T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN ÜÇ BOYUTLU SİMETRİK FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Tezi Hazırlayan
Ayfer ÇETE

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

OCAK 2023
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN ÜÇ BOYUTLU SİMETRİK FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Tezi Hazırlayan
Ayfer ÇETE

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

OCAK 2023
NEVŞEHİR

Prof. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında **Ayfer ÇETE** tarafından hazırlanan "**İkinci Mertebeden Üç Boyutlu Simetrik Fark Denklem Sisteminin Çözümleri ve Çözümlerinin Asimptotik Davranışı**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

19/01/2023

JÜRİ

Başkan :

Üye :

Üye :

ONAY:

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitü Yönetim Kurulunun………………….tarih ve…………….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

… / … / 2023

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ayfer ÇETE

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince ve tez çalışmam esnasında tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan Sayın Hocam Prof. Dr. Yasin YAZLIK'a,

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Zühre DOĞAN'a, babam Yaşar DOĞAN'e, değerli eşim Şerafettin ÇETE' ye,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına sonsuz teşekkür ederim.

İKİNCİ MERTEBEDEN ÜÇ BOYUTLU SİMETRİK FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

(Yüksek Lisans Tezi)

Ayfer ÇETE

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2023

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklem ve sistemlerinin önemi, uygulama alanı ve bu tezin amacına yer verilmiştir. İkinci bölümde, fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili literatür taraması verilmiştir. Dahası, fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili genel tanım ve teromlerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ parametreler ve $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, i \in \{1,2\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$x_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_{n-1}(\alpha + \beta y_{n-1}y_{n-2})},\ y_n = \frac{z_{n-1}z_{n-2}}{y_{n-1}(\gamma + \delta z_{n-1}z_{n-2})},\ z_n = \frac{x_{n-1}x_{n-2}}{z_{n-1}(\varepsilon + \zeta x_{n-1}x_{n-2})},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

üç boyutlu fark denklem sisteminin kapalı formda çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca verilen fark denklem sisteminin başlangıç koşullarının iyi tanımlı olmayan noktaların kümesine yer verilmiştir. Daha sonra elde edilen çözümleri kullanarak çözümlerin asimptotik davranışı incelenmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçların bazı nümerik uygulamaları verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Fark Denklem Sistemi, Asimptotik Davranış, Periyodiklik.

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Sayfa sayısı: 57

THE SOLUTIONS TO THE THREE-DIMENSIONAL SYMMETRIC SYSTEM OF DIFFERENCE EQUATION WITH SECOND-ORDER AND THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THEIR SOLUTIONS

(Ms Thesis)

Ayfer ÇETE

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATUREL AND APPLIED SCIENCES

January 2023

ABSTRACT

This study consists of four sections. In the first section, the importance of difference equations and system of difference equations, their application areas and the aim of this thesis are given. In the second section, the literature review on difference equations and systems of difference equations are given. Further, the general definitions and theorems about difference equations and systems of difference equations are mentioned. In the third section, the general solution of the three-dimensional system of difference equations

$$x_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_{n-1}(\alpha + \beta y_{n-1}y_{n-2})},\ y_n = \frac{z_{n-1}z_{n-2}}{y_{n-1}(\gamma + \delta z_{n-1}z_{n-2})},\ z_n = \frac{x_{n-1}x_{n-2}}{z_{n-1}(\varepsilon + \zeta x_{n-1}x_{n-2})},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

where $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ parameters and the initial values $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, i \in \{1,2\}$, are real numbers, is obtained in closed form. Also, the forbidden set of the initial values to system of difference equation is described. Later, the asymptotic behavior of solutions to system of difference equations is investigated by using the solutions obtained. In the last section, some numerical applications of obtained results are given.

Keywords: System of difference equation, Asymptotic behaviour, periodicity.

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Pages: 57

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
E	Kaydırma operatörü
I	Birim operatörü
Δ	İleri fark operatörü
Δ^{-1}	Ters fark operatörü
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{N}_0$	Doğal sayılar
$\mathbb{N}$	Sayma sayılar kümesi
$\sum$	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım sembolü
lim	Limit
O	Landau sembolü
$\forall$	Her

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Ayrık dinamik sistemler teorisi ve fark denklemleri, yirminci yüzyılın son yirmi beş yılından beri büyük ölçüde gelişti. Fark denklemlerinin uygulamaları da birçok alanda muazzam bir gelişim yaşadı. Ayrık dinamik sistemlerin birçok uygulaması ve fark denklemleri son zamanlarda biyoloji, ekonomi, fizik, kaynak yönetimi ve diğer alanlarda ortaya çıkmıştır. Bu yüzden fark denklemleri teorisi, uygulanabilir analizde merkezi bir konuma sahiptir. Hiç şüphe yok ki fark denklemleri teorisi bir bütün olarak matematikte önemli bir rol oynamaya devam edecektir. Mertebesi birden büyük olan lineer olmayan fark denklemleri, uygulamalarda büyük önem taşır. Doğal olarak bu tür denklemler ayrı analoglar olarak ve biyoloji, ekoloji, fizyoloji, fizik, mühendislik ve ekonomideki çeşitli farklı olguları modelleyen diferansiyel ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri olarak görünür.

Son zamanlarda, fark denklem sistemlerini çalışmakta büyük ilgi görmektedir. Bunun nedenlerinden biri, popülasyon biyolojisi, ekonomi, olasılık teorisi, genetik, psikoloji vb. alanlarda gerçek yaşam durumlarını açıklayan matematiksel modellerde ortaya çıkan denklemlerin incelenmesinde kullanılabilecek bazı tekniklere duyulan ihtiyaçtır. Bir diğer nedeni ise giderek daha fazla kullanılan sembolik hesaplamalar için bilgisayarların ve programların ortaya çıkması, çözülebilir fark denklemlerinin çalışılmasında yeni bir teşvik sağlamıştır. Bu yeni araştırma yöntemi, bazı avantajları, diğer şeylerin yanı sıra, matematiksel bir teori ile birleştirilmezse bazı problemler ortaya çıkabilir. Diğer yandan fark denklem ve fark denklem sisteminin çözülebilirlik teorisindeki ana fikir, somut bir fark denkleminin veya fark denklem sistemlerinin sınıfının genel çözümü için bazı formüller elde etmek ve bunlara dayanarak çözümlerinin davranışları hakkında bazı bilgiler elde etmektir.

1.1 Amaç ve Kapsam

Bu tez çalışmasının amacı, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ parametreler ve $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, i \in \{1,2\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$x_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_{n-1}(\alpha + \beta y_{n-1}y_{n-2})},\ y_n = \frac{z_{n-1}z_{n-2}}{y_{n-1}(\gamma + \delta z_{n-1}z_{n-2})},\ z_n = \frac{x_{n-1}x_{n-2}}{z_{n-1}(\varepsilon + \zeta x_{n-1}x_{n-2})},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin çözülebilir olduğu ve çözümlerin kapalı formda elde edilebileceğini göstermektir. Dahası elde edilen çözümlerin de asimptotik davranışını incelemektir.

BÖLÜM 2

2.1. Kaynak Araştırması

Bu bölümde fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili literatür de yapılmış olan çalışmalarından bahsedilecektir.

Chatterjee, Grove, Kostrov ve Ladas (2003), *"On the trichotomy character of* $x_{n+1}=\dfrac{\alpha+\gamma x_{n-1}}{A+Bx_n+x_{n-2}}$*"* isimli çalışmalarında $\alpha,\ \gamma,\ A$ ve B parametreler $x_{-2},\ x_{-1},\ x_0$ başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha+\gamma x_{n-1}}{A+Bx_n+x_{n-2}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin çözümlerini, çözümlerin sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Çınar (2004), "*On the posive solutions of difference equation* $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{1+x_nx_{n-1}}$" isimli çalışmasında $x_{-1},\ x_0$ başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{1+x_nx_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini elde etmiştir.

El-Metwally ve Elsayed (2012), *"Qualitative study of solutions of some difference equations"* isimli çalışmalarında başlangıç koşulları reel sayılar olan

$$x_{n+1}=\frac{x_nx_{n-3}}{x_{n-2}(\pm 1\pm x_nx_{n-3})},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denklemlerinin çözümlerini elde etmiştir. Ayrıca, çözümlerin sınırlılığı, periyodiklikliğini incelemişlerdir.

Stevic (2012), *"On a third-ordersystem of difference equations"* isimli çalışmasında $a_i,b_i,c_i,\ i\in\{1,2,3\}$, parametreleri ve $x_{-j},y_{-j},z_{-j},\ j\in\{0,1,2\}$, başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{a_1x_{n-2}}{b_1y_nz_{n-1}x_{n-2}+c_1},\ y_{n+1}=\frac{a_2y_{n-2}}{b_2z_nx_{n-1}y_{n-2}+c_2},\ z_{n+1}=\frac{a_3z_{n-2}}{b_3x_ny_{n-1}z_{n-2}+c_3},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denklemlerinin çözümlerini incelemiştir.

Raouf (2012), *"Global behavior of the rational Riccati difference equation of order two: the general case"* isimli çalışmasında

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

İkinci mertebeden Riccati fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı ve kararlılık özellikleri incelemiştir. Burada parametreler *a,b,c* ve $x_{-1},\, x_0$ başlangıç koşulları reel sayılardır.

İbrahim ve Touafek (2013), *"On a third order rational difference equation with variable coefficients"* isimli çalışmalarında $(a_n), (b_n)$ iki periyotlu periyodik diziler ve $x_{-i},\ i = \overline{0,2},$ başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_{n-2}}{x_n\left(a_n + b_n x_{n-1}x_{n-2}\right)}, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Stevic (2013), *"On a solvable system of difference equations of kth order"* isimli çalışmasında $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}, c_n^{(j)},\ n \in \mathbb{N}_{0,}\ j = \overline{1,k}$ için $x_{-i}^{(j)}$ başlangıç koşulları $i, j \in \{1,...,k\}$ reel sayılar ve $\sigma : \mathbb{N} \to \{1,2,\ldots,k\}$ foksiyonu $\sigma(km+j) = j+1,\ j = \overline{1,k-1},\ \sigma(km+k) = 1,\ m \in \mathbb{N}_0$, olmak üzere

$$x_n^{(j)} = \frac{a_n^{(j)} x_{n-k}^{(j)}}{b_n^{(j)} \prod_{i=1}^{k} x_{n-i}^{(\sigma(j+i-1))} + c_n^{(j)}}, \; n \in \mathbb{N}_{0,}\ j = \overline{1,k},$$

fark denkleminin çözümlerini kapalı formda elde etmiştir.

Elsayed ve El-Metwally (2013), *"On the solutions of some nonlinear systems of difference equations"* isimli çalışmasında $x_{-i},\ y_{-i},\ i = \overline{0,2},$ başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-2}}{y_{n-1}\left(\pm 1 \pm x_n y_{n-2}\right)},\; y_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{x_{n-1}\left(\pm 1 \pm y_n x_{n-2}\right)}, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı, periyodik karakterlerini incelemişlerdir.

Stevic ve çalışma arkadaşları (2014*), "Long-termbehavior of positive solutions of a system of max-typedifferenceequations",* isimli çalışmalarında $a, p > 0,\ q_j,\ j \in \{2,...,k\}$, negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \max\left\{a, \frac{y_{n-1}^p}{\prod_{j=2}^{k} x_{n-j}^{q_j}}\right\},\; y_n = \max\left\{a, \frac{x_{n-1}^p}{\prod_{j=2}^{k} y_{n-j}^{q_j}}\right\},\; n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılık özelliklerini incelemişlerdir.

Yazlik (2014), *"On the solutions and behavior of rational difference equations"* isimli çalışmasında $x_{-i},\ i=\overline{0,4},$ başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere aşağıda verilen

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-2}x_{n-3}x_{n-4}}{x_nx_{n-1}(\pm1\pm x_{n-2}x_{n-3}x_{n-4})},\ \ n\in\mathbb{N}_0,$$

beşinci mertebeden fark denklemlerinin çözümlerini ve çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Stevic ve çalışma arkadaşları (2014) ,*"On a solvable system of rational difference equations"* isimli çalışmalarında $k,l\in\mathbb{N},\ x_{-i},y_{-j}\in\mathbb{R}-\{0\},\ i=\overline{1,k+l}$ için $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0},(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0},(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0},(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizileri reel olmak üzere

$$x_n=\frac{x_{n-k}y_{n-l}}{b_nx_{n-k}+a_ny_{n-l-k}},\ y_n=\frac{y_{n-k}x_{n-l}}{d_ny_{n-k}+c_nx_{n-l-k}},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisiteminin çözümlerini kapalı formda incelemişlerdir. a_n,b_n,c_n,d_n dizileri sabit ve $k=2l$ olduğu durum için iyi tanımlanmış çözümlerinin asimptotik davranışını da incelemişlerdir.

Stevic ve arkadaşları (2015), *"On a close to symmetric system of difference equations of second order"* isimli çalışmalarında $a_n,b_n,\alpha_n,\beta_n,n\in\mathbb{N}_0$ ve başlangıç koşulları $x_{-i},y_{-i},i\in\{1,2\},$ reel sayılar olmak üzere,

$$x_n=\frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_{n-1}(a_n+b_ny_{n-1}y_{n-2})},\ y_n=\frac{x_{n-1}x_{n-2}}{y_{n-1}(\alpha_n+\beta_nx_{n-1}x_{n-2})},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözümlerini elde etmişlerdir. Sonra $a_n,b_n,\alpha_n,\beta_n,n\in\mathbb{N}_0$ dizilerinin sabit olduğu durumda verilen fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir. Dahası sistemin tanımsız yapan çözümlerinin bölgesini tanımlamışlardır.

Alzahrani, El-Dessoky, Elsayed ve Kuang (2015), *"Solutions and properties of some degernerate systems of difference equations"* isimli çalışmalarında x_{-1},x_0,y_{-1},y_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_ny_{n-1}}{x_n(\pm1\pm y_ny_{n-1})},\ y_{n+1}=\frac{x_nx_{n-1}}{y_n(\pm1\pm x_nx_{n-1})},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

İkinci mertebeden rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini elde etmişlerdir.

Stevic (2015), *"Product-type system of difference equations of second-order solvable in closed form"* isimli çalışmasında $a,b,c,d,f,g\in\mathbb{Z}$ ve $x_{-i},y_{-i},z_{-i}\in\mathbb{C}-\{0\},i\in\{0,1\}$ olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_n^a}{z_{n-1}^b},\quad y_{n+1}=\frac{z_n^c}{x_{n-1}^d},\quad z_{n+1}=\frac{x_n^f}{y_{n-1}^g},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

ikinci mertebeden fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmişlerdir.

Yazlik ve çalışma arkadaşları (2015), "*On the behaviour of solutions for some systems of difference equations*" isimli çalışmlarında $x_{-i},\ y_{-i},\ i=\overline{0,4},$ başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-2}x_{n-3}y_{n-4}}{y_nx_{n-1}\left(\pm1\pm y_{n-2}x_{n-3}y_{n-4}\right)},\ y_{n+1}=\frac{x_{n-2}y_{n-3}x_{n-4}}{x_ny_{n-1}\left(\pm1\pm x_{n-2}y_{n-3}x_{n-4}\right)}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca bu sistemlerin çözümlerinin periyodikliğini de incelemişlerdir.

Stevic ve çalışma arkadaşları (2015), "*On the system of difference equations* $x_n=\frac{x_{n-1}y_{n-2}}{ay_{n-2}+by_{n-1}},\ y_n=\frac{y_{n-1}x_{n-2}}{cx_{n-2}+dx_{n-1}}$," isimli çalışmalarında $a,b,c,d,$ parametreleri, başlangıç koşulları $x_{-2},x_{-1},y_{-2},y_{-1},$ reel sayılar olmak üzere

$$x_n=\frac{x_{n-1}y_{n-2}}{ay_{n-2}+by_{n-1}},\ y_n=\frac{y_{n-1}x_{n-2}}{cx_{n-2}+dx_{n-1}},\ n\in\mathbb{N}_0$$

fark denkleminin çözümlerini kapalı formda elde etmişlerdir. Elde edilen çözümleri kullanarak çözümlerin davranışlarını incelemişlerdir.

