{T}}x = \bar{\lambda}x^{\mathrm{T}}\bar{x} \quad \text{yazılır.} \tag{2.12}$$

Diğer yandan (2.8)'den $x^{\mathrm{T}}\bar{x} = \bar{x}^{\mathrm{T}}x$ olduğu açıktır ve $x \neq 0$ olduğundan $\bar{x}^{\mathrm{T}}x \neq 0$'dır. Böylece (2.12)'den $\bar{\lambda} = \lambda$ yazılır. Bu ise λ'nin reel olduğunu gösterir [1]. ■

Tanım 2.1.35. V, F (reel veya kompleks sayılar) cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olmak üzere, eğer $\dot{\mathrm{I}} : V \times V \to F$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa, o takdirde bu dönüşüme V üzerinde bir iç çarpım denir ve $x, y \in V$ için $\dot{\mathrm{I}}(x, y) = \langle x, y\rangle$ ile gösterilir.

i. Her $x \in V$ için $\langle x, x\rangle \geq 0$
ii. Her $x \in V$ için $\langle x, x\rangle = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.
iii. Her $x, y \in V$ için $\langle x, y\rangle = \langle\overline{y, x}\rangle$'dir.
iv. Her $x, y \in V$ ve $a \in F$ için $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$ 'dir.
v. Her $x, y, z \in V$ için $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$'dir.

Eğer $x, y \in \mathbb{R}^n$ ise, o takdirde $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ olma üzere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olarak alabiliriz. Bu durumda x ve y vektörlerinin iç çarpımı;

$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ şeklindedir [1].

Örnek $x = (2,0,1)$, $y = (-1,4,1)$, $z = (2,1,-2)$ olacak şekilde $x, y, z \in V$ vektörleri verilsin.

i. $\langle x, x\rangle = \langle(2,0,1), (2,0,1)\rangle = (2.2) + (0.0) + (1.1) = 5 \geq 0,$
ii. $t = (0,0,0)$ için $\langle t, t\rangle = \langle(0,0,0), (0,0,0)\rangle = 0,$
iii. $\langle x, y\rangle = \langle(2,0,1), (-1,4,1)\rangle = (-2) + (0) + (1) = -1$ ve
$\langle\overline{y, x}\rangle = \langle(-1,4,1), (2,0,1)\rangle = (-2) + (0) + (1) = -1$ olup
$\langle x, y\rangle = \langle\overline{y, x}\rangle$'dir.
iv. $2 \in F$ için;

$\langle 2x, y\rangle = \langle 2.(2,0,1), (-1,4,1)\rangle = \langle (4,0,2), (-1,4,1)\rangle = (-4) + 0 + 2 = -2$

ve

$2\langle x, y\rangle = 2\langle (2,0,1), (-1,4,1)\rangle = (-2) + (0) + (1) = 2.(-1) = -2$ olup

$\langle 2x, y\rangle = 2\langle x, y\rangle$'dir.

v. $\langle x, y + z\rangle = \langle (2,0,1), \big((-1,4,1) + (2,1,-2)\big)\rangle = \langle (2,0,1), (1,5,-1)\rangle = 1$ ve

$\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle = \langle (2,0,1), (-1,4,1)\rangle + \langle (2,0,1), (2,1,-2)\rangle = (-1) + 2 = -1$

olup $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$'dir.

2.2. Graf Teoride Temel Kavramlar

Bu bölümde graf teori ile ilgili bazı ön bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1. Köşeler olarak adlandırılan noktalar ile köşeleri birleştiren ve kenar olarak adlandırılan çizgilerden oluşan diyagrama *graf* denir. G bir graf olmak üzere, G grafının nokta kümesi V ya da $V(G)$, kenar kümesi E ya da $E(G)$ ile gösterilir. Buna göre G grafı, $G = (V, E)$ ile de gösterilir. $|V| = n$ ve $|E| = m$'dir. Nokta sayısına kısaca G'nin *mertebesi*, kenar sayısına da kısaca G'nin *genişliği* denir [8,9].

Tanım 2.2.2. $G = (V, E)$ grafına; $|V| = 1$ ise *aşikar (trivial, singleton, single point) graf*, $E = \emptyset$ ise *null (boş, empty) graf* denir [9].

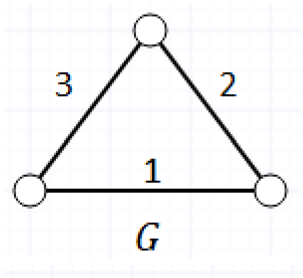
Tanım 2.2.3. Bir grafın tüm kenarları, bu kenarları oluşturan noktalardan biri çıkış noktası biri varış noktası olacak biçimde yönlendirilmiş ise bu grafa *yönlü graf* ya da *digraf* denir. Yönlü bir grafın kenarlarına *yönlü kenar* denir. Yönlü kenar içermeyen bir grafa *yönsüz graf* denir. Kenarlarının bir kısmı yönlü, bir kısmı yönsüz olan bir grafa *karma graf* denir [9].

Tanım 2.2.4. Bir grafta aynı nokta çiftlerini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *katlı kenar (paralel kenar)*, bir noktayı kendisiyle birleştiren kenara *ilmek* denir. Katlı kenara sahip ancak döngüsü olmayan grafa *multi graf*, katlı kenar ve ilmek içeren graflara ise *Pseudo graf* denilmektedir [10].

Tanım 2.2.5. Katlı kenar ve ilmek içermeyen bir grafa *basit graf* denir [9].

Tanım 2.2.6. Her bir e kenarı, $w(e)$ nümerik etiketli grafa *ağırlıklı graf* (*weighted graph*) denir. Burada e kenarları grafın ağırlıkları olarak adlandırılır. Kenar ağırlıkları mesafe ya da bağlantı değeri gibi kavramları gösteren tam sayı, rasyonel sayı, reel sayı ve hatta matrisler de olabilir [4].

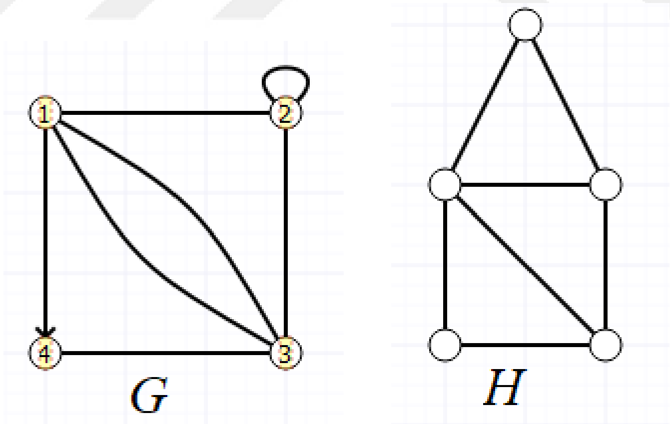
Örnek



Şekil 2.1. Ağırlıklı graf

Tanım 2.2.7. Bir grafın noktalarının isimlendirilmesi işlemine *etiketleme*: noktaları isimlendirilmiş bir grafa ise *etiketlendirilmiş graf* denir [9].

Örnek Aşağıdaki şekilde verilen G grafı 4 noktalı ve 7 kenarlı etiketlendirilmiş karma graftır. Burada {2,2} kenarı bir ilmektir. 1 ve 3 noktaları arasında katlı kenar vardır.1 ve 4 noktaları arasında yönlü kenar vardır. H grafı ise 5 noktalı ve 7 kenarlı etiketlendirilmemiş basit graftır.



Şekil 2.2. Etiketlendirilmiş karma graf ve basit graf

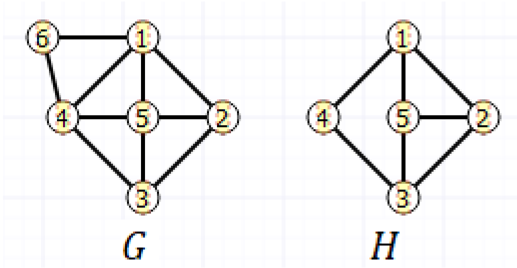
Tanım 2.2.8. G herhangi bir graf olmak üzere, nokta kümesi G nin nokta kümesinin alt kümesi ve kenar kümesi de G nin kenar kümesinin alt kümesi olan grafa G nin *alt grafı* denir [10].

Örnek Aşağıdaki G grafına ait bir H alt grafı gösterilmiştir.

$V(G) = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve

$E(G) = \big\{\{1,2\},\{1,5\},\{1,4\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\}\big\}$'dır.

$V(H) = \{1,2,3,4,5\}$ ve $E(H) = \{\{1,2\},\{1,5\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{3,4\}\}$'dır.

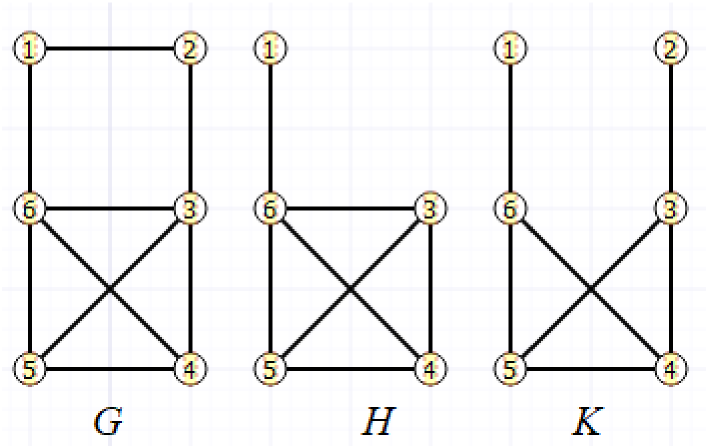


Şekil 2.3. Bir G grafı ve G grafına ait H alt grafı

Tanım 2.2.9. $S = (V', E')$ grafı, $G = (V, E)$ grafının bir alt grafı ve $V' = V$, $E' = E$ ise S ve G graflarına *eş graflar* denir [9].

Tanım 2.2.10. G grafının noktalarından bazılarının ve bu noktalara değen tüm kenarların silinmesiyle elde edilen alt grafa G'nin *nokta indirgenmiş alt grafı* denir. Bazı kenarların (uç noktaları sabit bırakılarak) silinmesiyle elde edilen alt grafa ise G'nin *kenar indirgenmiş alt grafı* denir. Nokta indirgenmiş herhangi bir alt grafa kısaca *indirgenmiş alt graf* da denir [9].

Örnek Aşağıdaki G grafından 2 noktasının silinmesiyle elde edilen H grafı, G'nin bir indirgenmiş alt grafıdır. G grafından $\{\{1,2\},\{3,6\}\}$ kenarlarının silinmesiyle elde edilen K grafı, G'nin bir kenar indirgenmiş alt grafıdır.



Şekil 2.4. İndirgenmiş alt graf

Tanım 2.2.11. $G = (V, E)$ grafının, $H = (V', E')$ grafını alt graf olarak içermesi mümkün değil ise H grafına G nin bir *yasaklanmış (forbidden) alt grafı* denir [9].

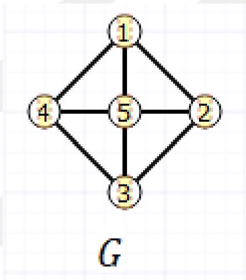
Tanım 2.2.12. Bir $G = (V, E)$ grafı verilsin. $v_i, v_j \in V$ kümesine ait noktalar olmak üzere $v_i v_j \in E$ ise bu noktalara birbirine komşudur denir ve $v_i \sim v_j$ biçiminde gösterilir [10].

Tanım 2.2.13. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, G deki bir v_i noktasına komşu olan noktaların kümesine o noktanın komşuluk kümesi denir ve $N(v_i)$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.2.14. Herhangi bir G grafının v_i noktasının derecesi v_i ye komşu olan noktaların sayısı olup $d(v_i)$ ile gösterilir [10].

Örnek Bir G grafına ait noktaların dereceleri sırasıyla,

$d(1) = 3,\ d(2) = 3,\ d(3) = 3,\ d(4) = 3,\ d(5) = 4$'tür.



Şekil 2.5. Bir grafta noktaların derecesi

Tanım 2.2.15. $G = (V, E)$ grafının *tümleyen grafı* aynı nokta kümesi üzerinde tanımlı olan $\bar{G} = (V, \bar{E})$ grafıdır öyle ki $\bar{E}$ aşağıdaki biçimde tanımlıdır; $\bar{E} = \{e = \{x,\ y\}: x, y \in V \text{ ve } \{x,\ y\} \notin E\}$.

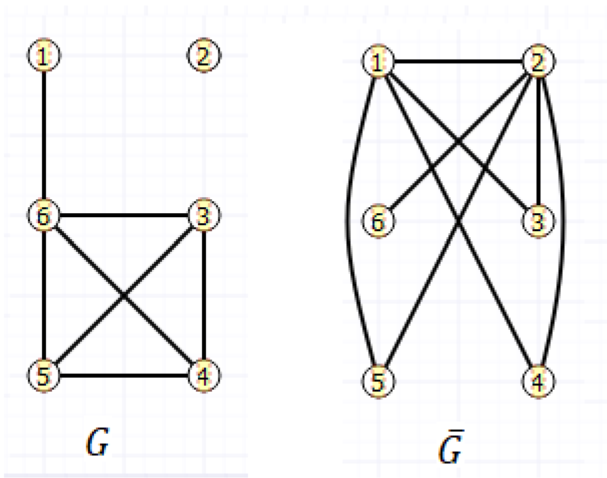
Kısaca $\bar{E} = \{V \times V\} - E$ şeklinde de yazılabilir [9].

Örnek Aşağıda bir G grafı ve bu grafın tümleyeni verilmiştir.

$G = (V, E)$ ve $\bar{G} = (V, \bar{E})$ için,

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$, $E = \big\{\{1,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}\big\}$ ve

$\bar{E} = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}\big\}$ olur.



