

T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**Yüksek Boyutlu Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin  
Analitik ve Nümerik Çözümleri**

**Tezi Hazırlayan  
Mehmet GENÇYİĞİT**

**Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Mehmet ŞENOL**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2024  
NEVŞEHİR**



T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**Yüksek Boyutlu Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin  
Analitik ve Nümerik Çözümleri**

**Tezi Hazırlayan  
Mehmet GENÇYİĞİT**

**Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Mehmet ŞENOL**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2024**

Doç. Dr. Mehmet ŞENOL danışmanlığında Mehmet GENÇYİĞİT tarafından hazırlanan "**Yüksek Boyutlu Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Analitik ve Nümerik Çözümleri**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

29/01/2024

## JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

Üye : Doç. Dr. Ali KURT

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun.....tarih ve.....  
sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.../.../20...

Prof. Dr. Cemal ÇARBOĞA  
Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza

Mehmet GENÇYİĞİT

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőması, benim akademik başarılarım için önemli bir kilometre taşıdır ve başarıma ulaşmamda büyük bir rol oynamıştır. Bu çalıőmayı yapmama yardımcı olan herkese teşekkür etmek istiyorum.

İlk olarak, tezimin tamamlanmasında bana zaman ayıran, akademik danışmanlık yapan ve bilgi birikimiyle bana rehberlik eden Sayın Hocam Doç. Dr. Mehmet ŞENOL'a teşekkür ederim.

Ayrıca, çalıőmalarım sırasında bana destek olan arkadaşlarıma ve aileme teşekkür etmek istiyorum. Onların desteği, bu tez çalıőmasını tamamlamamda benim için büyük bir motivasyon kaynağı olmuőtur.

Son olarak, tezimi değerlendiren akademik jüri üyelerine de teşekkür etmek istiyorum. Onların değerli geri bildirimleri, tez çalıőmamın kalitesinin artmasına ve benim akademik becerilerimin gelişmesine yardımcı olmuőtur.

# YÜKSEK BOYUTLU KESİRLİ KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Mehmet GENÇYİĞİT

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2023

## ÖZET

Kısmi diferansiyel denklemler genellikle bilim ve mühendisliğin birçok alanında ortaya çıkar. Günümüze kadar yaygın olarak kullanılan bazı analitik metotlar incelendiğinde bu metotlarda modelleme eksiklikleri ve çözüm süreçlerinin zorluğu gibi bazı eksiklikler tespit edilmiştir. Bu noktaya kadar yaygın olarak kullanılan birkaç analitik teknikle birlikte, çözümlerin nümerik değerlerini elde etmek için sayısal yaklaşımlardan yararlanılmıştır.

Bu tezde, (3+1)-boyutlu Camassa-Holm-Kadomtsev-Petviashvili (CHKP) denklemi için Alt-Denklem, Genelleştirilmiş ( $G'/G$ )-Açılım ve Modifiye Edilmiş Kudryashov metotları kullanılarak yeni analitik çözümler elde edilmiştir. Daha sonra (2+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi için Modifiye Edilmiş Kudryashov metodu kullanılarak yeni analitik çözümler elde edilmiştir. Ayrıca Rezidual Kuvvet Serisi Metodu (RKSM) kullanılarak da yeni nümerik çözümler elde edilmiştir. Bu sonuçların dinamik doğasını incelemek için elde edilen bazı çözümlerin 3D, kontur ve 2D grafik çizimleri dahil edilmiştir. Ek olarak, belirli parametreler için mevcut denklemin nümerik çözümlerinin analitik çözümlerle karşılaştırma tablosu sunulmuştur.

**Anahtar kelimeler:** *Rezidual Kuvvet Serisi Metodu, Alt-Denklem Metodu, Genelleştirilmiş ( $G'/G$ )-Açılım Metodu, Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu, Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemler.*

**Tez Danışman:** Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

**Sayfa Adeti:** 66

**ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS OF HIGH-DIMENSIONAL  
FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**(Master Thesis)**

**Mehmet GENÇYİĞİT**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**December 2023**

**ABSTRACT**

Partial differential equations often occur in many areas of science and engineering. When some analytical methods that have been widely used to date are examined, some deficiencies such as modeling deficiencies and difficulty in solution processes have been identified in these methods. Numerical approaches have been used to obtain approximate values of the solutions, along with several analytical techniques that have been widely used up to this point.

In this thesis, new exact solutions are obtained for the (3+1)-dimensional Camassa-Holm-Kadomtsev-Petviashvili (CHKP) equation using Sub-Equation, Generalized  $(G'/G)$ -Expansion and Modified Kudryashov methods. Then, new exact solutions were obtained for the (2+1)-dimensional Kadomtsev–Petviashvili (KP) equation using the modified Kudryashov method. Additionally, new approximate solutions were obtained using the Residual Power Series Method (RPSM). 3D, contour and 2D graphical drawings of some of the obtained solutions are included to examine the dynamic nature of these results. In addition, a table of comparison of approximate solutions of the current equation with exact solutions for certain parameters is presented.

***Keywords: Residual Power Series Method, Sub-Equation Method, Generalized  $(G'/G)$ -Expansion Method, Modified Kudryashov Method, Fractional Partial Differential Equations.***

**Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet ŞENOL**

**Number of Pages: 66**



## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI .....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ÖZET .....	vi
ABSTRACT .....	v
İÇİNDEKİLER .....	vi
TABLolar LİSTESİ .....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	ix
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	x1
1. BÖLÜM	
GİRİŞ .....	1
2. BÖLÜM	
MATERYAL VE METOTLAR .....	4
2.1. Conformable Kesirli Türev Yaklaşımı .....	4
2.2. Homojen Denge Prensibi .....	5
2.3. Analitik Çözüm Metotları .....	5
2.3.1. Alt-Denklem Metodu .....	5
2.3.2. Genelleştirilmiş ( $G'/G$ )- Açılım Metodu .....	6
2.3.3. Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu .....	8
2.4. Nümerik Çözüm Metotları .....	10
2.4.1 Rezidual Kuvvet Seri Metodu (RKSM) .....	10
3. BÖLÜM	
UYGULAMALAR .....	13

3.1. Genelleştirilmiş (3+1)-boyutlu Camassa-Holm-Kadomtsev-Petviashvili (CHKP) denklemi .....	13
3.1.1. Alt-Denklem Metodu ile Analitik Çözüm .....	13
3.2.1. Genelleştirilmiş ( $G'/G$ )- Açılım ile Analitik Çözüm .....	18
3.2.2. Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu ile Analitik Çözüm.....	24
3.2. Yeni genişletilmiş (2+1)-boyutlu Kadomtsev–Petviashvili (KP) denklemi .....	28
3.2.1. Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu ile Analitik Çözüm.....	29
3.2.2 Rezidual Kuvvet Seri Metodu ile Nümerik Çözüm .....	32
5. BÖLÜM	
SONUÇ VE ÖNERİLER .....	46
KAYNAKLAR .....	47
ÖZGEÇMİŞ .....	51

## TABLULAR LİSTESİ

Tablo 3.1.	Farklı $\omega$ değerlerine göre (3.56) denkleminin nümerik çözümü, analitik çözümü ve bu iki çözümün karşılaştırılması sonucunda oluşan mutlak hatanın değerlerinin tablosu. ....	36
------------	--	----



## ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 3.1. Denklemler (3.7)'den elde edilen  $u_{1,1}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 0.2$ ,  $w = 1$ ,  $s = 0.01$ ,  $y = 0.1$ ,  $z = 0.5$ ,  $\chi_1 = 0.1$ ,  $\chi_2 = 0.5$ ,  $\chi_3 = 0.1$ ,  $\chi_4 = 0.1$ ,  $\chi_5 = 0.1$ ,  $\sigma = -1$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği ..... 16
- Şekil 3.2. Denklemler (3.15)'te elde edilen  $u_{2,3}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 0.09$ ,  $w = 0.25$ ,  $s = 0.08$ ,  $y = 1$ ,  $z = -1$ ,  $\chi_1 = 0.55$ ,  $\chi_2 = 0.65$ ,  $\chi_3 = 0.5$ ,  $\chi_4 = 0.2$ ,  $\chi_5 = 0.1$ ,  $\sigma = 0.04$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği ..... 17
- Şekil 3.3. Denklemler (3.21)'de elde edilen  $u_{3,1}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 2$ ,  $w = -2$ ,  $s = -1$ ,  $y = -0.12$ ,  $z = -1$ ,  $\lambda = 0.25$ ,  $\mu = -0.09$ ,  $c_1 = -5$ ,  $c_2 = -7$ ,  $\chi_1 = 0.1$ ,  $\chi_2 = -0.4$ ,  $\chi_3 = 0.2$ ,  $\chi_4 = 0.1$ ,  $\chi_5 = 0.5$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği ..... 22
- Şekil 3.4. Denklemler (3.25)'te elde edilen  $u_{4,1}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 2$ ,  $w = 2$ ,  $s = -1$ ,  $y = 0.12$ ,  $z = 1$ ,  $\lambda = 0.25$ ,  $\mu = -0.09$ ,  $c_1 = 5$ ,  $c_2 = 7$ ,  $\chi_1 = 0.1$ ,  $\chi_2 = 0.4$ ,  $\chi_3 = 0.2$ ,  $\chi_4 = 1$ ,  $\chi_5 = 0.5$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği ..... 23
- Şekil 3.5. Denklemler (3.32)'de elde edilen  $u_{5,1}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 0.18$ ,  $w = 0.16$ ,  $s = 0.5$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ ,  $\chi_1 = 0.85$ ,  $\chi_2 = 0.45$ ,  $\chi_3 = 0.27$ ,  $\chi_4 = 0.55$ ,  $\chi_5 = 0.65$ ,  $d = 0.9$ ,  $a = 0.1$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği ..... 26
- Şekil 3.6. Denklemler (3.34)'te elde edilen  $u_{5,2}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 0.16$ ,  $w = -0.2$ ,  $s = -0.4$ ,  $y = 0.3$ ,  $z = 0.1$ ,  $\chi_1 = -0.55$ ,  $\chi_2 = 0.45$ ,  $\chi_3 = -0.36$ ,  $\chi_4 = 0.5$ ,  $\chi_5 = 0.15$ ,  $d = 0.05$ ,  $a = 0.1$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği ..... 27
- Şekil 3.7. Denklemler (3.43)'te elde edilen  $u_{6,2}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 0.99$ ,  $w = 0.08$ ,  $y = 1.5$ ,  $d = 0.85$ ,  $\vartheta = 0.45$ ,  $a = 0.25$ ,  $b = 0.9$ ,  $\alpha = 0.75$ ,  $\beta = 0.65$ ,  $\eta = 0.55$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği ..... 31

Şekil 3.8.	Denklem (3.56)'da elde edilen $u_4(x, y, t)$ 'in $k = 0.99$ , $w = 0.05$ , $y = 1$ , $d = 0.6$ , $\vartheta = 0.15$ , $a = 0.9$ , $b = 0.39$ , $\alpha = 0.2$ , $\beta = 0.4$ , $\eta = 0.8$ ve $\omega = 0.75$ değerleri için nümerik çözüm grafiği . . . . .	37
Şekil 3.9.	Denklem (3.40)'te elde edilen $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in $k = 0.99$ , $w = 0.05$ , $y = 1$ , $d = 0.6$ , $\vartheta = 0.15$ , $a = 0.9$ , $b = 0.39$ , $\alpha = 0.2$ , $\beta = 0.4$ , $\eta = 0.8$ ve $\omega = 0.75$ değerleri için analitik çözüm grafiği . . . . .	38
Şekil 3.10.	Denklem (3.56) ve (3.40)'da elde edilen $u_4(x, y, t)$ ve $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in farkının $k = 0.99$ , $w = 0.05$ , $y = 1$ , $d = 0.6$ , $\vartheta = 0.15$ , $a = 0.9$ , $b = 0.39$ , $\alpha = 0.2$ , $\beta = 0.4$ , $\eta = 0.8$ ve $\omega = 0.75$ değerlerine göre mutlak hata grafiği . . . . .	39
Şekil 3.11.	Denklem (3.56)'da elde edilen $u_4(x, y, t)$ 'in $k = 0.99$ , $w = 0.05$ , $y = 1$ , $d = 0.6$ , $\vartheta = 0.15$ , $a = 0.9$ , $b = 0.39$ , $\alpha = 0.2$ , $\beta = 0.4$ , $\eta = 0.8$ ve $\omega = 0.85$ değerleri için nümerik çözüm grafiği . . . . .	40
Şekil 3.12.	Denklem (3.40)'ta elde edilen $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in $k = 0.99$ , $w = 0.05$ , $y = 1$ , $d = 0.6$ , $\vartheta = 0.15$ , $a = 0.9$ , $b = 0.39$ , $\alpha = 0.2$ , $\beta = 0.4$ , $\eta = 0.8$ ve $\omega = 0.85$ değerleri için analitik çözüm grafiği . . . . .	41
Şekil 3.13.	Denklem (3.56) ve (3.40)'ta elde edilen $u_4(x, y, t)$ ve $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in farkının $k = 0.99$ , $w = 0.05$ , $y = 1$ , $d = 0.6$ , $\vartheta = 0.15$ , $a = 0.9$ , $b = 0.39$ , $\alpha = 0.2$ , $\beta = 0.4$ , $\eta = 0.8$ ve $\omega = 0.85$ değerlerine göre mutlak hata grafiği . . . . .	42
Şekil 3.14.	Denklem (3.56)'da elde edilen $u_4(x, y, t)$ 'in $k = 0.99$ , $w = 0.05$ , $y = 1$ , $d = 0.6$ , $\vartheta = 0.15$ , $a = 0.9$ , $b = 0.39$ , $\alpha = 0.2$ , $\beta = 0.4$ , $\eta = 0.8$ ve $\omega = 0.95$ değerleri için nümerik çözüm grafiği . . . . .	43
Şekil 3.15.	Denklem (3.40)'ta elde edilen $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in $k = 0.99$ , $w = 0.05$ , $y = 1$ , $d = 0.6$ , $\vartheta = 0.15$ , $a = 0.9$ , $b = 0.39$ , $\alpha = 0.2$ , $\beta = 0.4$ , $\eta = 0.8$ ve $\omega = 0.95$ değerleri için analitik çözüm grafiği . . . . .	44
Şekil 3.16.	Denklem (3.56) ve (3.40)'ta elde edilen $u_4(x, y, t)$ ve $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in farkının $k = 0.99$ , $w = 0.05$ , $y = 1$ , $d = 0.6$ , $\vartheta = 0.15$ , $a = 0.9$ , $b = 0.39$ , $\alpha = 0.2$ , $\beta = 0.4$ , $\eta = 0.8$ ve $\omega = 0.95$ değerlerine göre mutlak hata grafiği . . . . .	45

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$D_t^\varphi$	Conformable (uyumlu) Kesirli Türev Operatörü
<b>RKSM</b>	Rezidual Kuvvet Serisi Metodu
<b>CHKP</b>	Camassa-Holm-Kadomtsev-Petviashvili Denklemi
<b>KP</b>	Kadomtsev–Petviashvili Denklemi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar



## 1.BÖLÜM

### GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, bilim ve mühendisliğin birçok farklı alanında ortaya çıkmaktadır. Örneğin, gözenekli akış, yüzey suyu akışı, toprak kayması, faylanma, akışkanlar dinamiği, dairesel yakıt reaktörü, yüksek sıcaklık hidrodinamiği, elektrodinamik dalga hareketi ve dağılımı dahil olmak üzere çok sayıda bağlamda ortaya çıkarlar. Fiziksel olayların iç yapısını incelemek, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerde hayati bir rol oynar. Tamsayı dereceli diferansiyel denklemlerin bir genelleştirmesi olarak, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, geleneksel türevlere kıyasla kesirli türevlerle fiziksel süreçlerin geliştirilmiş açıklamasına dayanan temel bir kavramdır. Kesirli kısmi türev, çok değişkenli fonksiyonlarda bir değişkenin diğer değişkenlere göre türetilmesidir. Eğer bir fonksiyon birden fazla değişken içeriyorsa, bir değişkenin diğer değişkenlere göre türetilmesi anlamına gelir. Kesirli adi türev, bir fonksiyonun bağımsız değişkeni üzerinden alınan türevidir. Özellikle fonksiyonun grafiksel temsilinde eğim veya hız gibi kavramlarla ilgili problemlerde kullanılır. Bu nedenle, kesirli diferansiyel denklemler, teknik ve fiziksel süreçleri en iyi şekilde simüle etmek için yaygın olarak kullanılır ve incelenir. Mühendislik problemlerini modellemek, analiz etmek ve tasarlamak için öncelikle kesirli diferansiyel denklemler kullanılır. Diferansiyel denklemler için bazı kesirli türev tanımları vardır. Bunlar, Riemann-Liouville, Caputo [1] ve Conformable (uyumlu) kesirli türev yaklaşımları içerir.

Riemann-Liouville türevi özellikle kesirli boyutlu türevlerin ve integral operatörlerinin hesaplanmasında kullanılan bir integral türev genelleştirmesidir. Bu genelleştirme, 19. yüzyılda Bernhard Riemann ve Joseph Liouville tarafından geliştirilmiştir. Riemann-Liouville türevi, bir fonksiyonun türevini hesaplamak için tamsayı olmayan derecelerle kullanılan bir integral operatördür. Bir fonksiyonun  $\alpha$ -mertebeden Riemann-Liouville türevi, şu şekilde ifade edilir.

$${}^{RL}D_t^\alpha \{f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_\alpha^t \frac{f(y)dy}{(t-y)^{\alpha-n+1}}, \quad n-1 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.1)$$

Burada,  $f(t)$  bir fonksiyon,  $\alpha$  bir gerçel sayı ve  $n$  bir tamsayıdır.  ${}^{RL}D_t^\alpha \{f(t)\}$  ifadesi  $\alpha$ -mertebeden Riemann-Liouville türevidir.  $\Gamma(n-\alpha)$  gama fonksiyonunu ifade eder.

Benzer şekilde Caputo türevi, özellikle kesir dereceli türevlerin hesaplanmasında kullanılan bir integral türev genelleştirmesidir. Bu genelleştirme, Michele Caputo tarafından 1969 yılında tanıtılmıştır. Caputo türevi, Riemann-Liouville türevinden farklı olarak başlangıç koşullarını içerir. Bir fonksiyonun  $\alpha$ -mertebeden Caputo türevi şu şekilde ifade edilir.

$${}^CD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_\alpha^t \frac{f^n(y)dy}{(t-y)^{\alpha-n+1}}, \quad n-1 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.2)$$

Burada,  $f(t)$  bir fonksiyon olup,  $\alpha$  bir gerçel sayı,  $n$  bir tamsayı ve  ${}^CD_t^\alpha f(t)$  ifadesi  $\alpha$ -mertebeden Caputo türevidir.  $\Gamma(n-\alpha)$  gama fonksiyonunu ifade eder.