Stevic ve çalışma arkadaşları (2016), *"On a fifth-order difference equation",* isimli çalışmalarında $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0},\ (b)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizileri ve $x_{-i},\ i=\overline{1,5},$ başlangıç koşulları gerçel sayılar olmak üzere

$$x_n=\frac{x_{n-3}x_{n-4}x_{n-5}}{x_{n-1}x_{n-2}(a_n+b_nx_{n-3}x_{n-4}x_{n-5})},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin kapalı formda çözümlerini elde etmişlerdir. Dahası $\forall n\in\mathbb{N}_0,\ a_n=a,\ b_n=b$ olduğu durumda, yani sabit katsayılı fark denklemi olduğu durumda, kapalı formda çözümleri de elde etmişlerdir.

El-Dessoky (2016), *"On a solvable for some systems of rational difference equations"* isimli çalışmasında başlangıç koşuları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-3}}{\pm1\pm t_nz_{n-1}y_{n-2}x_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-3}}{\pm1\pm x_nt_{n-1}z_{n-2}y_{n-3}},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-3}}{\pm1\pm y_nx_{n-1}t_{n-2}z_{n-3}},\ t_{n+1}=\frac{t_{n-3}}{\pm1\pm z_ny_{n-1}x_{n-2}t_{n-3}}$$

dört boyutlu dördüncü mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerini, çözümlerin periyodikliği ve sınırlılığını incelemiştir.

Stevic (2016*),* *" Solvable subclasses of a class of nonlineaer second-order difference equations",* isimli çalışmasında A,B,C,D,E,F,G parametreleri ve başlangıç koşulları x_{-1},x_0 reel sayılar olmak üzere,

$$Ax_{n+1}+Bx_{n+1}x_n+Cx_nx_{n-1}+Gx_{n+1}x_{n-1}+Dx_n+Ex_{n-1}+F=0,\ n\in\mathbb{N}_0,$$

lineer olmayan ikinci mertebeden fark denkleminin çözümlerini incelemiştir. Bu fark denklemi, sabit katsayılı homojen olmayan ikinci mertebeden lineer fark denkleminin ve sabit kasayılı bilineer fark denkleminin doğal bir genişlemesidir.

Elsayed ve çalışma arkadaşları (2016) "Dynamics of a three-dimensional systems of rational difference equations" isimli çalışmalarında başlangıç koşulları $x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-2},y_0,z_{-2},z_{-1},z_0$ sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_nx_{n-2}}{x_{n-2}\pm z_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{z_ny_{n-2}}{y_{n-2}\pm x_{n-1}},\quad z_{n+1}=\frac{x_nz_{n-2}}{z_{n-2}\pm y_{n-1}},$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Ahmed ve Elsayed (2016), *"The expressions of solutions and the periodicity of some rational difference equations systems"* isimli çalışmalarında başlangıç koşulları $x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ y_{-2},\ y_{-1}$ ve y_0 sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}y_{n-2}}{y_n(-1\pm x_{n-1}x_{n-2})},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}x_{n-2}}{x_n(\pm 1\pm y_{n-1}x_{n-2})},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

üçüncü mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliği incelmişlerdir.

Halim ve çalışma arkadaşları (2017) "On the solutions og a second-order difference equation in terms of generalized Padovan sequences" isimli çalışmalarında $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\},\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^+$ ve başlangıç koşulları x_{-1},x_0 sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_{n-1}+\beta}{\gamma x_nx_{n+1}},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

Fark denkleminin çözümlerini genelleştirilmiş Padovan sayılarıyla ilişkilendirilerek elde etmişlerdir. Ayrıca verilen fark denklemini çözümlerinin asimptotik davranışını da incelemişlerdir. Son olarak

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_{n-1}+\beta}{\gamma y_nx_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{\alpha y_{n-1}+\beta}{\gamma x_ny_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

İki boyutlu fark denklme sisteminin de çözümlerini bulmuşlardır.

Stevic ve çalışma arkadaşları (2017) , *"On a class of solvable higher-order difference equations"* isimli çalışmalarında $k \in \mathbb{N}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}_o}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$, için başlangıç koşulları $x_{-i}, i = \overline{1, k+2}$ reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-k-2}}{x_{n-k}(a_n + b_n x_{n-2}x_{n-k-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin kapalı formda çözümlerini elde etmişlerdir. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizileri sabit dizi için verilen fark denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişlerdir. Ayrıca denklemin tanımsız çözümlerinin bölgesini elde etmişlerdir.

Khelifa ve çalışma arkadaşları (2017) "On a system of three difference equatiıns of higher order solved in terms of lucas and Fibonacci numbers" isimli çalışmalarında $n, k \in \mathbb{N}_0$ ve başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, ...x_0, y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_0, z_{-k}, z_{-k+1}, ..., z_1, z_0$ -3 ten farklı keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1+2y_{n-k}}{3+y_{n-k}}, \; y_{n+1} = \frac{1+2z_{n-k}}{3+z_{n-k}}, \; z_{n+1} = \frac{1+2x_{n-k}}{3+x_{n-k}},$$

yüksek mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini Fibonacci ve Lucas sayılarını kullanarak kapalı formda formülize etmişlerdir.

Stevic (2018), *"On a two-dimensional solvable sysytem of difference equations",* isimli çalışmasında a, b, c, d parametreleri ve başlangıç koşulları $x_{-j}, y_{-j}, j = \overline{0, 2}$ karmaşık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_n y_{n-2}}{bx_{n-1} + ay_{n-2}}, \; y_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{dy_{n-1} + cx_{n-2}}, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin çözümlerini sistemle ilşkili sabit katsayılı iki homojen lineer fark denklemini çözümlerini vasıtasıyla genel çözümü elde etmiştir.

Haddad ve çalışma arkadaşları (2018), "Well-defined solutions of a system of difference equations" isimli çalışmalarında a, b, α, β parametreleri ve başlangıç koşulları $x_{-i}, y_{-i}, \; i = 0,1,$ sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \; y_{n+1} = \frac{bx_{n-1}y_n}{x_n - \beta} + \alpha, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklemleri sisteminin çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca $a=b$ durumu için çözümlerin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Gümüş (2018) " The global asymptotic stability of a system of difference equations" isimli çalışmalarında $m\in\mathbb{Z}^{+}$, $A\in(0,\infty)$, ve başlangıç koşulları $i=0,1,...,m$ için x_{-i},y_{-i} keyfi pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=A+(\frac{y_{n-m}}{y_n}),\ y_{n+1}=A+(\frac{x_{n-m}}{x_n}),\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik karalılığını incelemiştir.

Stevic (2018), *"A four-diemensional solvable of difference equations in the completedomain"* isimli çalışmalarında $a_i,b_i,c_i,d_i,\ i=\overline{1,4},\ x_0,y_0,z_0,u_0$ karmaşık sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{a_1}{x_ny_nz_n}+\dfrac{b_1}{y_nz_nu_n}+\dfrac{c_1}{z_nu_nx_n}+\dfrac{d_1}{u_nx_ny_n}, \\ y_{n+1}=\dfrac{a_2}{x_ny_nz_n}+\dfrac{b_2}{y_nz_nu_n}+\dfrac{c_2}{z_nu_nx_n}+\dfrac{d_2}{u_nx_ny_n}, \\ z_{n+1}=\dfrac{a_3}{x_ny_nz_n}+\dfrac{b_3}{y_nz_nu_n}+\dfrac{c_3}{z_nu_nx_n}+\dfrac{d_3}{u_nx_ny_n}, \\ u_{n+1}=\dfrac{a_4}{x_ny_nz_n}+\dfrac{b_4}{y_nz_nu_n}+\dfrac{c_4}{z_nu_nx_n}+\dfrac{d_4}{u_nx_ny_n}, \end{cases} n\in\mathbb{N}_0,$$

dört-boyutlu fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilir olduklarını göstermişlerdir.

Okumuş ve çalışma arkadaşları (2018) "Dynamical behavior of a system of three-dimensional nonlinear difference equations" isimli çalışmalarında $A\in(0,\infty)$ ve başlangıç koşulları ve $i=-1,0$ için $x_i,y_i,z_i\in(0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1}=A+\frac{x_{n-1}}{z_n},\ y_{n+1}=A+\frac{y_{n-1}}{z_n},\ z_{n+1}=A+\frac{z_{n-1}}{y_n},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığı, direncini, periyodikliğini ve pozitif denge noktalarının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Stevic (2019*)* , *"Some representations of the general solution to a difference equation of additive type"* , isimli çalışmasında ve başlangıç koşulları olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{ax_nx_{n-1}x_{n-2}+bx_{n-1}x_{n-2}+cx_{n-2}+d}{x_nx_{n-1}x_{n-2}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin genel çözümünü, $a,b,c \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{C} - \{0\}$, katsayıları, $x_{-j},\ j = \overline{0,2}$, ve $y_{-3} = y_{-2} = y_{-1} = 0,\ y_0 = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan $y_{n+1} = ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2} + dy_{n-3}$, $n \in \mathbb{N}_0$, fark denklemini de kullanarak elde etmiştir. Dahası lineer denklemin karakterisitik polinomunun köklerini $P_4(\lambda) = \lambda^4 - a\lambda^3 - b\lambda^2 - c\lambda - d$ dört farklı durumda incelemiştir.

Stevic ve Tollu (2019), *"Solvability and semi-cycle analysis of a class os nonlinear system of difference equqtions",* isimli çalışmalarında $a \in [0, +\infty)$, p_n, q_n, r_n, s_n dizileri, x_n yada y_n dizilerinden biri olmak üzere $x_{-j}, y_{-j},\ j = 1,2,$ pozitif başlangıç değerleri için

$$x_n = \frac{a + p_{n-1}q_{n-2}}{p_{n-1} + q_{n-2}},\ y_n = \frac{a + r_{n-1}s_{n-2}}{r_{n-1} + s_{n-2}},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sistemini teorik olarak çözülebilir olduklarını göstermişlerdir. Dahası $k = 0$ ve $l = 1$ olduğunda indirilen denklem sisteminin kapalı formda çözümlerini elde etmişlerdir.

Kara ve çalışma arkadaşları (2019), "Solvable of a system of nonlinear diffrence equations of higher-order" isimli çalışmalarında $k,l \in \mathbb{N},\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_o}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_o}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}_o}, (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_o}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$ parametreler ve başlangıç koşulları $x_{-i}, y_{-i},\ i = \overline{1, k+l}$, reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-k}y_{n-k-l}}{y_{n-l}(a_n + b_n x_{n-k}y_{n-k-l})}, y_n = \frac{y_{n-k}x_{n-k-l}}{x_{n-l}(\alpha_n + \beta_n y_{n-k}x_{n-k-l})},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

Yüksek mertebeden lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerini kapalı formda elde etmişlerdir. Ayrıca $k = 2$, $l = k$ için de iyi tanımlanmış çözümlerin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Stevic ve arkadaşları (2019), *"Existence and global attractivity of periodic solutions to some classes of difference equations"* isimli çalışmalarında $k \in \mathbb{N}_0,\ (q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *T*-periyodik bir dizi ve $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ ilk değişkenine göre *T*- periyodik bir fonksiyon ve $\forall n \in \{0,1,\ldots,T-1\}$ için diğer değişkenlerde sürekli olmak üzere

$$x_{n+1} = q_n x_n + f(n, x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}),\ n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denleminin bazı alt sınıflarının periyodik çözümlerinin global çekimliliği ve varlığını incelemişlerdir.

Tollu ve çalışma arkadaşları (2019) "Global behavior of a three-dimensional system of difference equations of order-three" isimli çalışmalarında için başlangıç koşulları

$u_{-i}, v_{-i}, w_{-i} (i=0,1,2)$ negatif olamayan reel sayılar, parametreleri $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ $(j=1,2,3)$ ve p, q, r pozitif reel sayılar olmak üzere

$$u_{n+1} = \frac{\alpha_1 u_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 v_{n-2}^p}, \quad v_{n+1} = \frac{\alpha_2 v_{n-1}}{\beta_2 + \gamma_2 w_{n-2}^q}, \quad w_{n+1} = \frac{\alpha_3 w_{n-1}}{\beta_3 + \gamma_3 u_{n-2}^r}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Yazlık ve çalışma arkadaşları (2019) ”On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coeffficients” isimli çalışmalarında $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ iki periyotlu diziler ve sıfırdan farklı x_{-i}, y_{-i} $i \in \{0,1,...,k\}$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_{n-k+1} y_{n-k}}{y_n - \alpha_n} + \beta_{n+1}, \quad y_{n+1} = \frac{b_n y_{n-k+1} x_{n-k}}{x_n - \beta_n} + \alpha_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin $a_0 = b_1$ ve $a_1 = b_0$ olduğu durumlar için çözümlerini incelemişlerdir.

Halim ve çalışma arkadaşları (2020) “On a three-dimensional solvable system of difference equations” isimli çalışmalarında a, b parametreleri ve başlangıç koşulları $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_{-1}, z_0$ sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{z_{n-1}}{a + b y_n z_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{a + b z_n x_{n-1}}, z_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{a + b x_n y_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Kara ve çalışma arkadaşları (2020) ”Solvability of a system of higher order nonlinear difference equations” isimli çalışmalarında $n \in \mathbb{N}_0, k, l$ pozitif tam sayılar, $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametreleri ve başlangıç koşulları $x_{-j}, y_{-j}, j = \overline{1, k+1}$ reel sayıları olmak üzere

$$x_n = a y_{n-k} + \frac{d y_{n-k} x_{n-(k+l)}}{b x_{n-(k+1)} + c y_{n-l}}, \quad y_n = a x_{n-k} + \frac{\delta x_{n-k} y_{n-(k+l)}}{\beta y_{n-(k+1)} + \gamma x_{n-l}},$$

fark denklem sisteminin kapalı formdaki çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca. $l = 1$ durumu için de çözümlerin asimptotik davranışlarını incelemişlerdir.

Touafek ve çalışma arkadaşları (2021) “On a general homogeneous three-dimensional system of difference equations” isimli çalışmalarında $n \in \mathbb{N}_0$, başlangıç koşulları $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_{-1}, z_o$ pozitif reel sayılar ve $f, g, h : (0, +\infty)^2 \to (0, +\infty)$ fonksiyonları sıfırıncı dereceden homojen, sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$x_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}),\ \ y_{n+1} = g(z_n, z_{n-1}),\ z_{n+1} = h(x_n, x_{n-1}),$

üç boyutlu fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Khelifa ve çalışma arkadaşları (2021) ”General solutions to systems of difference equations and some of their representations” isimli çalışmalarında $\{F_n\}_{n=0}^{+\infty}$ Fibonacci dizisi olmak üzere

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{n-k}^{((j+1)\mathrm{mod}(p))}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{n-k}^{((j+1)\mathrm{mod}(p))}},\ n, m, p, k \in \mathbb{N}_0,\ j = \overline{1, p},$$

fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Halim ve çalışma arkadaşları (2022) “On a solvable system of p difference equations of higher order” isimli çalışmalarında a, b parametreleri sıfırdan farklı reel sayılar ve başlangıç koşulları $x_{-k}^{(j)}, x_{-k+1}^{(j)}, \ldots, x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)},\ j = \overline{1, p},\ -\dfrac{a}{b}$ den farklı olmak üzere

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{x_{n-k}^{(j+1)\ (\mathrm{mod}\, p)}}{a + b x_{n-k}^{(j+1)\ (\mathrm{mod}\, p)}},\quad n, p, k \in \mathbb{N}_0, j = \overline{1, p}$$

fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmişlerdir.