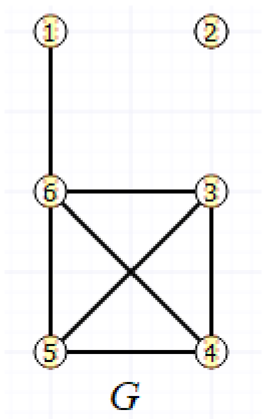
Şekil 2.6. Bir graf ve grafın tümleyeni

Tanım 2.2.16. Bir grafta, derecesi sıfır olan noktaya *izole nokta*, derecesi bir olan noktaya ise *sarkıt nokta (pendant vertex)* denir. Sarkıt noktaya bağlanan kenara ise *sarkıt kenar* (*pendant edge*) denir [9,10]

Tanım 2.2.17. Bir G grafının en az komşuya sahip olan bir noktasına *minimum dereceli nokta* denir ve bu noktanın derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir. En çok komşuya sahip olan bir noktaya ise *maksimum dereceli nokta* denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.2.18. Bir grafın tüm noktalarının derecelerinin oluşturduğu artmayan diziye, grafın *derece dizisi* denir [9].

Örnek Aşağıdaki G grafında 2 noktası izole nokta, 1 noktası sarkıt nokta ve $\{1,6\}$ kenarı sarkıt kenardır. G grafının derece dizisi (4,3,3,3,1,0) olur. Bu durumda $\delta(G) = 0$ ve $\Delta(G) = 4$ olur.



Şekil 2.7. İzole nokta,sarkıt nokta,sarkıt kenar

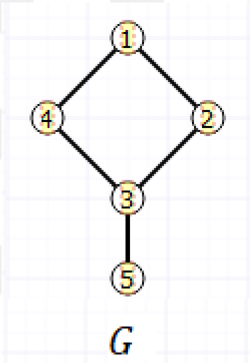
Teorem 2.2.1. Bir $G = (V, E)$ grafında dereceler toplamı kenar sayısının iki katına eşittir. $|E| = m$ olmak üzere ;

$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ [9].

Örnek Aşağıdaki $G = (V, E)$ grafına ait noktaların dereceleri;

$d(1) = 2,\ d(2) = 2,\ d(3) = 3,\ d(4) = 2,\ d(5) = 1$'dir.
Dereceler toplamı 10 ve $|E| = 5$'dir.

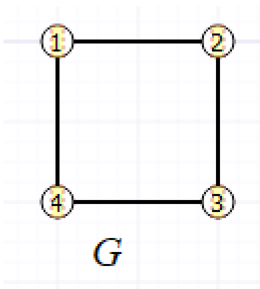
Burada $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5) = 2|E|$ olduğu görülür.



Şekil 2.8. Bir graf

Tanım 2.2.19. Bir grafın tüm noktalarının dereceleri birbirine eşit ise yani $\forall v_i \in V$ için, $d(v_i) = r$ ise G grafına *r-regüler graf* denir [10].

Örnek G grafı bütün noktalarının dereceleri 2'ye eşit olduğundan 2-regüler graftır.



Şekil 2.9. Regüler graf

Tanım 2.2.20. Bir $G = (V, E)$ grafının keyfi noktaları $v_{k_0}, \dots, v_{k_i} \in V$ olmak üzere v_{k_0} noktasından başlayıp v_{k_i} noktasında biten keyfi bir yürüyüş,

$v_{k_0}, \{v_{k_0}, v_{k_1}\}, v_{k_1}, \{v_{k_1}, v_{k_2}\}, v_{k_2}, \dots, \{v_{k_{i-1}}, v_{k_i}\}, v_{k_i}$

şeklinde yazılan nokta ve kenarlardan oluşan sonlu bir dizidir. Bir yürüyüşteki kenar sayısı *yürüyüş uzunluğudur*. Herhangi bir yürüyüşte aynı nokta veya kenar birden fazla defa yer alabilir [9].

Tanım 2.2.21. Kenar tekrarlamayan bir yürüyüşe *gezi*; nokta tekrarlanmayan bir yürüyüşe ise *yol* denir [9].

Tanım 2.2.22. Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan bir yürüyüşe *kapalı yürüyüş* denir. Kenar tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe *devir*; nokta tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe ise *döngü (cycle)* denir [9].

Aşağıdaki tablo ile bu kavramlar daha kolay anlaşılır hale getirilmek istenmiştir.

Tablo 2.1. Yürüyüş, kapalı yürüyüş, gezi, devir, yol, döngü tanımlarının karşılaştrılması [9].

	Tekrarlama kısıtlaması yok	Kenar tekrarlamama	Nokta Tekrarlamama
Keyfi noktada başlayıp biten	YÜRÜYÜŞ	GEZİ	YOL
Aynı noktada başlayıp biten	KAPALI YÜRÜYÜŞ	DEVİR	DÖNGÜ

Örnek Aşağıdaki G grafında;

1,{1,2},2,{2,3},3,{3,1},1,{1,2},2,{2,6},6 biçiminde gösterilen 5 uzunluklu bir yürüyüş vardır. G grafı basit graf olduğundan kısaca 1-2-3-1-2-6 şeklinde gösterilebilir.

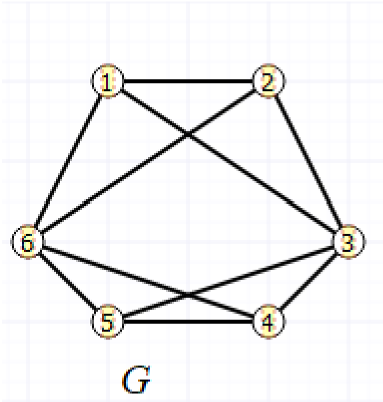
1-2-3-1-6 yürüyüşü kenar tekrarlanmadığı için gezidir.

1-2-3-4 yürüyüşü nokta tekrarlamadığı için bir yoldur.

1-2-3-1-2-6-1 yürüyüşü aynı noktada başlayıp bittiği için kapalı yürüyüştür.

3-4-5-3-2-1-3 yürüyüşü kenar tekrarlamadığı ve aynı noktada başlayıp bittiği için bir devirdir.

1-2-3-4-5-6-1 yürüyüşü nokta tekrarlamadığı ve aynı noktada başlayıp bittiği için bir döngüdür.

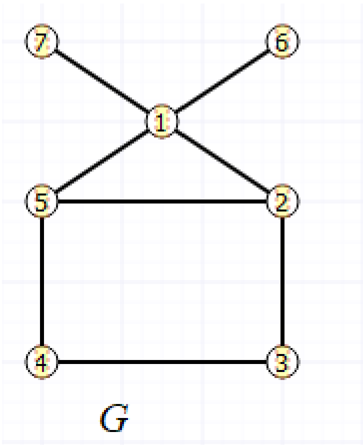


Şekil 2.10. Yürüyüş, kapalı yürüyüş, yol, devir, döngü, gezi

Tanım 2.2.23. Bir $G = (V, E)$ graf ve $u.v \in V$ olmak üzere bu iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğuna bu iki nokta arasındaki *uzaklık (distance)* denir ve $dist(v_i, v_j)$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.2.24. $G = (V, E)$ grafında alınan keyfi nokta çiftleri arasındaki uzaklıkların en büyüğüne G'nin *çapı (diameter)* denir ve $diam(G)$ biçiminde gösterilir. Aynı zamanda, G'de bir u noktasının *dış merkezliği*, $\varepsilon(u) = max_{v \in V}\ dist(u, v)$ ve G'nin *yarıçapı (radius)*, $r(G) = min_{u \in V}\ \varepsilon(u)$ biçimindedir [11].

Örnek Aşağıdaki G grafında 4 ve 7 noktaları arasındaki uzaklık, $dist(4,7) = 3$' tür. Çünkü bu iki nokta arasındaki en kısa yol $4 - 5 - 1 - 7$ olup 3 uzunlukludur. Bu grafın noktalarının dışmerkezlikleri $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(5) = 2$, $\varepsilon(3) = \varepsilon(4) = \varepsilon(6) = \varepsilon(7) = 3$ olur. $diam(G) = 3$ ve $r(G) = 2$ olur.

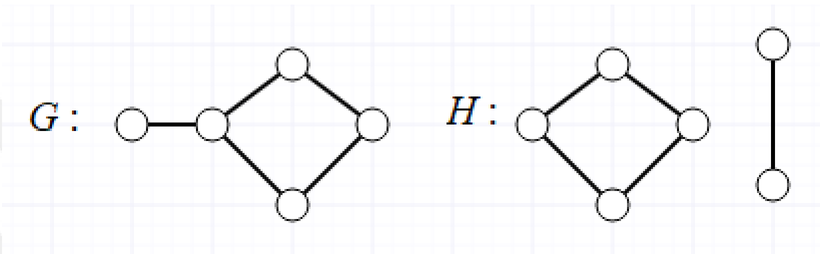


Şekil 2.11. Uzaklık, dışmerkezlik, çap ve yarıçap

Tanım 2.2.25. Bir G grafında her nokta çifti bağlantılı bir nokta çifti ise (yani bu noktalar arasında daima en az bir yol bulunabiliyorsa), G grafına *bağlantılı graf* denir. Bağlantılı olmayan grafa ise *bağlantısız graf* denir [12].

Tanım 2.2.26. Bir grafın bağlantılı olan ve başka bir bağlantılı alt grafı tarafından kapsanmayan her bir alt grafına, bu grafın bir *bileşeni* denir. Bir H grafının bileşenleri $H_1, \dots, H_r$ ise $H = H_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} H_r$ şeklinde gösterilir [9].

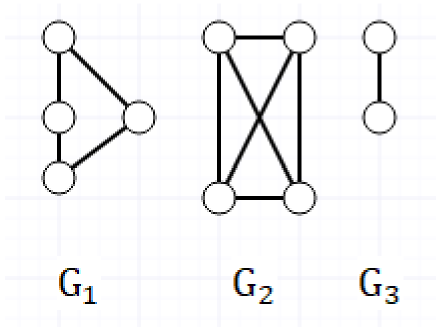
Örnek G grafı bağlantılı ve H grafı iki bileşeni olan bağlantısız bir graftır.



Şekil 2.12. Bağlantılı ve bağlantısız graf

Tanım 2.2.27. Nokta ve kenar kümeleri ayrık kümeler olan $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_n = (V_n, E_n)$ grafları verilsin. $V' = V_1 \cup \dots \cup V_n$ ve $E' = E_1 \cup \dots \cup E_n$ olmak üzere, $G = (V', E')$ grafına $G_1, \dots, G_n$ *grafların ayrık birleşimi denir* ve $G = G_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_n$ ile gösterilir. Yani aslında grafların ayrık birleşimi alınarak, bu grafları bileşen kabul eden bağlantısız graflar oluşturulmaktadır [9].

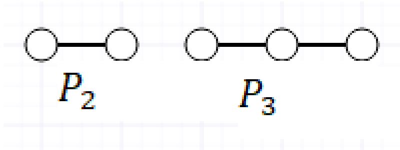
Örnek $G = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} G_3$ grafı;



Şekil 2.13. Grafların ayrık birleşimi

Tanım 2.2.28. Bir G grafının $v_1, v_2, \dots, v_n$ birbirinden farklı noktaları olsun. Ardışık $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$ kenarlarına sahip olan bir grafa *yol* (*path*) *graf* denir. n noktalı bir yol graf P_n ile gösterilir [10].

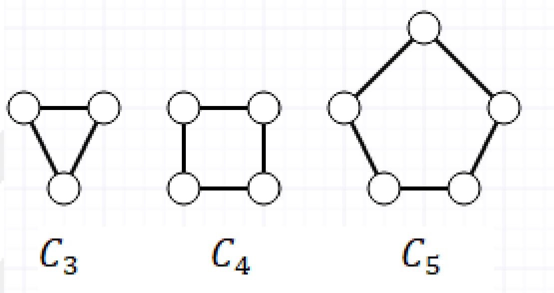
Örnek



Şekil 2.14. İki ve üç noktalı yol graflar

Tanım 2.2.29. Sadece bir adet döngüden oluşan grafa *döngü graf* denir. Grafın içerdiği nokta sayısı n ise C_n ile gösterilir [9].

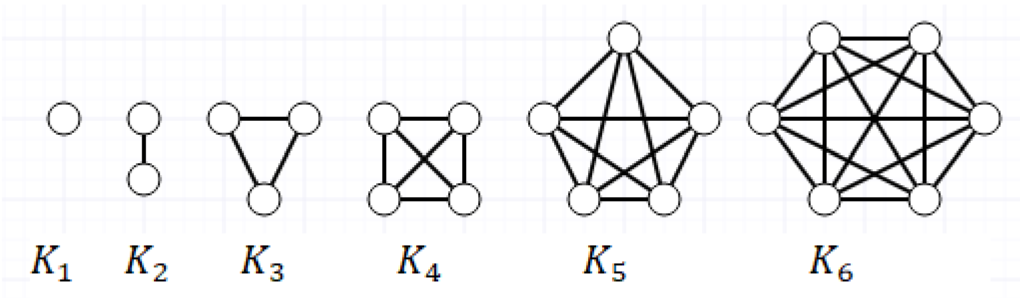
Örnek



Şekil 2.15. Üç, dört, beş noktalı döngü graflar

Tanım 2.2.30. Bir G grafında her nokta çifti arasında bir kenar bulunuyorsa bu grafa *tam* (*complete*) *graf* denir ve K_n ile gösterilir [12].

Örnek

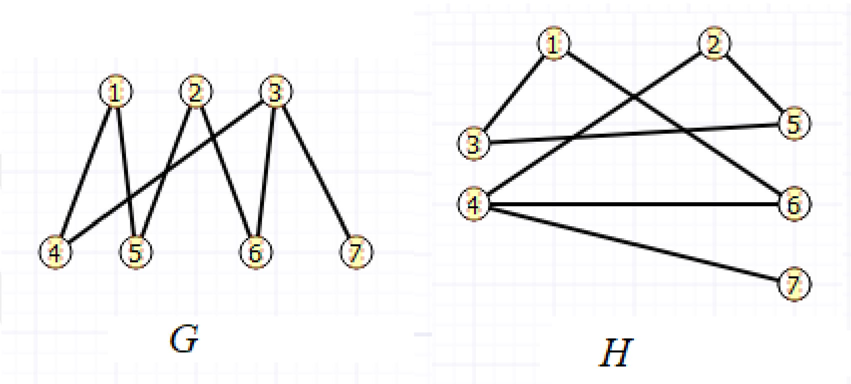


Şekil 2.16. Bir, iki, üç, dört, beş, altı noktalı tam graflar

Tanım 2.2.31. $G = (V, E)$ grafında V kümesi A ve B gibi iki ayrık alt kümeye ayrıldığında E kenar kümesinden alınan her bir kenarın bir noktası A kümesinde diğeri de B kümesinde oluyorsa bu graflara *iki parçalı* (*bipartite*) *graf* denir. Daha genel olarak, V kümesi birbirine komşu olmayan noktaların oluşturduğu k tane ayrık kümenin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa G'ye k-*parçalı* (k-*partite* ya da *çok parçalı*) *graf* denir [11,12].