İki ünlü matematikçi Riemann ve Liouville tarafından tanımlanan kesirli türev yaklaşımlarını birleştiren Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı günümüzde sıklıkla kullanılmaktadır [2, 3]. Bu türevlere ek olarak uyumlu kesirli türev yaklaşımı da literatürde yer almaktadır. Birçok matematikçi basitliği ve pratikliği nedeniyle onu tercih eder. Uyumlu türev, matematikte geleneksel türev kavramlarından farklı bir perspektifle ele alınan bir türev türüdür. Bu terim, uyumlu türev veya uyumlu kesirli türev adı verilen bir matematiksel kuram ile ilişkilidir. Geleneksel türevin geliştirilmiş bir formunu sunan bu kuram, özellikle kesirli türevler ve integral operatörleri üzerine odaklanır. Uyumlu türev, türevlerin pozitif olmayan tam sayı derecelerine genişletilmesini sağlar. Bu, matematiksel ifadelerde daha fazla esneklik ve genelleştirme sağlar. Uyumlu türevler, pozitif olmayan tam sayı derecelere genişletilebilir. Bu özellik, matematiksel ifadelerde daha fazla esneklik ve genelleştirme sağlar. Özellikle kesirli türevlere odaklanan bu kuram, karmaşık sistemlerin matematiksel modellenmesinde kullanışlıdır. Uyumlu türevler, özellikle karmaşık sistemlerin matematiksel modellenmesinde ve fiziksel olayların analizinde kullanıldığında avantajlı olabilir. Uyumlu türev, mühendislik ve fizik gibi bilim alanlarında matematiksel modelleme süreçlerinde kullanılabilir. Karmaşık sistemlerin analizi ve matematiksel problemlerin çözümünde uyumlu türevlerin



kullanılması, bazı durumlarda avantaj sağlayabilir. Bu yaklaşımın temel avantajlarından biri, daha karmaşık matematiksel modellerde daha iyi bir uyum ve anlam sağlamasıdır.

Fiziksel olayların matematiksel ifadesi olan kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri, bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere bağlı olarak 20. yüzyılın ilk çeyreğinden başlayarak günümüze kadar devam eden bir süreci oluşturmaktadır. Bu süreçte fizik, kimya, biyoloji, meteoroloji, kuantum mekaniği, mühendislik, doğa bilimleri, ekonomi problemleri, sinyal işleme, kontrol, finans ve yaşam bilimlerinin matematiksel modellemesinde temel kural ve yasalar öne çıkmaktadır. Bunlar matematiksel bir dil olarak ifade edilir. Diferansiyel denklemler ve genel olarak diferansiyel denklem sistemleri ile ilgili süreçlerin modellenmesi mümkündür. Dolayısıyla, bu denklemlerin çözümleri de önem arz etmektedir. Bu sebeple analitik çözüm metotlarına ihtiyaç duyulmuştur. Pratik ve değerli olmasının yanı sıra en iyi sonucu veren çözüm metotları aranır. Bu denklemlerin genel çözümleri, araştırmacılara fiziksel olayların özellikleri hakkında da bilgi sağlar. Aynı zamanda bu denklemler daha iyi ve genel sonuçlar elde etmek için çeşitli analitik metotlarla birlikte kesirli türevler yardımıyla kullanılmaktadır. Bu metotlardan bazıları, Genişletilmiş tanh Metodu [4], Kudryashov Metodu [5], Alt-Denklem Metodu [6], Exp-Function Metodu [7], tanh-sech Metodu [8], Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu [9], Genelleştirilmiş ( $G'/G$ )-Açılım Metodu [10] vb. Sonrasında kesirli denklemler oluşturma ve modelleme problemleri için analitik ve nümerik çözümler elde etme işi bilim adamları arasında derin bir ilgi uyandırmıştır. Bu çözümleri elde etmek için farklı metotların geliştirilmesi ve uygulanması bilim adamları arasında büyük önem kazanmıştır. Kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini bulmak için literatürde sıklıkla karşılaşılan bu metotlardan bazıları Adomian Ayrıştırma Metodu [11], Homotopi Analiz Metodu [12], Q-Homotopi Analizi Dönüşüm Metodu [13], Rezidual Kuvvet Seri Metodu (RKSM) [14] vb. Bu metotlar, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde başarıyla kullanılmaktadır. Sonuç olarak, kesirli analiz, birçok pratik uygulama için kullanışlı bir araç haline gelmiştir.

## 2.BÖLÜM

### MATERYAL VE METOTLAR

Bu bölümde, uygulanmış olan uyumlu kesirli türev yaklaşımı ve homojen denge kavramından bahsedilmiştir. Daha sonra Alt-Denklem, Genelleştirilmiş  $(G'/G)$ -Açılım, Modifiye Edilmiş Kudryashov ve Rezidual Kuvvet Seri metotlarının tanımları verilmiştir.

#### 2.1. Uyumlu Kesirli Türev Yaklaşımı

Bu kısımda, uyumlu kesirli türev tanımının [15] verilmesinin ardından, uyumlu kesirli türev yaklaşımının bazı özelliklerine değinilmiştir.

**Tanım 2.1.1:**  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x > 0, \omega \in (0,1)$  olmak üzere  $\omega$ -inci mertebeden bir  $f$  fonksiyonunun uyumlu kesirli mertebeden türev yaklaşımı,

$$D^\omega(f(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\omega}) - f(x)}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

eşitliği ile tanımlıdır.  $\omega \in (0, 1)$  ve  $t > 0$  için,  $m_1$  ve  $m_2$  fonksiyonları  $\omega$ -inci mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilir fonksiyonlardır. Buradan,

- $D^\omega(t^{n_1}) = n_1 t^{n_1-\omega}, n_1 \in \mathbb{R}$
- $D^\omega(n_1 m_1 + n_2 m_2) = n_1 D^\omega(m_1) + n_2 D^\omega(m_2), n_1, n_2 \in \mathbb{R}$
- $D^\omega\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{m_1 D^\omega(m_2) - m_2 D^\omega(m_1)}{m_2^2}$
- $D^\omega(m_1 m_2) = m_1 D^\omega(m_2) + m_2 D^\omega(m_1)$
- Her  $D^\omega(m_1) = s$  sabit fonksiyonu için  $D^\omega(s) = 0$
- $D^\omega(m_1(t)) = t^{1-\omega} \frac{dm_1(t)}{dt}$  (2.2)

**Tanım 2.1.2:**  $n$  değişkenli  $z$  fonksiyonu  $y_1, y_2, \dots, y_n$  olarak tanımlansın ve  $\omega \in (0, 1)$  mertebesinde  $z$ 'nin  $y_i$  cinsinden kısmi türevleri şu şekilde verilsin [16],

$$\frac{d^\omega}{dy_i^\omega} z(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i + \varepsilon y_i^{1-\omega}, \dots, y_n) - z(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\varepsilon} \quad (2.3)$$

## 2.2. Homojen Denge Prensibi

Homojen denge sayısı, toplam şeklinde verilen tam çözümün üst sınırını ifade eder. Lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında sabit bir sayı elde edilir.

Bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim  $\frac{d^n u}{d\varepsilon^n}$  ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim  $u^q \left(\frac{d^k u}{d\varepsilon^k}\right)^m$  şeklinde verilsin.  $u = \tau^p$  dönüşümü yapılırsa  $q, n, k, m$  pozitif tam sayı ve  $p$  homojen denge sayısı olmak üzere homojen denge bağıntısı  $p + n = pn + m(p + k)$  şeklinde elde edilir. Bu denklemden  $p$  pozitif homojen denge sayısına ulaşılır [17].

## 2.3. Analitik Çözüm Metotları

Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözüm metotları, nümerik çözüm metotlarına alternatif bir çözüm sunar. Nümerik çözüm metotları, kesirli kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümünü yaklaşık olarak verirken, analitik çözüm metotları kesirli kısmi diferansiyel denklemlerinin kesin çözümlerini bulur. Ayrıca analitik çözüm metotları, karmaşık matematiksel modellerin analitik olarak çözülmesine izin verir bu da daha iyi anlayış ve öngörü sağlar. Ayrıca, analitik çözüm metotları nümerik çözüm metotlarına göre daha hızlıdır ve daha az hesaplama gücü gerektirir.

### 2.3.1. Alt-Denklem Metodu

Bu bölümde, uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için alt denklem metodunun [18] önemli adımları belirlenmiştir. Belirli bir doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklem şu şekilde ifade edilir.

$$Q(u, u_t, u_x, \dots, u_y, u_{xx}, u_{yy}, \dots, D_t^\omega, D_t^{2\omega}, \dots) = 0 \quad (2.4)$$

Burada,  $D_t^\omega$  keyfi mertebeden uyumlu bir türev operatörü ve  $u = u(x, y, \dots, t)$  bilinmeyen bir fonksiyondur. Dalga dönüşümü şu şekildedir.

$$u(\xi) = u(x, y, \dots, t), \xi = kx + wy + \dots + h \frac{t^\omega}{\omega} \quad (2.5)$$

burada  $k, w, \dots$  ve  $h$  daha sonra belirlenecek keyfi sabitlerdir. Zincir kuralı yardımıyla [19], denklem (2.4) bir tamsayı mertebeden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemi şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$H(u(\xi), u''(\xi), u'''(\xi), \dots) = 0 \quad (2.6)$$

Burada,

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^M a_i \varphi^i(\xi), a_M \neq 0 \quad (2.7)$$

denklemin çözümü verir.  $a_i (i = 0, 1, \dots, M)$  değerleri ise daha sonra belirlenecek sabitlerdir. Tamsayı  $M$ , denklemdeki doğrusal olmayan terimler ve en yüksek mertebeden türevi dengeleyerek bulunabilir [20]. (2.7) ve  $\varphi(\xi)$  fonksiyonu şu şekilde verilen Riccati denklemini sağlar.

$$\varphi'(\xi) = \sigma + \varphi^2(\xi), \sigma = \text{sabit sayı} \quad (2.8)$$

Denklem (2.8)'i sağlayan çözüm kümesi aşağıda verilmiştir,

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} -\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}\xi), \sigma < 0 \\ -\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}\xi), \sigma < 0 \\ \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma}\xi), \sigma > 0 \\ -\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma}\xi), \sigma > 0 \\ -\frac{1}{\xi + \theta}, \sigma = 0, \theta = \text{sabit sayı} \end{cases} \quad (2.9)$$

Denklem (2.7)'yi denklem (2.6)'da yerine yazarak ve ek olarak denklem (2.8)'i kullanarak,  $\varphi^i(\xi)$ 'nin katsayılarını buluruz. Bu katsayılar sıfıra eşitlenerek,  $a_i (i = 0, 1, \dots, M)$ ,  $k, w, \dots$ , ve  $h$  değerlerine bağlı bir lineer olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümleri hesaplanmalı ve denklem (2.9) kullanılarak denklem (2.7)'de yerine yazılmalıdır. Yerine yazıldıktan sonra denklem (2.4)'ün analitik çözümleri elde edilir.

### 2.3.2. Genelleştirilmiş ( $G'/G$ )- Açılım Metodu

Bu bölümde, Genelleştirilmiş ( $G'/G$ )-Açılım metodu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Klasik ( $G'/G$ ) metodu, Wang ve ekibinin önerisi üzerine geliştirilmiş ve yeni bir versiyon olan Genelleştirilmiş ( $G'/G$ )-Açılım metodunu detaylarıyla açıklanmıştır [21]. Farklı bilim insanları, Genelleştirilmiş ( $G'/G$ )-Açılım metodu üzerinde farklı araştırmalar yapmıştır. Bu metod, bu çalışmada uyumlu kesirli türev içeren kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmış ve farklı analitik çözümler elde edilmiştir.

Varsayalım ki  $x, y, \dots$  ve  $t$  değişkenleri bağımsız ve  $u(x, y, \dots, t)$  bilinmeyen bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun en yüksek mertebeden türevi ve lineer olmayan terimler içeren,  $n$  tane değişkenli lineer olmayan bir kısmi türevli denklem aşağıdaki formda tanımlansın.

$$K(u, u_{tt}, u_x, \dots, u_y, u_{xx}, u_{yy}, \dots, u_{xt}, u_{yt}, \dots) = 0 \quad (2.10)$$

$K$ ,  $u(x, y, \dots, t)$  ve onun türevlerini içeren ve en yüksek dereceli türevler ile lineer olmayan terimlerin bulunduğu bir polinomdur ve alt indisler kısmi türevleri ifade etmektedir.

$x, y, \dots$  ve  $t$  gerçek değişkenleri için  $\xi$  bağımsız değişken olmak üzere,

$$u(\xi) = u(x, y, \dots, t), \xi = kx + wy + \dots + h \frac{t^\omega}{\omega} \quad (2.11)$$

dönüşümü uygulanır. Burada  $h$ , ilerleyen dalga hızıdır. Denklem (2.11), denklem (2.10)'da yerine yazılarak,  $u = u(\xi)$  için bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$Q(u(\xi), u''(\xi), u'''(\xi), \dots) = 0 \quad (2.12)$$

Burada  $Q$ ,  $u$  ve onun türevlerini içeren bir polinomdur ve  $u''(\xi), u'''(\xi), \dots$  ifadeleri  $\xi$ 'ye göre alınan normal türevleri belirtmektedir. Mümkün olduğu durumlarda, (2.12) denkleminin integrali alınabilir ve bu integral sabitlerinin elde edilmesini sağlar. Basitlik için bu integral sabiti sıfır olarak alınabilir.

$$G(\xi) = G, \quad G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (2.13)$$

adi türevli denkleminin bir çözümü olmak üzere, (2.12) denkleminin çözümü, bir kesik seri olarak ifade edilebilir ve şu şekilde ele alınır.

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^M a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \quad (2.14)$$

Buradan  $u(\xi)$  çözümünün elde edilebilmesi için  $a_i$  sabitlerinin belirlenmesi gerekir. Bu ifade  $\lambda, \mu$  ve  $0 < i < M$  değerlerine bağlıdır. Burada  $M$  pozitif bir tamsayıdır ve denklem (2.12)'deki en yüksek mertebeden türevli terim ile en büyük lineer olmayan terim arasındaki dengeleme prosedürü ile belirlenir. (2.13) denkleminin çözümleri kullanılarak,

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \begin{cases} \left( \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left( \frac{c_1 \cosh \left[ \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right] + c_2 \sinh \left[ \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right]}{c_1 \sinh \left[ \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right] + c_2 \cosh \left[ \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right]} \right) \right), \lambda^2 - 4\mu > 0 \\ \left( \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left( \frac{-c_1 \sin \left[ \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right] + c_2 \cos \left[ \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right]}{c_1 \cos \left[ \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right] + c_2 \sin \left[ \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right]} \right) \right), \lambda^2 - 4\mu < 0 \\ \left( \frac{-\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2 \xi} \right), \lambda^2 - 4\mu = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

elde edilir ve  $c_1, c_2$  keyfi sabitlerdir. (2.12) denkleminin çözümü için,  $u(\xi)$  yerine (2.14) ifadesi kullanılır ve (2.13) denkleminde  $u(\xi)$ 'nin  $\xi$ 'ye bağlı türevleri bulunarak yerine konular. Daha sonra, elde edilen ifadedeki  $(G'/G)$  'nin aynı dereceden katsayılı terimleri düzenlenir ve bu katsayılarından oluşan cebirsel denklemler sıfıra eşitlenir ve çözülür. Bu denklemlerden  $a_i, \lambda, \mu, h$  değerleri bulunur. Elde edilen bu değerler ve (2.13)'ten elde edilen çözümler kullanılarak (2.14) ifadesi oluşturulur ve bu ifade (2.10) lineer olmayan kısmi türevli denkleminin çözümlerini oluşturur.

### 2.3.3. Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu

Bu bölümde ise Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu [22], lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için tanıtılacaktır [23]. Nikolay A. Kudryashov yedinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemleri analitik çözmek için Kudryashov metodunu geliştirmiştir. Daha sonra modifiye edilmiş versiyonu, kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher diferansiyel denkleminin Simetrik Hiperbolik Fibonacci fonksiyon türündeki denklemler için analitik çözümünü elde etmek

için kullanılmıştır [24, 25]. Bu metot özellikle, dengeleme sayısı 1 olan adi diferansiyel denklemler için faydalıdır.

Varsayalım ki  $x, y, \dots$  bağımsız değişkenler,  $u(x, y, \dots, t)$  bağımlı değişken ve  $Z$  bir polinom olsun.

$$Z(u, u_t, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.16)$$

lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin genel bir formu olarak verilsin.  $k, w, \dots, h$  keyfi sabitler ve  $\xi$  bağımsız değişken olmak üzere,

$$u(\xi) = u(x, y, \dots, t), \xi = kx + wy + \dots + h \frac{t^\omega}{\omega} \quad (2.17)$$

dalga dönüşümü sonucunda, (2.16) denkleminde yerine yazıldığında, aşağıdaki şekilde bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem ortaya çıkmaktadır.

$$V(u(\xi), u''(\xi), u'''(\xi), \dots) = 0 \quad (2.18)$$

Burada  $\xi$  'ye göre türevleri bulunan  $u(\xi)$  fonksiyonu göz önüne alınmaktadır. (2.18) denkleminin çözümü, bir kesik seri olarak ifade edilebilir ve şu şekilde ele alınır.

$$u(\xi) = B_0 + \sum_{r=1}^M B_r \varphi^r(\xi) \quad (2.19)$$

Bu ifadede  $B_r, r = 1, 2, \dots, M$  ( $B_M \neq 0$ ) hesaplanacak sabitlerdir ve  $\varphi(\xi)$  aşağıdaki şekilde verilen bir fonksiyondur.