Boulouh ve çalışma arkadaşları (2022) “On the behavior of the solutions of an abstract system of difference equations” isimli çalışmalarında $n \in \mathbb{N}_0$,başlangıç koşulları x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 pozitif reel sayılar ve $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2 : (0, +\infty)^2 \to (0, +\infty)$ fonksiyonları sıfırıncı dereceden homojen, sürekli olmak üzere

$$x_{n+1} = f_1(x_n, x_{n-1}) + f_2(y_n, y_{n-1}),\ \ y_{n+1} = g_1(x_n, x_{n-1}) + g_2(y_n, y_{n-1})$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Kara ve çalışma arkadaşları (2022) “On the solutions of three-dimensional system of difference equations via recursive relations of order two and applications” isimli çalışmalarında a, b, c, d, e, f parametreleri ve başlangıç koşulları $x_{-i},\ y_{-i},\ z_{-i},\ i \in \{0, 1, 2\}$, reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_n y_{n-2}}{b x_{n-1} + a y_{n-2}},\ \ y_{n+1} = \frac{z_n z_{n-2}}{d y_{n-1} + c z_{n-2}},\ \ z_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{f z_{n-1} + e x_{n-2}},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

üç boyutlu fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmişlerdir.

Stevic ve çalışma arkadaşları (2022), “*On a solvable class of nonlinear difference equations of fourth order*” isimli çalışmalarında $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq \gamma^2 + \delta^2$, $g,\ g(\mathbb{R}) = \mathbb{R},\ g(0) = 0,$ koşullarını sağlayan monoton ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$x_{n+1}=g^{-1}\left(g\left(x_n\right)\frac{\alpha g\left(x_{n-2}\right)+\beta g\left(x_{n-3}\right)}{\gamma g\left(x_{n-2}\right)+\delta g\left(x_{n-3}\right)}\right),\ n\in\mathbb{N}_0,$$

dördüncü mertebeden lineer olamayan fark denkleminin kapalı formda çözülebilir olduğunu göstermişlerdir.

Allam ve çalışma arkadaşları (2022) “Convergence of solutions of recurrence equations” isimli çalışmalarında başlangıç koşulları $x_{-(2k+1)},x_{-2k},...,x_0,y_{-(2k+1)},y_{-2k},...,y_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-(2k+1)}}{1+y_{n-k}},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-(2k+1)}}{1+x_{n-k}},\quad n,k\in\mathbb{N}_0,$$

yüksek mertebeden fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Hamioud ve çalışma arkadaşları (2022) ”On a three dimensional nonautonomous system of difference equations” isimli çalışmalarında $\{p_n\},\{q_n\},\{r_n\}$ 3-periyotlu pozitif değerli periyodik diziler ve başlangıç koşulları $i\in\{-3,-2,-1\}$ için $x_i,y_i,z_i\in[0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{p_n+y_n}{p_n+y_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{q_n+z_n}{q_n+z_{n-3}},\quad z_{n+1}=\frac{r_n+x_n}{r_n+x_{n-3}},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

üç boyutlu dördüncü mertebeden fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

2.2 Ön Bilgiler

Bu bölümde verilen temel bilgiler genel olarak [5], [9], [45] ve [46] kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 2.2.1 $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. E öteleme operatörü

$$Ex(n)=x(n+1)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.2 Bir $y:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya y' in birinci basamaktan farkı

$$\Delta y(n)=y(n+1)-y(n)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3 $n\ge n_0$ için $\Delta F(n)=f(n)$ olsun. Bu durumda $n\ge n_0$ için

$\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c$

şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü denir ve $F(n)$ fonksiyonuna da $f(n)$ ' nin ters farkı denir. Burada *c* keyfi sabittir.

Teorem 2.2.4 Bir $f(n)$ fonksiyonu $n \geq n_0$ için tanımlı ise bu durmda $\Delta^{-1} f(n) = c + \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)$ dir. Burada c keyfi bir sabittir.

Tanım 2.2.5 $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere $G(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = 0$ denklemine *Fark Denklemi* denir.

Tanım 2.2.6 Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük indisleri arasındaki farka o denklemin *mertebesi* veya *basamağı* denir.

Tanım 2.2.7 *k*. mertebeden $G(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = 0$ fark denklemi ve $0 \leq i \leq k-1$ için $x_{n_0+i} = \alpha_i$ başlangıç koşullarından meydana gelen probleme *başlangıç değer problemi* denir.

Teorem 2.2.8 *k*. mertebeden skaler olmayan $x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}),\ n \in \mathbb{N}_0,$ fark denklemi ve $x_0 = \alpha_0,\ x_1 = \alpha_1, \ldots, x_{k-1} = \alpha_{k-1}$ başlangıç koşulları verilsin. *f* foksiyonu bağlı olduğu değişkenlere göre tanımlı ise o zaman verilen başlangıç değer probleminin bir tek çözümü vardır.

Tanım 2.2.9 $\xi_1(n),\ \xi_2(n), \ldots, \xi_k(n)$ katsayıları, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ için $\xi_k(n) \neq 0$ ve $F(n),\ n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_{n+k} + \xi_1(n) y_{n+k-1} + \ldots + \xi_k(n) y_n = F(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}, \qquad \textbf{(2.1)}$$

şeklinde verilen denkleme *lineer fark denklemi* denir. Aksi halde verilen bir fark denklemine de *lineer olmayan fark denklemi* denir. Eğer Denklem (2.1)' de $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ için $F(n) = 0$ ise denkleme *Lineer Homojen Fark Denklemi* denir. Eğer Denklem (2.1)' de $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ için $\xi_i(n) = \xi_i$ katsayıları sabit ise, Denklem (2.1)' e *Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir. Eğer $\exists i \in \{1, 2, ..., k\}$ için $\xi_i(n)$ katsayılarından en az biri bağımsız değişkenin fonksiyonu ise Denklem (2.1)'e *Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir.

Teorem 2.2.10 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $k_{n+1} = ak_{n-2} + b,\ n \geq 2,$ fark denklemi verilsin. $n \in \mathbb{N}_0,\ i \in \{0,1,2\}$ için (k_{3n+i}) dizileri, $l_{n+1} = al_n + b,\ n \in \mathbb{N}_0,$ birinci mertebeden lineer fark denkleminin çözümleridir. $l_{n+1} = al_n + b,\ n \in \mathbb{N}_0$, denkleminin genel çözümü

$$l_n = \begin{cases} a^n l_0 + b\dfrac{1-a^n}{1-a}, & a \neq 1 \\ l_0 + bn, & a = 1 \end{cases}$$

dir. Dahası $k_{n+1} = ak_{n-2} + b,\ n \geq 2,$ denkleminin genel çözümü de

$$k_{3n+i} = \begin{cases} a^n k_i + b\dfrac{1-a^n}{1-a}, & a \neq 1 \\ k_i + bn, & a = 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.11 $A(n),\ k \times k$ tipinde singüler olmayan bir matris fonksiyonu, $X(n),\ k \times 1$ tipinde bir sütun matrisi olmak üzere

$X(n+1) = A(n)X(n)$

sistemine lineer homojen fark denklem sistemi denir. Dahası $g(n) \in \mathbb{R}^k$ olmak üzere

$X(n+1) = A(n)X(n) + g(n)$

denklem sistemine de lineer homojen olmayan fark denklem sistemi denir.

Tanım 2.2.12 $I_1, I_2, I_3,\ \mathbb{R}$'nin herhangi üç alt aralıkları ve $f: I_1^2 \times I_2^2 \times I_3^2 \to I_1,\ g: I_1^2 \times I_2^2 \times I_3^2 \to I_2,\ h: I_1^2 \times I_2^2 \times I_3^2 \to I_3$ tanımlı fonksiyonlar olsunlar.

$$\begin{cases} x_n = f\left(x_{n-1}, x_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-2}, z_{n-1}, z_{n-2}\right), \\ y_n = g\left(x_{n-1}, x_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-2}, z_{n-1}, z_{n-2}\right),\ n \in \mathbb{N}_0, \\ z_n = h\left(x_{n-1}, x_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-2}, z_{n-1}, z_{n-2}\right), \end{cases} \qquad \textbf{(2.2)}$$

fark denklem sistemine üç boyutlu-ikinci mertebeden fark denklem sistemi denir.

Teorem 2.2.13 $i \in \{1,2\}$ için $x_{-i},\ y_{-i},\ z_{-i} \in \mathbb{R}$ ve $D_f,\ D_g$ ve D_h sırasıyla $f,\ g$ ve h fonksiyonlarının tanım kümeleri olmak üzere sistem (2.2)' i iyi tanımlı yapmayan başlangıç noktalarının kümesi

$$\Im = \{(x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_{-1}, z_{-2}, z_{-1}) \in \mathbb{R}^6 : \left(x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}\right) \in D_f \times D_g \times D_h,\ \left(x_n, y_n, z_n\right) \notin D_f \times D_g \times D_h,\ i \in \{1,2\}\}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.14 $I_1, I_2, I_3,\ \mathbb{R}$'nin herhangi üç alt aralıkları, $\Im$, verilen fark denklem sistemini iyi tanımlı yapmayan noktaların kümesi, $f: I_1^2 \times I_2^2 \times I_3^2 \to I_1,\ g: I_1^2 \times I_2^2 \times I_3^2 \to I_2,\ h: I_1^2 \times I_2^2 \times I_3^2 \to I_3$ sürekli, diferansiyellenebilen üç fonksiyon olsunlar. Bu durumda $i \in \{1,2\},\ \forall\left(x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}\right) \in \left(I_1 \times I_2 \times I_3\right)/\Im$ başlangıç koşulları için sistem (2.2) bir tek $\left\{\left(x_n, y_n, z_n\right)\right\}_{n=-2}^{\infty}$ çözüme sahiptir.

Tanım 2.2.15 Sistem (2.2)' in iyi tanımlı çözümü $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ olsun. Eğer $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü, $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n$, $y_{n+p} = y_n$, $z_{n+p} = z_n$ koşulunu sağlıyorsa $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü p-periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p sayısına da asal periyot denir.

Teorem 2.2.16 O Landau sembolü olmak üzere $x \to 0$ için

$$\begin{aligned} &\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \\ &(1+x)^{-1} = 1 - x + O(x^2), \end{aligned} \qquad \textbf{(2.3)}$$

dır.

BÖLÜM 3

Bu bölümde, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ parametreler ve $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, i \in \{1,2\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$x_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_{n-1}(\alpha + \beta y_{n-1}y_{n-2})},\ y_n = \frac{z_{n-1}z_{n-2}}{y_{n-1}(\gamma + \delta z_{n-1}z_{n-2})},\ z_n = \frac{x_{n-1}x_{n-2}}{z_{n-1}(\varepsilon + \zeta x_{n-1}x_{n-2})},\ n \in \mathbb{N}_0, \qquad \textbf{(3.1)}$$

üç boyutlu ikinci mertebeden lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve çözümlerinin davranışları incelenecektir.

3.1. Sistem (3.1)' in Kapalı Formda Çözümleri

Burada, sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümleri için gerekli olan koşullar ele alınacaktır. Öncelikle kabul edelim ki $i \in \{1,2\}$ için $x_{-i} \neq 0,\ y_{-i} \neq 0$ ve $z_{-i} \neq 0$ olsun. Bu durumda literatürde iyi bilinen tümevarm metodu ve sistem (3.1)' den $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $x_n \neq 0,\ y_n \neq 0,\ z_n \neq 0$ olacağı açıktır. Öte yandan herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}_0$ için $x_{n_0} = 0$ ise, o zaman sistem (3.1)' in ilk denkleminden $y_{n_0-1} = 0$ ya da $y_{n_0-2} = 0$ olacaktır. Eğer $y_{n_0-1} = 0$ ise sistem (3.1)' in ikinci denkleminden $z_{n_0-2} = 0$ ya da $z_{n_0-3} = 0$ olacaktır. Dahası, eğer $z_{n_0-2} = 0$ ise, sistem (3.1)' in üçüncü denkleminden denkleminden $x_{n_0-3} = 0$ ya da $x_{n_0-4} = 0$ veya $z_{n_0-3} = 0$ ise, $x_{n_0-4} = 0$ ya da $x_{n_0-5} = 0$ olacaktır. Bu prosedüre bu şekilde devam edilirse, bazı $i \in \{1,2\}$ değerleri için $x_{-i} = 0$ ya da $y_{-i} = 0$ ya da $z_{-i} = 0$ olacağı açıktır. Böylece sistem (3.1)' in iyi tanımlı bir $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -2}$ çözümü için

$$x_n y_n z_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}_0, \qquad \textbf{(3.2)}$$

olacaktır. Bundan sonra sistem (3.1)' in her iyi tanımlı $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -2}$ çözümü, (3.2)' de verilen koşulu sağladığı varsayılacaktır.

Teorem 3.1.1. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ parametreler ve $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, i \in \{1,2\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olsun. Bu durumda sistem (3.1) kapalı formda çözülebilirdir.

İspat. Sistem (3.1)' ilk denklemi x_{n-1}, ikinci denklemi y_{n-1}, üçüncü denklemi ise z_{n-1} ile çarpılır ve

$$u_n = \frac{1}{x_n x_{n-1}},\ v_n = \frac{1}{y_n y_{n-1}},\ w_n = \frac{1}{z_n z_{n-1}},\ n \geq -1, \tag{3.3}$$

döşümü sistem (3.1)' e uygulanırsa

$$u_n = \alpha v_{n-1} + \beta,\ v_n = \gamma w_{n-1} + \delta,\ w_n = \varepsilon u_{n-1} + \zeta,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.4}$$

denklem sistemine indirgenir. Sistem (3.4)' ün, sırasıyla, ilk denkleminde ikinci ve üçüncü denklemler, ikinci denkleminde üçüncü ve birinci denklemler ve üçüncü denkleminde ise birinci ve ikinci denklemler yerine yazılırsa $n \geq 2$ için

$$\begin{cases} u_n = \alpha\gamma\varepsilon\, u_{n-3} + \alpha\gamma\zeta + \alpha\delta + \beta, \\ v_n = \alpha\gamma\varepsilon\, v_{n-3} + \beta\gamma\varepsilon + \gamma\zeta + \delta, \\ w_n = \alpha\gamma\varepsilon\, w_{n-3} + \alpha\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \zeta, \end{cases} \tag{3.5}$$