Örnek $G = (V, E)$ grafında $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ olup $\{1,2,3\} \cup \{4,5,6,7\}$ birleşimleri kendi içerisinde kenar oluşturmaz. G grafı iki-parçalı bir grafa örnektir.

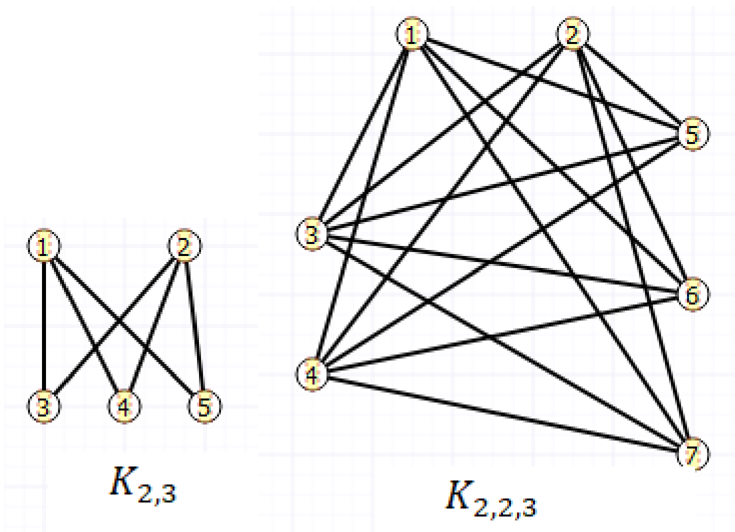
$H = (V', E')$ grafında $V' = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ olup $\{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5,6,7\}$ birleşimleri kendi içerisinde kenar oluşturmaz. H 3-parçalı (çok parçalı) grafa örnektir.



Şekil 2.17. İki parçalı graf, çok parçalı graf

Tanım 2.2.32. Çok parçalı bir grafta, aynı bağımsız küme içerisinde bulunmayan her nokta çifti birbirine kesinlikle komşu ise, bu grafa *çok parçalı tam graf* denir ve parçalardaki nokta sayıları sırasıyla m_1 , . . . , m_n olmak üzere $K_{m_1,....,m_n}$ ile gösterilir. $K_{m_1,....,m_n}$ grafında $n = 2$ ise bu grafa *iki parçalı tam graf* denir [9].

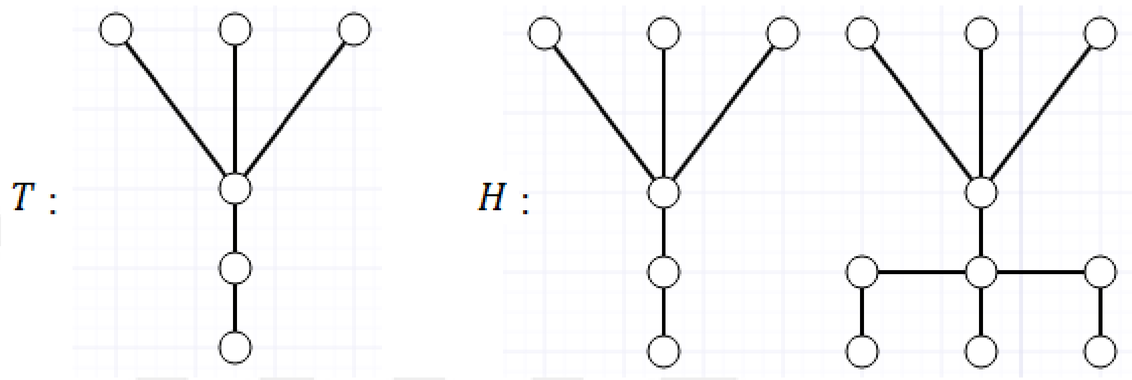
Örnek $K_{2,3}$ grafı iki parçalı tam graf ve $K_{2,2,3}$ grafı çok parçalı tam graftır.



Şekil 2.18. $K_{2,3}$ ve $K_{2,2,3}$ grafları

Tanım 2.2.33. Bir bağlantılı graf içerisinde hiç döngü yoksa bu grafa *ağaç* denir ve genellikle T ile gösterilir. Bileşenlerinin hepsi ağaç olan bir grafa ise *orman* denir [9,10].

Örnek Aşağıda T ağacı ve iki bileşenden oluşan H ormanı gösterilmiştir.



Şekil 2.19. T ağacı ve H ormanı

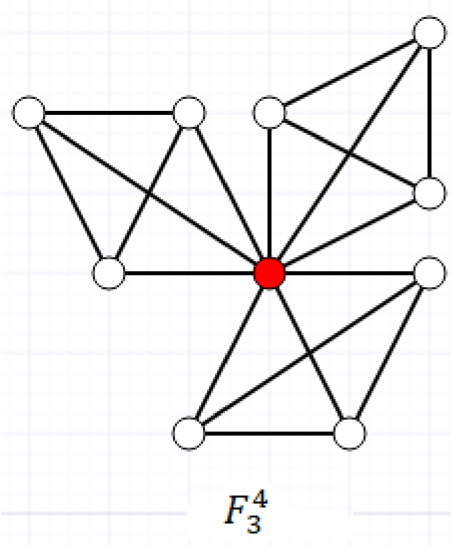
Teorem 2.2.2. n mertebeli bir ağacın genişliği $n-1$'e eşittir [13].

İspat n üzerine tümevarım uygulansın. $n=1$ için K_1 in kenar sayısı 0 olur. $n=2$ için K_2'nin kenar sayısı 1 olur. $n=k$ için k mertebeli her ağacın genişliği $k-1$ olsun. $n=k+1$ için bakılsın. T, $k+1$ mertebeli bir ağaç olsun. T'de en az iki tane sarkıt nokta vardır. Bu noktalardan biri v olsun. Bu durumda $T'=T-v$, k mertebeli bir ağaç olur. T' ağacının kenar sayısı $k-1$ olur. T'nin kenar sayısı, T' ağacının kenar sayısının 1 fazlası olduğundan, $(k-1)+1=k$ olur [13]. ∎

Tanım 2.2.34. n noktalı K_n tam grafının k adet kopyasının ortak bir noktada birleştirilmesiyle oluşan grafa *friendship* (*arkadaşlık*) *grafı* denir ve F_k^n ile gösterilir [9].

Not: Bazı kaynaklarda özel olarak $n=3$ durumu da doğrudan friendship graf olarak adlandırılır [18].

Örnek



Şekil 2.20. Friendship graf

Tanım 2.2.35. $G = (V, E)$ ve $G' = (V', E')$ grafları verilsin. $\forall u, v \in V$ için, $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$ olacak şekilde birebir ve örten bir $f: V \to V'$ dönüşümü varsa, G ve G' graflarına *izomorf graflar* denir ve $G \cong G'$ şeklinde gösterilir [10].

Örnek Aşağıda $G = (V, E)$ ile $G' = (V', E')$ grafları sırasıyla,

$V = \{1,2,3,4,5\}$ ile $V' = \{7,8,9,10,11\}$ nokta kümelerine ve

$E = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}$ ile

$E' = \{\{7,8\}, \{7,10\}, \{7,11\}, \{8,9\}, \{8,10\}, \{9,10\}, \{10,11\}\}$ sahiptir.

$f: V \to V'$: $f(x) = x + 6$ için;

$f(1) = 7, f(2) = 8, f(3) = 9, f(4) = 10, f(5) = 11$'dır.

$\{1,2\} \in E$ için $\{f(1), f(2)\} = \{7,8\} \in E'$,

$\{1,4\} \in E$ için $\{f(1), f(4)\} = \{7,10\} \in E'$,

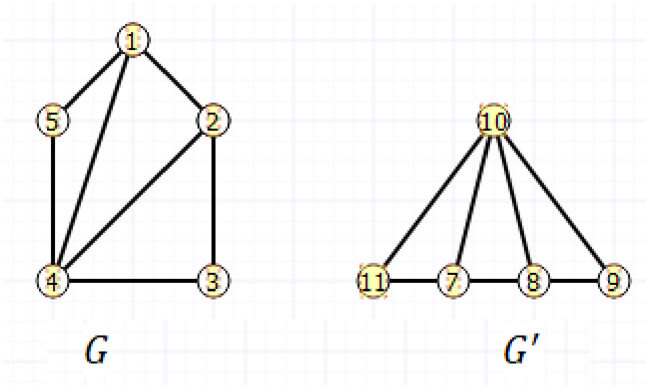
$\{1,5\} \in E$ için $\{f(1), f(5)\} = \{7,11\} \in E'$,

$\{2,3\} \in E$ için $\{f(2), f(3)\} = \{8,9\} \in E'$,

$\{2,4\} \in E$ için $\{f(2), f(4)\} = \{8,10\} \in E'$,

$\{3,4\} \in E$ için $\{f(3), f(4)\} = \{9,10\} \in E'$ ve

$\{4,5\} \in E$ için $\{f(4), f(5)\} = \{10,11\} \in E'$ olur. Dolayısıyla $G \cong G'$ olur



Şekil 2.21. İzomorf graflar

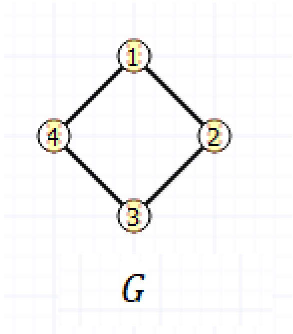
2.3. Graf Matrisleri ve Graf Spektrası

Tanım 2.3.1. $M(G)$ ya da kısaca M, G grafına ait bir graf matrisi ve I birim matris olmak üzere $det(xI - M(G))$ polinomuna G'nin $M(G)$ karakteristik polinomu denir ve $char(M(G))(x)$ ile gösterilir. Bu polinomun köklerinden yani $M(G)$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan kümeye ise G'nin $M(G)$ spektrumu denir ve $spec(M(G))$ ile gösterilir. Ya da matrisin adına göre komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu v.b. de denir [9].

Tanım 2.3.2. G**,** noktaları $1,2, \dots, n$ olacak şekilde etiketlendirilmiş n noktalı bir graf olmak üzere komşuluk matrisi $A(G) = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipinde aşağıdaki koşulu sağlayan bir matristir [14].

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 : & i \sim j \\ 0 : & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

Örnek



Şekil 2.22. G grafı

Yukarıda verilen grafın komşuluk matrisi ve bu matrisin karakteristik polinomu aşağıda verilmiştir.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$char\big(A(G)\big)(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^4 - 4x^2 = x^2.(x^2-4)\text{'dir.}$$

$A(G)$'nin özdeğerleri $\{0,0,-2,+2\}$ olur.Yani $spec\big(A(G)\big) = \{0,0,-2,+2\}$'dir. İki katlı 0 özdeğeri vardır.

Not: Bu tez çalışmasında yer alan $P_n, C_n, K_n, K_{m_1, m_2}, K_{m_1, \ldots, m_2}$ graflarının komşuluk matrisine göre karakteristik polinomları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$char\big(A(P_n)\big)(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - 2\cos\left(\frac{2\Pi i}{n+1}\right))$$

$$char\big(A(C_n)\big)(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - 2\cos\left(\frac{2\Pi i}{n}\right))$$

$$char\big(A(K_n)\big)(x) = (x+1)^{n-1}(x-n+1)$$

$$char\left(A\big(K_{m_1, m_2}\big)\right)(x) = (x)^{m_1+m_2-2}(x^2 - m_1 m_2)$$

$$char\left(A\big(K_{m_1, \ldots, m_n}\big)\right)(x) = (x)^{m_1+\cdots+m_n-n}\left(1 - \textstyle\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{x+m_i}\right)\prod_{j=1}^{n}(x+m_j) \text{ [9].}$$

Tanım 2.3.3. $A(G)$ matrisi tanımı gereği sıfır köşegene sahip, bileşenleri 0 ve 1 den oluşan simetrik bir matristir. Dolayısıyla özdeğerleri reel olur. Bu özdeğerleri $\lambda_1(A(G)) \geq \lambda_2(A(G)) \geq \cdots \geq \lambda_n(A(G))$ ile gösterelim. $A(G)$ matrisinin en büyük özdeğeri $\lambda_1(A(G))$ değerine G grafının *komşuluk spektral yarıçapı* denir ve $\rho(G)$ ile gösterilir.

Not: Benzer matrislerin karakteristik polinomları aynı olduğundan P bir permütasyon matrisi olmak üzere, keyfi bir $A' = P^{-1}A(G)P$ matrisi de $A(G)$ ile aynı spektruma sahiptir. Dolayısıyla G grafının noktalarının farklı etiketlenmesi komşuluk spektrumunu değiştirmez [9].

Teorem 2.3.1. $n \times n$ tipindeki A ve B matrisleri için aşağıdaki ifadeler birbirine denk olur [9].

i. A ve B *kospektraldir.*

ii. A ve B aynı *karakteristik polinoma* sahiptir.

iii. $i = 1,2, \dots, n$ için $iz(A^i) = iz(B^i)$'dir.

Teorem 2.3.2. Bir G grafının komşuluk matrisine göre, aşağıdaki parametreler spektrum yardımıyla belirlenebilir [9].

i. *nokta sayısı*

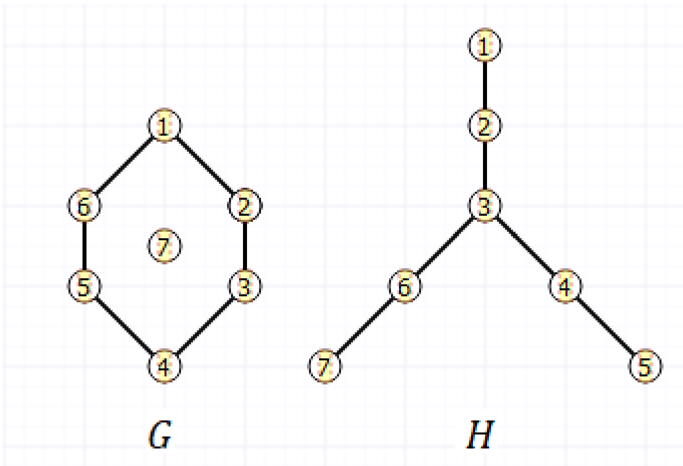
ii. *kenar sayısı*

iii. *belirli uzunluktaki yürüyüşlerin sayısı.*

Tanım 2.3.4. G ve H grafları verilsin. $spec(M(G)) = spec(M(H))$ ise G ve H graflarına, M matrisine göre *kospektral graflar* denir [9].