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{1 + da^\xi} \quad (2.20)$$

Aşağıdaki gibi doğrusal olmayan bir birinci dereceden diferansiyel denklemi karşılayan,

$$\varphi'(\varphi) = \ln(a) \varphi(\xi) (\varphi(\xi) - 1) \quad (2.21)$$

denklemi, (2.18) içindeki en yüksek mertebeden lineer ve lineer olmayan terimlerin dengelemesi ile  $M$  değeri belirlenir. Denklem (2.19) ve bu denklemin gerektirdiği türevler, denklem (2.18)'te yerlerine yazılarak şu sonuç elde edilir,

$$P(\varphi(\xi)) = 0 \quad (2.22)$$

Burada  $P(\varphi(\xi))$ ,  $\varphi(\xi)$  içeren bir polinomdur. Denklem (2.22) içerisinde  $\varphi(\xi)$ 'nin her derecesinin katsayısını sıfıra eşitleyerek, bir cebirsel denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sisteminin çözümü, denklem (2.16)'nın analitik çözümlerini verir.

#### 2.4. Nümerik Çözüm Metotları

Nümerik çözüm metotları, matematiksel problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan tekniklerdir. Sayısal türev, integral, denklem çözme, lineer cebir problemleri gibi çeşitli matematiksel problemleri çözmek için nümerik metotlar kullanılabilir. Nümerik çözüm metotları, bilgisayarlar aracılığıyla iteratif yaklaşımlar kullanarak problemlere yaklaşır ve genellikle yaklaşık çözümleri üretirler.

##### 2.4.1 Rezidual Kuvvet Seri Metodu (RKSM)

RKSM, nümerik bir çözüm metodu olarak kullanılan bir tekniktir. Bu metot, diferansiyel denklemleri çözmek için bir yaklaşım sağlar. Bir diferansiyel denklemi, genellikle bir başlangıç değeri kullanarak, bir kuvvet serisi şeklinde ifade eder. Daha sonra bu kuvvet serisini orijinal denklemde yerine koyar ve kalan terimlerin sıfıra yakın olduğu kabul edilir. Bu şekilde, denklemi çözmek için bir nümerik çözüm metodu elde edilir. Nümerik çözüm metotları, genellikle analitik çözümün bulunmasını çok zor olduğu durumlarda tercih edilir. RKSM bu metotlardan birisidir [26].

RKSM algoritmasını tanıtmak için, aşağıdaki gibi doğrusal olmayan bir kesirli diferansiyel denklem düşünülmelidir.

$$D_t^{a\omega} u(x, t) = J[X]u(x, t) + L[X]u(x, t) = q(x, t) \quad (2.23)$$

$t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a - 1 < a\omega \leq a$ ,  $J[x]$  lineer bir operatördür ve  $L[x]$  lineer olmayan bir operatördür. RKSM metodu ile,

$$f_0(x) = u(x, 0) = f(x) \quad (2.24)$$

başlangıç koşulu  $t = 0$  için kesirli kuvvet serisinin açılımı hesaplanabilir ve şu şekildedir,

$$f_{a-1}(x) = D_t^{(a-1)\omega} u(x, 0) = h(x) \quad (2.25)$$



Ayrıca bu çözümün açılım formu da şu şekildedir,

$$u(x, t) = \sum_{a=0}^{\infty} f_a(x) \frac{t^{a\omega}}{a! \omega^a}, \quad 0 < \omega \leq 1, \quad 0 \leq t < \mathbb{R} \quad (2.26)$$

Şimdiki adımda ise  $u(x, t)$   $k$ -yüncü kesigi olan  $u_k(x, t)$ ,

$$u_k(x, t) = \sum_{a=0}^k f_a(x) \frac{t^{a\omega}}{a! \omega^a}, \quad 0 < \omega \leq 1, \quad 0 \leq t < \mathbb{R} \quad (2.27)$$

olarak ifade edilir.  $k = 0$  için RKS çözümü  $u_0(x, t) = f(x)$  olarak ifade edilir ve buradan elde edilen bilgiye göre,  $k = 1$  için RKS nümerik çözümü şu şekilde elde edilir.

$$u_1(x, t) = f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\omega}{\omega} \quad (2.28)$$

Burada şayet rezidual fonksiyonu (2.23) denklemi ile ilişkilendireceksek, o zaman aşağıdaki gibi bir ifade elde edilir.

$$Res = D_t^{a\omega} u(x, t) + J[X]u(x, t) + L[X]u(x, t) - q(x, t) \quad (2.29)$$

$k$ -ıncı rezidual fonksiyonu  $Res_k$  ise,

$$Res_k = D_t^{a\omega} u_k(x, t) + J[X]u_k(x, t) + L[X]u_k(x, t) - q(x, t), k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.30)$$

formu elde edilir.  $k = 1$  için, denklemin rezidü fonksiyonu  $Res_1(x, t)$  ifadesi elde edilir. Bu ifade  $t = 0$  için  $Res_1(x, 0) = 0$  koşulunu sağladığında,  $f_1(x)$  elde edilir. Bu ise,  $u_1(x, t)$  için birinci RKS nümerik çözümünü elde etmemizi sağlar. Daha sonra, her adımda  $k = 1, 2, 3, \dots$  için farklı  $f_k(x)$  ifadeleri elde edilir. Bu şekilde, kesirli kuvvet serileri kullanılarak, her adımda daha yakın bir yaklaşım elde edilerek daha yakın sonuca ulaşılacağı ifade edilebilir.

### 3.BÖLÜM

#### UYGULAMALAR

Bu bölümde, genelleştirilmiş (3+1)-boyutlu Camassa-Holm-Kadomtsev-Petviashvili (CHKP) denklemi ile yeni genişletilmiş (2+1)-boyutlu Kadomtsev–Petviashvili denklemi genel hatlarıyla anlatılmıştır. Daha sonra genelleştirilmiş (3+1)-boyutlu CHPK denklemi için analitik çözüm metotları olan Alt-Denklem, Genelleştirilmiş  $(G'/G)$ -Açılım ve Modifiye Edilmiş Kudryashov metotları uygulamaları verilmiştir. Son olarak ise yeni genişletilmiş (2+1)-boyutlu Kadomtsev–Petviashvili (KP) denklemi için, Modifiye Edilmiş Kudryashov ve RKS metotlarının uygulamaları verilmiştir.

#### 3.1. Genelleştirilmiş (3+1)-Boyutlu Camassa-Holm-Kadomtsev-Petviashvili (CHKP) Denklemi

İlk olarak CHPK denkleminin [27] yeni analitik çözümleri elde edilmiştir. Camassa ve Holm, sığ su dalgaları üzerine araştırma yaparken bu denklemi geliştirmişlerdir. Denklem, öncelikle yerçekimi kuvveti nedeniyle sığ deniz yüzeyinde tek yönlü yalnız dalgaların yayılmasını tanımlamak için ortaya konmuştur. Bu denklem KdV tipi bir denklemdir ve sıkıştırılabilir sıvılarda, akustik yerçekimi dalgalarında, sıvılardaki uzun dalga boyundaki yüzey dalgaları ve soğuk plazmadaki dalgaları incelemek için KdV tipi denklemler kullanılmaktadır.

$$(u_t + \chi_1 u_x + \chi_2 u u_x + \chi_3 u_{xxx})_x + \chi_4 u_{yy} + \chi_5 u_{zz} = 0 \quad (3.1)$$

$u = u(x, y, z, t)$  dalga genliğidir.  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  ve  $\chi_5$  reel sabitlerdir.

Uygulama yapmadan önce, denklemin uyumlu kesirli türev versiyonu şu şekilde yazılır.

$$(D_t^\omega u + \chi_1 u_x + \chi_2 u u_x + \chi_3 D_t^\omega u_{xxx})_x + \chi_4 u_{yy} + \chi_5 u_{zz} = 0, \quad 0 < \omega \leq 1 \quad (3.2)$$

Burada,  $u(x, y, z, t) = u(\xi)$  ve  $\xi = kx + wy + sz + h \frac{t^\omega}{\omega}$  dönüşümlerini yaptıktan sonra iki kez integral alarak,

$$(hk + k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)u + \frac{1}{2}k^2\chi_2u^2 + hk^3\chi_3u'' = 0 \quad (3.3)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu indirgeme sonucunda oluşan  $u''$  ve  $u^2$  terimleri arasında dengeleme yapılır. Dengeleme bağıntısı  $M + 2 = 2M$  olarak yazılır ve bu bağıntı çözüldüğünde dengeleme sayısı  $M = 2$  olarak bulunur.

Şimdi bu sayı, Alt-Denklem, Genelleştirilmiş  $(G'/G)$ -Açılım ve Modifiye Edilmiş Kudryashov metotlarındaki kesik serilere uygulanmalıdır.

### 3.1.1. Alt-Denklem Metodu ile Analitik Çözüm

Buradan,  $M = 2$  değeri denklem (2.7)'de yerine yazıldığında kesik seri şu şekilde olacaktır.

$$u(\xi) = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \quad (3.4)$$

Oluşan bu denklemde, son olarak  $\varphi^k$  fonksiyonları düzenlenir ve fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır. Bu durumda aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\frac{1}{2}k^2a_0^2\chi_2 + 2hk^3\sigma^2a_2\chi_3a_0(hk + k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) = 0,$$

$$k^2a_1a_2\chi_2 + 2hk^3a_1\chi_3 = 0,$$

$$\frac{1}{2}k^2a_2^2\chi_2 + 6hk^3a_2\chi_3 = 0,$$

$$k^2a_0a_1\chi_2 + 2hk^3\sigma a_1\chi_3 + a_1(hk + k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) = 0,$$

$$\frac{1}{2}k^2a_1^2\chi_2 + k^2a_0a_2\chi_2 + 8hk^3\sigma a_2\chi_3 + a_2(hk + k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) = 0. \quad (3.5)$$

Bu cebirsel denklem sistem çözüldüğünde  $a_0, a_1, a_2$  ve  $h$  değerleri için iki çözüm kümesi elde edilir.

### Çözüm 1:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{12\sigma\chi_3(k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5)}{\chi_2(-1+4k^2\sigma\chi_3)}, a_1 = 0, \\ a_2 &= -\frac{12\chi_3(k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5)}{\chi_2(-1+4k^2\sigma\chi_3)}, h = -\frac{k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5}{k-4k^3\sigma\chi_3}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

### Küme 1:

$\sigma < 0$  için,

$$\begin{aligned} u_{1,1}(x, y, z, t) &= -\frac{12\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(-1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \\ &+ \frac{12\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) \tanh\left(\sqrt{-\sigma}\left(kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(k - 4k^3\sigma\chi_3)}\right)\right)^2}{\chi_2(-1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} u_{1,2}(x, y, z, t) &= -\frac{12\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(-1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \\ &+ \frac{12\sigma \coth\left(\sqrt{-\sigma}\left(kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(k - 4k^3\sigma\chi_3)}\right)\right)^2 \chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(-1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$\sigma > 0$  için,

$$\begin{aligned} u_{1,3}(x, y, z, t) &= -\frac{12\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(-1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \\ &- \frac{12\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) \tan\left(\sqrt{\sigma}\left(kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(k - 4k^3\sigma\chi_3)}\right)\right)^2}{\chi_2(-1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} u_{1,4}(x, y, z, t) &= -\frac{12\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(-1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \\ &- \frac{12\sigma \cot\left(\sqrt{\sigma}\left(kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(k - 4k^3\sigma\chi_3)}\right)\right)^2 \chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(-1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\sigma = 0$  için,

$$u_{1,5}(x, y, z, t) = \frac{12\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2\left(kx + wy + sz + \theta - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{k\omega}\right)^2} \quad (3.11)$$

## Çözüm 2:

$$a_0 = \frac{4\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1+4k^2\sigma\chi_3)}, a_1 = 0, a_2 = \frac{12\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1+4k^2\sigma\chi_3)},$$
$$h = -\frac{k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5}{k+4k^3\sigma\chi_3}. \quad (3.12)$$

## Küme 2:

$\sigma < 0$  için,

$$u_{2,1}(x, y, z, t) = \frac{4\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1 + 4k^2\sigma\chi_3)}$$
$$-\frac{12\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)\tanh\left(\sqrt{-\sigma}\left(kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(k + 4k^3\sigma\chi_3)}\right)\right)^2}{\chi_2(1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \quad (3.13)$$

$$u_{2,2}(x, y, z, t) = \frac{4\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1 + 4k^2\sigma\chi_3)}$$
$$-\frac{12\sigma\coth\left(\sqrt{-\sigma}\left(kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(k + 4k^3\sigma\chi_3)}\right)\right)^2 \chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \quad (3.14)$$

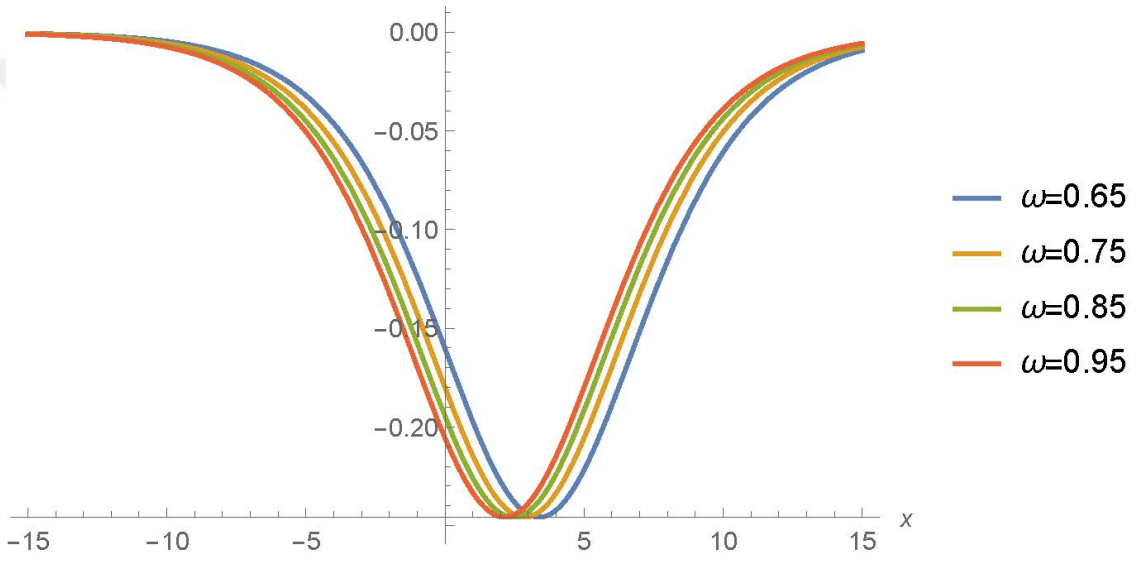
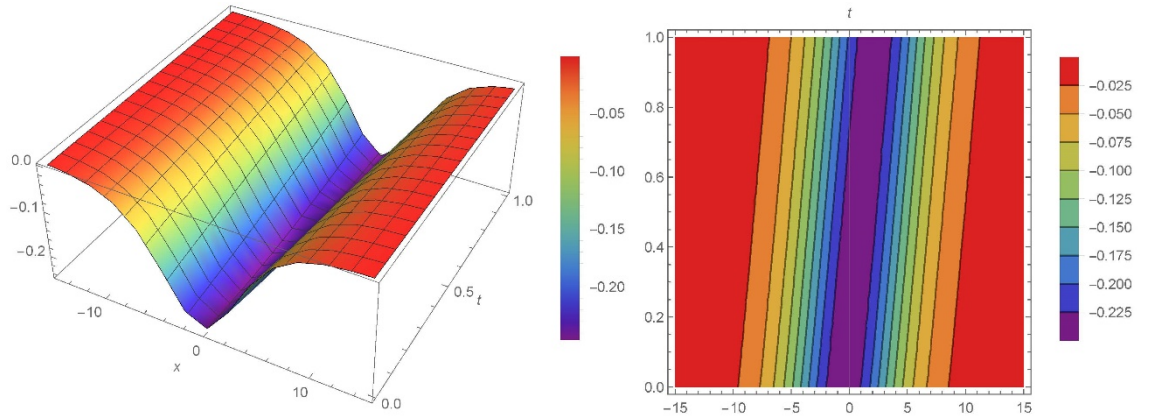
$\sigma > 0$  için,

$$u_{2,3}(x, y, z, t) = \frac{4\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1 + 4k^2\sigma\chi_3)}$$
$$+\frac{12\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)\tan\left(\sqrt{\sigma}\left(kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(k + 4k^3\sigma\chi_3)}\right)\right)^2}{\chi_2(1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \quad (3.15)$$

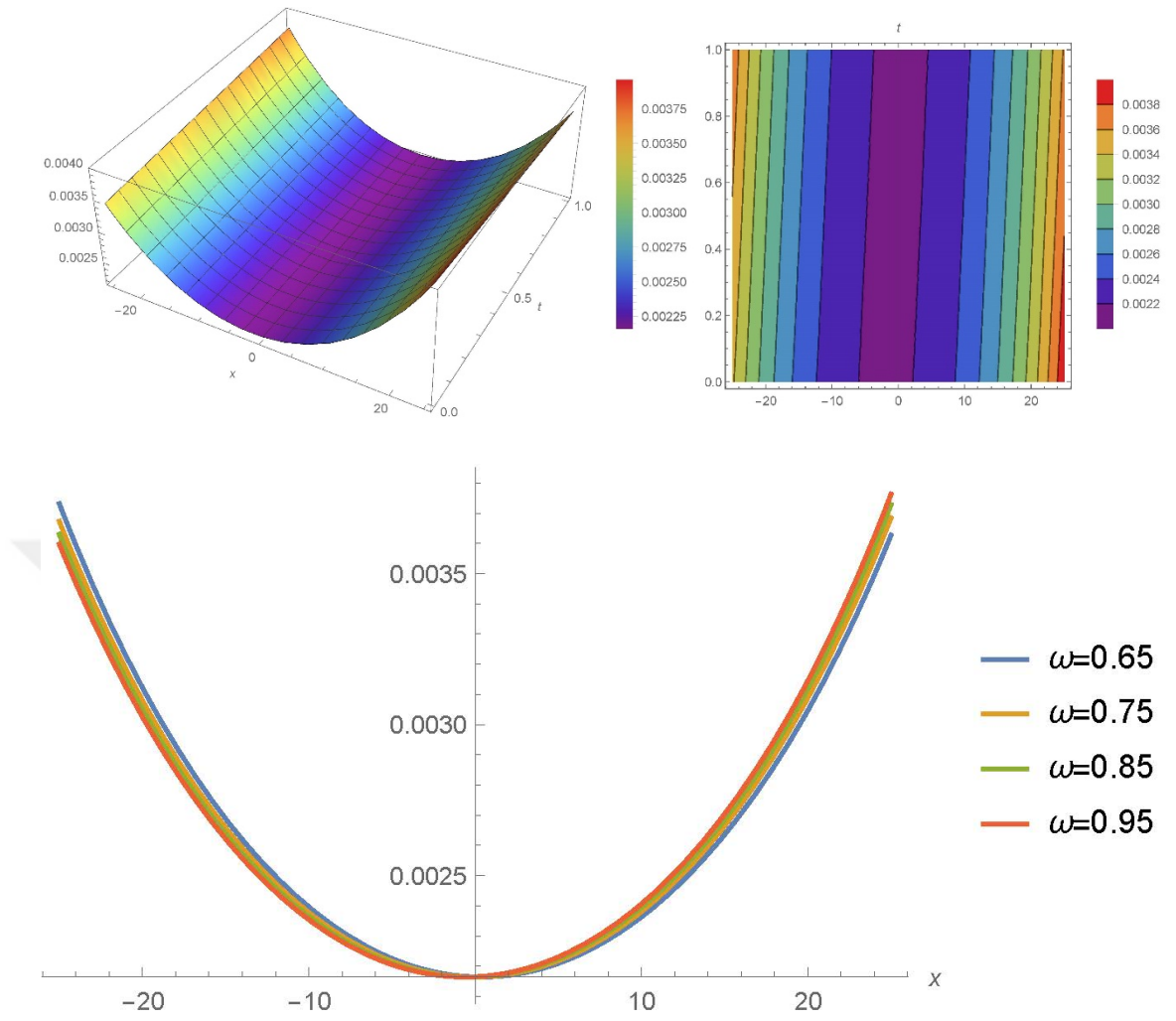
$$u_{2,4}(x, y, z, t) = \frac{4\sigma\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1 + 4k^2\sigma\chi_3)}$$
$$+\frac{12\sigma\cot\left(\sqrt{\sigma}\left(kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(k + 4k^3\sigma\chi_3)}\right)\right)^2 \chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1 + 4k^2\sigma\chi_3)} \quad (3.16)$$

$\sigma = 0$  için,

$$u_{2,5}(x, y, z, t) = \frac{12\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2\left(kx + wy + sz + \theta - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{k\omega}\right)^2} \quad (3.17)$$



Şekil 3.1. Denklem (3.7)'de elde edilen  $u_{1,1}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 0.2$ ,  $w = 1$ ,  $s = 0.01$ ,  $y = 0.1$ ,  $z = 0.5$ ,  $\chi_1 = 0.1$ ,  $\chi_2 = 0.5$ ,  $\chi_3 = 0.1$ ,  $\chi_4 = 0.1$ ,  $\chi_5 = 0.1$ ,  $\sigma = -1$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği.