(3.5)' de yer alan üçüncü mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemlerine indirgenir. (3.5) denklemlerine $m \in \mathbb{N}_0$ ve $i \in \{-1, 0, 1\}$ için

$$\begin{cases} u_m^{(i)} = u_{3m+i}, \\ v_m^{(i)} = v_{3m+i}, \\ w_m^{(i)} = w_{3m+i}, \end{cases} \tag{3.6}$$

değişken değişimi uygulanırsa

$$\begin{cases} u_m^{(i)} = \alpha\gamma\varepsilon\, u_{m-1}^{(i)} + \alpha\gamma\zeta + \alpha\delta + \beta, \\ v_m^{(i)} = \alpha\gamma\varepsilon\, v_{m-1}^{(i)} + \beta\gamma\varepsilon + \gamma\zeta + \delta, \\ w_m^{(i)} = \alpha\gamma\varepsilon\, w_{m-1}^{(i)} + \alpha\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \zeta, \end{cases} \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada $m \geq 1,\ i \in \{-1, 0, 1\}$ ' dir. (3.7)' de yer alan denklemler, birinci mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemleri olup bunların çözümleri de, sırasıyla, $\alpha\gamma\varepsilon \neq 1$ için

$$\begin{cases} u_m^{(i)} = (\alpha\gamma\varepsilon)^m u_0^{(i)} + (\alpha\gamma\zeta + \alpha\delta + \beta)\dfrac{1-(\alpha\gamma\varepsilon)^m}{1-\alpha\gamma\varepsilon}, \\ v_m^{(i)} = (\alpha\gamma\varepsilon)^m v_0^{(i)} + (\beta\gamma\varepsilon + \gamma\zeta + \delta)\dfrac{1-(\alpha\gamma\varepsilon)^m}{1-\alpha\gamma\varepsilon}, \\ w_m^{(i)} = (\alpha\gamma\varepsilon)^m w_0^{(i)} + (\alpha\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \zeta)\dfrac{1-(\alpha\gamma\varepsilon)^m}{1-\alpha\gamma\varepsilon}, \end{cases} \tag{3.8}$$

ve $\alpha\gamma\varepsilon = 1$ için de

$$\begin{cases} u_m^{(i)} = u_0^{(i)} + (\alpha\gamma\zeta + \alpha\delta + \beta)m, \\ v_m^{(i)} = v_0^{(i)} + (\beta\gamma\varepsilon + \gamma\zeta + \delta)m, \\ w_m^{(i)} = w_0^{(i)} + (\alpha\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \zeta)m, \end{cases} \tag{3.9}$$

elde edilir. Burada $m \in \mathbb{N}_0$ ve $i \in \{-1,0,1\}$'dır. (3.6), (3.8) ve (3.9) denklemlerinden, sırasıyla, $\alpha\gamma\varepsilon \neq 1$ için

$$\begin{cases} u_{3m+i} = (\alpha\gamma\varepsilon)^m u_i + (\alpha\gamma\zeta + \alpha\delta + \beta)\dfrac{1-(\alpha\gamma\varepsilon)^m}{1-\alpha\gamma\varepsilon}, \\ v_{3m+i} = (\alpha\gamma\varepsilon)^m v_i + (\beta\gamma\varepsilon + \gamma\zeta + \delta)\dfrac{1-(\alpha\gamma\varepsilon)^m}{1-\alpha\gamma\varepsilon}, \\ w_{3m+i} = (\alpha\gamma\varepsilon)^m w_i + (\alpha\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \zeta)\dfrac{1-(\alpha\gamma\varepsilon)^m}{1-\alpha\gamma\varepsilon}, \end{cases} \tag{3.10}$$

ve $\alpha\gamma\varepsilon = 1$ için de

$$\begin{cases} u_{3m+i} = u_i + (\alpha\gamma\zeta + \alpha\delta + \beta)m, \\ v_{3m+i} = v_i + (\beta\gamma\varepsilon + \gamma\zeta + \delta)m, \\ w_{3m+i} = w_i + (\alpha\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \zeta)m, \end{cases} \tag{3.11}$$

yazılabilir. Burada $m \in \mathbb{N}_0$ ve $i \in \{-1,0,1\}$'dır. (3.3)' teki dönüşümlerden, $n \geq 4$ için

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{u_{n-1}}{u_n} x_{n-2} = \dfrac{u_{n-1}u_{n-3}}{u_n u_{n-2}} x_{n-4} = \dfrac{u_{n-1}u_{n-3}u_{n-5}}{u_n u_{n-2} u_{n-4}} x_{n-6}, \\ y_n = \dfrac{v_{n-1}}{v_n} y_{n-2} = \dfrac{v_{n-1}v_{n-3}}{v_n v_{n-2}} y_{n-4} = \dfrac{v_{n-1}v_{n-3}v_{n-5}}{v_n v_{n-2} v_{n-4}} y_{n-6}, \\ z_n = \dfrac{w_{n-1}}{w_n} z_{n-2} = \dfrac{w_{n-1}w_{n-3}}{w_n w_{n-2}} z_{n-4} = \dfrac{w_{n-1}w_{n-3}w_{n-5}}{w_n w_{n-2} w_{n-4}} z_{n-6}, \end{cases} \tag{3.12}$$

bulunur. Buradan sistem (3.1)' in iyi tanımlı kapalı formdaki çözümleri

$$\begin{cases} x_{6m+3p+i_1} = x_{3p+i_1} \displaystyle\prod_{s=1}^{m} \dfrac{u_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor\right)+i_2} u_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor\right)+i_4} u_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor\right)+i_3}}{u_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor\right)+i_4} u_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor\right)+i_3} u_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor\right)+i_2}}, \\ y_{6m+3p+i_1} = y_{3p+i_1} \displaystyle\prod_{s=1}^{m} \dfrac{v_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor\right)+i_2} v_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor\right)+i_4} v_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor\right)+i_3}}{v_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor\right)+i_4} v_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor\right)+i_3} v_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor\right)+i_2}}, \\ z_{6m+3p+i_1} = z_{3p+i_1} \displaystyle\prod_{s=1}^{m} \dfrac{w_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor\right)+i_2} w_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor\right)+i_4} w_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor\right)+i_3}}{w_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor\right)+i_4} w_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor\right)+i_3} w_{3\left(2s+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor\right)+i_2}}, \end{cases} \tag{3.13}$$

şeklindedir. Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $i_1\in\{-2,-1,0\}$, $p\in\{0,1\}$, $\lfloor\ \rfloor$: tam değer fonksiyon ve

$$i_2=\begin{cases} i_1+2\equiv 0\ (\bmod 3), \\ i_1+2\equiv 1\ (\bmod 3), \\ i_1+2\equiv -1\ (\bmod 3), \end{cases}\quad i_3=\begin{cases} i_1+1\equiv 0\ (\bmod 3), \\ i_1+1\equiv 1\ (\bmod 3), \\ i_1+1\equiv -1\ (\bmod 3), \end{cases}\quad i_4=\begin{cases} i_1+3\equiv 0\ (\bmod 3), \\ i_1+3\equiv 1\ (\bmod 3), \\ i_1+3\equiv -1\ (\bmod 3), \end{cases}\quad \text{dur}\blacksquare.$$

Teorem 3.1.2. $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0,\ \gamma\neq 0,\ \delta\neq 0,\ \zeta\neq 0$ ve $\varepsilon\neq 0$ olsun. $\vec{x}_{-(2,1)}=(x_{-2},x_{-1})$, $\vec{y}_{-(2,1)}=(y_{-2},y_{-1})$, $\vec{z}_{-(2,1)}=(z_{-2},z_{-1})$ olmak üzere sistem (3.1)' in iyi tanımlı olmayan noktaların kümesi

$$\Im=\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0}\left\{\begin{array}{l} \left(\vec{x}_{-(2,1)},\vec{y}_{-(2,1)},\vec{z}_{-(2,1)}\right)\in\mathbb{R}^6:\dfrac{1}{x_{-1}x_{-2}}=\left(f\circ g\circ h\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\zeta}{\varepsilon}\right)\ yada \\ \dfrac{1}{x_{-1}x_{-2}}=\left(f\circ g\circ h\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\gamma\zeta-\delta}{\gamma\varepsilon}\right) yada\ \dfrac{1}{x_{-1}x_{-2}}=\left(f\circ g\circ h\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\alpha\gamma\zeta-\alpha\delta-\beta}{\alpha\gamma\varepsilon}\right), \\ \dfrac{1}{y_{-1}y_{-2}}=\left(g\circ h\circ f\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\beta}{\alpha}\right)\ yada\ \dfrac{1}{y_{-1}y_{-2}}=\left(g\circ h\circ f\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\beta\varepsilon-\zeta}{\alpha\varepsilon}\right)\ yada \\ \dfrac{1}{y_{-1}y_{-2}}=\left(g\circ h\circ f\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\beta\gamma\varepsilon-\zeta\gamma-\delta}{\alpha\gamma\varepsilon}\right)\ yada\ \dfrac{1}{z_{-1}z_{-2}}=\left(h\circ f\circ g\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\delta}{\gamma}\right)\ yada \\ \dfrac{1}{z_{-1}z_{-2}}=\left(h\circ f\circ g\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\alpha\delta-\beta}{\alpha\gamma}\right)\ yada\ \dfrac{1}{z_{-1}z_{-2}}=\left(h\circ f\circ g\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\alpha\delta\varepsilon-\beta\varepsilon-\zeta}{\alpha\gamma\varepsilon}\right) \end{array}\right\}$$

$$\bigcup_{j=1}^{2}\left\{\left(\vec{x}_{-(2,1)},\vec{y}_{-(2,1)},\vec{z}_{-(2,1)}\right)\in\mathbb{R}^6:x_{-j}=0\ yada\ y_{-j}=0\ yada\ z_{-j}=0\right\}$$

şeklindedir. Burada $f(t)=\alpha t+\beta,\ g(t)=\gamma t+\delta,\ h(t)=\varepsilon t+\zeta$ dir.

İspat. Bölüm (3.1)' in girişinde sistem (3.1)' in iyi tanımlı olmayan noktaların kümesini $\bigcup_{j=1}^{2}\left\{\left(\vec{x}_{-(2,1)},\vec{y}_{-(2,1)},\vec{z}_{-(2,1)}\right)\in\mathbb{R}^6:x_{-j}=0\ yada\ y_{-j}=0\ yada\ z_{-j}=0\right\}$ şeklinde elde edilmişti. Şimdi kabul edelim ki $x_{-i}\neq 0,\ y_{-i}\neq 0,\ z_{-i}\neq 0,\ i\in\{1,2\}$, (yani $\forall n\geq -2$ için $x_ny_nz_n\neq 0$) olsun. O zaman $(x_n,y_n,z_n)_{n\geq -2}$ çözümünü iyi tanımlı olmaması için gerek ve yeter koşulun bazı $n\in\mathbb{N}$ için

$$\alpha+\beta y_{n-1}y_{n-2}=0\ ya\ da\ \gamma+\delta z_{n-1}z_{n-2}=0\ ya\ da\ \varepsilon+\zeta x_{n-1}x_{n-2}=0 \tag{3.14}$$

veya (3.3)' deki dönüşümler dikkate alındığında bazı $n\in\mathbb{N}_0$ için

$$v_{n-1}=\frac{-\beta}{\alpha}\ ya\ da\ w_{n-1}=\frac{-\delta}{\gamma}\ ya\ da\ u_{n-1}=\frac{-\zeta}{\varepsilon} \tag{3.15}$$

olacağı açıktır. Dahası $f^{-1}(0)=\dfrac{-\beta}{\alpha}$, $g^{-1}(0)=\dfrac{-\delta}{\gamma}$, $h^{-1}(0)=\dfrac{-\zeta}{\varepsilon}$' dır. Öte yandan $m\in\mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} u_{3m-1}=\left(\underbrace{f\circ g\circ h\circ\ldots\circ f\circ g\circ h}_{m\ a\det}\right)(u_{-1}) \\ u_{3m}=\left(\underbrace{f\circ g\circ h\circ\ldots\circ f\circ g\circ h}_{m\ a\det}\circ f\right)(v_{-1}) \\ u_{3m+1}=\left(\underbrace{f\circ g\circ h\circ\ldots\circ f\circ g\circ h}_{m\ a\det}\circ f\circ g\right)(w_{-1}) \end{cases},\qquad \textbf{(3.16)}$$

$$\begin{cases} v_{3m-1}=\left(\underbrace{g\circ h\circ f\circ\ldots\circ g\circ h\circ f}_{m\ a\det}\right)(v_{-1}) \\ v_{3m}=\left(\underbrace{g\circ h\circ f\circ\ldots\circ g\circ h\circ f}_{m\ a\det}\circ g\right)(w_{-1}) \\ v_{3m+1}=\left(\underbrace{g\circ h\circ f\circ\ldots\circ g\circ h\circ f}_{m\ a\det}\circ g\circ h\right)(u_{-1}) \end{cases},\qquad \textbf{(3.17)}$$

ve

$$\begin{cases} w_{3m-1}=\left(\underbrace{h\circ f\circ g\circ\ldots\circ h\circ f\circ g}_{m\ a\det}\right)(w_{-1}) \\ w_{3m}=\left(\underbrace{h\circ f\circ g\circ\ldots\circ h\circ f\circ g}_{m\ a\det}\circ h\right)(u_{-1}) \\ w_{3m+1}=\left(\underbrace{h\circ f\circ g\circ\ldots\circ h\circ f\circ g}_{m\ a\det}\circ h\circ f\right)(v_{-1}) \end{cases}\qquad \textbf{(3.18)}$$

dır. (3.16)' dan, bazı $m\in\mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} \dfrac{-\zeta}{\varepsilon} = u_{3m-1} = \left(\underbrace{f \circ g \circ h \circ \ldots \circ f \circ g \circ h}_{m \ adet} \right)(u_{-1}) \Rightarrow \dfrac{1}{x_{-1}x_{-2}} = (f \circ g \circ h)^{[-m]} \left(\dfrac{-\zeta}{\varepsilon} \right) \\ \dfrac{-\zeta}{\varepsilon} = u_{3m} = \left(\underbrace{f \circ g \circ h \circ \ldots \circ f \circ g \circ h}_{m \ adet} \circ f \right)(v_{-1}) \Rightarrow \dfrac{1}{y_{-1}y_{-2}} = (g \circ h \circ f)^{[-m]} \circ f^{-1} \left(\dfrac{-\zeta}{\varepsilon} \right) \\ \dfrac{-\zeta}{\varepsilon} = u_{3m+1} = \left(\underbrace{f \circ g \circ h \circ \ldots \circ f \circ g \circ h}_{m \ adet} \circ f \circ g \right)(w_{-1}) \Rightarrow \dfrac{1}{z_{-1}z_{-2}} = (h \circ f \circ g)^{[-m]} \circ g^{-1} \circ f^{-1} \left(\dfrac{-\zeta}{\varepsilon} \right) \end{cases}$$

(3.19)

yazılabilir. Benzer şekilde (3.17)' den, bazı $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} \dfrac{-\beta}{\alpha} = v_{3m-1} = \left(\underbrace{g \circ h \circ f \circ \ldots \circ g \circ h \circ f}_{m \ adet} \right)(v_{-1}) \Rightarrow \dfrac{1}{y_{-1}y_{-2}} = (g \circ h \circ f)^{[-m]} \left(\dfrac{-\beta}{\alpha} \right) \\ \dfrac{-\beta}{\alpha} = v_{3m} = \left(\underbrace{g \circ h \circ f \circ \ldots \circ g \circ h \circ f}_{m \ adet} \circ g \right)(w_{-1}) \Rightarrow \dfrac{1}{z_{-1}z_{-2}} = (h \circ f \circ g)^{[-m]} \circ g^{-1} \left(\dfrac{-\beta}{\alpha} \right) \\ \dfrac{-\beta}{\alpha} = v_{3m+1} = \left(\underbrace{g \circ h \circ f \circ \ldots \circ g \circ h \circ f}_{m \ adet} \circ g \circ h \right)(u_{-1}) \Rightarrow \dfrac{1}{x_{-1}x_{-2}} = (f \circ g \circ h)^{[-m]} \circ h^{-1} \circ g^{-1} \left(\dfrac{-\beta}{\alpha} \right) \end{cases}$$

(3.20)

elde edilir. Yine benzer şekilde (3.18)' den bazı $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} \dfrac{-\delta}{\gamma} = w_{3m-1} = \left(\underbrace{h \circ f \circ g \circ \ldots \circ h \circ f \circ g}_{m \ adet} \right)(w_{-1}) \Rightarrow \dfrac{1}{z_{-1}z_{-2}} = (h \circ f \circ g)^{[-m]} \left(\dfrac{-\delta}{\gamma} \right) \\ \dfrac{-\delta}{\gamma} = w_{3m} = \left(\underbrace{h \circ f \circ g \circ \ldots \circ h \circ f \circ g}_{m \ adet} \circ h \right)(u_{-1}) \Rightarrow \dfrac{1}{x_{-1}x_{-2}} = (f \circ g \circ h)^{[-m]} \circ h^{-1} \left(\dfrac{-\delta}{\gamma} \right) \\ \dfrac{-\delta}{\gamma} = w_{3m+1} = \left(\underbrace{h \circ f \circ g \circ \ldots \circ h \circ f \circ g}_{m \ adet} \circ h \circ f \right)(v_{-1}) \Rightarrow \dfrac{1}{y_{-1}y_{-2}} = (g \circ h \circ f)^{[-m]} \circ f^{-1} \circ h^{-1} \left(\dfrac{-\delta}{\gamma} \right) \end{cases}$$

(3.21)

bulunur. Öte yandan $f(t) = \alpha t + \beta,\ g(t) = \gamma t + \delta,\ h(t) = \varepsilon t + \zeta,\ \ (f \circ g)(t) = \alpha\gamma t + \alpha\delta + \beta,$