Örnek Aşağıda verilen G ve H grafları komşuluk matrislerine göre kospektral graflardır.

$spec(A(G)) = spec(A(H)) = \{-2, -1^2, 1^2, 2\}$'dir.



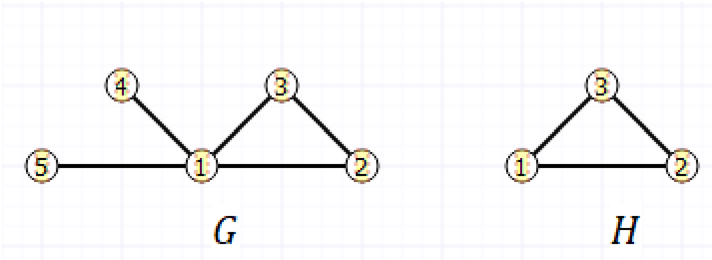
Şekil 2.23. G ve H kospektral grafları

Not: İzomorf grafların belirli bir M matrisine göre spektrumlarının aynı olacağı kolaylıkla görülebilir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani M matrisine göre kospektral olan iki graf izomorf olmak zorunda değildir. Bu durumla ilgili detaylı bilgi [9, 15] kaynaklarında mevcuttur.

Teorem 2.3.3. (Cauchy arada olma) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrik ve bazı i değerleri için A matrisinden hem i. satır hem i. sütunun silinmesiyle oluşan $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $(m < n)$ matrisi A matrisinin asıl alt matrisi olsun. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ ve B matrisinin özdeğerleri $\alpha_1 \geq ... \geq \alpha_n$ ise $\lambda_k \geq \alpha_k \geq \lambda_{k+n-m}$ $(k = 1, \dots, m)$ eşitsizliği sağlanır [7].

Teorem 2.3.4. (A-Cauchy arada olma) G grafı n noktalı bir graf ve $A(G)$'nin özdeğerleri $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq ... \geq \lambda_n(G)$ biçiminde sıralansın. H grafı m noktalı ve G'nin indirgenmiş alt grafı olsun. $A(H)$'nin özdeğerleri $\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq ... \geq \lambda_m(H)$ ise $\lambda_{n-m+i}(G) \leq \lambda_i(H) \leq \lambda_i(G)$, $(1 \leq i \leq m)$ eşitsizliği geçerlidir [7].

Örnek Aşağıda bir G grafı ve bu grafın indirgenmiş alt grafı olan H grafının komşuluk matrisinin karakteristik polinomları ve özdeğerleri gösterilmiştir.



Şekil 2.24. Cauchy arada olma

$$char\big(A(G)\big) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$$

G grafının özdeğerleri;

$\lambda_1\big(A(G)\big) \approx 2{,}343 \quad \lambda_2\big(A(G)\big) \approx 0{,}471 \quad \lambda_3\big(A(G)\big) = 0$

$\lambda_4(A(G)) = -1 \quad \lambda_5(A(G)) \approx \ -1{,}814$

$$char\big(A(H)\big) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda + 1).(\lambda + 1).(\lambda - 2)$$

H grafının özdeğerleri:

$\lambda_1\big(A(H)\big) = 2 \quad \lambda_2\big(A(H)\big) = -1 \quad \lambda_3\big(A(H)\big) = -1$ olur.

Burada -1 özdeğeri iki katlıdır.

$\lambda_1\big(A(G)\big) \approx 2{,}343 \geq \lambda_1\big(A(H)\big) = 2 \ \geq \ \lambda_3\big(A(G)\big) = 0$

$\lambda_2\big(A(G)\big) \approx 0{,}471 \geq \ \lambda_2\big(A(H)\big) = -1 \geq \ \lambda_4(A(G)) = -1$

$\lambda_3\big(A(G)\big) = 0 \ \geq \ \lambda_3\big(A(H)\big) = -1 \ \geq \lambda_5(A(G)) \approx \ -1{,}814$ olur.

Sonuç 2.3.1. Reel simetrik bir A matrisinin özdeğerleri $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$ olsun. $i \in \{1, \ldots, m\}$ ve $|\Delta_i| = n_i > 0$ olmak üzere, $\{1, 2, \ldots, n\} = \Delta_1 \dot{\cup} \Delta_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \Delta_m$ bir küme parçalanışı olsun. $A_{ij}, n \times n$ tipinde bir blok olmak üzere, $A = \big[A_{ij}\big]$ blok matrisi yazılsın. A_{ij} bloğundaki tüm bileşenlerin toplamı e_{ij} ve $B = [e_{ij}/n_i]$ ise B nin özdeğerleri A nın özdeğerleri ile iç içe geçer. (Burada e_{ij}/n_i değeri, A_{ij} bloğundaki ortalama satır toplamıdır.)

Aynı blok içerisindeki tüm satır toplamları eşit olduğunda ise aşağıdaki sonuç elde edilir [9].

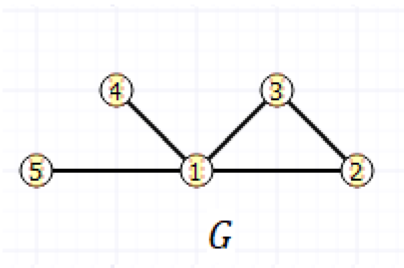
Sonuç 2.3.2. A matrisi Sonuç 2.3.1.'deki gibi bloklara ayrılabilen bir matris olsun. A_{ij} bloğundaki sabit satır toplamı b_{ij} ve $B = [b_{ij}]$ise A nın spektrumu, B nin spektrumunu kapsar [9].

Tanım 2.3.5. $G = (V, E)$ grafı verilsin ve V kümesinin bir parçalanışı $V = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$ olsun. $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ için eğer V_i kümesindeki her nokta V_j de aynı sayıda noktaya komşu ise bu parçalanışa G grafının bir *eşit parçalanışı* denir [9].

Tanım 2.3.6. $G = (V, E)$ grafı ve V kümesinin bir eşit parçalanışı $V = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$ verilsin. Sonuç 2.3.1 deki gösterime uygun olarak elde edilen $Q = [q_{ij}]$ matrisine bu parçalanışın *bölüm matrisi* denir [9].

Teorem 2.3.5. Bir grafın herhangi bir eşit parçalanışına ait bölüm matrisinin karakteristik polinomu, bu grafın komşuluk matrisinin karakteristik polinomunu böler [9].

Örnek



Şekil 2.25. G grafı ve bir eşit parçalanışı

Yukarıda verilen G grafının bir eşit parçalanışı; $\mathbb{\Pi}: \{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}$ olur. Bu G grafının komşuluk matrisi ve bu parçalanışın bölüm matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{\mathbb{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$char\big(A(G)\big) = x^5 - 5x^3 - 2x^2 + 2x = x(x+1)(x^3 - x^2 - 4x + 2)$

$char(Q_{\mathbb{II}}) = x^3 - x^2 - 4x + 2$ olur.

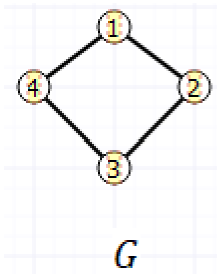
Böylece G grafının eşit parçalanışına ait bölüm matrisi olan $Q_{\mathbb{II}}$'nin karakteristik polinomu, G grafının komşuluk matrisinin karakteristik polinomunu böldüğü görülür.

Tanım 2.3.7. Bir grafın $S(G) = [s_{ij}]$ Seidel matrisi, elemanları

$s_{ij} = \begin{cases} 0 & ; \ i = j \\ -1 & ; \ i \sim j \\ 1 & ; \ i \nsim j \end{cases}$ olan $n \times n$ tipinde matristir. Diğer bir ifade ile A komşuluk matrisi, J bütün elemanları 1 olan matris ve I birim matris olmak üzere;

$S(G) = J - I - 2A(G) = A(\bar{G}) - A(G)$ biçiminde tanımlanır [10].

Örnek Aşağıda bir G grafının Seidel matrisi gösterilmiştir.



Şekil 2.26. Seidel matris örneği

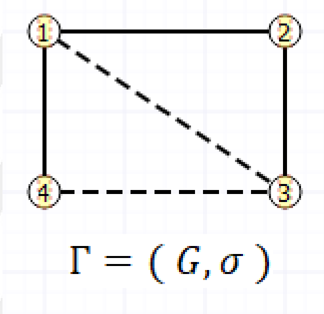
$$S(G) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ şeklindedir.

2.4. İşaretli Graflar

Tanım 2.4.1. Bir $G = (V, E)$ grafı ve bu grafın kenar kümesi üzerinde $\sigma: E \rightarrow \{+, -\}$ şeklinde tanımlanan işaret fonksiyonunun oluşturduğu ikiliye *işaretli graf* denir ve genellikle $\Gamma = (G, \sigma)$ ile gösterilir.Burada G grafına *baz* ya da *kök* (*underlying*) *graf* denir [16].

Not: Bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında, G baz grafı ilmek ve katlı kenara sahip olabilir. Fakat bu tez çalışması boyunca baz grafı basit graf olan işaretli graflar incelenmiştir.

Örnek



Şekil 2.27. İşaretli graf

$\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında pozitif kenarlar kalın çizgi, negatif kenarlar kesikli çizgiyle ifade edilmiştir.

$V(G) = \{1,2,3,4\}$

$E(G) = \big\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,1\}, \{1,3\}\big\}$

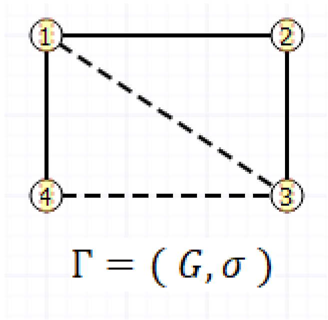
$\sigma(\{1,2\}) = +1,\ \sigma(\{2,3\}) = +1,\ \sigma(\{3,4\}) = -1,\ \sigma(\{4,1\}) = +1,\ \sigma(\{1,3\}) = -1$

Not: Buradan sonra işaretli bir grafın kenar işaretleri ± 1 yerine $\pm$ ile ifade edilmiştir.

Tanım 2.4.2. $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının bütün kenarları pozitif işaretli ise, Γ'ya *tüm pozitif işaretli* (*full-positive*) *graf*; bütün kenarları negatif işaretli ise, *tüm negatif işaretli* (*full-negative*) *graf* denir [17].

Tanım 2.4.3. $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında G grafının bir döngüsü C ise; C'nin işareti, C'de bulunan tüm kenarların işaretlerinin çarpımıdır [16].

Örnek

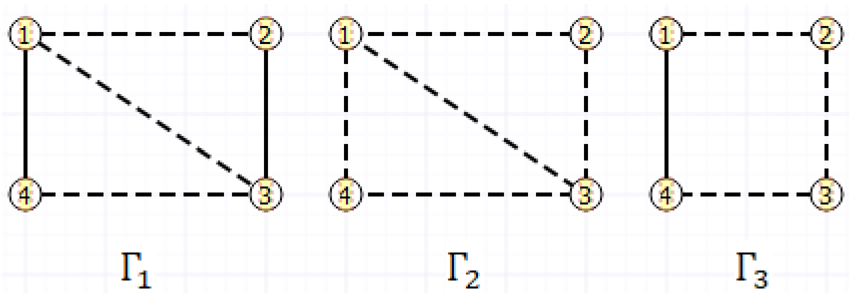


Şekil 2.28. İşaretli grafta bir döngünün işareti

$\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında 1-2-3-1 döngüsünün işareti; kenar işaretleri sırasyla +,+,$-$ olduğu için negatiftir.

Tanım 2.4.4. Bir işaretli grafın bütün döngüleri pozitif ise o grafa *dengeli* (*balanced*) *graf* denir. Eğer bir işaretli grafın en az bir döngüsü negatifse o grafa *dengeli olmayan* (*unbalanced*) *graf* denir. Bir işaretli grafın bütün döngüleri negatif ise bu işaretli grafa da *ters dengeli* (*antibalanced*) *graf* denir [16].

Örnek Aşağıda verilen Γ_1 işaretli grafı *dengeli*, Γ_2 işaretli grafı *dengeli olmayan* ve Γ_3 işaretli grafı da *ters dengeli* graftır.

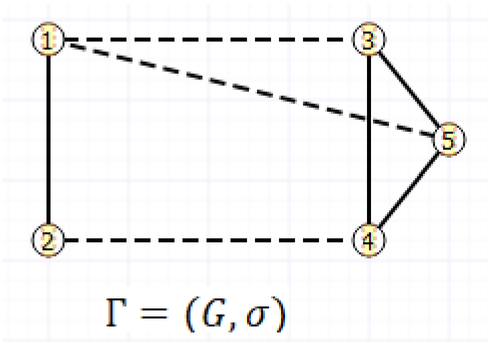


Şekil 2.29. Dengeli, dengeli olmayan ve ters dengeli işaretli graflar

Teorem 2.4.1. Bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının nokta kümesi karşılıklı kümelerde olan noktaların kenarları negatif ve aynı küme içerisindeki noktaların kenarlarının işaretleri de pozitif olacak biçimde iki parçaya ayrılabiliyorsa bu işaretli graf dengelidir [16].

Not: İşaretlendirilmemiş grafların bütün kenarları pozitif işaretli (*full-positive*) olarak düşünülür ve dolayısıyla dengelidir [16].

Örnek Aşağıda bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının nokta kümesi $V = \{1,2,3,4,5\}$ olsun. V nokta kümesi, $V_1 = \{1,2\}$ ve $V_2 = \{3,4,5\}$ olacak şekilde iki parçaya ayrıldığında aynı küme içerisindeki kenarların işaretleri pozitif ve karşılıklı kümelerde olan noktaların kenar işaretleri negatiftir. Dolayısıyla Γ işaretli grafı dengelidir.