Şekil 3.2. Denklem (3.15)'te elde edilen  $u_{2,3}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 0.09$ ,  $w = 0.25$ ,  $s = 0.08$ ,  $y = 1$ ,  $z = -1$ ,  $\chi_1 = 0.55$ ,  $\chi_2 = 0.65$ ,  $\chi_3 = 0.5$ ,  $\chi_4 = 0.2$ ,  $\chi_5 = 0.1$ ,  $\sigma = 0.04$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği

### 3.1.2. Genelleştirilmiş $(G'/G)$ -Açılım Metodu ile Analitik Çözüm

$M = 2$  değeri denklem (2.14)'de yerine yazıldığında kesik seri şu şekilde olacaktır,

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left( \frac{G'}{G} \right) + a_2 \left( \frac{G'}{G} \right)^2, a_1, a_2 \neq 0 \quad (3.18)$$

Oluşan bu denklemde,  $\left( \frac{G'}{G} \right)^k$  fonksiyonları düzenlenir ve bu fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır. Bu işlemler sonucunda aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir,

$$hka_0 + k^2 a_0 \chi_1 + \frac{1}{2} k^2 a_0^2 \chi_2 + hk^3 \lambda \mu a_1 \chi_3 + 2hk^3 \mu^2 a_2 \chi_3 + w^2 a_0 \chi_4 + s^2 a_0 \chi_5 = 0,$$

$$hka_1 + k^2 a_1 \chi_1 + k^2 a_0 a_1 \chi_2 + hk^3 \lambda^2 a_1 \chi_3 + 2hk^3 \mu a_1 \chi_3 + 6hk^3 \lambda \mu a_2 \chi_3 + w^2 a_1 \chi_4 + s^2 a_1 \chi_5 = 0,$$

$$hka_2 + k^2 a_2 \chi_1 + \frac{1}{2} k^2 a_1^2 \chi_2 + k^2 a_0 a_2 \chi_2 + 3hk^3 \lambda a_1 \chi_3 + 4hk^3 \lambda^2 a_2 \chi_3 + 8hk^3 \mu a_2 \chi_3 + w^2 a_2 \chi_4 + s^2 a_2 \chi_5 = 0,$$

$$k^2 a_1 a_2 \chi_2 + 2hk^3 a_1 \chi_3 + 10hk^3 \lambda a_2 \chi_3 = 0,$$

$$\frac{1}{2} k^2 a_2^2 \chi_2 + 6hk^3 a_2 \chi_3 = 0. \quad (3.19)$$

Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde  $a_0, a_1, a_2$  ve  $h$  değerleri için iki çözüm kümesi elde edilir.

#### Çözüm 1:

$$a_0 = \frac{12\mu\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1+k^2(\lambda^2-4\mu)\chi_3)}, a_1 = \frac{12\lambda\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1+k^2(\lambda^2-4\mu)\chi_3)},$$
$$a_2 = \frac{12\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1+k^2(\lambda^2-4\mu)\chi_3)}, h = -\frac{k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5}{k + k^3(\lambda^2-4\mu)\chi_3}. \quad (3.20)$$



**Küme 1:**

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  için,

$$\begin{aligned}
 u_{3,1} &= \frac{12\mu(\phi_2)}{\chi_2(1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \\
 &+ \frac{12\lambda \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\phi_1)\right) c_1 + \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\phi_1)\right) c_2 \right)}{2 \left( \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\phi_1)\right) c_1 + \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\phi_1)\right) c_2 \right)} \right) (\phi_2)}{\chi_2(1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \\
 &+ \frac{12 \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\phi_1)\right) c_1 + \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\phi_1)\right) c_2 \right)}{2 \left( \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\phi_1)\right) c_1 + \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\phi_1)\right) c_2 \right)} \right)^2 (\phi_2)}{\chi_2(1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  için,

$$\begin{aligned}
 u_{3,2} &= \frac{12\mu(\phi_2)}{\chi_2(1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \\
 &+ \frac{12\lambda \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left( -\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\phi_1)\right) c_1 + \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\phi_1)\right) c_2 \right)}{2 \left( \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\phi_1)\right) c_1 + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\phi_1)\right) c_2 \right)} \right) (\phi_2)}{\chi_2(1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \\
 &+ \frac{12 \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left( -\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\phi_1)\right) c_1 + \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\phi_1)\right) c_2 \right)}{2 \left( \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\phi_1)\right) c_1 + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\phi_1)\right) c_2 \right)} \right)^2 (\phi_2)}{\chi_2(1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  için,

$$u_{3,3} = \frac{12\mu\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{12\lambda\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2 \left( kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{k\omega} \right)} \right)}{\chi_2} \\
& + \frac{12\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2 \left( kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{k\omega} \right)} \right)^2}{\chi_2} \quad (3.23)
\end{aligned}$$

**Çözüm 2:**

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{2(\lambda^2 + 2\mu)\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(-1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)}, a_1 = -\frac{12\lambda\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(-1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)}, \\
a_2 &= -\frac{12\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(-1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)}, h = \frac{k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5}{-k + k^3(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3} \quad (3.24)
\end{aligned}$$

**Küme 2:**

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  için,

$$\begin{aligned}
u_{4,1} &= -\frac{2(\lambda^2 + 2\mu)\phi_2}{\chi_2(-1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \\
& \frac{12\lambda \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\psi_1)\right) c_1 + \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\psi_1)\right) c_2 \right)}{2 \left( \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\psi_1)\right) c_1 + \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\psi_1)\right) c_2 \right)} \right) \phi_2}{\chi_2(-1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \\
& \frac{12 \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\psi_1)\right) c_1 + \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\psi_1)\right) c_2 \right)}{2 \left( \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\psi_1)\right) c_1 + \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\psi_1)\right) c_2 \right)} \right)^2 \phi_2}{\chi_2(-1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \quad (3.25)
\end{aligned}$$

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  için,

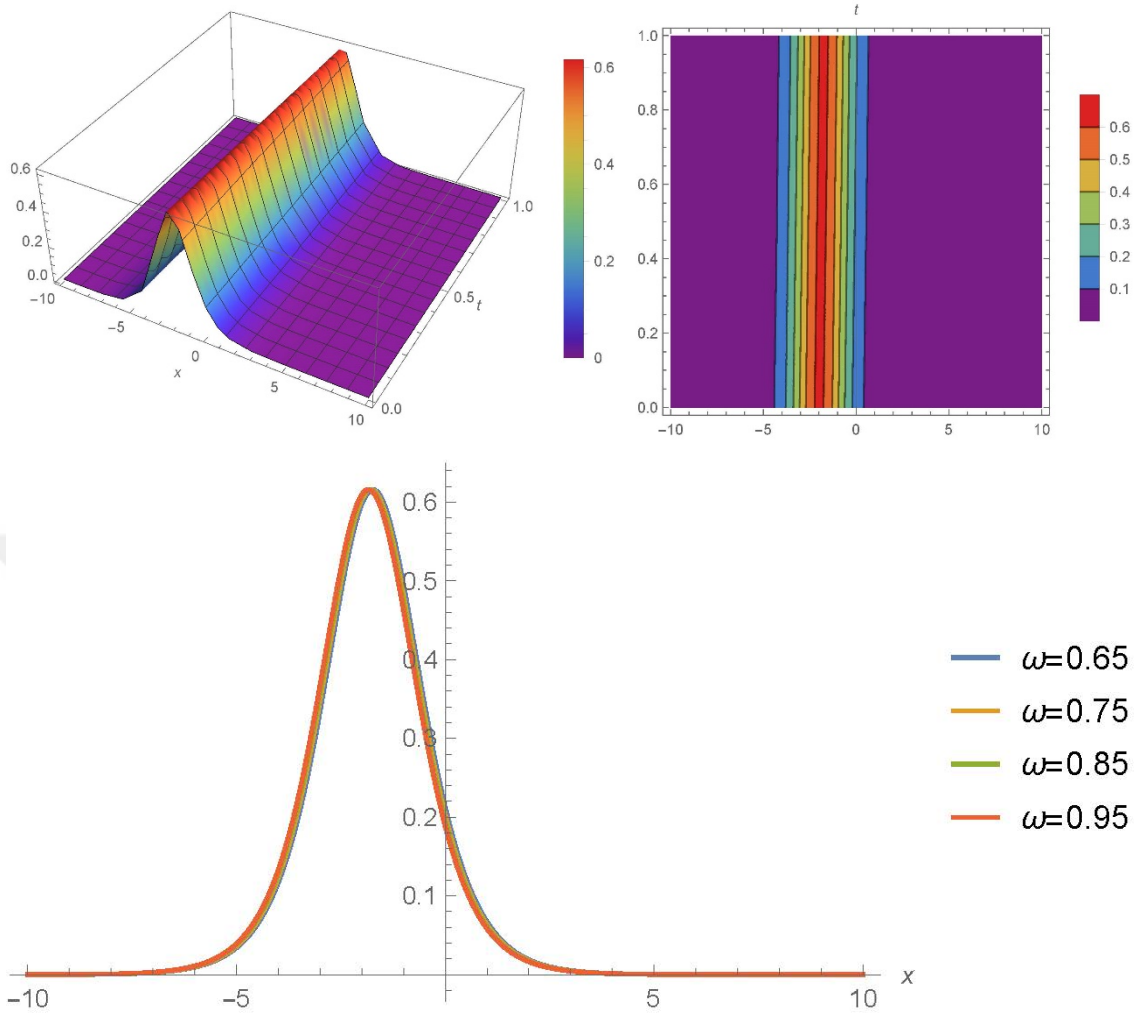
$$\begin{aligned}
u_{4,2} &= -\frac{2(\lambda^2 + 2\mu)\phi_2}{\chi_2(-1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \\
&\frac{12\lambda \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left( -\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\psi_1)\right) c_1 + \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\psi_1)\right) c_2 \right)}{2 \left( \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\psi_1)\right) c_1 + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\psi_1)\right) c_2 \right)} \right) \phi_2}{\chi_2(-1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \\
&\frac{12 \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left( -\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\psi_1)\right) c_1 + \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\psi_1)\right) c_2 \right)}{2 \left( \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\psi_1)\right) c_1 + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}(\psi_1)\right) c_2 \right)} \right)^2 \phi_2}{\chi_2(-1 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  için,

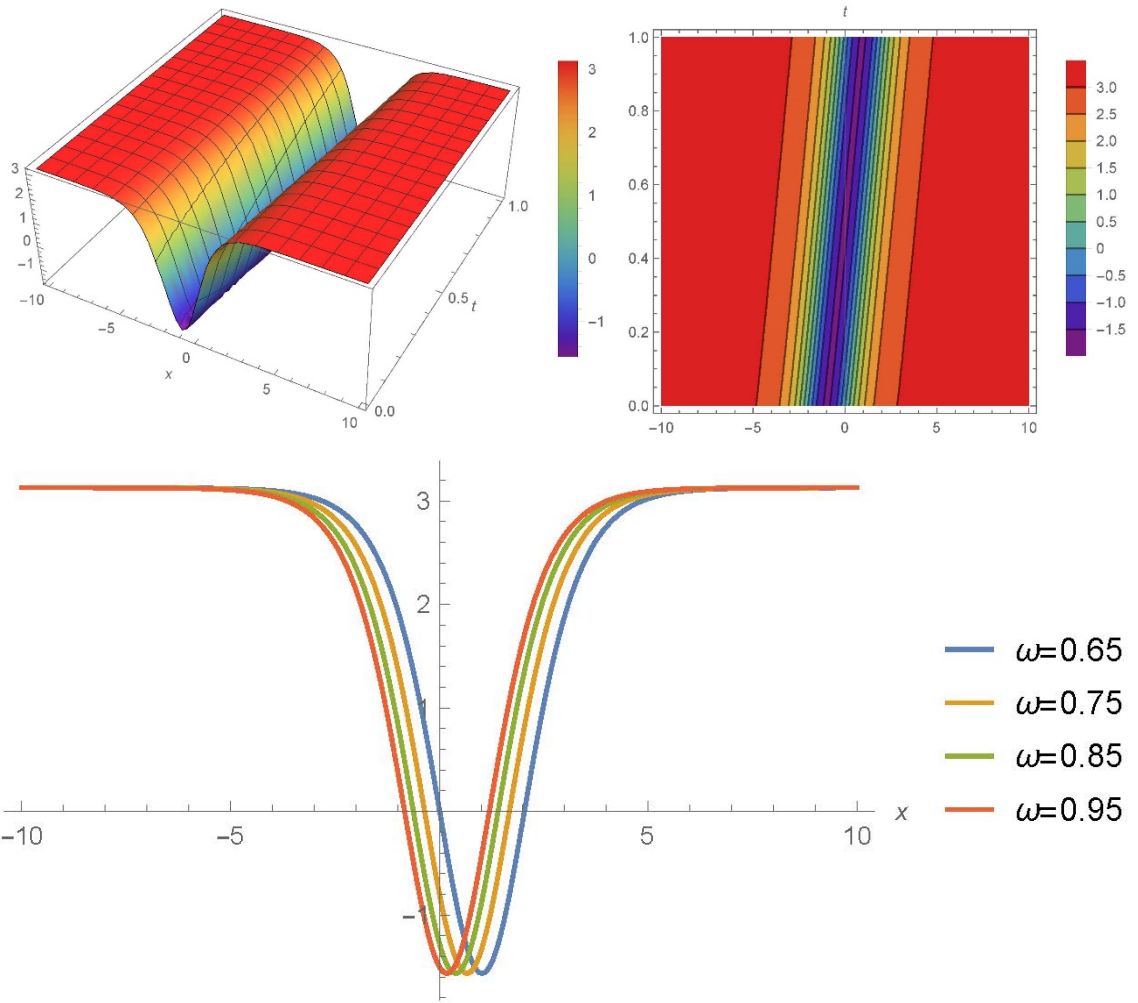
$$\begin{aligned}
u_{4,3} &= \frac{12\mu\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2} \\
&+ \frac{12\lambda\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2 \left( kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{k\omega} \right)} \right)}{\chi_2} \\
&+ \frac{12\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) \left( -\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2 \left( kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{k\omega} \right)} \right)^2}{\chi_2} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Buradan  $c_1$  ve  $c_2$  keyfî sabitler olup, çözümlerin içinde bulunan  $\phi_1$ ,  $\psi_1$ ,  $\phi_2$  değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= kx + wy + sz - \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(k + k^3(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)}, \quad \psi_1 = kx + wy + sz + \frac{t^\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\omega(-k + k^3(\lambda^2 - 4\mu)\chi_3)}, \\
\phi_2 &= \chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) \quad (3.28)
\end{aligned}$$



Şekil 3.3. Denklem (3.21)'de elde edilen  $u_{3,1}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 2$ ,  $w = -2$ ,  $s = -1$ ,  $y = -0.12$ ,  $z = -1$ ,  $\lambda = 0.25$ ,  $\mu = -0.09$ ,  $c_1 = -5$ ,  $c_2 = -7$ ,  $\chi_1 = 0.1$ ,  $\chi_2 = -0.4$ ,  $\chi_3 = 0.2$ ,  $\chi_4 = 0.1$ ,  $\chi_5 = 0.5$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği.



Şekil 3.4. Denklem (3.25)'te elde edilen  $u_{4,1}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 2$ ,  $w = 2$ ,  $s = -1$ ,  $y = 0.12$ ,  $z = 1$ ,  $\lambda = 0.25$ ,  $\mu = -0.09$ ,  $c_1 = 5$ ,  $c_2 = 7$ ,  $\chi_1 = 0.1$ ,  $\chi_2 = 0.4$ ,  $\chi_3 = 0.2$ ,  $\chi_4 = 1$ ,  $\chi_5 = 0.5$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği.