$(g \circ h)(t) = \gamma\varepsilon t + \gamma\zeta + \delta$ ve $(h \circ f)(t) = \alpha\varepsilon t + \beta\varepsilon + \zeta$ fonksiyonlarının tersleri $f^{-1}(t) = \dfrac{t-\beta}{\alpha}$,

$g^{-1}(t)=\dfrac{t-\delta}{\gamma}$, $h^{-1}(t)=\dfrac{t-\zeta}{\varepsilon}$, $\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(t)=\dfrac{t-\alpha\delta-\beta}{\alpha\gamma}$, $\left(h^{-1}\circ g^{-1}\right)(t)=\dfrac{t-\gamma\zeta-\delta}{\gamma\varepsilon}$ ve

$\left(f^{-1}\circ h^{-1}\right)(t)=\dfrac{t-\beta\varepsilon-\zeta}{\alpha\varepsilon}$ (3.19)-(3.21) denklemlerinde dikkate alınırsa

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x_{-1}x_{-2}}=\left(f\circ g\circ h\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\zeta}{\varepsilon}\right)\\ \dfrac{1}{y_{-1}y_{-2}}=\left(g\circ h\circ f\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\beta\varepsilon-\zeta}{\alpha\varepsilon}\right)\\ \dfrac{1}{z_{-1}z_{-2}}=\left(h\circ f\circ g\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\alpha\delta\varepsilon-\beta\varepsilon-\zeta}{\alpha\gamma\varepsilon}\right)\end{cases}, \tag{3.22}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{y_{-1}y_{-2}}=\left(g\circ h\circ f\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\beta}{\alpha}\right)\\ \dfrac{1}{z_{-1}z_{-2}}=\left(h\circ f\circ g\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\alpha\delta-\beta}{\alpha\gamma}\right)\\ \dfrac{1}{x_{-1}x_{-2}}=\left(f\circ g\circ h\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\alpha\gamma\zeta-\alpha\delta-\beta}{\alpha\gamma\varepsilon}\right)\end{cases} \tag{3.23}$$

ve

$$\begin{cases}\dfrac{1}{z_{-1}z_{-2}}=\left(h\circ f\circ g\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\delta}{\gamma}\right)\\ \dfrac{1}{x_{-1}x_{-2}}=\left(f\circ g\circ h\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\gamma\zeta-\delta}{\varepsilon}\right)\\ \dfrac{1}{y_{-1}y_{-2}}=\left(g\circ h\circ f\right)^{[-m]}\left(\dfrac{-\beta\gamma\varepsilon-\zeta\gamma-\delta}{\alpha\gamma\varepsilon}\right)\end{cases} \tag{3.24}$$

(3.22)-(3.24)' den sistem (3.1)' in iyi tanımlı olmayan noktaların kümesi kolayca görülür■.

3.2. Sistem (3.1)' in Çözümlerinin Asimptotik Davranışı

Bu alt bölümde $|\alpha\gamma\varepsilon|\neq 1$, $\alpha\gamma\varepsilon=1$, $\alpha\gamma\varepsilon=-1$ olma durumlarına göre sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümlerinin asimptotik davranışı incelenecektir. Öncelikle sistem (3.1)' in açık formda çözümleri elde edilsin. (3.10), (3.11) çözümleri (3.13) kapalı formdaki çözümlerde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases}\Psi:=\alpha\gamma\zeta+\alpha\delta+\beta,\\ \Upsilon:=\beta\gamma\varepsilon+\gamma\zeta+\delta,\\ \Phi:=\alpha\delta\varepsilon+\beta\varepsilon+\zeta,\end{cases}$$

olmak üzere, $\alpha\gamma\varepsilon \neq 1$ ise

$$x_{6m+3p+i_1} = x_{3p+i_1}\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2}-\Psi\right)}{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4}-\Psi\right)}\right.$$
$$\times\left(\frac{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4}-\Psi\right)}{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3}-\Psi\right)}\right) \tag{3.25}$$
$$\left.\times\left(\frac{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3}-\Psi\right)}{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2}-\Psi\right)}\right)\right),$$

$$y_{6m+3p+i_1} = y_{3p+i_1}\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_2}-\Upsilon\right)}{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_4}-\Upsilon\right)}\right.$$
$$\times\left(\frac{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_4}-\Upsilon\right)}{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_3}-\Upsilon\right)}\right) \tag{3.26}$$
$$\left.\times\left(\frac{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_3}-\Upsilon\right)}{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_2}-\Upsilon\right)}\right)\right),$$

$$z_{6m+3p+i_1} = z_{3p+i_1}\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_2}-\Phi\right)}{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_4}-\Phi\right)}\right.$$
$$\times\left(\frac{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_4}-\Phi\right)}{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_3}-\Phi\right)}\right) \tag{3.27}$$
$$\left.\times\left(\frac{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_3}-\Phi\right)}{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_2}-\Phi\right)}\right)\right),$$

$\alpha\gamma\varepsilon = 1$ ise

$$x_{6m+3p+i_1}=x_{3p+i_1}\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{u_{i_2}+\Psi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor\right)}{u_{i_4}+\Psi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{u_{i_4}+\Psi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor\right)}{u_{i_3}+\Psi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor\right)}\right)$$
$$\times\left(\frac{u_{i_3}+\Psi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor\right)}{u_{i_2}+\Psi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor\right)}\right),\tag{3.28}$$

$$y_{6m+3p+i_1}=y_{3p+i_1}\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{v_{i_2}+\Upsilon\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor\right)}{v_{i_4}+\Upsilon\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{v_{i_4}+\Upsilon\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor\right)}{v_{i_3}+\Upsilon\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor\right)}\right)$$
$$\times\left(\frac{v_{i_3}+\Upsilon\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor\right)}{v_{i_2}+\Upsilon\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor\right)}\right),\tag{3.29}$$

$$z_{6m+3p+i_1}=z_{3p+i_1}\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{w_{i_2}+\Phi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor\right)}{w_{i_4}+\Phi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{w_{i_4}+\Phi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor\right)}{w_{i_3}+\Phi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor\right)}\right)$$
$$\times\left(\frac{w_{i_3}+\Phi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor\right)}{w_{i_2}+\Phi\left(2s+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor\right)}\right),\tag{3.30}$$

bulunur. Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $i_1\in\{-2,-1,0\}$, $p\in\{0,1\}$, $\lfloor\ \rfloor$: tam değer fonksiyon ve

$$i_2=\begin{cases}i_1+2\equiv 0\ (\operatorname{mod}3),\\ i_1+2\equiv 1\ (\operatorname{mod}3),\\ i_1+2\equiv -1\ (\operatorname{mod}3),\end{cases}\quad i_3=\begin{cases}i_1+1\equiv 0\ (\operatorname{mod}3),\\ i_1+1\equiv 1\ (\operatorname{mod}3),\\ i_1+1\equiv -1\ (\operatorname{mod}3),\end{cases}\quad i_4=\begin{cases}i_1+3\equiv 0\ (\operatorname{mod}3),\\ i_1+3\equiv 1\ (\operatorname{mod}3),\\ i_1+3\equiv -1\ (\operatorname{mod}3),\end{cases}\ \text{dur.}$$

Teorem 3.2.1. Kabul edelim ki $|\alpha\gamma\varepsilon|\neq 1$, $(x_n,y_n,z_n)_{n\geq -2}$ sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümleri olsun. Bu durumda aşağıda verilen durumlar doğrudur.

a) $|\alpha\gamma\varepsilon|<1$, $\Psi\neq 0$, $\Upsilon\neq 0$, $\Phi\neq 0$ olsun. Bu durumda $(x_n,y_n,z_n)_{n\geq -2}$ çözümü, asal olmayan, altı periyotlu çözümlere yakınsar.

b) $u_{i_2} = u_{i_3} = u_{i_4} = \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon}$ ise, o zaman $\left(x_{6m+3p+i_1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi sabittir.

c) $v_{i_2} = v_{i_3} = v_{i_4} = \dfrac{\Upsilon}{1-\alpha\gamma\varepsilon}$ ise, o zaman $\left(y_{6m+3p+i_1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi sabittir.

d) $w_{i_2} = w_{i_3} = w_{i_4} = \dfrac{\Phi}{1-\alpha\gamma\varepsilon}$ ise, o zaman $\left(z_{6m+3p+i_1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi sabittir.

e) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ u_{i_2} = u_{i_3} = \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq u_{i_4}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $x_{6m+3p+i_1} \to 0.$

f) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ u_{i_2} = u_{i_4} = \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq u_{i_3}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $x_{6m+3p+i_1} \to 0.$

g) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ u_{i_3} = u_{i_4} = \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq u_{i_2}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $\left|x_{6m+3p+i_1}\right| \to \infty.$

h) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ v_{i_2} = v_{i_3} = \dfrac{\Upsilon}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq v_{i_4}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $y_{6m+3p+i_1} \to 0.$

i) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ v_{i_2} = v_{i_4} = \dfrac{\Upsilon}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq v_{i_3}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $y_{6m+3p+i_1} \to 0.$

j) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ v_{i_3} = v_{i_4} = \dfrac{\Upsilon}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq v_{i_2}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $\left|y_{6m+3p+i_1}\right| \to \infty.$

k) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ w_{i_2} = w_{i_3} = \dfrac{\Phi}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq w_{i_4}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $z_{6m+3p+i_1} \to 0.$

l) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ w_{i_2} = w_{i_4} = \dfrac{\Phi}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq w_{i_3}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $z_{6m+3p+i_1} \to 0.$

m) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ w_{i_3} = w_{i_4} = \dfrac{\Phi}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq w_{i_2}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $\left|z_{6m+3p+i_1}\right| \to \infty.$

n) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ u_{i_2} \neq \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon},\ u_{i_3} \neq \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon},\ u_{i_4} \neq \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $x_{6m+3p+i_1} \to 0.$

o) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ v_{i_2} \neq \dfrac{\Upsilon}{1-\alpha\gamma\varepsilon},\ v_{i_3} \neq \dfrac{\Upsilon}{1-\alpha\gamma\varepsilon},\ v_{i_4} \neq \dfrac{\Upsilon}{1-\alpha\gamma\varepsilon}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $y_{6m+3p+i_1} \to 0.$

p) $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1,\ w_{i_2} \neq \dfrac{\Phi}{1-\alpha\gamma\varepsilon},\ w_{i_3} \neq \dfrac{\Phi}{1-\alpha\gamma\varepsilon},\ w_{i_4} \neq \dfrac{\Phi}{1-\alpha\gamma\varepsilon}$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $z_{6m+3p+i_1} \to 0.$

q) $\alpha\gamma\varepsilon=1,\ \Psi=0$ ise, $\left(x_{6m+3p+i_1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi 6-periyotludur.

r) $\alpha\gamma\varepsilon=1,\ \Upsilon=0$ ise, $\left(y_{6m+3p+i_1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi 6-periyotludur.

s) $\alpha\gamma\varepsilon=1,\ \Phi=0$ ise, $\left(z_{6m+3p+i_1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi 6-periyotludur.

t) $\alpha\gamma\varepsilon=1,\ \Psi\neq 0$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $x_{6m+3p+i_1}\to 0.$

u) $\alpha\gamma\varepsilon=1,\ \Upsilon\neq 0$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $y_{6m+3p+i_1}\to 0.$

v) $\alpha\gamma\varepsilon=1,\ \Phi\neq 0$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $z_{6m+3p+i_1}\to 0.$

Burada

$m\in\mathbb{N}_0,\ i_1\in\{-2,-1,0\},\ p\in\{0,1\},\ \Psi:=\alpha\gamma\zeta+\alpha\delta+\beta,\ \Upsilon:=\beta\gamma\varepsilon+\gamma\zeta+\delta,\ \Phi:=\alpha\delta\varepsilon+\beta\varepsilon+\zeta$

$$i_2=\begin{cases} i_1+2\equiv 0\ (\bmod 3),\\ i_1+2\equiv 1\ (\bmod 3),\\ i_1+2\equiv -1\ (\bmod 3),\end{cases}\quad i_3=\begin{cases} i_1+1\equiv 0\ (\bmod 3),\\ i_1+1\equiv 1\ (\bmod 3),\\ i_1+1\equiv -1\ (\bmod 3),\end{cases}\quad i_4=\begin{cases} i_1+3\equiv 0\ (\bmod 3),\\ i_1+3\equiv 1\ (\bmod 3),\\ i_1+3\equiv -1\ (\bmod 3),\end{cases}\quad \text{dir.}$$

İspat. $m\in\mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} X_m:=&\left(\frac{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2}-\Psi\right)}{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4}-\Psi\right)}\right)\left(\frac{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4}-\Psi\right)}{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3}-\Psi\right)}\right)\\ &\times\left(\frac{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3}-\Psi\right)}{\Psi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2}-\Psi\right)}\right), \end{aligned}\tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} Y_m:=&\left(\frac{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_2}-\Upsilon\right)}{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_4}-\Upsilon\right)}\right)\left(\frac{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_4}-\Upsilon\right)}{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_3}-\Upsilon\right)}\right)\\ &\times\left(\frac{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_3}-\Upsilon\right)}{\Upsilon+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_2}-\Upsilon\right)}\right), \end{aligned}\tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} Z_m:=&\left(\frac{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_2}-\Phi\right)}{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_4}-\Phi\right)}\right)\left(\frac{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_4}-\Phi\right)}{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_3}-\Phi\right)}\right)\\ &\times\left(\frac{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_3}-\Phi\right)}{\Phi+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_2}-\Phi\right)}\right), \end{aligned}\tag{3.33}$$

olsun.

a) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+O(x^2)$ seri açılımı ve yeterince büyük m değerleri için (3.31)-(3.33) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
X_m &= \left(\frac{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2}-\Psi\right)\Psi^{-1}}{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4}-\Psi\right)\Psi^{-1}}\right)\left(\frac{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4}-\Psi\right)\Psi^{-1}}{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3}-\Psi\right)\Psi^{-1}}\right)\\
&\times\left(\frac{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3}-\Psi\right)\Psi^{-1}}{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2}-\Psi\right)\Psi^{-1}}\right)\\
&=\left(1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}u_{i_2}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}u_{i_4}\right)-\Psi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\right)}{\Psi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right)\right)\\
&\times\left(1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}u_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}u_{i_3}\right)-\Psi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\right)}{\Psi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right)\right)\\
&\times\left(1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}u_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}u_{i_3}\right)-\Psi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\right)}{\Psi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right)\right)\\
&=1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}u_{i_2}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}u_{i_4}\right)-\Psi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\right)}{\Psi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}\\
&+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}u_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}u_{i_3}\right)-\Psi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\right)}{\Psi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}\\
&+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}u_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}u_{i_3}\right)-\Psi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\right)}{\Psi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right)
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_m &= \left(\frac{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_2}-\Upsilon\right)\Upsilon^{-1}}{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_4}-\Upsilon\right)\Upsilon^{-1}} \right)\left(\frac{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_4}-\Upsilon\right)\Upsilon^{-1}}{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_3}-\Upsilon\right)\Upsilon^{-1}} \right) \\
&\times \left(\frac{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_3}-\Upsilon\right)\Upsilon^{-1}}{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)v_{i_2}-\Upsilon\right)\Upsilon^{-1}} \right) \\
&= \left(1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor}v_{i_2}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor}v_{i_4}\right)-\Upsilon\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor}\right)}{\Upsilon}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right) \right) \\
&\times \left(1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor}v_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor}v_{i_3}\right)-\Upsilon\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor}\right)}{\Upsilon}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right) \right) \\
&\times \left(1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor}v_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor}v_{i_3}\right)-\Upsilon\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor}\right)}{\Upsilon}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right) \right) \\
&= 1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor}v_{i_2}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor}v_{i_4}\right)-\Upsilon\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor}\right)}{\Upsilon}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p} \\
&+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor}v_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor}v_{i_3}\right)-\Upsilon\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor}\right)}{\Upsilon}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p} \qquad \textbf{(3.35)} \\
&+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor}v_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor}v_{i_3}\right)-\Upsilon\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor}\right)}{\Upsilon}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$Z_m=\left(\frac{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_2}-\Phi\right)\Phi^{-1}}{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_4}-\Phi\right)\Phi^{-1}}\right)\left(\frac{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_4}-\Phi\right)\Phi^{-1}}{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_3}-\Phi\right)\Phi^{-1}}\right)$$

$$\times\left(\frac{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_3}-\Phi\right)\Phi^{-1}}{1+(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)w_{i_2}-\Phi\right)\Phi^{-1}}\right)$$

$$=\left(1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}w_{i_2}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}w_{i_4}\right)-\Phi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\right)}{\Phi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right)\right)$$

$$\times\left(1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}w_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}w_{i_3}\right)-\Phi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\right)}{\Phi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right)\right)$$

$$\times\left(1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}w_{i_3}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}w_{i_2}\right)-\Phi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\right)}{\Phi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right)\right)$$

$$=1+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}w_{i_2}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}w_{i_4}\right)-\Phi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\right)}{\Phi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}$$

$$+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}w_{i_4}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}w_{i_3}\right)-\Phi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\right)}{\Phi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p} \qquad \textbf{(3.36)}$$

$$+\frac{(1-\alpha\gamma\varepsilon)\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}w_{i_3}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}w_{i_2}\right)-\Phi\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}-(\alpha\gamma\varepsilon)^{\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\right)}{\Phi}(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p}+O\left((\alpha\gamma\varepsilon)^{2m}\right).$$