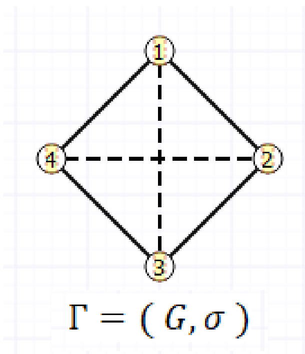


Şekil 2.30. İki parçaya ayrılabilen dengeli Γ işaretli grafı

Tanım 2.4.5. Bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında v_i noktasının *derecesi*, G baz grafında v_i'ye komşu olan noktaların sayısı olup $d(v_i)$ ile gösterilir. v_i'ye komşu olan negatif işaretli kenarların sayısına v_i'nin *negatif derecesi* denir ve $d^-(v_i)$ ile gösterilir. v_i'ye komşu olan pozitif işaretli kenarların sayısına v_i'nin *pozitif derecesi* denir ve $d^+(v_i)$ ile gösterilir. $d^+(v_i) - d^-(v_i)$ farkına da v_i'nin *net derecesi* denir ve $d^{\pm}(v_i)$ ile gösterilir [16-17].

Tanım 2.4.6. Bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında iki nokta arasında *uzaklık*, G baz grafında bu iki nokta arasındaki uzaklıktır. Γ grafının çapı ise, Γ daki uzaklıklarının maksimumu olur ve $diam(\Gamma)$ ile gösterilir [16].

Örnek



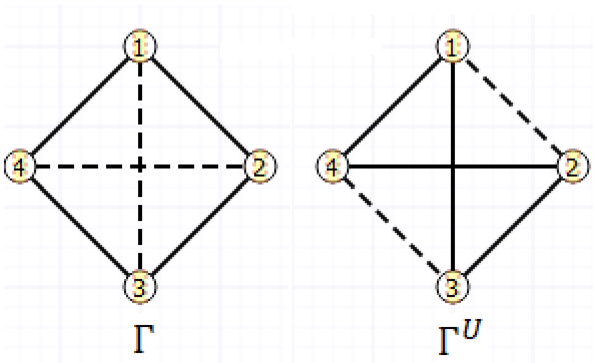
Şekil 2.31. İşaretli grafta pozitif,negatif,net derece ve grafın çapı

Yukarıdaki şekilde verilen bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında;

$d^-(1) = d^-(2) = d^-(3) = d^-(4) = 1$
$d^+(1) = d^+(2) = d^+(3) = d^+(4) = 2$
$d(1) = d(2) = d(3) = d(4) = 3$
$d^\pm(1) = d^\pm(2) = d^\pm(3) = d^\pm(4) = 2 - 1 = 1$
Ayrıca $diam(\Gamma) = 1$ olur.

Tanım 2.4.7. Bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında $U \subseteq V(G)$ olsun. U ve $V(G) \setminus U$ kümelerindeki kenarların işaretlerinin aynı bırakılması ve bu iki küme arasında yer alan bütün kenarların işaretlerinin ters çevirilmesi işlemine *switching* denir. Γ grafından, U kümesine göre switching işlemi uygulanması ile elde edilen işaretli graf Γ^U ile gösterilir. Yani U ile $V(G) \setminus U$ kümeleri arasında bir e kenarı var ise $\sigma_{\Gamma^U}(e) = -\sigma_\Gamma(e)$ olur. Aksi takdirde $\sigma_{\Gamma^U}(e) = \sigma_\Gamma(e)$' dir. Γ ve Γ^U işaretli graflarına *switching denk* denir ve $\Gamma \sim \Gamma^U$ ile gösterilir [16].

Örnek Aşağıda $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafında U={1,4} ve $V(G) \setminus U$ = {2,3} olacak şekilde nokta alt kümesi seçilerek yapılan *switching* işleminden elde edilen Γ^U işaretli grafı gösterilmiştir.



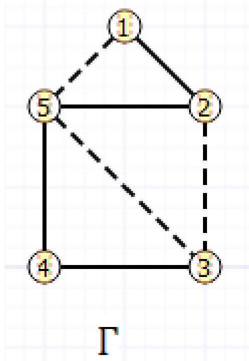
Şekil 2.32. İşaretli grafa switching işlemi uygulanması

Teorem 2.4.2. Bir işaretli graf dengelidir ancak ve ancak full-pozitif işaretlemesi ile switching denk olur [16].

Tanım 2.4.8. Bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının *komşuluk matrisi*;

$$A(\Gamma) = [a_{ij}] = \begin{cases} \sigma(v_i, v_j), & eğer\ v_i \sim v_j \\ 0 & , eğer\ v_i \nsim v_j \end{cases}$$ ile tanımlanır [16].

Örnek



Şekil 2.33. İşaretli grafın komşuluk matrisi ve spektrumu

Yukarıda gösterilen $\Gamma = (\,G, \sigma\,)$ işaretli grafının komşuluk matrisi ve komşuluk matrisinin spektrumu;

$$A(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$char\big(A(\Gamma)\big)(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & x & +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & x & -1 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & x & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 11x - 6$$

$= (x - 2)(\,x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 3$ şeklindedir.

$spec\big(A(\Gamma)\big) = \left\{2, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right\}$ olur.

Tanım 2.4.9. Bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının komşuluk matrisi $A(\Gamma)$ olsun. Komşuluk matrisi $-A(\Gamma)$ olan işaretli grafa, Γ grafının negatifi denir ve Γ^{-} ile gösterilir [18].

Tanım 2.4.10. Γ ve Γ^{U} switching denk iki işaretli graf olsun. $S_U = diag\ (\,s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *switching matrisi*;

$$s_i = \begin{cases} +1, & i \in U; \\ -1, & i \in \Gamma \setminus U. \end{cases} \quad \text{ile tanımlanır.}$$

Öyle ki burada $A(\Gamma^U) = S_U\, A(\Gamma)\, S_U$ eşitliği vardır [16].

Not: Switching denk iki işaretli grafın komşuluk spektrumları aynı olur [16].

Teorem 2.4.3. Kök grafı aynı olan iki işaretli graf switching denktir ancak ve ancak aynı pozitif döngü sınıfına sahiplerdir [16].

Teorem 2.4.4. Γ ve Γ^U *switching izomorf* iki işaretli graftır ancak ve ancak kök grafları arasında tüm döngülerinin işaretlerini koruyan bir izomorfizma vardır [16].

Tanım 2.4.11. Eğer herhangi $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafına belirli bir M matrisine göre kospektral olan tüm işaretli graflar, aynı zamanda switching işlemine göre Γ grafına switching izomorf oluyorsa; Γ ya $M(G)$ matrisinin spektrumu tarafından switching işlemine göre belirlenebilen bir graf denir [16].

Tanım 2.4.12. Bir n mertebeli $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının $A(\Gamma)$ komşuluk matrisinin özdeğerleri $\lambda_1(\Gamma) \geq \lambda_2(\Gamma) \geq \cdots \geq \lambda_n(\Gamma)$ biçiminde sıralansın. Γ işaretli grafının komşuluk matrisinin en büyük özdeğerine *indeks* denir [16].

Not: $A(\Gamma)$ simetriktir ve simetrik matrislerin bütün özdeğerleri reeldir [16].

Not: Γ, en az bir kenar içeriyorsa; öyleyse $\lambda_1(\Gamma) > 0 > \lambda_n(\Gamma)$'dir ve özdeğerlerin toplamı sıfırdır. Genel olarak *indeks* $\lambda_1(\Gamma)$ spektral yarıçapa eşit değildir. $\rho(\Gamma) = \max\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq n\} = \max\{\lambda_1, -\lambda_n\}$'dir. En az üç noktalı kenarları tüm negatif işaretli olan bir tam grafın özdeğerleri $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ ve $\lambda_n = -(n-1)$'dir [16].

Teorem 2.4.5. (Spectral Moments) Bir $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının komşuluk matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ biçiminde sıralansın. $W_k^{\mp}$, k uzunluğundaki pozitif ve negatif kapalı yürüyüşlerin sayısı arasındaki farkı gösteriyorsa, $W_k^{\mp} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ olur [16].

Teorem 2.4.6. (Eigenvalue Spread) $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafın spektral yarıçapı $\rho(\Gamma)$ olsun. Öyleyse $\rho(\Gamma) \leq \rho(G)$ olur [16].

Teorem 2.4.7. (Cauchy arada olma) $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli graf ve $\Gamma - v$, Γ grafından v noktasının silinmesiyle oluşan işaretli graf olsun. λ_i'ler komşuluk matrisinin özdeğerleri ise, $\lambda_1(\Gamma) \geq \lambda_1(\Gamma - v) \geq \lambda_2(\Gamma) \geq \lambda_2(\Gamma - v) \geq \cdots \geq \lambda_{n-1}(\Gamma - v) \geq \lambda_n(\Gamma)$ olur [16].

Önerme 2.4.1. Γ işaretli grafın özdeğerlerinden aşağıdaki durumlar elde edilir:

i. nokta ve kenar sayıları;

ii. üç noktalı pozitif ve negatif döngülerin sayısı arasındaki fark $(\frac{1}{6}\sum \lambda_i^3)$;

iii. p uzunluğundaki pozitif ve negatif kapalı yürüyüşlerin sayısı arasındaki fark $(\sum \lambda_i^p)$ [16].

3. BÖLÜM

En Fazla İki Adet Özdeğeri ∓1'den Farklı Olan Bazı İşaretli Graflar

Bu tez çalışmada en fazla iki adet özdeğeri ∓1'den farklı olan işaretli grafların kümesi ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar incelenmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda, literatürde var olan tüm sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümde derlenerek sunulmuştur. Öncelikle, bu özelliğe sahip tüm işaretli grafların kümesi $\mathcal{G}$ ile gösterilmiştir.
$\mathcal{G}$ kümesi; switching, negatifini alma, izole kenar ekleme veya silme işlemleri altında kapalı olur [18]. $\mathcal{G}$'de yer alan graflardan, işaretlendirilmemiş bir grafa switching izomorf olan graflar ve onların negatifleri de belirlenmiştir. Fakat yine de $\mathcal{G}$'de halen daha çok sayıda graf bulunmaktadır ve bunların belirlenebilmesi işaretsiz grafın durumuna göre çok daha karmaşıktır.
Çalışmamızda kullanılan $\mathbf{1} = [1,1,\ldots,1]$ ve $\mathbf{0} = [0,0,\ldots,0]$ vektörlerdir.

3.1. $\mathcal{G}$ Kümesindeki Bağlantısız İşaretli Graflar

İşaretsiz graflar için iyi bilinen bir sonucu genelleyen lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.1.1. İşaretli bir $\Gamma = (G, \sigma)$ grafının en küçük özdeğeri -1'e eşit ise, G baz grafı tam grafların ayrık birleşimi formundadır [18].

İspat P_3 grafının her bir işaretlenmiş formu için $spec\,(P_3) = \{-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}\}$olur. Γ'nin en küçük özdeğeri -1 olduğundan, Cauchy arada olma teoremi yardımıyla, G'nin P_3 içeremeyeceği görülür. Bu da G'nin her bileşeninin tam graf olduğu anlamına gelir [18]. ■

Bu lemmayı kullanarak aşağıdaki iki sonucu kolayca ispatlanır.

Önerme 3.1.1. İşaretli bir $\Gamma = (G, \sigma)$ grafının bütün özdeğerleri ∓1'dir ancak ve ancak G baz grafı K_2'lerin ayrık birleşimi formundadır [18].

İspat K_2'lerin ayrık birleşiminde tüm olası işaretlemeler için tüm özdeğerlerin ∓ 1'e eşit olduğu açıktır. Tersine bakılırsa; Γ grafının tüm özdeğerlerinin $\mp 1'$e eşit olduğu kabul edilsin. O zaman, Lemma 3.1.1.'den Γ'nın tüm bileşenleri işaretli tam graflar olur. Γ'nın m noktalı herhangi bir bileşeninin komşuluk matrisi A olsun. Buna göre, $iz(A^2) = m.(m-1)$'dir. Diğer yandan, A'nın tüm özdeğerleri ∓ 1 olduğundan A^2'nin özdeğerlerinin toplamı m'ye eşit olmalıdır. Bu da $m.(m-1) = m$ yani $m = 2$ anlamına gelir [18]. ■

Önerme 3.1.2. n noktalı ve bağlantılı $\Gamma = (G, \sigma)$ işaretli grafının yalnızca bir özdeğeri ∓ 1'den farklı olsun. Bu durumda, Γ ya da Γ^-, $n \neq 2$ olacak şekilde bir tüm pozitif işaretli (full positive) K_n tam grafına switching izomorftur [18].