### 3.1.3. Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu ile Analitik Çözüm

$M = 2$  değeri denklem (2.19)'da yerine yazıldığında kesik seri şu şekilde olacaktır,

$$u(\xi) = B_0 + B_1\varphi + B_2\varphi^2, B_1, B_2 \neq 0 \quad (3.29)$$

Oluşan bu denklem, denklem (2.20)'de yerine yazıldıktan sonra  $\varphi^k$  fonksiyonları düzenlenir. Düzenlenen fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır ve aşağıdaki cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k^2B_0^2\chi_2 + B_0(hk + k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) &= 0, \\ k^2B_1B_2\chi_2 + 2hk^3\log(a)^2B_1\chi_3 - 10hk^3\log(a)^2B_2\chi_3 &= 0, \\ \frac{1}{2}k^2B_2^2\chi_2 + 6hk^3\log(a)^2B_2\chi_3 &= 0, \\ k^2B_0B_1\chi_2 + hk^3\log(a)^2B_1\chi_3 + B_1(hk + k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) &= 0, \\ \frac{1}{2}k^2B_1^2\chi_2 + k^2B_0B_2\chi_2 - 3hk^3\log(a)^2B_1\chi_3 \\ + 4hk^3\log(a)^2B_2\chi_3 + B_2(hk + k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5) &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde buradan  $B_0, B_1, B_2$  ve  $h$  değerleri için iki çözüm kümesi elde edilir.

#### Çözüm 1:

$$\begin{aligned} B_0 = 0, B_1 &= -\frac{12\text{Log}(a)^2\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1 + k^2\log(a)^2\chi_3)}, \\ B_2 &= \frac{12\text{Log}(a)^2\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\chi_2(1 + k^2\log(a)^2\chi_3)}, h = -\frac{k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5}{k + k^3\log(a)^2\chi_3} \end{aligned} \quad (3.31)$$

#### Küme 1:

$$u_{5,1} = -\frac{12a^{kx+wy+sz} \frac{t^{\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}}{\omega(k + k^3\text{Log}(a)^2\chi_3)} d\text{Log}(a)^2\chi_3(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}{\left( a \frac{t^{\omega(k^2\chi_1 + w^2\chi_4 + s^2\chi_5)}}{\omega(k + k^3\text{Log}(a)^2\chi_3)} + a^{kx+wy+sz}d \right)^2 \chi_2(1 + k^2\text{Log}(a)^2\chi_3)} \quad (3.32)$$

**Çözüm 2:**

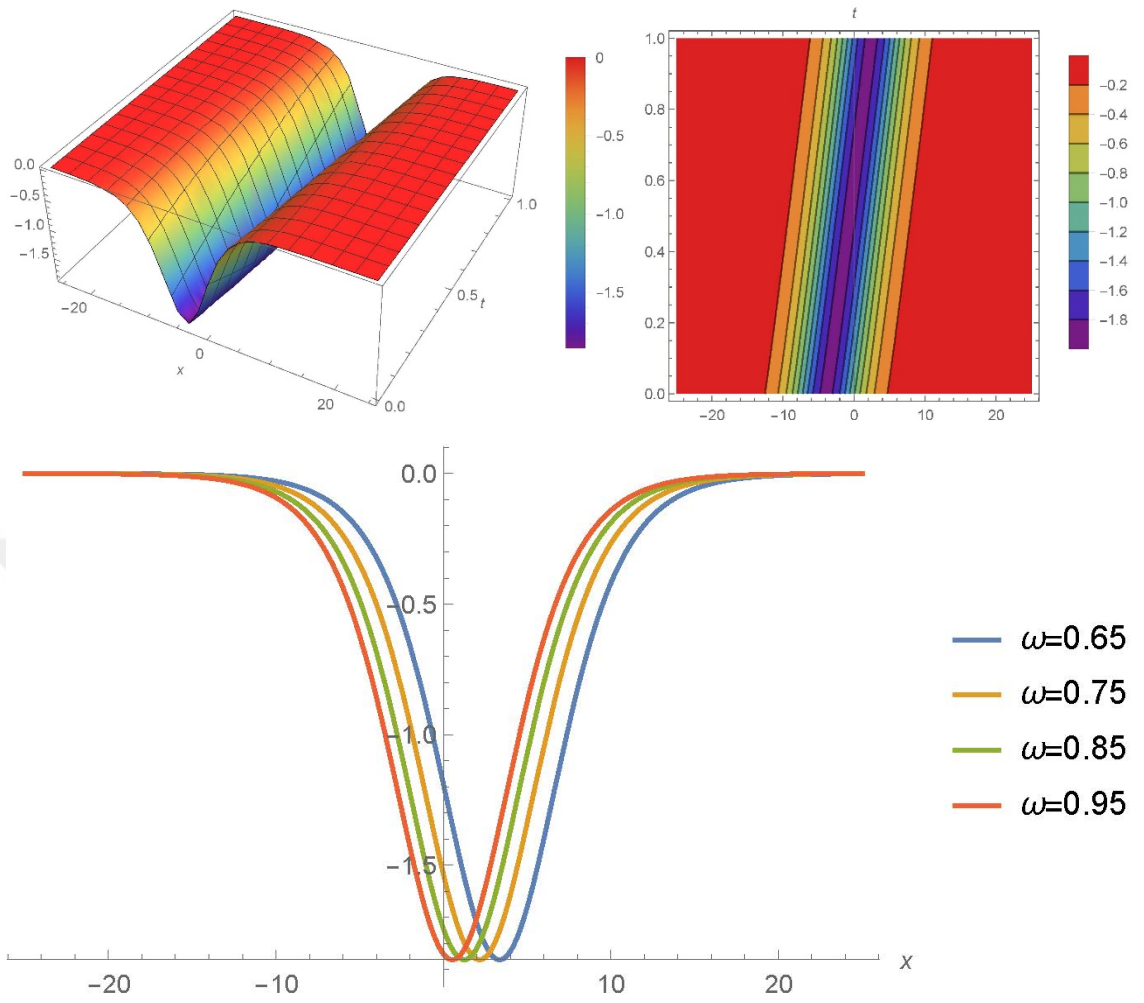
$$B_0 = -\frac{2\text{Log}(a)^2\chi_3(k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5)}{\chi_2(-1+k^2\text{Log}(a)^2\chi_3)}, B_1 = \frac{12\text{Log}(a)^2\chi_3(k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5)}{\chi_2(-1+k^2\text{Log}(a)^2\chi_3)},$$

$$B_2 = -\frac{12\text{Log}(a)^2\chi_3(k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5)}{\chi_2(-1+k^2\text{Log}(a)^2\chi_3)}, h = -\frac{k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5}{k-k^3\text{Log}(a)^2\chi_3} \quad (3.33)$$

**Küme 2:**

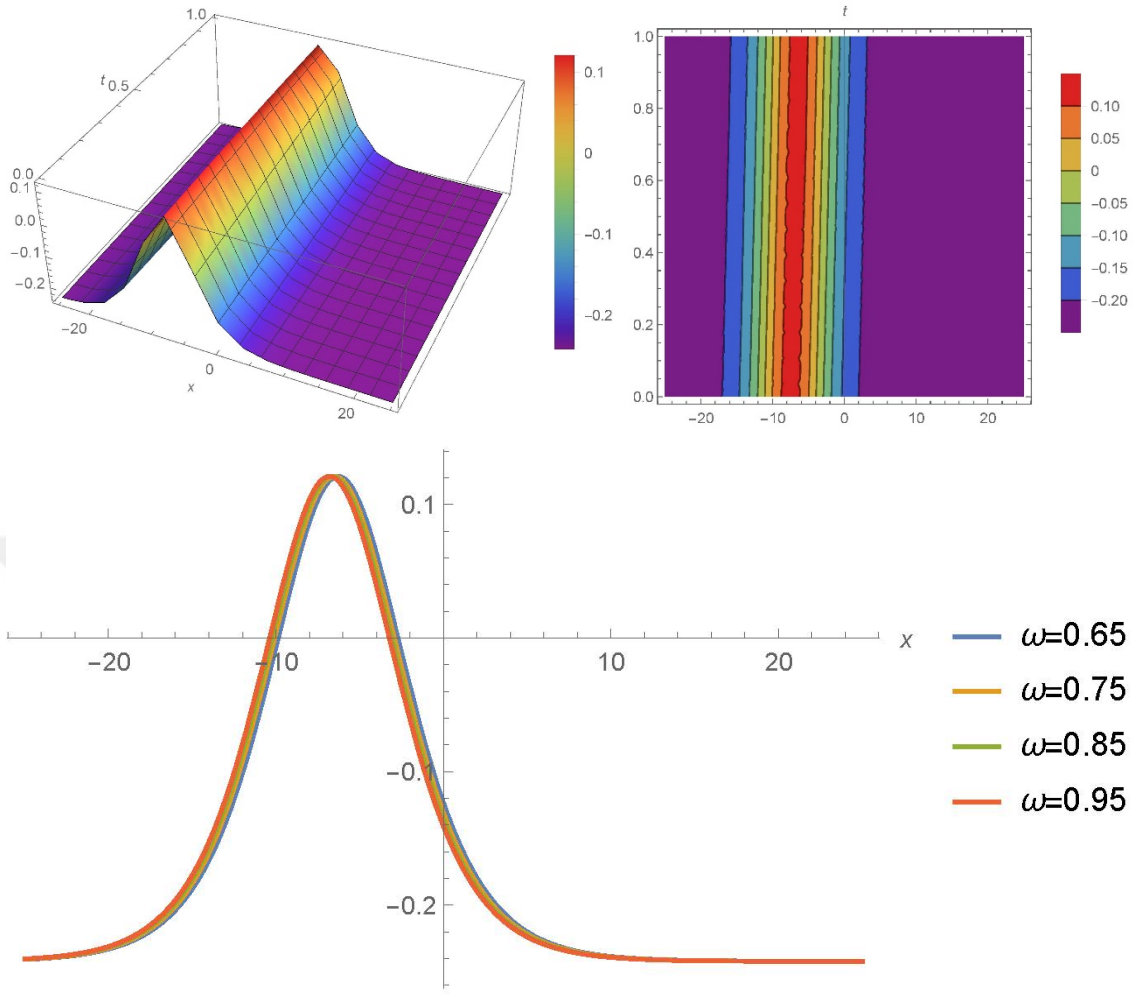
$$u_{5,2} = -\frac{2\text{Log}(a)^2\chi_3(k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5)}{\chi_2(-1+k^2\text{Log}(a)^2\chi_3)}$$

$$+ \frac{12a^{kx+wy+sz+\frac{t^\omega(k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5)}{\omega(k-k^3\text{Log}(a)^2\chi_3)}} d\text{Log}(a)^2\chi_3(k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5)}{\left(a^{\frac{t^\omega(k^2\chi_1+w^2\chi_4+s^2\chi_5)}{\omega(k-k^3\text{Log}(a)^2\chi_3)}} + a^{kx+wy+sz}d\right)^2 \chi_2(-1+k^2\text{Log}(a)^2\chi_3)} \quad (3.34)$$



Şekil 3.5. Denklem (3.32)'de elde edilen  $u_{5,1}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 0.18$ ,  $w = 0.16$ ,  $s = 0.5$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ ,  $\chi_1 = 0.85$ ,  $\chi_2 = 0.45$ ,  $\chi_3 = 0.27$ ,  $\chi_4 = 0.55$ ,  $\chi_5 = 0.65$ ,  $d = 0.9$ ,  $a = 0.1$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği.





Şekil 3.6. Denklem (3.34)'te elde edilen  $u_{5,2}(x, y, z, t)$ 'in  $k = 0.16$ ,  $w = -0.2$ ,  $s = -0.4$ ,  $y = 0.3$ ,  $z = 0.1$ ,  $\chi_1 = -0.55$ ,  $\chi_2 = 0.45$ ,  $\chi_3 = -0.36$ ,  $\chi_4 = 0.5$ ,  $\chi_5 = 0.15$ ,  $d = 0.05$ ,  $a = 0.1$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği.

### 3.2. Yeni Genişletilmiş (2+1)-Boyutlu Kadomtsev–Petviashvili (KP) Denklemi

Şimdi ise yeni genişletilmiş (2+1)-boyutlu Kadomtsev–Petviashvili (KP) denklemi için yeni analitik çözümler incelenecektir. Kadomtsev–Petviashvili denklemi, dalga hareketlerinin davranışını açıklamak için kullanılan bir matematiksel modeldir. Bu denklem, lineer olmayan bir parçacık dalgası olarak da adlandırılan solitonların davranışını açıklamak için kullanılır. Solitonlar, dalga hareketinin kütle, enerji ve momentumunu koruyan özel bir tür dalga hareketidir.

Yeni genişletilmiş (2+1)-boyutlu KP denklemi, iki uzaysal boyut ve bir zamansal boyut içeren bir denklemdir. Bu denklem, dalga boyları ve dalga yükseklikleri gibi çeşitli parametrelerin hareketini açıklamak için kullanılır. Denklem şu şekildedir [28].

$$au_{xt} - \frac{a^4 - 6a^2b^2 + b^4}{16}u_{xxxx} - \left(\frac{3(b^2 - a^2)}{4}\right)(u^2)_{xx} + \alpha u_{xx} + \beta u_{xy} + \eta u_{yy} = 0 \quad (3.35)$$

Burada  $u$ , dalga yüksekliğini belirleyen bir fonksiyondur.  $x, y$  ve  $t$ , sırasıyla uzaysal ve zamansal değişkenleri temsil eder. Bu denklemin uyumlu kesirli türev versiyonu şu şekilde yazılır,

$$aD_t^\omega u_x - \frac{a^4 - 6a^2b^2 + b^4}{16}u_{xxxx} - \left(\frac{3(b^2 - a^2)}{4}\right)(u^2)_{xx} + \alpha u_{xx} + \beta u_{xy} + \eta u_{yy} = 0 \quad (3.36)$$

$0 < \omega \leq 1$ ,  $u(x, y, z, t) = u(\xi)$  ve  $\xi = kx + wy + sz + h\frac{t^\omega}{\omega}$  dönüşümlerini yaptıktan sonra bir kez integral alarak,

$$cu + 3(-k + s + w)u^2 + (-k^3 - 3k^2(s - w) + (s + w)^3 + 3k(s^2 - 2sw - w^2))u'' = 0 \quad (3.37)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu indirgeme sonucunda oluşan  $u''$  ve  $u^2$  terimleri arasında dengeleme yapılır. Dengeleme bağıntısı  $M + 2 = 2M$  olup bu bağıntı çözüldüğünde dengeleme sayısı  $M = 2$  olarak bulunur. Bulunan bu değer Modifiye Edilmiş Kudryashov metodundaki kesik seriye uygulandığında ve belirli prosedürlerle

Modifiye Edilmiş Kudryashov metodundan analitik çözümler elde edilir. Oluşan çözümlerden herhangi birini alarak RKS metodu için bir başlangıç şartı kabul edilir. Daha sonra belirli prosedürlerle RKS metodu uygulanır ve nümerik çözümler elde edilir.

### 3.2.1. Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu ile Analitik Çözüm

$M = 2$  değeri denklem (2.19)'da yerine yazıldığında kesik seri şu şekilde olacaktır,  
 $u(\xi) = B_0 + B_1\varphi + B_2\varphi^2$ ,  $B_1, B_2 \neq 0$  (3.38)

Oluşan bu ifade, denklem (2.20)'de yerine yazıldıktan sonra  $\varphi^k$  fonksiyonları düzenlenir. Düzenlenen bu fonksiyonların katsayıları birer denklem olarak tanımlanır ve aşağıdaki cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

$$\begin{aligned}
& ahkB_0 + k^2\alpha B_0 + kw\beta B_0 + w^2\eta B_0 + \frac{3}{4}a^2k^2B_0^2 - \frac{3}{4}b^2k^2B_0^2 = 0, \\
& ahkB_1 + k^2\alpha B_1 + kw\beta B_1 + w^2\eta B_1 - \frac{1}{16}a^4k^4\log(\vartheta)^2B_1 + \frac{3}{8}a^2b^2k^4\log(\vartheta)^2B_1 \\
& - \frac{1}{16}b^4k^4\log(\vartheta)^2B_1 + \frac{3}{2}a^2k^2B_0B_1 - \frac{3}{2}b^2k^2B_0B_1 = 0, \\
& \frac{3}{16}a^4k^4\log(\vartheta)^2B_1 - \frac{9}{8}a^2b^2k^4\log(\vartheta)^2B_1 + \frac{3}{16}b^4k^4\log(\vartheta)^2B_1 + \frac{3}{4}a^2k^2B_1^2 \\
& - \frac{3}{4}b^2k^2B_1^2 + ahkB_2 + k^2\alpha B_2 + kw\beta B_2 + w^2\eta B_2 - \frac{1}{4}a^4k^4\log(\vartheta)^2B_2 \\
& + \frac{3}{2}a^2b^2k^4\log(\vartheta)^2B_2 - \frac{1}{4}b^4k^4\log(\vartheta)^2B_2 + \frac{3}{2}a^2k^2B_0B_2 - \frac{3}{2}b^2k^2B_0B_2 = 0, \\
& - \frac{1}{8}a^4k^4\log(\vartheta)^2B_1 + \frac{3}{4}a^2b^2k^4\log(\vartheta)^2B_1 - \frac{1}{8}b^4k^4\log(\vartheta)^2B_1 + \frac{5}{8}a^4k^4\log(\vartheta)^2B_2 \\
& - \frac{15}{4}a^2b^2k^4\log(\vartheta)^2B_2 + \frac{5}{8}b^4k^4\log(\vartheta)^2B_2 + \frac{3}{2}a^2k^2B_1B_2 - \frac{3}{2}b^2k^2B_1B_2 = 0, \\
& - \frac{3}{8}a^4k^4\log(\vartheta)^2B_2 + \frac{9}{4}a^2b^2k^4\log(\vartheta)^2B_2 - \frac{3}{8}b^4k^4\log(\vartheta)^2B_2 + \frac{3}{4}a^2k^2B_2^2 \\
& - \frac{3}{4}b^2k^2B_2^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde buradan  $B_0, B_1, B_2$  ve  $h$  için iki çözüm kümesi elde edilir.