(3.34)-(3.36) ve $|\alpha\gamma\varepsilon|<1$ koşulu ve $\left(\prod_{s=1}^{m}X_s\right)_{m\in\mathbb{N}}$, $\left(\prod_{s=1}^{m}Y_s\right)_{m\in\mathbb{N}}$, $\left(\prod_{s=1}^{m}Z_s\right)_{m\in\mathbb{N}}$ dizilerinin yakınsaklığı ve (3.25)-(3.27)' deki çözümlerden $(x_n,y_n,z_n)_{n\geq-2}$ çözümleri altı peryotlu periyodik çözümlere yakınsar.

b) $u_{i_2}=u_{i_3}=u_{i_4}=\dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon}$ ise (3.25)' teki çözümlerden istenilen sonuç kolayca görülür.

c) $v_{i_2}=v_{i_3}=v_{i_4}=\dfrac{\Upsilon}{1-\alpha\gamma\varepsilon}$ ise (3.26)' daki çözümlerden istenilem sonuç kolayca görülür.

d) $w_{i_2}=w_{i_3}=w_{i_4}=\dfrac{\Phi}{1-\alpha\gamma\varepsilon}$ ise (3.27)' deki çözümlerden istenilen sonuç kolayca görülür.

e) Denklem (3.31)' te $u_{i_2} = u_{i_3} = \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq u_{i_4}$ alınır (bu denklem de $X_m^{(1)}$ ile tanımlanırsa) ve

$\forall i_1 \in \{-2,-1,0\}$ değerleri için

$$X_m^{(1)} = \frac{\Psi + (\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4} - \Psi\right)}{\Psi + (\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4} - \Psi\right)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\Psi}{(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor}} + (1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4} - \Psi\right)}{\alpha\gamma\varepsilon\left(\dfrac{\Psi}{(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor}} + (1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_4} - \Psi\right)} \qquad \textbf{(3.37)}$$

elde edilir. Ayrıca $\lim_{m\to\infty} X_m^{(1)} = \dfrac{1}{\alpha\gamma\varepsilon}$ olduğu dikkate alınır ve (3.25)' teki çözüm ile $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1$ kabulünden ispat kolayca görülür.

f) Denklem (3.31)' te $u_{i_2} = u_{i_4} = \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq u_{i_3}$ alınır (bu denklem de $X_m^{(2)}$ ile tanımlanırsa) ve

$\forall i_1 \in \{-2,-1,0\}$ değerleri için

$$X_m^{(2)} = \frac{\Psi + (\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3} - \Psi\right)}{\Psi + (\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3} - \Psi\right)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\Psi}{(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor}} + (1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3} - \Psi\right)}{\alpha\gamma\varepsilon\left(\dfrac{\Psi}{(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor}} + (1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_3} - \Psi\right)} \qquad \textbf{(3.38)}$$

elde edilir. Ayrıca $\lim_{m\to\infty} X_m^{(2)} = \dfrac{1}{\alpha\gamma\varepsilon}$ olduğu dikkate alınır ve (3.25)' teki çözüm ile $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1$ kabulünden ispat kolayca görülür.

g) Denklem (3.31)' te $u_{i_3} = u_{i_4} = \dfrac{\Psi}{1-\alpha\gamma\varepsilon} \neq u_{i_2}$ alınır (bu denklem de $X_m^{(3)}$ ile tanımlanırsa) ve

$\forall i_1 \in \{-2,-1,0\}$ değerleri için

$$X_m^{(3)} = \frac{\Psi + (\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2} - \Psi\right)}{\Psi + (\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor}\left((1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2} - \Psi\right)}$$

$$= \frac{\alpha\gamma\varepsilon\left(\dfrac{\Psi}{(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor}} + (1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2} - \Psi\right)}{\left(\dfrac{\Psi}{(\alpha\gamma\varepsilon)^{2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor}} + (1-\alpha\gamma\varepsilon)u_{i_2} - \Psi\right)} \qquad \textbf{(3.39)}$$

elde edilir. Ayrıca $\lim_{m\to\infty} X_m^{(3)} = \alpha\gamma\varepsilon$ olduğu dikkate alınır ve (3.25)' teki çözüm ile $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1$ kabulünden ispat kolayca görülür.

(h)-(j) ile ***(k)-(m)*** öncüllerinin ispatları ***(e)-(g)*** öncüllerinin ispatlarına benzer olduğu için gözardı edilmiştir.

(n)-(p): $\forall i_1 \in \{-2,-1,0\}$ değerleri için (3.31) denkleminin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{m\to\infty} X_m = \lim_{m\to\infty} Y_m = \lim_{m\to\infty} Z_m = \frac{1}{\alpha\gamma\varepsilon} \qquad \textbf{(3.40)}$$

elde edilir. Denklem (3.25) ve $|\alpha\gamma\varepsilon| > 1$ kabulünden istenilen sonuç kolayca görülür.

(q)-(s): (3.28)-(3.30) çözümlerinden ve teoremin öncüllerinden istenilen sonuçlar kolayca görülür.

(t)-(v): Öncelikle (3.28)-(3.30) çözümlerinden aşağıdaki notasyonlar tanımlansın.

$$\tilde{X}_m = \left(\frac{u_{i_2} + \Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor\right)}{u_{i_2} + \Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{u_{i_3} + \Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor\right)}{u_{i_3} + \Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{u_{i_4} + \Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor\right)}{u_{i_4} + \Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor\right)}\right), \qquad \textbf{(3.41)}$$

$$\tilde{Y}_m = \left(\frac{v_{i_2} + \Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor\right)}{v_{i_2} + \Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{v_{i_3} + \Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor\right)}{v_{i_3} + \Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor\right)}\right)\times\left(\frac{v_{i_4} + \Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor\right)}{v_{i_4} + \Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor\right)}\right), \qquad \textbf{(3.42)}$$

$$\tilde{Z}_m = \left(\frac{w_{i_2} + \Phi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3} \right\rfloor\right)}{w_{i_2} + \Phi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3} \right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{w_{i_3} + \Phi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3} \right\rfloor\right)}{w_{i_3} + \Phi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3} \right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{w_{i_4} + \Phi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3} \right\rfloor\right)}{w_{i_4} + \Phi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3} \right\rfloor\right)}\right). \qquad \textbf{(3.43)}$$

$\frac{1}{1+x}=1-x+O(x^2)$ seri açılımı ve yeterince büyük m değerleri için (3.41)-(3.43) denklemlerinden $\forall i_1 \in \{-2,-1,0\}$ ve $p \in \{0,1\}$ için

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_m &= \left(\frac{u_{i_2}+\Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3}\right\rfloor\right)}{u_{i_2}+\Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{u_{i_3}+\Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3}\right\rfloor\right)}{u_{i_3}+\Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{u_{i_4}+\Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3}\right\rfloor\right)}{u_{i_4}+\Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3}\right\rfloor\right)}\right) \\
&= \left(1+\frac{\Psi}{u_{i_2}+\Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(1-\frac{\Psi}{u_{i_3}+\Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(1-\frac{\Psi}{u_{i_4}+\Psi\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3}\right\rfloor\right)}\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) \\
&= 1-\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right),
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y}_m &= \left(\frac{v_{i_2}+\Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1}{3}\right\rfloor\right)}{v_{i_2}+\Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{v_{i_3}+\Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-4}{3}\right\rfloor\right)}{v_{i_3}+\Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{v_{i_4}+\Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-2}{3}\right\rfloor\right)}{v_{i_4}+\Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3}\right\rfloor\right)}\right) \\
&= \left(1+\frac{\Upsilon}{v_{i_2}+\Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-3}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(1-\frac{\Upsilon}{v_{i_3}+\Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1-1}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(1-\frac{\Upsilon}{v_{i_4}+\Upsilon\left(2m+p+\left\lfloor \frac{i_1+1}{3}\right\rfloor\right)}\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) \\
&= 1-\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right),
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

$$\tilde{Z}_m=\left(\frac{w_{i_2}+\Phi\left(2m+p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor\right)}{w_{i_2}+\Phi\left(2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{w_{i_3}+\Phi\left(2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor\right)}{w_{i_3}+\Phi\left(2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(\frac{w_{i_4}+\Phi\left(2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor\right)}{w_{i_4}+\Phi\left(2m+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor\right)}\right)$$

$$=\left(1+\frac{\Phi}{w_{i_2}+\Phi\left(2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(1-\frac{\Phi}{w_{i_3}+\Phi\left(2m+p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor\right)}\right)\left(1-\frac{\Phi}{w_{i_4}+\Phi\left(2m+p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor\right)}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)$$

$$=1-\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{3.46}$$

elde edilir. (3.44)-(3.46) denklemlerinden

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right)=e^{\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{2j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right)}=e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}+O\left(\frac{1}{j^2}\right)\right)}, \tag{3.47}$$

ve $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}=\infty$ eşitiliğinden teoremin öncüllerinin doğruluğu kolayca görülür■.

Şimdi $\alpha\gamma\varepsilon=-1$ olduğu durumda sistem (3.1)' in çözümlerini $m\in\mathbb{N}_0$, $i_1\in\{-2,-1,0\}$, $p\in\{0,1\}$ için aşağıdaki şekilde yeniden verilsin.

$$x_{6m+3p+i_1}=x_{3p+i_1}\left(\frac{\Psi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left(2u_{i_2}-\Psi\right)}{\Psi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left(2u_{i_4}-\Psi\right)}\right)^m\left(\frac{\Psi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left(2u_{i_4}-\Psi\right)}{\Psi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left(2u_{i_3}-\Psi\right)}\right)^m\left(\frac{\Psi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left(2u_{i_3}-\Psi\right)}{\Psi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left(2u_{i_2}-\Psi\right)}\right)^m, \tag{3.48}$$

$$y_{6m+3p+i_1}=y_{3p+i_1}\left(\frac{\Upsilon+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left(2v_{i_2}-\Upsilon\right)}{\Upsilon+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left(2v_{i_4}-\Upsilon\right)}\right)^m\left(\frac{\Upsilon+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left(2v_{i_4}-\Upsilon\right)}{\Upsilon+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left(2v_{i_3}-\Upsilon\right)}\right)^m\left(\frac{\Upsilon+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left(2v_{i_3}-\Upsilon\right)}{\Upsilon+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left(2v_{i_2}-\Upsilon\right)}\right)^m, \tag{3.49}$$

$$z_{6m+3p+i_1}=z_{3p+i_1}\left(\frac{\Phi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1}{3}\right\rfloor}\left(2w_{i_2}-\Phi\right)}{\Phi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1+1}{3}\right\rfloor}\left(2w_{i_4}-\Phi\right)}\right)^m\left(\frac{\Phi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-2}{3}\right\rfloor}\left(2w_{i_4}-\Phi\right)}{\Phi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-1}{3}\right\rfloor}\left(2w_{i_3}-\Phi\right)}\right)^m\left(\frac{\Phi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-4}{3}\right\rfloor}\left(2w_{i_3}-\Phi\right)}{\Phi+(-1)^{p+\left\lfloor\frac{i_1-3}{3}\right\rfloor}\left(2w_{i_2}-\Phi\right)}\right)^m. \tag{3.50}$$

Şimdi verilecek teoremde kullanmak için aşağıdaki notasyanları tanımlansın.

$$L_1 := \frac{(\Psi - u_0)u_1u_{-1}}{(\Psi - u_1)(\Psi - u_{-1})u_0}, \tag{3.51}$$

$$L_2 := \frac{(\Upsilon - v_0)v_1v_{-1}}{(\Upsilon - v_1)(\Upsilon - v_{-1})v_0}, \tag{3.52}$$

$$L_3 := \frac{(\Phi - w_0)w_1w_{-1}}{(\Phi - w_1)(\Phi - w_{-1})w_0}. \tag{3.53}$$

Teorem 3.2.2. Kabul edelim ki $\alpha\gamma\varepsilon = -1$, $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -2}$ sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümleri olsun. Bu durumda aşağıda verilen durumlar doğrudur.

a) $|L_1| < 1$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $j \in \{-1,0,1\}$ için $x_{6m-2j} \to 0$, $|x_{6m-2j+1}| \to \infty$.

b) $|L_1| > 1$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $j \in \{-1,0,1\}$ için $|x_{6m-2j}| \to \infty$, $x_{6m-2j+1} \to 0$.

c) $L_1 = 1$ ise $(x_{6m+3p+i_1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi 6-periyotludur.

d) $L_1 = -1$ ise $(x_{6m+3p+i_1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi 12-periyotludur.

e) $|L_2| < 1$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $j \in \{-1,0,1\}$ için $y_{6m-2j} \to 0$, $|y_{6m-2j+1}| \to \infty$.

f) $|L_2| > 1$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $j \in \{-1,0,1\}$ için $|y_{6m-2j}| \to \infty$, $y_{6m-2j+1} \to 0$.

g) $L_2 = 1$ ise $(y_{6m+3p+i_1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi 6-periyotludur.

h) $L_2 = -1$ ise $(y_{6m+3p+i_1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi 12-periyotludur.

i) $|L_3| < 1$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $j \in \{-1,0,1\}$ için $z_{6m-2j} \to 0$, $|z_{6m-2j+1}| \to \infty$.

j) $|L_3| > 1$ ise, o zaman $m \to \infty$ iken $j \in \{-1,0,1\}$ için $|z_{6m-2j}| \to \infty$, $z_{6m-2j+1} \to 0$.

k) $L_3 = 1$ ise $(z_{6m+3p+i_1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi 6-periyotludur.

l) $L_3 = -1$ ise $(z_{6m+3p+i_1})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizisi 12-periyotludur.

Burada $p \in \{0,1\}$ ve $i_1 \in \{-2,-1,0\}$ ' dır.