İspat Γ ya da Γ^-'nın en küçük özdeğerinin en az -1 olduğu açıktır. Böylece Lemma 3.1.1.'den Γ'nın baz grafı $G \cong K_n$ olur. Γ'dan keyfi bir v noktası seçilsin. v noktasını içeren tüm pozitif kenarların noktalarının kümesine v noktasını da dahil ederek switching işlemi uygulansın yani v'yi içeren tüm kenarlar pozitif yapılsın. Oluşan yeni graf Γ_1 olsun. Γ_1 grafından v noktasının silinmesiyle elde edilen indirgenmiş alt graf $\Gamma_1 - v$ ile gösterilsin. Eğer $\Gamma_1 - v$'de yalnızca pozitif (ya da negatif) kenarlar varsa $\Gamma_1 = K_n$ olacaktır. Yani Γ, K_n'e switching izomorftur.
Bu yüzden, $n \geq 4$ ve $\Gamma_1 - v$'de bir pozitif ve bir negatif kenar olduğu kabul edilsin. $v, w, x, y \in V$ olmak üzere $\{w, x\}$ pozitif kenar; $\{w, y\}$ negatif kenar olsun. Eğer $\{x, y\}$ kenarı pozitif ise H_1, $\{x, y\}$ kenarı negatif ise H_2 grafı oluşsun. $spec(H_1) = spec(H_2) = \{\mp 1, \mp\sqrt{5}\}$ olduğundan $\Gamma_1 - v$ grafı yalnızca pozitif ya da yalnızca negatif kenarlar içerir. Bu da Γ grafının (ya da Γ^- grafının) K_n'e switching izomorf olduğu anlamına gelir [18].■

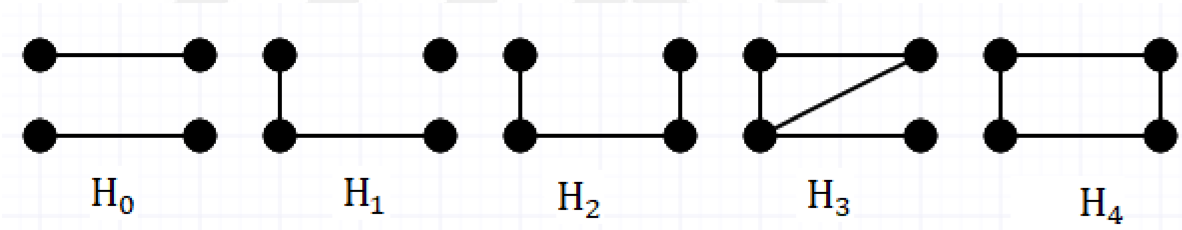
Teorem 3.1.1. $\Gamma = (G, \sigma) \in \mathcal{G}$, bağlantısız ve izole kenar içermeyen bir graf olsun. O zaman Γ, tüm pozitif işaretli tam grafa ya da negatifine switching izomorf olan iki grafın ayrık birleşimidir [18].
İspat Γ bağlantısız graf olduğundan en az iki bileşene sahiptir. Ayrıca izole kenar da içermediğinden her bileşeninde ∓ 1'den farklı özdeğerleri vardır ve Önerme 3.1.2.'den

dolayı sonuç açıktır [18]. ■

3.2. $\mathcal{G}$ Kümesindeki İşaretli Tam Graflar

İşaretli bir tam grafın komşuluk matrisi, işaretlendirilmemiş başka bir grafın Seidel matrisine karşılık gelir (-1'ler komşuluk durumunu temsil eder). Birbirine switching izomorf olan işaretli iki tam grafın komşuluk matrisleri S_1 ve S_2 olsun. Bu durumda Seidel matrisleri S_1 ve S_2 olan graflarda switching denk olurlar [18].

Bu bölümde $\mathcal{G}$'deki tüm işaretli tam graflar (buna denk olarak en fazla iki Seidel özdeğeri ∓ 1'den farklı olan tüm graflar) belirlenecektir. Bunun için $m \geq 1$, $l \geq 0$ olmak üzere her bir elemanı $G = K_m + lK_1$ formunda olan grafların ve tümleyenlerinin bulunduğu küme $\mathcal{H}$ ile gösterilsin. Bu küme en fazla üç noktaya sahip tüm grafları içerir. Dört noktaya sahip graflardan bu kümede olmayanlar aşağıdaki şekilde gösterilmiştir [18].



Şekil 3.1. $\mathcal{H}$ kümesinde olmayan dört noktalı graflar

Lemma 3.2.1. Bir G grafının $\mathcal{H}$'da olması için gerek ve yeter koşul Şekil 3.1.'de verilen grafların G'nin indirgenmiş alt grafı olmamasıdır [18].

İspat ⇒: $G \in \mathcal{H}$ ise G'nin $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ graflarının hiçbiri indirgenmiş alt graf olarak içeremeyeceği açıktır.

⇐: Nokta sayısı n üzerinden tümevarım yoluyla ispatlanır. $n \leq 4$ için açıktır. G, $n \geq 5$ mertebeli bir graf olsun ve $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ graflarını indirgenmiş alt graf olarak içermesin. G'den bir v noktasının silinmesiyle elde edilen $n-1$ noktalı indirgenmiş alt graf G_v olsun. Tümevarım hipotezine göre $G_v \in \mathcal{H}$'dır. Buna göre $1 \leq m \leq n-2$ olmak üzere $G_v = K_m + (n-1-m)K_1$ biçiminde olduğunu varsayabiliriz (ya da G_v'nin tümleyeninin, her iki durumda da $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ graflarının tümleyenleri yine $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ grafları olur).

Öncelikle $m = 1$ için bakılsın. Bu durumda G_v grafında hiç kenar yoktur. v noktasının G_v grafında en az iki noktaya komşu olması ve bir noktaya komşu değil olması durumda G, $\mathcal{H}_1$ grafını indirgenmiş alt graf olarak içerir. Bu çelişkiden dolayı v, G_v'nin tüm noktalarına ya da en fazla bir noktasına komşu olabilir. Bu da $G \in \mathcal{H}$ demektir.
$2 \leq m \leq n-2$ için incelensin. v, G_v grafındaki bir izole olmayan komşu olursa; G, $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ graflarını içerir. Bu yüzden, v noktasının K_m'nin tüm noktalarına komşu olmayıp en az bir noktasına komşu olması durumunda ise G grafı $\mathcal{H}_1$'i içerir. Buna göre v noktası K_m'nin ya hiçbir noktasına komşu değildir ya da tüm noktalarına komşudur. Böylece $G = K_{m+1} + (n-1-m)K_1$ olur ki bu da $G \in \mathcal{H}$ demektir ve ispat tamamlanır [18]. ■

$K_m + lK_1$ formundaki bir gafın Seidel matrisi,

$$S_{m,l} = \begin{bmatrix} I_m - J & J \\ J & J - I_l \end{bmatrix} \text{ ve}$$

spektrumu $$\left\{-1^{l-1}, 1^{m-1}, \tfrac{1}{2}\left(l - m \mp \sqrt{m^2 + l^2 + 6ml - 4m - 4l + 4}\right)\right\} \tag{3.1}$$
olur [18].

Eğer $G \in \mathcal{H}$ ise, G ya da tümleyeninin Seidel matrisinin spektrumu yukarıdaki gibidir. Böylece $\mathcal{H}$'daki herhangi bir grafın en fazla iki Seidel özdeğerinin ∓ 1'den farklı olduğu görülür. Bunun tersinin de doğru olduğunu söyleyen kuvvetli sonuç aşağıdadır [18].

Teorem 3.2.1. G en fazla iki Seidel özdeğeri $[-1, +1]$ aralığı dışında kalan bir graf olsun. Bu durumda G, $\mathcal{H}$'daki bir grafa switching denk olur [18].

İspat G'nin bir v izole noktasını içerdiğini varsayalım ve $G - v = G_v$ ile gösterelim. $G_v \in \mathcal{H}$ olduğunu ispatlamak için Lemma 3.2.1. kullanılacaktır. G_v'nin dört mertebeli herhangi bir indirgenmiş alt grafını H ile gösterelim. Bu durumda $H + K_1$' de G'nin beş mertebeli bir indirgenmiş alt grafı olur. Buna göre, Cauchy arada olma teoreminden $H + K_1$'in en az üç özdeğeri $[-1, +1]$ aralığında kalmalıdır. $H_i + K_1$'in Seidel spektrumu; $i = 2$ için $\left\{-\sqrt{5}^2, 0, +\sqrt{5}^2\right\}$ ve $i = 0,1,2,3,4$ için $\mp\{-1^2, 3, \frac{1}{2}\left(-1 \mp \sqrt{17}\right)\}$ olur. $H \neq H_0, \ldots, H_4$'tür yani $G_v \in \mathcal{H}$ olur. Bu da $G \in \mathcal{H}$ demektir. G izole nokta içermiyorsa, v'ye göre (v'yi ve komşu olmadığı noktaları da dahil ederek) switching işlemi uygulanarak $G \in \mathcal{H}$ elde edilir [18]. ∎

Açıktır ki; $\mathcal{G}$'deki bir işaretli tam $\Gamma = (G, \sigma)$ grafının komşuluk matrisi A, $\mathcal{H}$'deki bir grafın Seidel matrisine karşılık gelir. Böylece A, yukarıda verilen $S_{m,l}$ matrisine switching denk olur. Aynı zamanda $S_{m,l}$ ve $-S_{m,l}$ switching denk olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir [18].

Sonuç 3.2.1. $\mathcal{G}$'deki bir işaretli tam graf Γ olsun. O zaman Γ, komşuluk matrisi $S_{m,l}$ olan bir işaretli grafa switching izomorftur [18].

Lemma 3.2.1., Teorem 3.2.1., Sonuç 3.2.1.'den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.2. $\mathcal{G}$'de yer alan işaretli bir tam graf switching işlemine göre spektrumuyla belirlenebilirdir [18].

İspat $\Gamma = (G, \sigma)$, n mertebeli komşuluk matrisi A ve özdeğerleri sırasıyla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ olan işaretli bir graf olsun. Bu durumda $\sum_i \lambda_i^2 = iz(A^2) \leq n(n-1)$ olur ve burada eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G grafının tam graf olmasıdır. Eğer Γ'nın spektrumu (3.1)'de verilen biçimde ise l ve m belirlidir ve $\sum_i \lambda_i^2 = n(n-1)$ olur. Öyleyse Γ grafı $\mathcal{G}$'de yer alan işaretli bir tam graftır. Bu durumda Sonuç 3.2.1'den Γ grafının komşuluk matrisi $S_{m,l}$ matrisine switching denk olur [18]. ∎

3.3. $\mathcal{G}$ Kümesindeki İki Parçalı İşaretli Graflar

$\mathcal{G}$'de iki parçalı bağlantılı bir işaretli graf $\Gamma = (G, \sigma)$ olsun. Γ'nın komşuluk matrisi A ise,

$$A = \begin{bmatrix} O & N \\ N^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A^2 = \begin{bmatrix} NN^{\mathrm{T}} & 0 \\ O & N^{\mathrm{T}}N \end{bmatrix} \text{ olur [18].}$$

Burada iki parçalı işaretli graflarda, Γ ve Γ^{-} switching izomorf olur. Özel olarak A ve $-A$ aynı spektruma sahiptir. A'nın eğer bir 0 özdeğeri varsa en küçük özdeğeri -1'e eşit olur ve Lemma 3.1.1.'den $G = K_2$ olur. A, tekil değil ise, N bir kare matristir. Dahası eğer, $G \neq K_2$ ise A^2'nin en fazla iki özdeğeri 1'den farklıdır. Bu da $rank(NN^{\mathrm{T}} - I) = 1$ olduğu anlamına gelir. Van Dam ve Spence [21]'de bağlantılı iki parçalı işaretlendirilmemiş bir G grafı için eğer $G \in \mathcal{G}$ ve $G \neq K_2$ ise N matrisinin aşağıdaki formlarından birinde olması gerektiğini söylemişlerdir.

$$N = \begin{bmatrix} J - I_3 & J \\ O & J - I_3 \end{bmatrix} \text{ veya } N = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{1} & I_4 \end{bmatrix}, \text{ veya } N = J - I_m \quad (m \geq 3) \tag{3.2}$$

Bu üç durumda G'nin spektrumları sırasıyla;
$\{-1^5, 1^5, \mp 4\}, \{-1^4, 1^4, \mp 3\}$ ve $\{-1^{m-1}, 1^{m-1}, \mp(m-1)\}$ olur [18].

İşaretli bir Γ grafı yukarıdaki üç durumdan birine switching izomorf ise, $\mathcal{G}$'de iki parçalı bağlantılı işaretli bir graftır. Aynı zamanda bu durumun tersi de doğrudur [18].

Teorem 3.3.1. $\Gamma = (G, \sigma) \in \mathcal{G}$ bağlantılı ve iki parçalı bir graf ise, $\mathcal{G}$'deki işaretlendirilmemiş bağlantılı ve iki parçalı bir grafa switching izomorftur [18].

İspat Van Dam ve Spence [21]'de verilen, işaretlendirilmemiş durum için uygulanan adımlar takip edilsin. $G = K_2$ ise durum açıktır. $G \neq K_2$ olsun. O zaman N matrisi en az iki satır içerir. N matrisinde ağırlıkları sırasıyla k_1 ve k_2 olan farklı iki satırı r_1 ve r_2 ile gösterilsin. Genelliği bozmadan, r_1'in negatif bileşen içermediği ve N matrisindeki hiçbir satırın ağırlığının k_1'den küçük olmadığı kabul edilsin. O zaman $NN^{\mathrm{T}} - I$

aşağıdaki esas alt matrise sahiptir;

$$B = \begin{bmatrix} k_1 - 1 & x \\ x & k_2 - 1 \end{bmatrix}, \quad \text{burada } x = r_1 {r_2}^{\mathrm{T}}.$$

$x \geq 0$ kabul edilebilir (aksi takdirde r_2 ile $-r_2$ yer değiştirilebilir). $rank(NN^{\mathrm{T}} - I) = 1$ olduğundan B tekildir ve böylece,

$(k_1 - 1)(k_2 - 1) = x^2$ olur. (3.3)

Burada bir çözüm $x = 0$ ve $k_1 = 1$ olur. Fakat bu durumda Γ işaretli grafı bağlantısız olur. $x \leq 1$ olduğu açıktır. Eğer $x = k_1$ ise (3.3)'teki denklemden $(x-1)(k_2-1) = x^2$, yani $k_2 = x + 2 + 1/(x-1)$ olur ki bu durumda $x = k_1 = 2$ ve $k_2 = 5$'tir.

Öncelikle $k_1 \geq 3$ alınsın. O zaman $x \neq k_1$, yani $x \leq k_1 - 1$ ve (3.3)'teki denklemden $x = k_1 = k_2 - 1$ olur. Böylece, N matrisinin bütün satırlarının ağırlıkları k_1 olur. N matrisinde yer değiştirme ve switching işlemleri uygulayarak r_1 ve r_2 satırları aşağıdaki forma getirilir;

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

N matrisinde r_1 ve r_2 satırlarından farklı bir satır r_3 olsun. ($k_1 \geq 3$ olduğundan ve N bir kare matris olduğundan, N matrisinin en az üç satırı vardır) O zaman $r_1 {r_3}^{\mathrm{T}} = k_1 - 1$ (eğer $r_1 {r_3}^{\mathrm{T}}$ negatif ise r_3 ile $-r_3$ yer değiştirilebilir) ve $r_2 {r_3}^{\mathrm{T}} = \pm(k_1 - 1)$ olur. Bu durumda r_3 için aşağıdaki olasılıkların varlığına yol açar. (Burada $k_1 \geq 3$ durumu kullanılır);

$r_3 = [1 \quad \dots \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \mp 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$ veya

$r_3 = [1 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$.

İlk durum bir kare matrise tamamlanması mümkün değilken ikinci durumda ise, $m = (k_1 + 1)$ ve $N = J - I_m$ olur.