**Çözüm 1:**

$$B_0 = 0, B_1 = -\frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{2(a^2 - b^2)}, B_2 = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{2(a^2 - b^2)},$$

$$h = \frac{-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2}{16ak} \quad (3.40)$$

**Küme 1:**

$$u_{6,1} = -\frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)dk^2 \vartheta^{kx+wy + \frac{t^\omega(-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)}{16ak\omega}} \log(\vartheta)^2}{2(a^2 - b^2) \left(1 + d\vartheta^{kx+wy + \frac{t^\omega(-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)}{16ak\omega}}\right)^2} \quad (3.41)$$

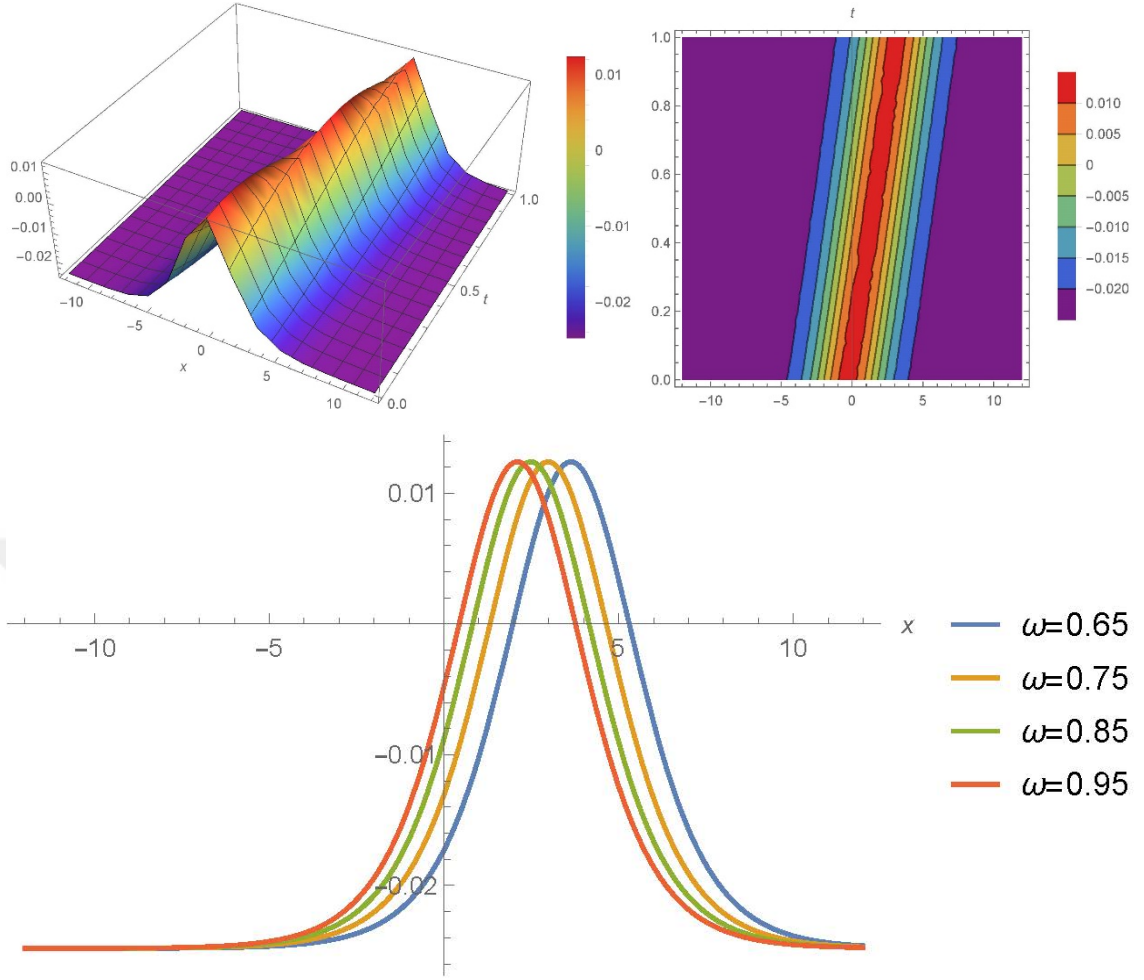
**Çözüm 2:**

$$B_0 = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{12(a^2 - b^2)}, B_1 = -\frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{2(a^2 - b^2)}, B_2 = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{2(a^2 - b^2)},$$

$$h = -\frac{16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2}{16ak} \quad (3.42)$$

**Küme 2:**

$$u_{6,2} = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{12(a^2 - b^2)} + \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{2(a^2 - b^2) \left(1 + d\vartheta^{kx+wy - \frac{t^\omega(16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)}{16ak\omega}}\right)^2} - \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{2(a^2 - b^2) \left(1 + d\vartheta^{kx+wy - \frac{t^\omega(16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)}{16ak\omega}}\right)} \quad (3.43)$$



Şekil 3.7. Denklem (3.43)'te elde edilen  $u_{6,2}(x, y, t)$ 'in  $k = 0.99$ ,  $w = 0.08$ ,  $y = 1.5$ ,  $d = 0.85$ ,  $\vartheta = 0.45$ ,  $a = 0.25$ ,  $b = 0.9$ ,  $\alpha = 0.75$ ,  $\beta = 0.65$ ,  $\eta = 0.55$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği.

### 3.2.2. Rezidual Kuvvet Seri Metodu ile Nümerik Çözüm

İlk olarak, yukarıda elde ettiğimiz Modifiye Edilmiş Kudryashov metodundaki analitik çözümlerden herhangi birine  $t = 0$  uygulayarak bir başlangıç koşulu dikkate alınmalıdır. Buradan denklem (3.41) için,

$$u_{6,1}(x, y, 0) = f(x, y) = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{2(a^2 - b^2)(1 + d\vartheta^{kx+wy})^2} - \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^2 \log(\vartheta)^2}{2(a^2 - b^2)(1 + d\vartheta^{kx+wy})} \quad (3.44)$$

şeklinde bir başlangıç şartı elde edilir. Uyumlu yeni genişletilmiş (2+1)-boyutlu KP ,

$$aD_t^\omega u_x - \frac{a^4 - 6a^2b^2 + b^4}{16} u_{xxxx} - \left( \frac{3(b^2 - a^2)}{4} \right) (u^2)_{xx} + \alpha u_{xx} + \beta u_{xy} + \eta u_{yy} = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 < \omega \leq 1 \quad (3.45)$$

denklemini için RKSM çözümü, denklem (2.26) şeklindedir. Kesirli denklemin  $k$ -yüncü rezidual fonksiyonunun genel formu şu şekilde temsil edilebilir.

$$Res_k = \eta(u_k)_{yy} + t^{1-\omega} a(u_k)_{xt} + \beta(u_k)_{xy} + \alpha(u_k)_{xx} - \frac{3}{4}(-a^2 + b^2)(2(u_k)_x^2 + 2(u_k)(u_k)_{xx}) - \frac{1}{16}(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)(u_k)_{xxxx} \quad (3.46)$$

Buradan,  $u_k = u_k(x, y, t)$  olmak üzere, birinci RKSM nümerik çözümü için  $Res_k$  ve  $u_k(x, y, t)$  ifadelerine  $k = 1$  yazılmalıdır, yani  $Res_1$  ifadesini belirlemek için  $u_1(x, y, t)$  yerine yazıldığında,

$$Res_1 = \eta \left( f_{yy} + \frac{t^\omega (f_1)_{yy}}{\omega} \right) + a(f_1)_x + \beta \left( f_{xy} + \frac{t^\omega (f_1)_{xy}}{\omega} \right) + \alpha \left( f_{xx} + \frac{t^\omega (f_1)_{xx}}{\omega} \right) - \frac{3}{4}(-a^2 + b^2) \left( 2 \left( (f)_x + \frac{t^\omega (f_1)_x}{\omega} \right)^2 + 2 \left( f + \frac{t^\omega f_1}{\omega} \right) \left( f_{xx} + \frac{t^\omega (f_1)_{xx}}{\omega} \right) \right) - \frac{1}{16}(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) \left( f_{xxxx} + \frac{t^\omega (f_1)_{xxxx}}{\omega} \right) \quad (3.47)$$

elde edilir. Burada  $f = f(x, y)$  ve  $f_1 = f_1(x, y)$ 'dir.  $t = 0$  ve denklem (3.44) başlangıç şartı yerine yazılırsa  $Res_1 = 0$  eşitliğinden  $f_1 = f_1(x, y)$  değeri şu şekilde elde edilir.

$$f_1 = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)dk\log\vartheta^{3+kx+wy}}{32(a^3 - ab^2)(1 + d\vartheta^{kx+wy})^3} \\ \times (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4\log\vartheta^2)(-1 + d\vartheta^{kx+wy}) \quad (3.48)$$

Dolayısıyla  $u_1 = u_1(x, y, t)$  şu şekilde olur,

$$u_1 = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)dk\vartheta^{kx+wy}\log(\vartheta)^2}{32a(a-b)(a+b)(1 + d\vartheta^{kx+wy})^3\omega} \times (-16ak(1 + d\vartheta^{kx+wy})\omega \\ + t^\omega(-1 + d\vartheta^{kx+wy})\log(\vartheta)(-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) \\ + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4\log(\vartheta)^2)) \quad (3.49)$$

Böylece birinci RKSM nümerik değeri bulunmuş olur. Benzer şekilde  $k = 2$  için  $Res_2$  şu şekilde olur,

$$Res_2 = \eta \left( f_{yy} + \frac{t^\omega(f_1)_{yy}}{\omega} + \frac{t^{2\omega}(f_2)_{yy}}{2\omega^2} \right) + at^{1-\omega} \left( t^{-1+\omega}(f_1)_x + \frac{t^{-1+2\omega}(f_2)_x}{\omega} \right) \\ + \beta \left( (f)_{xy} + \frac{t^\omega(f_1)_{xy}}{\omega} + \frac{t^{2\omega}(f_2)_{xy}}{2\omega^2} \right) + \alpha \left( (f)_{xx} + \frac{t^\omega(f_1)_{xx}}{\omega} + \frac{t^{2\omega}(f_2)_{xx}}{2\omega^2} \right) \\ - \frac{3}{4}(-a^2 + b^2) \left( 2 \left( (f)_x + \frac{t^\omega(f_1)_x}{\omega} + \frac{t^{2\omega}(f_2)_x}{2\omega^2} \right)^2 + 2 \left( f + \frac{t^\omega f_1}{\omega} + \frac{t^{2\omega} f_2}{2\omega^2} \right) \left( (f)_{xx} + \frac{t^\omega(f_1)_{xx}}{\omega} + \frac{t^{2\omega}(f_2)_{xx}}{2\omega^2} \right) \right) \\ - \frac{1}{16}(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) \left( (f)_{xxxx} + \frac{t^\omega(f_1)_{xxxx}}{\omega} + \frac{t^{2\omega}(f_2)_{xxxx}}{2\omega^2} \right) \quad (3.50)$$

Burada  $f = f(x, y)$ ,  $f_1 = f_1(x, y)$  ve  $f_2 = f_2(x, y)$ 'dir.  $t = 0$ , (3.44) başlangıç şartı ve  $f_1$  denklemde yerine yazılırsa  $Res_2 = 0$  eşitliğinden  $f_2 = f_2(x, y)$  şu şekilde elde edilir.

$$f_2 = - \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)d\vartheta^{kx+wy}(1 + d\vartheta^{kx+wy}(-4 + d\vartheta^{kx+wy}))}{512a^2(a-b)(a+b)(1 + d\vartheta^{kx+wy})^4} \\ \times \log(\vartheta)^4(-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4\log(\vartheta)^2)^2 \quad (3.51)$$

Sonuç olarak  $u_2 = u_2(x, y, t)$  şu şekilde bulunur.

$$u_2 = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)d\vartheta^{kx+wy}\log(\vartheta)^2}{1024(a-b)(a+b)(1 + d\vartheta^{kx+wy})^4} \times (-512(k + dk\vartheta^{kx+wy})^2 \\ - \frac{t^\omega\log(\vartheta)(-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4\log(\vartheta)^2)}{a^2\omega^2}) \\ \times (-32ak(-1 + d^2\vartheta^{2(kx+wy)})\omega)$$

$$-t^\omega \left( 1 + d\vartheta^{kx+wy} (-4 + d\vartheta^{kx+wy}) \right) \times \frac{\log(\vartheta) (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)}{a^2\omega^2} \quad (3.52)$$

Bu ise ikinci RKSM nümerik değeridir. Benzer şekilde aynı prosedür uygulanmaya devam edilirse,  $k = 3$  ve  $k = 4$  için  $f_3 = f_3(x, y)$  ve  $f_4 = f_4(x, y)$  değerleri,

$$f_3 = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)d\vartheta^{kx+wy}(-1 + d\vartheta^{kx+wy})(1 + d\vartheta^{kx+wy}(-10 + d\vartheta^{kx+wy}))}{8192a^3(a-b)(a+b)k(1 + d\vartheta^{kx+wy})^5} \times \log(\vartheta)^5 (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)^3 \quad (3.53)$$

$$f_4 = -\frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)d\vartheta^{kx+wy}}{131072a^4(a-b)(a+b)k^2(1 + d\vartheta^{kx+wy})^6} \times \left( 1 + d\vartheta^{kx+wy} \left( -26 + d\vartheta^{kx+wy} \left( 66 + d\vartheta^{kx+wy} (-26 + d\vartheta^{kx+wy}) \right) \right) \right) \times \log(\vartheta)^6 (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)^4 \quad (3.54)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda  $u_3 = u_3(x, y, t)$  ve  $u_4 = u_4(x, y, t)$  şu şekilde olur.

$$u_3 = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)d\vartheta^{kx+wy} \log(\vartheta)^2}{49152(a-b)(a+b)k(1 + d\vartheta^{kx+wy})^5} \times (-24576(k + dk\vartheta^{kx+wy})^3 + \frac{1}{a^3\omega^3} t^\omega \log(\vartheta) (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2) \times (1536a^2k^2(-1 + d\vartheta^{kx+wy})(1 + d\vartheta^{kx+wy})^2\omega^2 + t^\omega \log(\vartheta) (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2) (-48ak(1 + d\vartheta^{kx+wy}) \times (1 + d\vartheta^{kx+wy}(-4 + d\vartheta^{kx+wy}))\omega + t^\omega(-1 + d\vartheta^{kx+wy})(1 + d\vartheta^{kx+wy}(-10 + d\vartheta^{kx+wy})) \times \log(\vartheta) (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)))) \quad (3.55)$$

$$u_4 = \frac{(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) \log(\vartheta)^2}{3145728(1 + d\vartheta^{kx+wy})^6} \times \frac{1572864k^2(1 + d\vartheta^{kx+wy})^4}{a^2 - b^2} - \frac{1572864k^2(1 + d\vartheta^{kx+wy})^5}{a^2 - b^2}$$



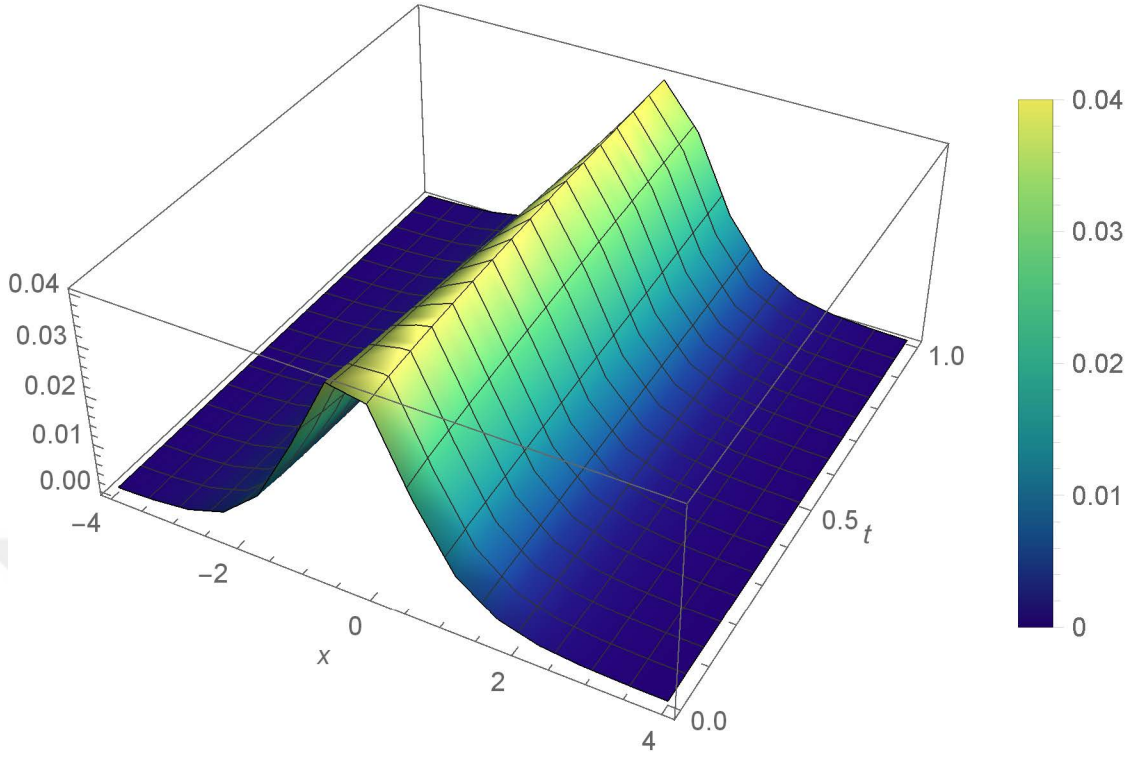
$$\begin{aligned}
& + \frac{98304dkt^\omega \vartheta^{kx+wy} (-1 + d\vartheta^{kx+wy})(1 + d\vartheta^{kx+wy})^3 \log(\vartheta)}{(a^3 - ab^2)\omega} \\
& \times (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2) \\
& - \frac{3072dt^{2\omega} \vartheta^{kx+wy} (1 + d\vartheta^{kx+wy})^2 (1 + d\vartheta^{kx+wy}(-4 + d\vartheta^{kx+wy}))}{a^2(a-b)(a+b)\omega^2} \\
& \times \log(\vartheta)^2 (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)^2 \\
& + \frac{64dt^{3\omega} \vartheta^{kx+wy} (-1 + d\vartheta^{kx+wy})(1 + d\vartheta^{kx+wy})(1 + d\vartheta^{kx+wy}(-10 + d\vartheta^{kx+wy}))}{a^3(a-b)(a+b)k\omega^3} \\
& \times \log(\vartheta)^3 (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)^3 \\
& - \frac{dt^{4\omega} \vartheta^{kx+wy} \left( 1 + d\vartheta^{kx+wy} \left( -26 + d\vartheta^{kx+wy} \left( 66 + d\vartheta^{kx+wy} (-26 + d\vartheta^{kx+wy}) \right) \right) \right)}{a^4(a-b)(a+b)k^2\omega^4} \\
& \times \log(\vartheta)^4 (-16(k^2\alpha + kw\beta + w^2\eta) + (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)k^4 \log(\vartheta)^2)^4 \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Böylece üçüncü ve dördüncü RKSM nümerik değerleri elde edilmiş olur.