İspat. (3.48)-(3.50)' deki çözümler ve

$m \in \mathbb{N}_0$, $i_1 \in \{-2,-1,0\}$, $p \in \{0,1\}$, $\Psi := \alpha\gamma\zeta + \alpha\delta + \beta$, $\Upsilon := \beta\gamma\varepsilon + \gamma\zeta + \delta$, $\Phi := \alpha\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \zeta$

$$i_2=\begin{cases} i_1+2\equiv 0 \pmod 3, \\ i_1+2\equiv 1 \pmod 3, \\ i_1+2\equiv -1 \pmod 3, \end{cases} \quad i_3=\begin{cases} i_1+1\equiv 0 \pmod 3, \\ i_1+1\equiv 1 \pmod 3, \\ i_1+1\equiv -1 \pmod 3, \end{cases} \quad i_4=\begin{cases} i_1+3\equiv 0 \pmod 3, \\ i_1+3\equiv 1 \pmod 3, \\ i_1+3\equiv -1 \pmod 3, \end{cases}$$ değerleri dikkate

alındığında

$$\begin{cases} x_{6m-2}=x_{-2}L_1^m, & x_{6m-1}=x_{-1}\dfrac{1}{L_1^m}, \\ x_{6m}=x_0L_1^m, & x_{6m+1}=x_1\dfrac{1}{L_1^m}, \\ x_{6m+2}=x_2L_1^m, & x_{6m+3}=x_3\dfrac{1}{L_1^m}, \end{cases} \tag{3.54}$$

$$\begin{cases} y_{6m-2}=y_{-2}L_2^m, & y_{6m-1}=y_{-1}\dfrac{1}{L_2^m}, \\ y_{6m}=y_0L_2^m, & y_{6m+1}=y_1\dfrac{1}{L_2^m}, \\ y_{6m+2}=y_2L_2^m, & y_{6m+3}=y_3\dfrac{1}{L_2^m}, \end{cases} \tag{3.55}$$

ve

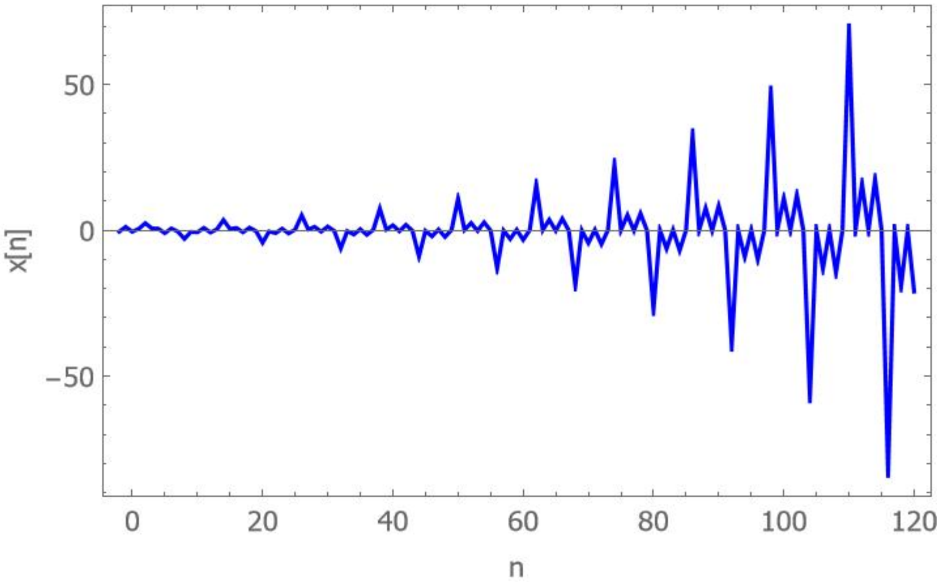
$$\begin{cases} z_{6m-2}=z_{-2}L_3^m, & z_{6m-1}=z_{-1}\dfrac{1}{L_3^m}, \\ z_{6m}=z_0L_3^m, & z_{6m+1}=z_1\dfrac{1}{L_3^m}, \\ z_{6m+2}=z_2L_3^m, & z_{6m+3}=z_3\dfrac{1}{L_3^m}, \end{cases} \tag{3.56}$$

çözümleri yazılır. (3.54)-(3.56)’ deki çözümler ve teoremin öncüllerindeki hipotezler dikkate alındığında istenilen sonuçlar kolayca görülür ■.

BÖLÜM 4
NÜMRİK UYGULAMALAR

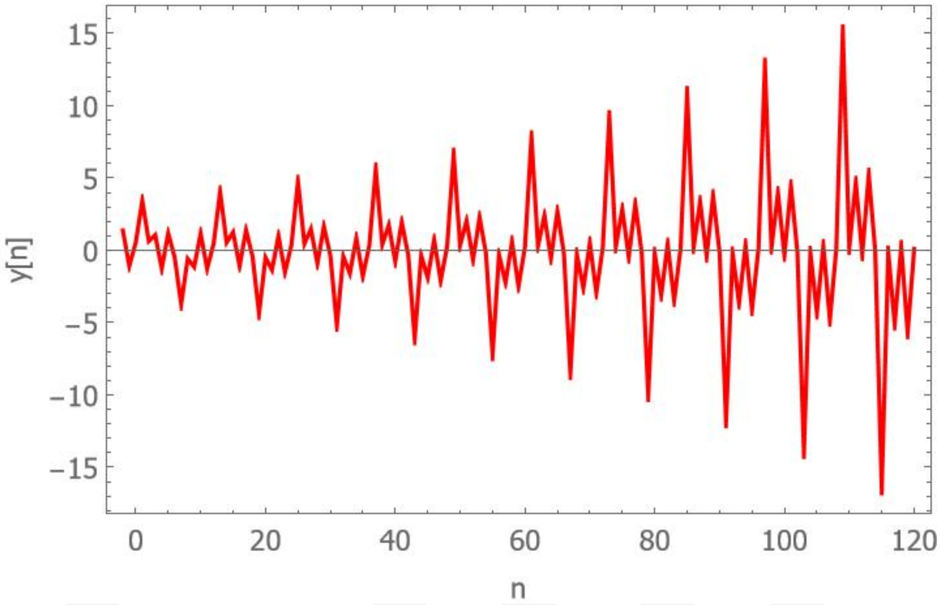
Bu bölümde, önceki bölümde verilen fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışı ile ilgili nümerik örneklere yer verildi.

Örnek 4.1. Aşağıda, Teorem 3.2.2.'nin (b) öncüllerinin uygulaması olarak $\alpha = 2,\ \beta = -0.3,\ \gamma = 0.5,\ \delta = -1.07,\ \varepsilon = -1,\ \zeta = 1.43$ parametreleri ve $x_{-2} = -0.47,\ x_{-1} = 1.19,\ y_{-2} = 1.38,\ y_{-1} = -1.09,\ z_{-2} = 0.71,\ z_{-1} = -1.13$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafikleri verilmiştir.



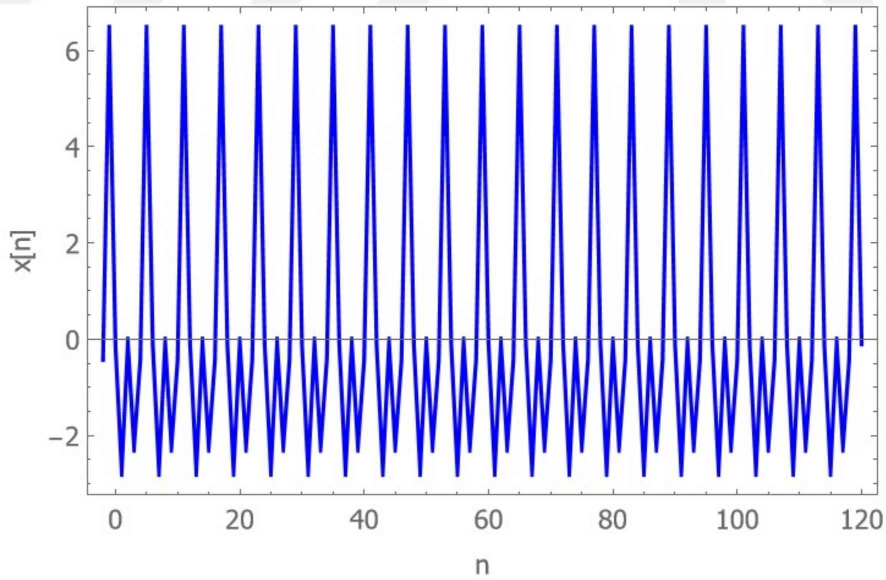
Grafik 4.2: Teorem 3.2.2' nin (b) öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.2. Aşağıda, Teorem 3.2.2.'nin (e) öncüllerinin uygulaması olarak $\alpha = 2,\ \beta = -0.3,\ \gamma = 0.5,\ \delta = -1.07,\ \varepsilon = -1,\ \zeta = 1.43$ parametreleri ve $x_{-2} = -0.47,\ x_{-1} = 1.19,\ y_{-2} = 1.38,\ y_{-1} = -1.09,\ z_{-2} = 0.71,\ z_{-1} = -1.13$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafikleri verilmiştir.



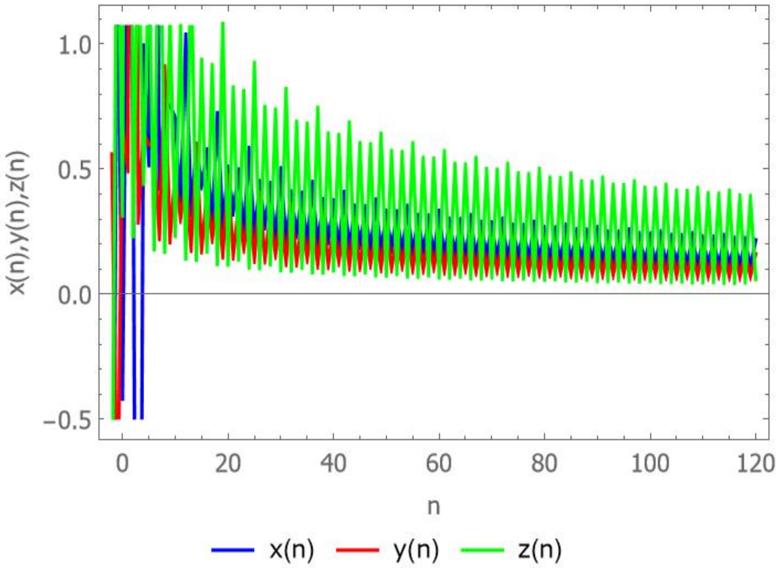
Grafik 4.2: Teorem 3.2.2' nin (e) öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.3: Aşağıda, Teorem 3.2.2.'nin (c) öncüllerinin uygulaması olarak $\alpha = 2,\ \beta = -0.64,\ \gamma = 0.5,\ \delta = 2,\ \varepsilon = -1,\ \zeta = 1$ parametreleri ve $x_{-2} = -0.434709,\ x_{-1} = 6.4,\ y_{-2} = 2.56,\ y_{-1} = -1,\ z_{-2} = -8,\ z_{-1} = 4$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafikleri verilmiştir.



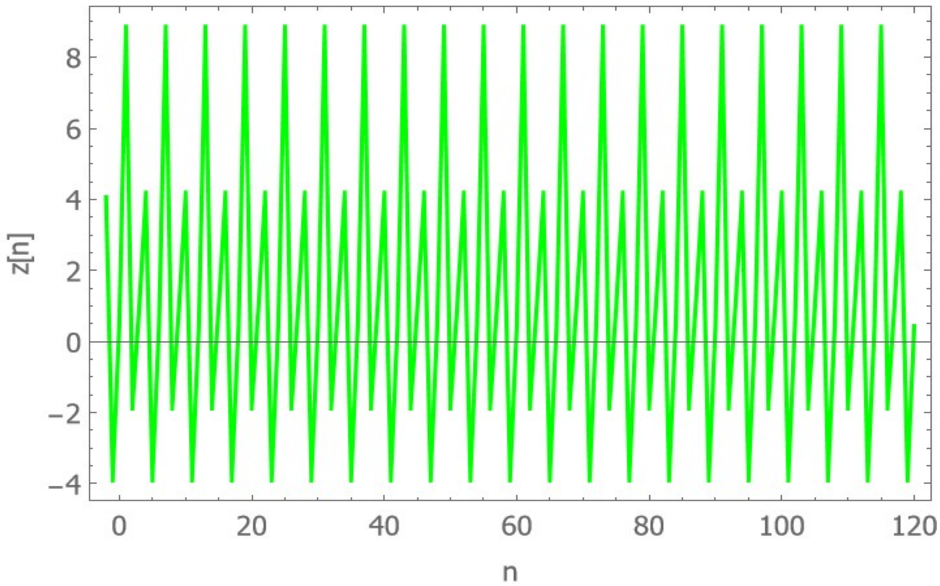
Grafik 4.3: Teorem 3.2.2' nin (c) öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.4: Aşağıda, Teorem 3.2.1.'in (t), (u) ve (v) öncüllerinin uygulaması olarak $\alpha = 0.5,\ \beta = -0.64,\ \gamma = 2,\ \delta = -0.43,\ \varepsilon = 1,\ \zeta = 1.94$ parametreleri ve $x_{-2} = -2.501,\ x_{-1} = 1.635,\ y_{-2} = 0.56,\ y_{-1} = -1.017,\ z_{-2} = -1.07,\ z_{-1} = 1.79$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafikleri verilmiştir.



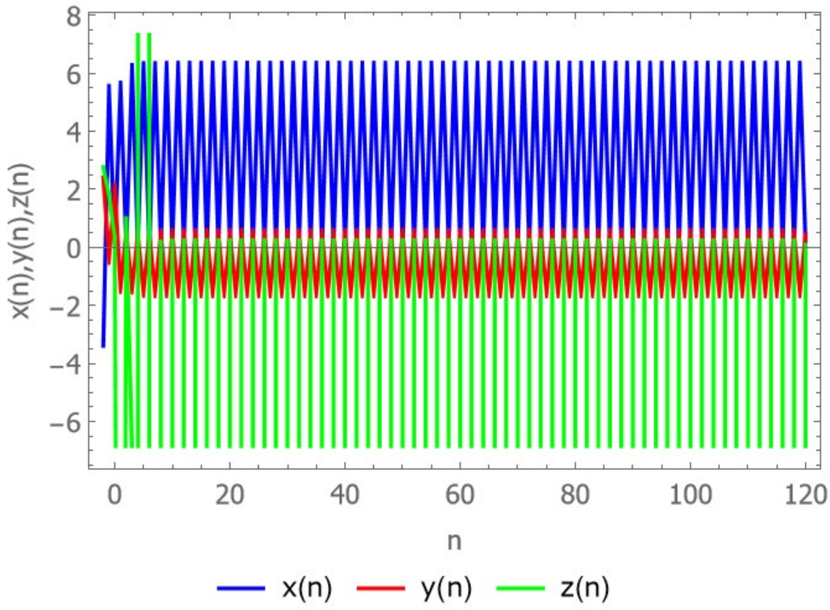
Grafik 4.4: Teorem 3.2.1' in (t), (u) ve (v) öncüllerinin bir uygulaması

Örnek 4.5: Aşağıda, Teorem 3.2.1.'in (s) öncülünün uygulaması olarak $\alpha = 0.5,\ \beta = 1.5,\ \gamma = 2,\ \delta = -2,\ \varepsilon = 1,\ \zeta = -0.5$ parametreleri ve $x_{-2} = -3.41,\ x_{-1} = 2.91,\ y_{-2} = 1.38,\ y_{-1} = -0.49,\ z_{-2} = 4.07,\ z_{-1} = -3.79$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafikleri verilmiştir.