Şimdi de $k_1 = 2$ durumu incelensin. Bu durumda N matrisinin her bir satırının ağırlığı 2 veya 5'tir. Eğer N matrisinde her satırının ağırlığı 2 ise, herhangi iki farklı satırın iç çarpımı ± 1 olur ve birbirine denk olmayan iki durum oluşur;

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$rank(NN^{\mathrm{T}} - I) = 3$ olduğundan ikinci durum oluşmaz. Böylece bazı satırların ağırlığı 2, bazı satırların ağırlığı 5 olur. Ağırlığı 2 olan bir satırla ağırlığı 5 olan bir satırın iç çarpımının ± 2 olduğu; ağırlığı 5 olan iki satırın iç çarpımının ± 4 olduğu ve ağırlığı 2 olan iki satırın iç çarpımının ± 1 olduğu görülür. Eğer tek bir satırın ağırlığı 5 ve diğer satırların ağırlıkları 2 ise denklikten dolayı sadece (3.2)'deki ikinci tip N matrisi oluşur. Eğer iki veya dört satırın ağırlığı 5 ise çözüm yoktur. Fakat üç satırın ağırlığı 5 ise (3.2)'deki birinci tip N matrisi oluşur [18]. ■

3.4. $\mathcal{G}$ Kümesindeki Bazı Diğer İşaretli Graflar

Burada önceki bölümlerde yer almayan $\mathcal{G}$'deki bazı işaretli graflar sunulacaktır. $i + j = m + 1$ iken $R_m(ij) = 1$ ve diğer durumlarda $R_m(ij) = 0$ biçiminde tanımlanan m mertebeli ters birim matris R_m ile gösterilsin. R_m'nin tüm özdeğerleri ± 1'dir [18].

Teorem 3.4.1. Aşağıda verilen matrisler $\mathcal{G}$ kümesindeki 3.1. bölümde, 3.2. bölümde ve 3.3. bölümde verilen durumlar dışındaki bazı işaretli grafları temsil etmektedir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} J - I_m & J \\ J & -R_{2l} \end{bmatrix} \quad , \quad (m, l \geq 1)$$

Spektrumu: $\left\{-1^{l+m-2}, 1^l, \frac{1}{2}\left(m - 2 \pm \sqrt{m(m + 8l)}\right)\right\}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} R_{2m} & J \\ J & -R_{2l} \end{bmatrix} \quad , \quad (m, l \geq 1)$$

Spektrumu: $\left\{-1^{m+l-1}, 1^{m+l-1}, \pm\sqrt{1 + 4ml}\right\}$

$$A_3 = \begin{bmatrix} J-I_m & 1 & 1 & O \\ 1^{\mathrm{T}} & 0 & 1 & -1^{\mathrm{T}} \\ 1^{\mathrm{T}} & 1 & 0 & 1^{\mathrm{T}} \\ O & -1 & 1 & I_l - J \end{bmatrix}, (m,l \geq 1)$$

Spektrumu:$\{-1^m, 1^l, -l-1\,, m+1\}$

$$A_4 = \begin{bmatrix} J-I_m & J & O & J \\ J & R_2 & O & O \\ O & O & -R_2 & -J \\ J & O & -J & I_l - J \end{bmatrix} \quad , \quad (m,l \geq 1)$$

Spektrumu: $\left\{-1^{m+1}, 1^{l+1}, \frac{1}{2}\left(m-l \pm \sqrt{m^2+l^2+6ml+4m+4l+4}\right)\right\}$ [18].

İspat $i = 1, \dots, 4$ için A_i'nin verilen blok formları birer eşit parçalanışa karşılık gelir. Böylece A_i'nin iki çeşit özdeğeri oluşur; bunlardan birinin özvektörü parçalanışın karakteristik vektörleri tarafından gerilen $\mathcal{V}$ uzayındadır, diğerinin özvektörü ise $\mathcal{V}$ uzayına ortogonal olur. Birinci tip özdeğerler aşağıdaki bölüm matrislerinin özdeğerleri olur;

$$\begin{bmatrix} m-1 & 2l \\ m & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2l \\ 2m & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m-1 & 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 & -l \\ m & 1 & 0 & l \\ 0 & -1 & 1 & 1-l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m-1 & 2 & 0 & l \\ m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l \\ m & 0 & -2 & 1-l \end{bmatrix}.$$

Bu matrislerin özdeğerleri sırasıyla;

$\left\{\frac{1}{2}\left(m-2 \pm \sqrt{m(m+8l)}\right)\right\}$, $\{\pm\sqrt{1+4ml}\}$, $\{\pm 1, -l-1, m+1\}$ ve

$\left\{\pm 1, \frac{1}{2}\left(m-l \pm \sqrt{m^2+l^2+6ml+4m+4l+4}\right)\right\}$ olur.

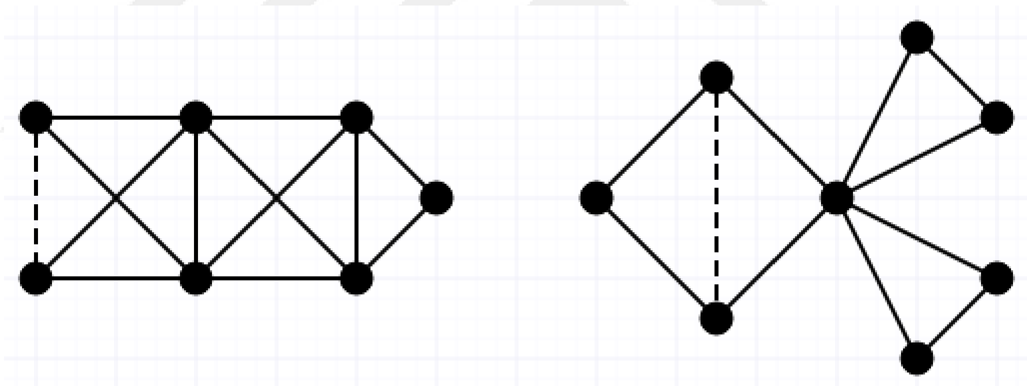
İkinci tip özdeğerler blokların bazılarına $\pm J$ eklendiğinde aynı kalır. Yani aynı zamanda aşağıda verilen matrislerin özdeğerleri olur;

$$\begin{bmatrix} -I_m & O \\ O & -R_{2l} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R_{2m} & O \\ O & -R_{2l} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -I_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & O \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 & 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 & 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ O & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -I_m & O & O & O \\ O & R_2 & O & O \\ O & O & I_2 & O \\ O & O & O & I_l \end{bmatrix}.$$

Burada tüm özdeğerlerin ± 1' eşit olduğu açıktır [18]. ■

Teoremde yer alan işaretli graf örneklerinin negatifinin alınmasıyla ya da bu işaretli graflara switching işlemi uygulanmasıyla oluşan graflarında $\mathcal{G}$'de yer aldığı açıktır. Yalnızca, A_1 matrisinin temsil ettiği graf $m = 1$ iken baz grafına switching izomorftur (Bu aslında friendship graftır.). Diğerleri ise tüm pozitif işaretli bir grafa ya da negatifine switching izomorf değildirler. A_1 ve A_2'nin baz grafları da yine $\mathcal{G}$' de yer alır. Fakat A_3 ve A_4'ün baz grafları için aynı durum geçerli değildir. Ayrıca $m = 2$ için A_1 ile $m = 1$ için A_2 eşit olurlar [18].

Zoran Stanić [23]'de sekiz noktaya kadar bağlantılı ve birbirine denk olmayan tüm işaretli grafları üretmiştir ve spektrumlarını hesaplamıştır. Stanić'in listesini kontrol ederek mertebesi 1'den 8'e kadar birbirine denk olmayan işaretli bağlantılı grafların sayısının sırasıyla 1,1,2,4,8,14,20,29 olduğu bulunmuştur. Bu durumda burada verilenlerin dışında en fazla 8 noktaya sahip yalnızca dört işaretli graf mevcuttur. Bu işaretli graflar aşağıdaki figürde verilen iki graf ve onların negatiflerinden ibarettir [18].



Spektrum $\left\{\{-1^3, 1^2, \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{41}\right)\right\}$ Spektrum $\{-1^3, 1^3, \pm 2\sqrt{2}\}$

Şekil 3.2. İşaretli graflar

4. BÖLÜM

İki Adet Özdeğeri ± 1'den Farklı Olan ve Tam Olmayan İşaretli Graflar

Bağlantısız graflar, işaretli tam graflar ve en fazla bir adet özdeğeri ∓ 1'den farklı olan graflar üçüncü bölümde verilmiştir. Bir işaretlendirilmemiş grafa ya da negatifine switching izomorf olanlar [19]'de sınıflandırılmıştır. $\mathcal{G}$'deki işaretli grafların tümünün belirlenmesi süreci ise [22]'de tamamlanmıştır.

Teorem 4.1. $G = (V, E)$, $G \in \mathcal{G}$ olacak şekilde bir işaretlendirilmemiş graf olsun. G grafı aşağıdaki komşuluk matrisleri ve spektrumları ile temsil edilir.

$$\begin{bmatrix} O & J - I_m \\ J - I_m & O \end{bmatrix}, \ (m \geq 3)$$

Spektrumu: $\{\pm(m-1), 1^{m-1}, -1^{m-1}\}$

$$\begin{bmatrix} J - I_a & J \\ J & R_{2k} \end{bmatrix}, \ (a \geq 1, k \geq 2)$$

Spektrumu: $\left\{\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8ak - 4a + 4}\ , 1^{k-1}, -1^{a+k-1}\right\}$

$$\begin{bmatrix} R_{2l} & J \\ J & R_{2m} \end{bmatrix}, \ (l \geq m \geq 2)$$

Spektrumu: $\left\{1 \pm 2\sqrt{lm}\ , 1^{l+m-2}, -1^{l+m}\right\}$

$$\begin{bmatrix} O & N \\ N^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{1} & I_4 \end{bmatrix} \text{ ya da } N = \begin{bmatrix} J - I_3 & J \\ O & J - I_3 \end{bmatrix}$$

Spektrumu: $\{\pm 3, 1^4, -1^4\}, \{\pm 4, 1^5, -1^5\}$

$$\begin{bmatrix} J - I_a & J & \mathbf{1} \\ J & J - I_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^{\mathbf{T}} & \mathbf{0}^{\mathbf{T}} & 0 \end{bmatrix}, \ (a, b) = (6,5), (4,6) \text{ ya da } (3,8)$$

Spektrumu: $\left\{4 \pm 2\sqrt{10}\ , 1^1, -1^9\right\}, \left\{7 \pm \sqrt{129}/2\, , 1^1, -1^8\right\}, \left\{4 \pm \sqrt{37}\ , 1^1, -1^9\right\}$

$$\begin{bmatrix} J-I_a & J & O \\ J & O & J-I_m \\ O & J-I_m & O \end{bmatrix}, \ (a,m)=(3,5) \text{ ya da } (4,4)$$

Spektrumu: $\{(1 \pm \sqrt{129})/2\,, 1^5, -1^6\}, \{1 \pm 2\sqrt{7}\ \ , 1^4, -1^6\}$ [19].

Teorem 4.2. $\Gamma = (G, \sigma)$, iki adet özdeğeri ∓ 1'den farklı olan, bağlantılı ve tam olmayan işaretli bir graf olsun. O zaman Γ ya da negatifi Γ^-, $\mathcal{G}$'deki işaretlendirilmemiş bir grafa switching izomorf olur ya da aşağıdaki matrisler tarafından temsil edilen işaretli bir graftır.

$$A_1 = \begin{bmatrix} J-I_m & J \\ J & -R_{2l} \end{bmatrix} \quad , \quad (m, l \geq 2)$$

Spektrumu: $\left\{-1^{l+m-2}, 1^l, \frac{1}{2}\left(m-2 \pm \sqrt{m(m+8l)}\right)\right\}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} R_{2m} & J \\ J & -R_{2l} \end{bmatrix} \quad , \quad (m, l \geq 2)$$

Spektrumu: $\{-1^{m+l-1}, 1^{m+l-1}, \pm\sqrt{1+4ml}\}$

$$A_3 = \begin{bmatrix} J-I_m & \mathbf{1} & \mathbf{1} & O \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & 0 & 1 & -\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & 1 & 0 & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \\ O & -\mathbf{1} & \mathbf{1} & I_l - J \end{bmatrix}, \ (m, l \geq 1)$$

Spektrumu: $\{-1^m, 1^l, -l-1\,, m+1\}$

$$A_4 = \begin{bmatrix} J-I_m & J & O & J \\ J & I_l - J & O & J \\ J & O & R_2 & O \\ O & J & O & -R_2 \end{bmatrix} \quad , \quad (m, l \geq 1)$$

Spektrumu: $\left\{-1^{m+1}, 1^{l+1}, \frac{1}{2}\left(m-l \pm \sqrt{m^2+l^2+6ml+4m+4l+4}\right)\right\}$

$$A_5 = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J \\ J & J-I_l & O \\ J & O & I_k - J \end{bmatrix} \ , \ ((k \geq 2, (m,l) = (3,8), (4,6) \text{ ya da } (6,5))$$

Spektrum;

$\left\{-1^9, 1^k, \frac{1}{2}\left(9-k \pm \sqrt{k^2+26k+121}\ \right)\right\}$

$$\left\{-1^{8}, 1^{k}, \frac{1}{2}\left(8-k \pm \sqrt{k^{2}+28k+100}\right)\right\}$$
$$\left\{-1^{9}, 1^{k}, \tfrac{1}{2}\left(9-k \pm \sqrt{k^{2}+38k+121}\right)\right\},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J \\ J & I_l - J & O \\ J & O & R_{2k} \end{bmatrix} \quad , \quad ((m \geq 1, (l,k) = (3,4) \text{ ya da } (4,3))$$
Spektrum;

$$\left\{-1^{m+4}, 1^{5}, \frac{1}{2}\left(m-1 \pm \sqrt{m^{2}+42m+9}\right)\right\}$$
$$\left\{-1^{m+3}, 1^{5}, \frac{1}{2}\left(m-2 \pm \sqrt{m^{2}+40m+16}\right)\right\}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} R_{2m} & J & J \\ J & J-I_l & O \\ J & O & -R_{2k} \end{bmatrix} \quad , \quad ((m \geq 1, (l,k) = (3,3) \text{ ya da } (4,2))$$
Spektrum;

$$\left\{-1^{m+4}, 1^{m+3}, \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{8m+1}\right)\right\}$$
$$\left\{-1^{m+4}, 1^{m+2}, 1 \pm 2\sqrt{4m+1}\right\}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} R_2 & J & \mathbf{1} & O \\ J & I_m - J & \mathbf{0} & J \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ O & J & \mathbf{0} & -R_4 \end{bmatrix} \quad , \quad (m \geq 1)$$