Aşağıda, (2+1)-boyutlu KP denkleminin RKS metodu ile elde edilen nümerik çözümleri, analitik çözümlerle karşılaştırılacaktır. Bu nümerik çözümleri bulmak için MATHEMATICA bilgisayar programı kullanılmıştır. Tablo 1,  $\omega$ 'nın farklı değerleri için RKS metodu ile elde edilen  $u_4 = u_4(x, y, t)$  nümerik çözümünün analitik çözümle karşılaştırılması ve elde edilen mutlak hatalar verilmiştir.

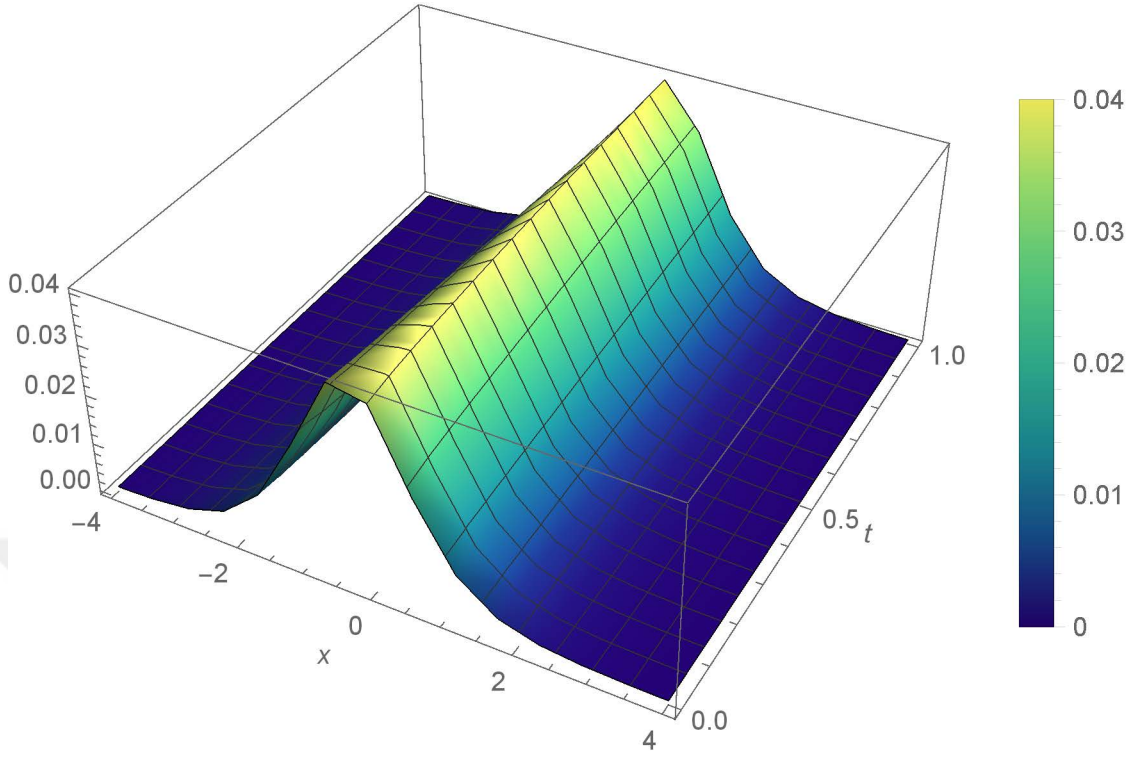
Tablo 3.1. Farklı  $\omega$  değerlerine göre (3.56) denkleminin nümerik çözümü, analitik çözümü ve bu iki çözümün karşılaştırılması sonucunda oluşan mutlak hatanın değerlerinin tablosu

$t$	$\omega = 0.75$			$\omega = 0.85$			$\omega = 0.95$		
	$u_4(x, y, t)$	ANALİTİK ÇÖZÜM	MUTLAK HATA	$u_4(x, y, t)$	ANALİTİK ÇÖZÜM	MUTLAK HATA	$u_4(x, y, t)$	ANALİTİK ÇÖZÜM	MUTLAK HATA
0	0.0016639	0.00166392	5.63785E-18	0.00166392	0.00166392	5.63785E-18	0.0016639	0.00166392	5.63785E-18
0.1	0.0018647	0.0018647	1.20841E-10	0.00180229	0.00180229	2.04846E-11	0.0017611	0.00176114	3.71997E-12
0.2	0.0020149	0.00201495	1.61625E-9	0.00192139	0.00192139	3.88026E-10	0.0018567	0.00185672	9.97532E-11
0.3	0.0021563	0.00215632	7.34932E-9	0.00203828	0.00203828	2.16374E-9	0.0019546	0.00195469	6.81894E-10
0.4	0.0022945	0.0022946	2.14814E-8	0.00215574	0.00215575	7.31172E-9	0.0020559	0.00205591	2.66307E-9
0.5	0.0024321	0.00243221	4.92772E-8	0.00227502	0.00227504	1.87743E-8	0.0021608	0.00216086	7.65159E-9
0.6	0.0025703	0.00257045	9.69625E-8	0.00239685	0.00239689	4.05137E-8	0.0022698	0.00226987	1.81025E-8
0.7	0.0027099	0.00271013	1.71605E-7	0.00252172	0.00252179	7.7531E-8	0.0023831	0.00238323	3.74486E-8
0.8	0.0028515	0.0028518	2.81005E-7	0.00264998	0.00265012	1.35867E-7	0.0025011	0.0025012	7.02113E-8
0.9	0.0029954	0.00299588	4.33593E-7	0.00278194	0.00278216	2.22586E-7	0.0026238	0.00262401	1.22094E-7
1	0.0031420	0.00314269	6.38324E-7	0.00291784	0.00291818	3.45749E-7	0.0027517	0.00275191	2.00052E-7



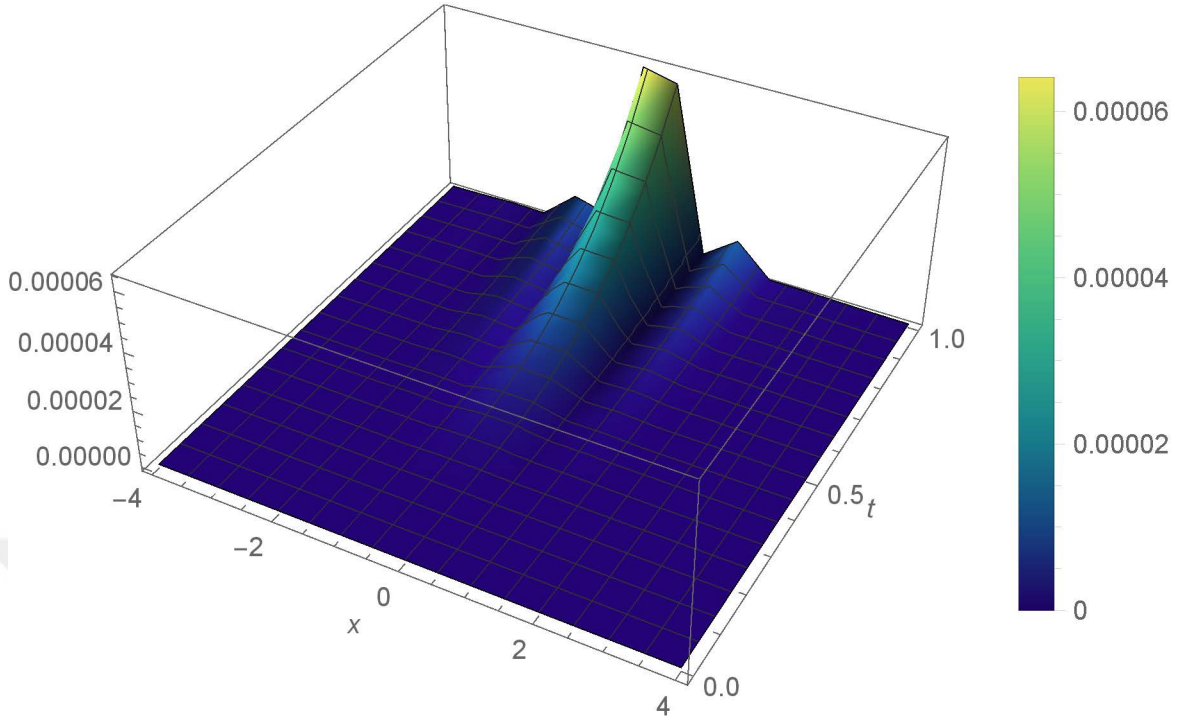
$$u_4(x, y, t)$$

Şekil 3.8. Denklem (3.56)'da elde edilen  $u_4(x, y, t)$ 'in  $k = 0.99$ ,  $w = 0.05$ ,  $y = 1$ ,  $d = 0.6$ ,  $\vartheta = 0.15$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.39$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\eta = 0.8$  ve  $\omega = 0.75$  değerleri için nümerik çözüm grafiği.



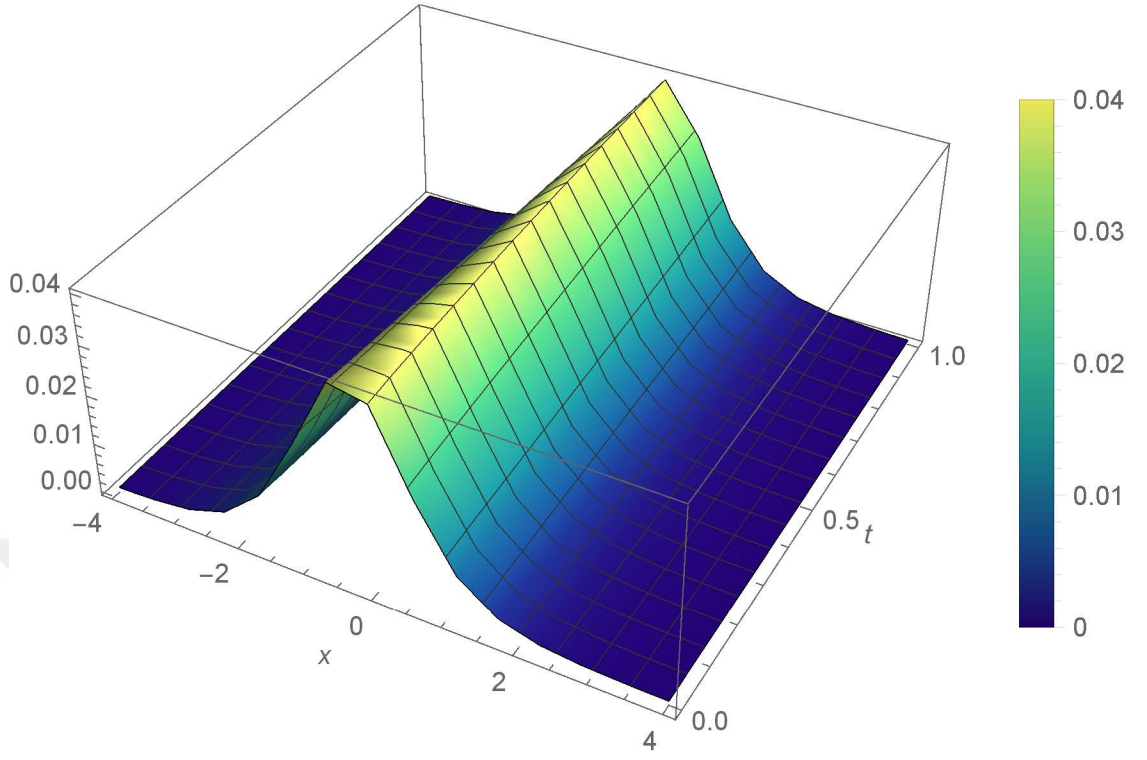
### ANALİTİK ÇÖZÜM

Şekil 3.9. Denklem (3.40)'ta elde edilen  $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in  $k = 0.99$ ,  $w = 0.05$ ,  $y = 1$ ,  $d = 0.6$ ,  $\vartheta = 0.15$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.39$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\eta = 0.8$  ve  $\omega = 0.75$  değerleri için analitik çözüm grafiği.



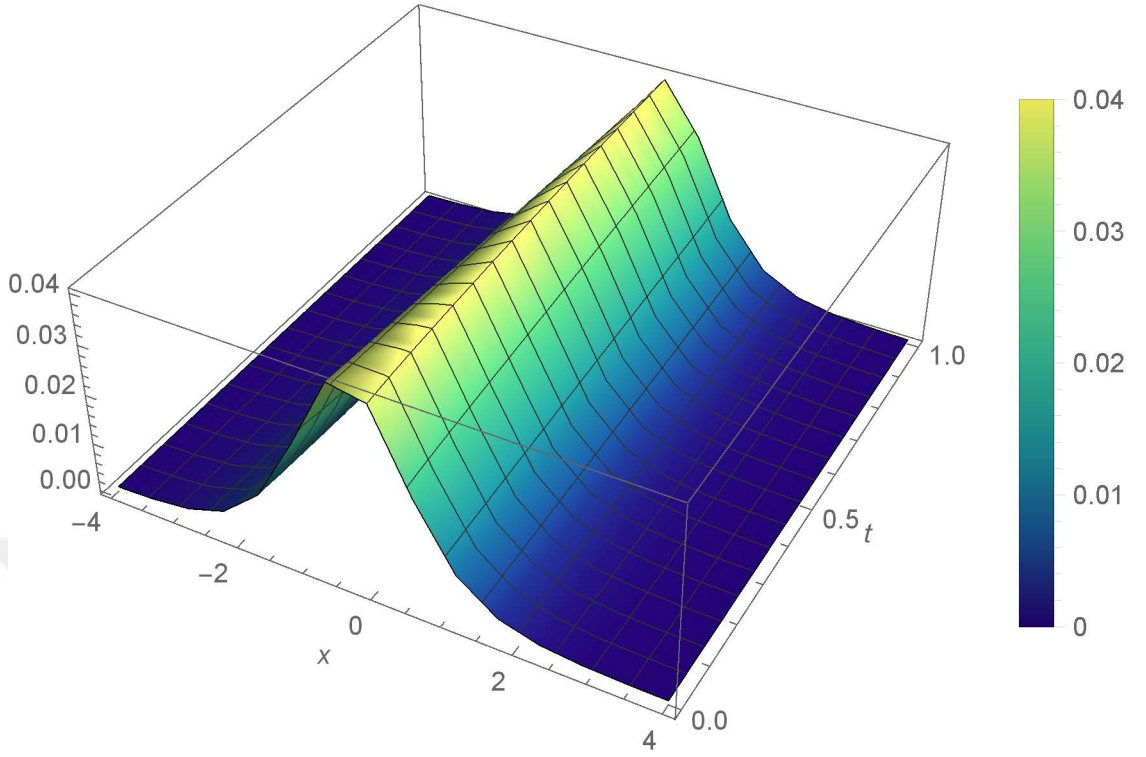
### MUTLAK HATA

Şekil 3.10. Denklem (3.56) ve (3.40)'ta elde edilen  $u_4(x, y, t)$  ve  $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in farkının  $k = 0.99$ ,  $w = 0.05$ ,  $y = 1$ ,  $d = 0.6$ ,  $\vartheta = 0.15$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.39$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\eta = 0.8$  ve  $\omega = 0.75$  değerlerine göre mutlak hata grafiği.



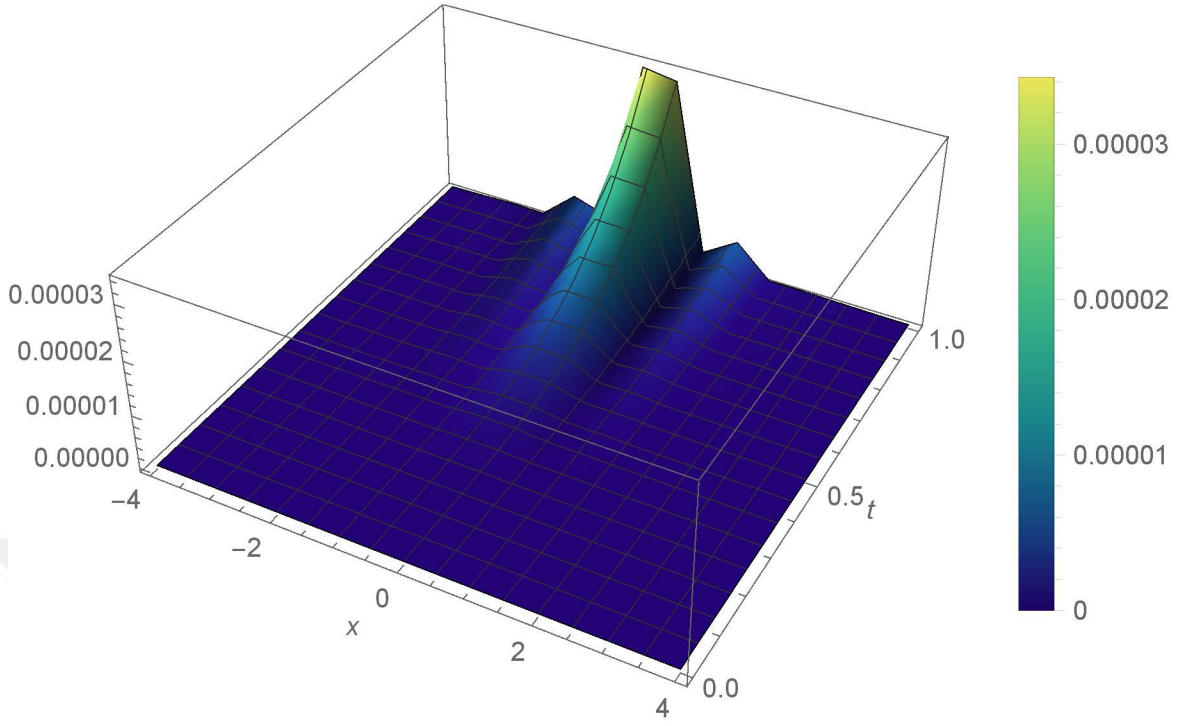
$$u_4(x, y, t)$$

Şekil 3.11. Denklem (3.56)'da elde edilen  $u_4(x, y, t)$ 'in  $k = 0.99$ ,  $w = 0.05$ ,  $y = 1$ ,  $d = 0.6$ ,  $\vartheta = 0.15$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.39$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\eta = 0.8$  ve  $\omega = 0.85$  değerleri için nümerik çözüm grafiği.