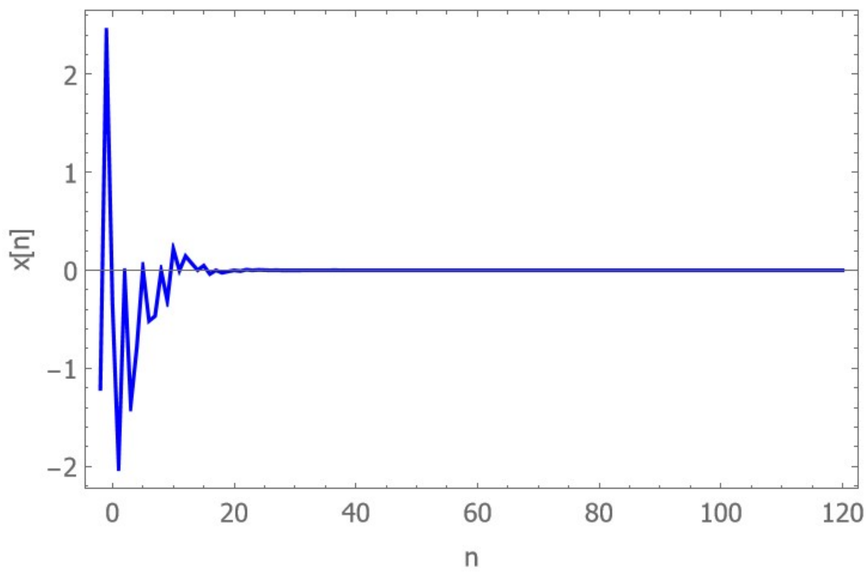
Grafik 4.5: Teorem 3.2.1' in (s) öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.6: Aşağıda, Teorem 3.2.1.'in (a) öncülünün uygulaması olarak $\alpha = 0.3,\ \beta = 3.5,\ \gamma = 0.7,\ \delta = -1.45,\ \varepsilon = -0.5,\ \zeta = 1.53$ parametreleri ve $x_{-2} = -3.39,\ x_{-1} = 5.41,\ y_{-2} = 2.41\ y_{-1} = -0.38,\ z_{-2} = 2.77,\ z_{-1} = 1.79$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafikleri verilmiştir.



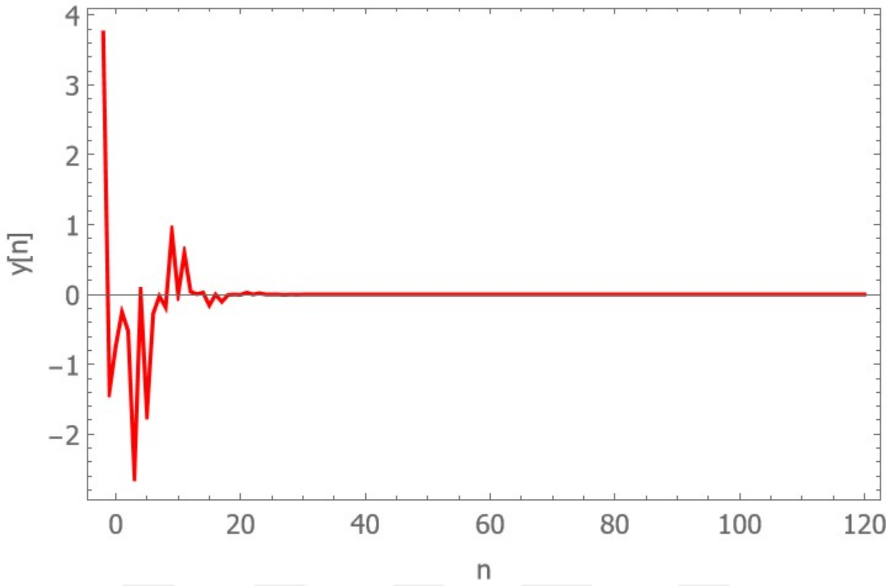
Grafik 4.6: Teorem 3.2.1' in (a) öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.7: Aşağıda, Teorem 3.2.1.'in (n) öncülünün uygulaması olarak $\alpha = 2.3,\ \beta = -0.77,\ \gamma = 1.7,\ \delta = -1.3,\ \varepsilon = -1.5,\ \zeta = 3.41$ parametreleri ve $x_{-2} = -1.21,\ x_{-1} = 2.41,\ y_{-2} = 3.75,\ y_{-1} = -1.38,\ z_{-2} = 1.66,\ z_{-1} = 0.45$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafikleri verilmiştir.



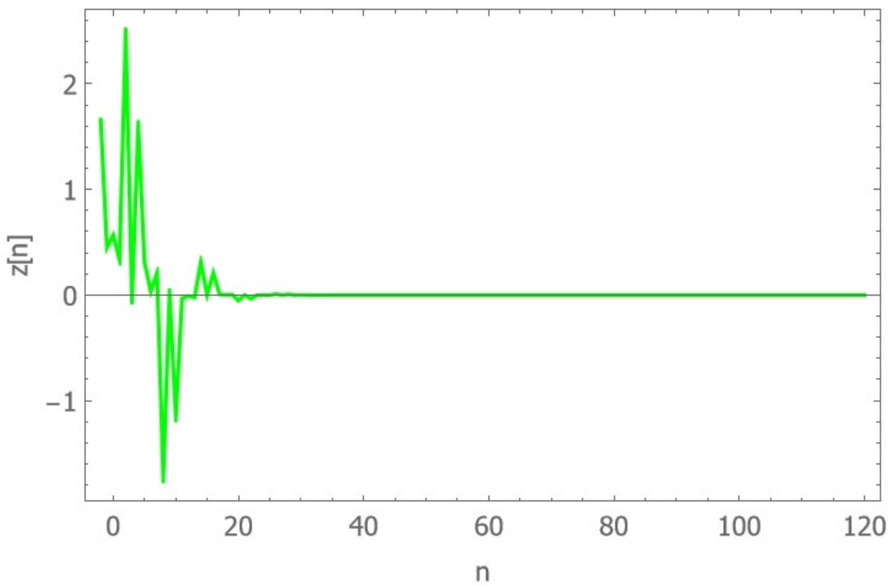
Grafik 4.6: Teorem 3.2.1' in (n) öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.8: Aşağıda, Teorem 3.2.1.'in (o) öncülünün uygulaması olarak $\alpha = 2.3,\ \beta = -0.77,\ \gamma = 1.7,\ \delta = -1.3,\ \varepsilon = -1.5,\ \zeta = 3.41$ parametreleri ve $x_{-2} = -1.21,\ x_{-1} = 2.41,\ y_{-2} = 3.75,\ y_{-1} = -1.38,\ z_{-2} = 1.66,\ z_{-1} = 0.45$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafikleri verilmiştir.



Grafik 4.6: Teorem 3.2.1' in (o) öncülünün bir uygulaması

Örnek 4.9: Aşağıda, Teorem 3.2.1.'in (p) öncülünün uygulaması olarak $\alpha = 2.3,\ \beta = -0.77,\ \gamma = 1.7,\ \delta = -1.3,\ \varepsilon = -1.5,\ \zeta = 3.41$ parametreleri ve $x_{-2} = -1.21,\ x_{-1} = 2.41,\ y_{-2} = 3.75,\ y_{-1} = -1.38,\ z_{-2} = 1.66,\ z_{-1} = 0.45$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafikleri verilmiştir.



Grafik 4.6: Teorem 3.2.1' in (p) öncülünün bir uygulaması

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuçlar

Bu çalışmada, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ parametreler ve $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, i \in \{1, 2\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$x_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_{n-1}(\alpha + \beta y_{n-1}y_{n-2})},\ y_n = \frac{z_{n-1}z_{n-2}}{y_{n-1}(\gamma + \delta z_{n-1}z_{n-2})},\ z_n = \frac{x_{n-1}x_{n-2}}{z_{n-1}(\varepsilon + \zeta x_{n-1}x_{n-2})},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

üç-boyutlu ikinci mertebeden lineer olmayan fark denklem sisteminin iyi tanımlı kapalı formda çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra verilen fark denklem sisteminin iyi tanımlı yapmayan başlangıç koşulların kümesi elde edilmiştir. Son bölümde ise verilen fark denklem sisteminin iyi tanımlı çözümlerinin aimptotik davranışı incelenmiştir.

Öneriler

Sistem (3.1)' ini *k*-boyutlı bir sisteme genişleterek elde edilen sistemin kapalı formda genel çözümleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Ahmed, A. M., & Elsayed, E. M., The expressions of solutions and the periodicity of some rational difference equations systems, *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 34(1-2), 35-48, 2016.
2. Allam, A., Halim, Y. & Khelifa, A., Convergence of solutions of a system of recurrence equations, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1-19, 2022 (https://doi.org/10.1007/s12190-022-01807-x).
3. Alzahrani, E. O., El-Dessoky, M. M., Elsayed, E. M., & Kuang, Y., Solutions and properties of some degenerate systems of digerence equations, *Journal of Computational Analysis and Applications* 18(2), 321-333, 2015.
4. Boulouh, M., Touafek, N. & Tollu, D.T., On the behaivor of solutions of an abstract system of difference equations, *Journal of Applied Mathematics and Computing* 68, 2973-2969, 2022.
5. Bereketoğlu H. & Kutay V., Fark Denklemleri, Gazi Kitapevi, Ankara, 2012.
6. Chatterjee, E., Grove, E. A., Kostrov, Y., & Ladas, G., On the trichotomy character of $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}}$, *Journal of Difference Equations and Applications* 9(12), 1113-1128, 2003.
7. Cinar, C., On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}$, *Applied Mathematics and Computation* 150(1), 21-24 2004.
8. Dekkar, I., Touafek, N. & Din, Q., On the global Dynamics of a rational difference equation with periodic coefficients, *Journal of Applied Mathematics and Computing* 60, 567-588, 2019.
9. Elaydi, S.N., An introduction to Difference Equations, Springer New York, NY, 2005.
10. El-Metwally, H., & Elsayed, E. M., Qualitative study of solutions of some difference equations, *Abstract and Applied Analysis,* 1-16*,* 2012, Article ID 248291.
11. El-Dessoky, M.M., On a solvable for some systems of rational difference equations, *Journal of Nonlinear Science and Application* 9(6), 3744-3759, 2016.
12. Elsayed, E. M., & El-Metwally, H., On the solutions of some nonlinear systems of difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2013(1), 1-14, 2013.
13. Elsayed, E.M. & Ahmed, A.M., Dynamics of a three-dimensional system of raional difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (39), 1026-1038, 2016.

14. Gümüş, M., The global asymptotic stability of a system of difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications* 24(6), 976-991, 2018.

15. Haddad, N., Touafek, N., & Rabago, J. F. T. (2018). Well-defined solutions of a system of difference equations. *Journal of Applied Mathematics and Computing* 56(1), 439-458.

16. Halim, Y., Khelifa, A., Berkal, M., & Bouchair, A., On a solvable system of *p*-difference equations of higher, *Periodica Mathematica Hungarica* 85, 109-127, 2022.

17. Halim,Y., & Rabago, J.F.T., On the solutions of a second-order difference equation in terms of generalized padovan sequences, *Mathematica Slovaca* 68(3), 625-638, 2018.

18. Hamioud, H., Touafek, N., Dekkar, I. & Yazlık, Y., On a three dimensional nonautonomous system of difference equations, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2022.

19. Ibrahim, T.F., & Touafek, N., On a third order rational difference equation with variable coefficients, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms*, 20(2), 251-264, 2013.

20. Kara, M. & Yazlık, Y., Solvability of a system of nonlinear difference equations of higher order, *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1533-1565, 2019.

21. Kara, M. & Yazlık, Y., On the system of differens equations $x_n = \frac{x_{n-2}y_{n-3}}{y_{n-1}\left(a_n + b_n x_{n-2} y_{n-3}\right)}$, $y_n = \frac{y_{n-2}x_{n-3}}{x_{n-1}\left(\alpha_n + \beta_n y_{n-2} x_{n-3}\right)}$, *Journal of Mathematical Extension* 14(1), 41-59, 2020.

22. Kara, M. & Yazlık, Y., On the solutions of three-dimensional system of difference equations via recursive relations of order two and applications, *Journal of Applied and Computation* 12(2), 736-753, 2022.

23. Kara, M., Yazlik, Y. & Tollu, D.T., Solvability of a system of higher order nonlinear difference equations, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(5), 1566-1593, 2020.

24. Khelifa, A. & Halim, Y., General solutions to system of difference equations and some of their representations, *Journal of Applied Mathematics and Computing* (67), 439-453, 2021.

25. Khelifa, A., Halim, Y. & Bauchair, A., On a system of three difference equations of higher order solved in terms of lucas and fibonacci numbers, *Mathematica Slovaca*, 70(3), 641-656, 2020.

26. Okumuş,İ. & Soykan, Y., Dynamical behavior of a system of three-dimensional nonlinear difference equations, *Advances in Difference Equations* 223, 1-15, 2018.

27. Raouf, A., Global behaviour of the rational Riccati difference equation of order two: the general case, *Journal of Difference Equations and Applications* 18(6), 947-961, 2012.

28. Stevic, S. Diblik, J. & Iricanin, Z., On a solvable system of rational difference equations, *Journal of Difference Equationsand Applications* 20(5-6), 811-825, 2014.

29. Stevic, S. Iricanin B. & Smarda, Z., On a close to symmetric system of difference equations of second order, *Advances in Difference Equations* 264, 1-17, 2015.

30. Stevic, S., A four-dimensional solvable system of difference equations in the complex domain, *RACSAM*, 112(4), 1265-1280, 2018.

31. Stevic, S., On a solvable system of difference equations of *k*th-order, *Applied Mathematics and Comptutaion* 219, 7765-7771, 2013.

32. Stevic, S., On a third-order system of difference equations, *Applied Mathematics and Computation* 218, 7649-7654, 2012.

33. Stevic, S., On a two-dimensional solvable system of difference equations, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* 104, 1-18, 2018.

34. Stevic, S., Product-typesystem of differenceequations of second-ordersolvable in closed form, *Electronic Journal of QualitativeTheory of Differential Equations* (56), 1-16, 2015.

35. Stevic, S., Solvable subclasses of a class of nonlinear second-order difference equations, *Advances in Nonlinear Analysis 5(2),* 147-165, 2016.

36. Stevic, S., Some representations of the general solution to a difference equation of additive type, *Advances in Difference Equations*, 431, 2019.

37. Stevic, S., Iricanin, B., Kosmala, W. & Smarda, Z., Existence and global attractivity of periodic solutions to some classes of difference equations, *Filomat* 33(10), 3187-3201, 2019.

38. Stevic, S. & Tollu, D.T., Solvability and semi-cycle analysis of a class of nonlinear systems of difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 42(3), 3579-3615, 2019.

39. Stevic, S.,Alghamdi, M.A., Alotaibi, A. & Elsayed, E. A., On a class of solvable higher-order difference equations, *Filomat* 31 (2), 461-477, 2017.

40. Stevic, S., Alghamdi, M.A., Alotaibi, A. & Shahzad, N., Long-term behavior of positive solutions of a system of max-type difference equations, *Applied Mathematics and Computation* (235), 567-574, 2014.

41. Stevic, S., Diblik, J., Iricanin, B. & Smarda, Z., On a fifth-order difference equation, *Journal of Computational Analysis and Applications* 20 (7), 1214-1227, 2016.

42. Stevic, S., Diblik, J., Iricanin, B. & Smarda, Z., On the system of difference equations, *Applied Mathematics and Computation* (270), 688-704, 2015.

43. Stevic, S., Iricanin, B., Kosmala, W. & Smanda, Z., Note on some representations of general solutions to homogeneous linear difference equations, *Advances in Difference Equations*, 486, 2020

44. Stevic, S., Iricanin, B., Kosmala, W. & Smarda, Z., On a solvable class of nonlinear difference equations of fourth order, *Electronic Journal of QualitativeTheory of Differential Equations* (37), 1-17, 2022.

45. Stevic, S., On a third-order system of difference equations, *Applied Mathematics and Computation* 218, 7649-7654, 2012.

46. Stevic, S., Domains of undefinable solutions of some equations and systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation* 219, 11206-11213, 2013.

47. Tollu, D.T. & Yalçınkaya, İ., Global behavor of three-dimensional system of difference equations order three, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara-Series A1 Mathematics and Statistics* 68(1), 1-16, 2019.

48. Touafek, N., Tollu, D.T. & Akrour, Y., On a general homogeneous three-dimensional system of difference equations, *Electronic Research Archive* 29(5), 2841-2876, 2021.

49. Yazlık, Y. & Kara, M., On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coefficients, *Communications Faculty of Science University of Ankara-Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 1675-1693, 2019.

50. Yazlik, Y., On the solutions and behavior of rational difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications* 17(3), 584-594, 2014.

51. Yazlık, Y., Tollu, D. T. & Taşkara, N., On the behaviour of solutions for some systems of difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications* 18(1), 166-178, 2015.