Spektrumu; $\left\{-1^{3}, 1^{m+2}, \tfrac{1}{2}\left(1-m \pm \sqrt{m^{2}+22m+9}\right)\right\}$

$$A_9 = \begin{bmatrix} R_{2m} & J & J & \mathbf{0} \\ J & R_2 & O & 1 \\ J & O & -R_2 & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (m \geq 1)$$

Spektrumu; $\left\{-1^{m+2}, 1^{m+1}, \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{32m+9}\right)\right\}$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & O & O \\ J & O & J & J-I_l \\ O & J & I_m - J & O \\ O & J-I_l & O & O \end{bmatrix} \quad , \quad \left((m,l) = (3,4), \text{ya da } (4,3)\right)$$

Spektrumu; $\{-1^{6}, 1^{6}, \pm 6\}$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J & O \\ J & I_m - J & O & J \\ J & O & O & J-I_l \\ O & J & J-I_l & O \end{bmatrix}$$, $\big((m,l) = (3{,}4)$, ya da $(4{,}3)\big)$

Spektrumu; $\{-1^6, 1^6, \pm 3\sqrt{5}\}, \{-1^6, 1^6, \pm 2\sqrt{13}\}$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J & O \\ J & I_l - J & O & J \\ J & O & J-I_k & J \\ O & J & J & I_j - J \end{bmatrix},$$

$\big((m,l,k,j) = (6{,}3{,}3{,}6), (6{,}6{,}3{,}3), (6{,}4{,}3{,}4), (4{,}4{,}4{,}4)\big)$

Spektrumu; $\{-1^8, 1^8, \pm\sqrt{109}\}, \{-1^8, 1^8, \pm 10\}$, $\left\{-1^7, 1^8, \frac{1}{2}\left(-1 \pm 3\sqrt{41}\right)\right\}$

, $\{-1^7, 1^7, \pm 9\}$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & O & \mathbf{0} \\ J & -R_{2l} & J & \mathbf{1} \\ O & J & I_4 - J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix},$$

$\big((m,l) = (6{,}2)$ ya da $(5{,}3)\big)$

Spektrum; $\left\{-1^7, 1^6, \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{241}\right)\right\}$, $\{-1^7, 1^7, \pm 6\sqrt{2}\}$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & O \\ J & -R_{2l} & J \\ O & J & -R_4 \end{bmatrix}$$, $\big((m,l) = (6{,}2)$ ya da $(5{,}3)\big)$

Spektrum $\{-1^7, 1^5, 1 \pm 2\sqrt{13}\}$, $\left\{-1^7, 1^6, \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{249}\right)\right\}$

$$A_{15} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J & O \\ J & I_l - J & O & J \\ J & O & R_{2k} & J \\ O & J & J & -R_{2j} \end{bmatrix},$$

$\big((m,l,k,j) = (3{,}3{,}3{,}3), (4{,}3{,}3{,}2)$ya da $(4{,}4{,}2{,}2)\big)$

Spektrumu; $\{-1^8, 1^8, \pm\sqrt{85}\}, \left\{-1^8, 1^7, \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{313}\right)\right\}, \{-1^7, 1^7, \pm\sqrt{73}\}$

$$A_{16} = \begin{bmatrix} R_2 & J & J & O \\ J & -R_2 & O & J \\ J & O & O & I_3 \\ O & J & I_3 & O \end{bmatrix}$$

Spektrumu; $\{-1^4, 1^4, \pm\sqrt{17}\}$

$$A_{17} = \begin{bmatrix} R_2 & J & J & \mathbf{1} & O & \mathbf{0} \\ J & -R_2 & O & \mathbf{0} & J & \mathbf{1} \\ J & O & R_2 & \mathbf{0} & J & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ O & J & J & \mathbf{0} & -R_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

Spektrumu; $\{-1^4, 1^4, \pm 2\sqrt{5}\}$

$$A_{18} = \begin{bmatrix} J - I_m & J & \mathbf{1} & O \\ J & -R_{2l} & \mathbf{0} & J \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ O & J & \mathbf{0} & -R_2 \end{bmatrix} \quad , \big((m,l) = (4,3) \text{ ya da } (3,4)\big)$$

Spektrumu; $\left\{-1^6, 1^5, \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{177}\right)\right\}, \{-1^6, 1^6, \pm 3\sqrt{5}\}$

$$A_{19} = \begin{bmatrix} R_2 & J & J & \mathbf{1} & O \\ J & I_m - J & O & \mathbf{0} & J \\ J & O & R_{2l} & \mathbf{0} & J \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ O & J & J & \mathbf{0} & -R_2 \end{bmatrix} \quad , \big((m,l) = (3,3) \text{ ya da } (4,2)\big)$$

Spektrumu; $\{-1^6, 1^6, \pm 2\sqrt{10}\}$,$\left\{-1^5, 1^6, \frac{1}{2}\left(-1 \pm 3\sqrt{17}\right)\right\}$ [22].

İspat Yukarıda verilen tüm matrislerin spektrumları [18] ve [19]'da kullanılan yöntemle tespit edilmiştir. Her A matrisi için sunulan blok yapısı, bir eşit parçalanış oluşmasını sağlar (yani her blok sabit satır ve sütun toplamlarına sahiptir). A matrisinin spektrumunun bir kısmı, bölüm matrisi olan Q'nun spektrumudur (blokların satır toplamlarını içerir) ve doğrudan Q matrisinin ± 1'den farklı yalnızca iki adet özdeğere sahip olduğu kontrol edilebilir. A matrisinin kalan özdeğerleri ise bazı bloklara J eklenmesi ya da çıkarılması ile değişmeyecektir. Bu işlem uygulandığında elde edilen matrisin tüm özdeğerleri ± 1'e eşit olacaktır [22].

Burada şunu belirtmek gerekir ki; yukarıda verilen matris listesi kesişimden bağımsız değildir. Örneğin; A_2, A_3, A_4 ayrıca m ve l'nin yer değiştirmesiyle de elde edilebilir. Simetrik spektruma sahip bazı durumlar negatiflerine switching izomorf olurlar. Ayrıca, $k = 1$ olduğunda A_5 aslında [19]'da yer alan Teorem $1(v)$'de verilen üç işaretlendirilmemiş grafa karşılık gelir. Böylece [19]'da yer alan bu üç bağımsız graf örneğinin aslında $\mathcal{G}$'de yer alan sonsuz bir işaretli graf ailesinin bir parçası olduğu söylenebilir [22].

[19]'daki Teorem $1(v)$'nin ifadesinde yer alan özelliğe sahip işaretli grafların tamamının bu listede yer aldığı [22]'de ayrıca detaylı bir biçimde gösterilmiştir. ■

5. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

İşaretli grafların spektral açıdan incelenmesi özellikle son on yılda çokça araştırılan bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bu tez çalışmasının ortaya konulması için yaptığımız araştırmalar sonucunda izlenimimiz, işaretli grafları spektral açıdan incelenirken elde edilen bilgi ve bulgular, işaretlendirilmemiş grafların spektral açıdan incelendiğinde elde edilen bilgi ve bulgularla kıyaslandığında çok daha kısıtlı olduğu görülmüştür. Ama yine de işaretlendirilmemiş grafların spektrasına dair çoğu problem işaretli graf spektrasına aktarılabilir.

Bu tez çalışmasında özel olarak üzerinde durulan işaretli graflar en fazla iki adet özdeğeri ∓ 1'den farklı olan işaretli graflardır. Bu tür grafların belirlenmesi ve sınıflandırmasına dair literatürde var olan çalışmalar burada sentezlenerek sunulmaya çalışılmıştır.

İlk olarak, en fazla iki adet özdeğeri ∓ 1'den farklı olan işaretli graflar arasında bu kümede yer alan sırasıyla bağlantısız graflar, işaretli tam graflar, iki parçalı graflar ve bunların spektral özelliklerinin belirlenmesine yönelik çalışmaların derlemesi yapılmıştır. Sonrasında ise bu kümede yer alan tüm grafların belirlenmesine dair çalışmalar incelenmiş ve bu çalışmalardaki sonuçlara da yer verilmiştir.

En fazla iki adet özdeğeri ∓ 1'den farklı olan işaretlendirilmemiş graflara dair [19]'de yapılmış olan sınıflandırma çalışması [18] ve [22]'de işaretli graflara taşınmıştır. Dolayısıyla belli özdeğerlere sahip graf sınıflandırılması probleminin işaretli graflar için de çalışılabileceği bu çalışmalar sayesinde görülmektedir.

Literatürde en fazla üç adet özdeğeri -1'den farklı olan bazı işaretli grafların belirlenmesine dair güncel bir çalışma da mevcuttur [24]. Bu tür çalışmalar belli özelliklere sahip spektrumu bulunan işaretli grafların sınıflandırılabileceğine dair literatüre öncülük eden çalışmalardır. Bu problemlerin devamının da getirilebileceğini göstermektedir ve bu tür çalışmaların yapılarak literatürde işaretli graf sınıflandırılmasının çok daha genişletilebileceği görülmektedir.

KAYNAKLAR

1. Taşcı, D., “Lineer Cebir”, *Gazi Kitapevi*, Ankara, 2005
2. Topcu, H., 2020. “En fazla 3 adet özdeğeri -1 ya da 0 dan farklı olan grafların tamamının sınıflandırılması”, 3001 Tübitak 117F489 Nolu ARDEB Projesi
3. Çiftçi, S., “Lineer Cebir”, *Dora Yayıncılık*, Bursa, 2015
4. Sorgun, S., “Ağırlıklı Grafların Spektral Yarıçapı İçin Sınırlar”, *Erciyes Üniversitesi*, *Doktora Tezi*, Kayseri, 2011
5. Bozkurt, D., Türen, B., “Lineer Cebir”, *Dizgi Ofset Matbaacılık*, Konya, 2003
6. Uçar, K., “Bazı Özel Grafların Seidel Spektrası”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi*, *Yüksek Lisans Tezi*, Nevşehir, 2020
7. Küçük, H., “Çizgelerde Dışmerkezlik Matrisi ve Spektrası”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi*, *Doktora Tezi*, Nevşehir, 2022
8. Togan, M., “Alt Grafların Zagreb İndeksleri”, *Uludağ Üniversitesi*, *Doktora Tezi*, Bursa, 2014
9. Topcu, H., “Graf İzomorfizmi ve Ko-Spektral Graflar”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi*, *Doktora Tezi*, Nevşehir, 2016
10. Kaya, B., “Graflardaki Bazı Parametreler ve Aralarındaki Bağıntılar”, *Selçuk Üniversitesi*, *Yüksek Lisans Tezi*, Konya, 2019
11. Birgin, K., “Yönlü ve Yönsüz Grafların Enerjisi”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi*, *Yüksek Lisans Tezi*, Nevşehir, 2014
12. Çelik, F., “Grafların Enerjisi”, *Uludağ Üniversitesi*, *Doktora Tezi*, Bursa, 2021
13. Chartrand, G., Zhang, P., “A first course in graph theory”, *Dover Publications*, Mineola, New York, 2012
14. Küçük, H., “Grafların Cebirsel Bağlantısallığı”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi*, *Yüksek Lisans Tezi*, Nevşehir, 2017
15. van Dam, E.R., Haemers, W.H., “Which graphs are determined by their spectrum? ”, *Linear Algebra and its Applications*, 373, 241-272, 2003
16. Belardo, F., Cioabă, S.M., Koolen, J., Wang, J., “Open problems in the spectral theory of signed graphs”, *The Art of Discrete and Applied Mathematics 1*, ♯P2-10, 2018
17. Zaslavsky, T., “Matrices in the theory of signed simple graphs”, *Ramanujan Mathematical Society Lecture Notes Series*, No. 13, 207-229, 2010

18. Haemers, W.H., Topcu, H., “On signed graphs with at most two eigenvalues unequal to ± 1”, *Linear Algebra and its Applications,* 670, 68-77, 2023
19. Cioab$\breve{a}$, S.M., Haemers, W.H., Vermette, J.R., Wong, W., “The graphs with all but two eigenvalues equal to ± 1”, *J Algebraic Comb*., 41, 887-897, 2015
20. Karaca, M.U., “Bazı Özel Sayı Dizileri Üzerinde Tanımlanan Graflar”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi*, *Yüksek Lisans Tezi*, Nevşehir, 2020
21. van Dam, E.R., Spence, E., “Combinatorial designs with two singular values-I: uniform multiplicative designs”, *J Comb. Theory,* Ser A 107, 127-142, 2004
22. Haemers, W.H., Topcu, H., “The signed graphs with two eigenvalues unequal to ± 1”, *http://arXiv.org/aks/2301.01623*
23. İnternet: “Signed graphs of small order” http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zstanić/siggr.htm
24. Wang, Y., Li, D., Lin, H., “The signed graphs with all but at most three eigenvalues equal to -1”, *Linear Algebra and its Applications*, 664, 314-323, 2023
25. Berman, A., Shaked-Monderer, N., Singh, R., Zhang, X-D., “Complete multipartite graphs that are determined,up to switching, by their Seidel spectrum”, *Linear Algebra and its Applications,* 564, 58-71, 2019
26. Koç, C., “Basic Linear Algebra”, *ODTÜ Matematik Bölümü*, Ankara, 2016
27. Nacaroğlu, Y., “Graflarda Bazı Topolojik İndeksler İçin Sınırlar”, *Selçuk Üniversitesi*, *Doktora Tezi*, Konya, 2017
28. Üngür, Y., “$Kite_{p,q}$ Grafının Bazı Özel Matrislerinin Spektral Özellikleri” *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi*, *Yüksek Lisans Tezi*, Nevşehir, 2021
29. Yücel, N., “ Fibonacci Dizisi Üzerinde Tanımlanan Grafların Genelleştirilmesi” *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi*, *Yüksek Lisans Tezi*, Nevşehir, 2020
30. Bapat, R.B., “ Graph and Matrices ”, *Springer – Hindustan Book Agency*, 2011