### ANALİTİK ÇÖZÜM

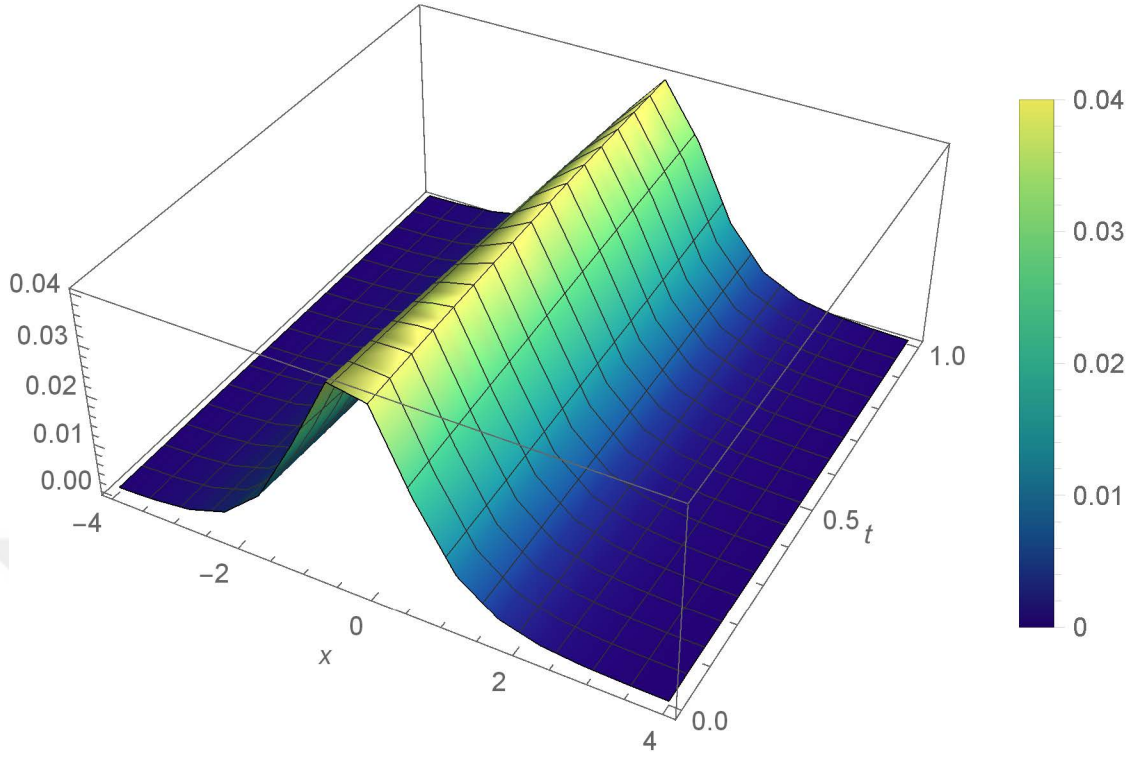
Şekil 3.12. Denklem (3.40)'ta elde edilen  $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in  $k = 0.99$ ,  $w = 0.05$ ,  $y = 1$ ,  $d = 0.6$ ,  $\vartheta = 0.15$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.39$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\eta = 0.8$  ve  $\omega = 0.85$  değerleri için analitik çözüm grafiği.



### MUTLAK HATA

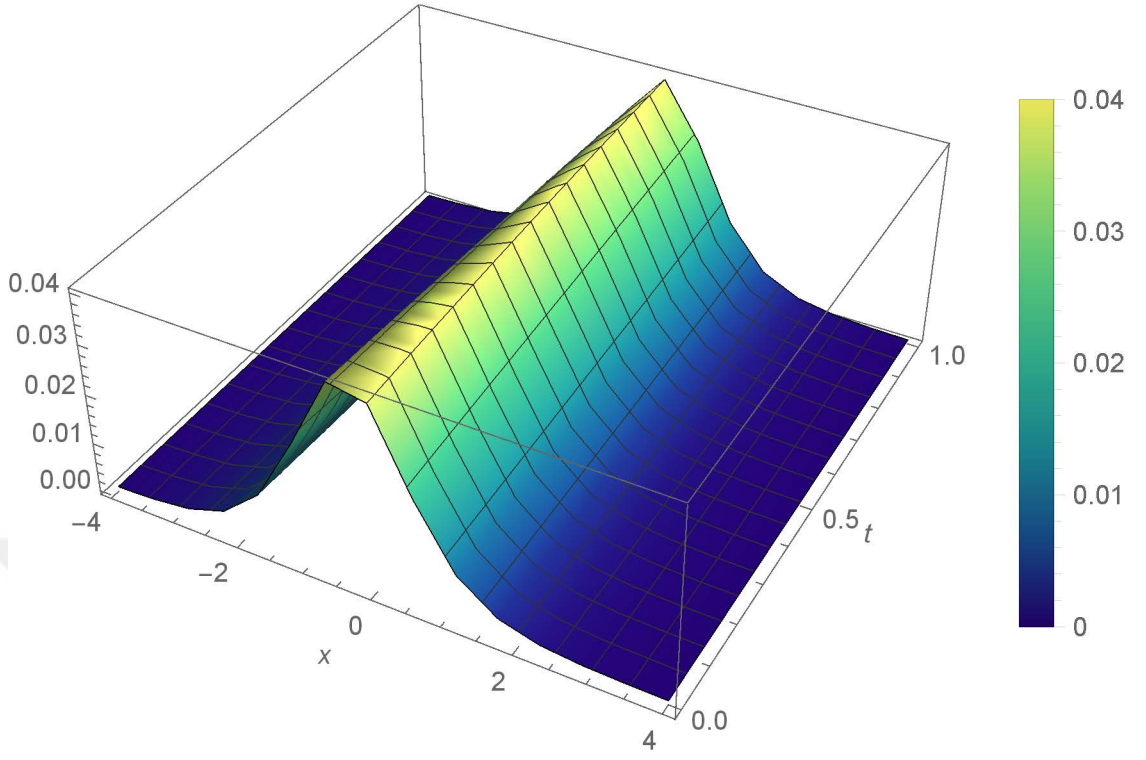
Şekil 3.13. Denklem (3.56) ve (3.40)'ta elde edilen  $u_4(x, y, t)$  ve  $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in farkının  $k = 0.99$ ,  $w = 0.05$ ,  $y = 1$ ,  $d = 0.6$ ,  $\vartheta = 0.15$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.39$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\eta = 0.8$  ve  $\omega = 0.85$  değerlerine göre mutlak hata grafiği.





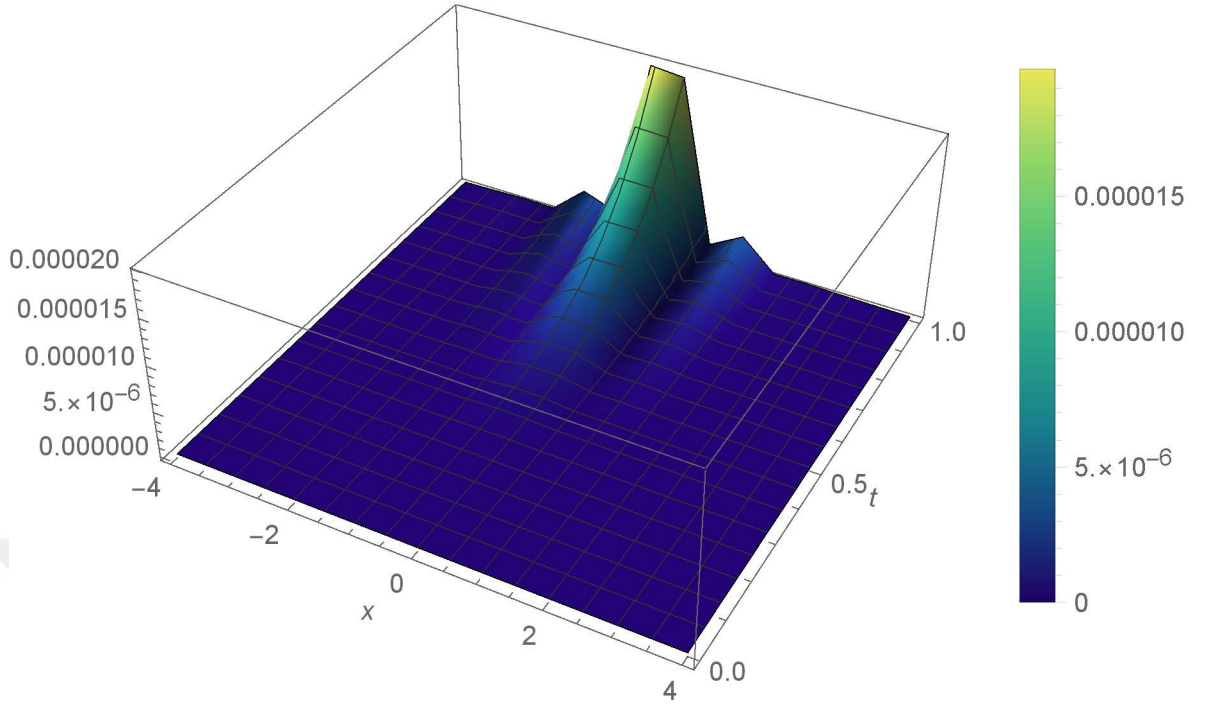
$$u_4(x, y, t)$$

Şekil 3.14. Denklem (3.56)'da elde edilen  $u_4(x, y, t)$ 'in  $k = 0.99$ ,  $w = 0.05$ ,  $y = 1$ ,  $d = 0.6$ ,  $\vartheta = 0.15$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.39$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\eta = 0.8$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için nümerik çözüm grafiği.



### ANALİTİK ÇÖZÜM

Şekil 3.15. Denklem (3.40)'te elde edilen  $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in  $k = 0.99$ ,  $w = 0.05$ ,  $y = 1$ ,  $d = 0.6$ ,  $\vartheta = 0.15$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.39$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\eta = 0.8$  ve  $\omega = 0.95$  değerleri için analitik çözüm grafiği.



### MUTLAK HATA

Şekil 3.16. Denklem (3.56) ve (3.40)'ta elde edilen  $u_4(x, y, t)$  ve  $u_{6,1}(x, y, t)$ 'in farkının  $k = 0.99$ ,  $w = 0.05$ ,  $y = 1$ ,  $d = 0.6$ ,  $\vartheta = 0.15$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.39$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\eta = 0.8$  ve  $\omega = 0.95$  değerlerine göre mutlak hata grafiği.

## 4. BÖLÜM

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tezinde, uyumlu türevli genelleştirilmiş (3+1)-boyutlu CHKP denklemi için Alt-Denklem, Genelleştirilmiş  $(G'/G)$ -Açılım ve Modifiye Edilmiş Kudryashov metotları uygulanarak yeni analitik çözümler elde edilmiştir. Denklem, sığ su yüzeylerindeki tek yönlü yayılımı olan yalıtık dalgaların yerçekimi kuvvetiyle oluşan etkileşimlerini ele almaktadır. Daha sonra, elde edilen bazı çözümlerin uygun değerler kullanılarak 3D, kontur ve 2D çizimleri fiziksel olarak oluşturulmuştur. Analitik bulgular ve grafiksel gösterimler, bu metotların doğru ve güvenilir olduğunu göstermiştir. Ayrıca, bu çözümler literatürde benzersiz olup daha önce yayınlanmamıştır. Elde edilen analitik çözümler, çalışılan modellerin fiziksel aktivitelerini yorumlamak ve uygulamalarının gerçek dünya problemlerinde nasıl kullanılabileceğini anlamak açısından önemlidir. Uygulanan metotların güçlü ve etkili olduğunu gösterilmiştir ve çeşitli doğrusal olmayan karmaşık modellerin fiziksel özelliklerini açıklamada önemli bir rol oynayabilirler. Bu nedenle, bu metotlar gelecekte bazı diğer kesirli doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılabilirler.

Ayrıca, sıvı dinamiği incelemesinde, sahil mühendisliğinin gelişimi, deniz suyu işgali ve birçok diğer konuda sığ su dalgaları önemli bir rol oynar. Bu çalışmada, sığ su dalga denklemi olarak ortaya çıkan ve yakın bir zamanda ortaya konan yeni genişletilmiş (2+1)-boyutlu KP denklemi ele alınmıştır. Modifiye Edilmiş Kudryashov metodunu uygulayarak, literatürde bulunmayan yeni birçok soliton dalga çözümleri elde edilmiştir. Denklem için iki çözüm kümesi halinde analitik çözümler bulunmuştur. Daha sonra, Rezidual Kuvvet Serisi Metodu (RKSM) kullanılarak, denklemin nümerik çözümleri hesaplanmıştır. Önerilen metotların geçerliliği ve etkinliğini göstermek için grafiksel gösterimler ve bir tablo sunulmuştur. Sonuçların, sıvı mekaniğinde KP denkleminin dinamik özelliklerinin anlaşılmasına yardımcı olacağı düşünülmektedir.

## KAYNAKÇA

- [1] Dokuyucu, M.A., “Kesirli mertebeden bir matematiksel modelin çözümü”, *Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s.2-6, Erzurum, 2017.
- [2] An, T. V., Phu, N. D., & Van Hoa, N. "The stabilization of uncertain dynamic systems involving the generalized Riemann-Liouville fractional derivative via linear state feedback control." *Fuzzy Sets and Systems* 472 (2023): 108697.
- [3] Agarwal, R. P., Hristova, S., & O'Regan, D. "Mittag-Leffler-Type Stability of BAM Neural Networks Modeled by the Generalized Proportional Riemann–Liouville Fractional Derivative." *Axioms* 12.6 (2023): 588.
- [4] Raslan, K. R., Ali, K. K., & Shallal, M. A."The modified extended tanh method with the Riccati equation for solving the space-time fractional EW and MEW equations." *Chaos, Solitons & Fractals* 103 (2017): 404-409.
- [5] Tuluçe Demiray, S., Pandir, Y., & Bulut, H. "Generalized Kudryashov method for time-fractional differential equations." *Abstract and applied analysis*. Vol. 2014. *Hindawi*, 2014.
- [6] Az-Zo'bi, E. A., Alzoubi, W. A., Akinyemi, L., Şenol, M., & Masaedeh, B. S."A variety of wave amplitudes for the conformable fractional (2+1)-dimensional Ito equation." *Modern Physics Letters B* 35.15 (2021): 2150254.
- [7] Zheng, B. "Exp-function method for solving fractional partial differential equations." *The Scientific World Journal* 2013 (2013).
- [8] Ray, S. S., & Sahoo, S."A novel analytical method with fractional complex transform for new exact solutions of time-fractional fifth-order Sawada-Kotera equation." *Reports on Mathematical Physics* 75.1 (2015): 63-72.
- [9] Şenol, M., Akinyemi, L., Nkansah, H., & Adel, W. "New solutions for four novel generalized nonlinear fractional fifth-order equations." *Journal of Ocean Engineering and Science* (2022).

- [10] Zayed, E. M., & Gepreel, K. A. "Some applications of the G' G-expansion method to non-linear partial differential equations." *Applied Mathematics and Computation* 212.1 (2009): 1-13.
- [11] Duan, J. S., Rach, R., Baleanu, D., & Wazwaz, A. M. "A review of the Adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations." *Communications in Fractional Calculus* 3.2 (2012): 73-99.
- [12] Abbasbandy, S., Hashemi, M. S., & Hashim, I. "On convergence of homotopy analysis method and its application to fractional integro-differential equations." *Quaestiones Mathematicae* 36.1 (2013): 93-105.
- [13] El-Tawil, M. A., & Huseen, S. N. "The q-homotopy analysis method (q-HAM)." *Int. J. Appl. Math. Mech* 8.15 (2012): 51-75.
- [14] Alquran, M. "Analytical solutions of fractional foam drainage equation by residual power series method." *Mathematical sciences* 8.4 (2014): 153-160.
- [15] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., & Sababheh, M. "A new definition of fractional derivative." *Journal of computational and applied mathematics* 264 (2014): 65-70.
- [16] Mirzazadeh, M., Akinyemi, L., Şenol, M., & Hosseini, K. "A variety of solitons to the sixth-order dispersive (3+1)-dimensional nonlinear time-fractional Schrödinger equation with cubic-quintic-septic nonlinearities." *Optik* 241 (2021): 166318.
- [17] Bektaş, A. "Lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri." *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, MS thesis*, 2022.
- [18] Akinyemi, L., Şenol, M., & Iyiola, O. S. "Exact solutions of the generalized multidimensional mathematical physics models via sub-equation method." *Mathematics and Computers in Simulation* 182 (2021): 211-233.

- [19] Abdeljawad, T. "On conformable fractional calculus." *Journal of computational and Applied Mathematics* 279 (2015): 57-66.
- [20] Malfliet, W. "Solitary wave solutions of nonlinear wave equations." *American journal of physics* 60.7 (1992): 650-654.
- [21] Gençyigit, M., Şenol, M., & Koksal, M. E. "Analytical solutions of the fractional (3+1)-dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation." *Computational Methods for Differential Equations* (2023).
- [22] Hosseini, K., Mayeli, P., & Ansari, R. "Modified Kudryashov method for solving the conformable time-fractional Klein–Gordon equations with quadratic and cubic nonlinearities." *Optik* 130 (2017): 737-742.
- [23] Nisar, K. S., Akinyemi, L., Inc, M., Şenol, M., Mirzazadeh, M., Houwe, A., Abbagari S. & Rezazadeh, H. "New perturbed conformable Boussinesq-like equation: soliton and other solutions." *Results in Physics* 33 (2022): 105200.
- [24] Kudryashov, N. A. "One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 17.6 (2012): 2248-2253.
- [25] Baskonus, H. M. "Bazı Lineer ve Lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri." *Diss. Doktora Tezi, FÜ Fen Bilimleri Enstitüsü*, s.2-3,Elazığ, 2014.
- [26] Şenol, M., Gençyigit, M., Ntiamoah, D., & Akinyemi, L. "New (3+1)-dimensional conformable KdV equation and its analytical and numerical solutions." *International Journal of Modern Physics B* (2023): 2450056.
- [27] Şenol, M., Gençyigit, M., & Sarwar, S. "Different solutions to the conformable generalized (3+1)-dimensional Camassa–Holm–Kadomtsev–Petviashvili equation arising in shallow-water waves." *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* (2023).

- [28] Wazwaz, A. M. "Painlevé integrability and lump solutions for two extended (3+1)- and (2+1)-dimensional Kadomtsev–Petviashvili equations." *Nonlinear Dynamics* 111.4 (2023): 3623-3632.

