

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GRAFLARIN BAZI CEBİRSEL YAPILARI ÜZERİNE

**Tezi Hazırlayan
Hatice Pınar CANTEKİN**

**Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

Mayıs 2023

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GRAFLARIN BAZI CEBİRSEL YAPILARI ÜZERİNE

**Tezi Hazırlayan
Hatice Pınar CANTEKİN**

**Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

Mayıs 2023

Prof. Dr. Sezer SORGUN danışmanlığında **Hatice Pınar CANTEKİN** tarafından hazırlanan "**Grafların Bazı Cebirsel Yapıları Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

18/05/2023

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Halis BİLGİL

Üye : Prof. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Prof. Dr. Bayram DEVİREN

Üye : Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Üye : Doç. Dr. Hatice TOPCU

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun.....tarih ve..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.../.../20..

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hatice Pınar CANTEKİN



TEŞEKKÜR

Doktora eđitimim ve tez çalıőmam sűresince karőılaőtıđım tűm zorluklarda yanımda olan, tűm bilgilerini benimle paylaőmaktan kaçınmayan, her tűrlű konuda desteđini benden esirgemeyen, tezimde bűyűk emeđi olan, dűőűnce gűcűme yenilik getiren ve aynı zamanda kiőilik olarak da bana çok űey katan, bir teőekkűrden çok fazlasını hak eden sayın hocam Prof. Dr. Sezer Sorgun'a,

Tanıdığım gűnden bu yana değerli bilgileri ile yoluma ıőık olan ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Hatice Topcu' ya,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Matematik Bűlűm Baőkanlıđı'na ve Nevőehir Hacı Bektaő Veli űniversitesi Fen Bilimleri Enstitűsű'ne,

Bu sűrete maddi ve manevi olarak her zaman destek ve yardımlarını esirgemeyen annem Hatice Cantekin ve babam Mehmet Cantekin' e tűm kalbimle teőekkűr ederim.

GRAFLARIN BAZI CEBİRSEL YAPILARI ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

Hatice Pınar CANTEKİN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2023

ÖZET

Son yıllarda cebirsel yapıların özellikleri üzerine graf tanımlamaları, elde edilen graf türlerinin sınıflandırmaları ve özellikleri ilginç araştırma konularından biri haline gelmiştir. Dolayısıyla "Sıklıkla kullanılan cebirsel yapılardan grup veya halkanın farklı elemanları üzerine graf tanımlanabilir mi? Eğer graf yapısı elde edilirse hangi graf ailesine ait olur? Elde edilen grafların, graf parametreleri, matrisleri ve spektrumları belirlenebilir mi? Cebirsel olarak halka veya grupların alt grup, alt halka yapıları oluşurken grafların alt grafları oluşturulabilir mi? Benzer cebirsel yapıların grafları arasında da benzer yapılar oluşur mu?" sorularını doğurmuştur. Merak uyandıran bu sorular doğrultusunda bazı graf tanımlamaları yapılmıştır. Sıfır-bölen graflar, nilpotent graflar, nilradikal ve non-nilradikal graflar, total graflar ve birim graflar gibi halka üzerine tanımlı birçok graf yapısı literatüre kazandırılmıştır.

Bu tez çalışmasında tam sayılar halkası üzerinde nilpotent, total ve birim grafların analog yeni graf yapıları tanımlanmış ve spektral incelemesi yapılmıştır. 2. bölümde graf parametreleri ve halka parametreleri ile ilgili temel tanım ve kavramlar derlenmiştir. 3. bölümde sıfır-bölen, nilpotent, nilradikal, non-nilradikal, total ve birim graf yapısı ve bu grafların bazı sınıflandırmalarına dair literatürde yer alan bilgiler verilmiştir. 4. bölümde ise tam sayılar halkası üzerinde inşa edilen nilpotent, total ve birim grafların analog graf yapıları ve spektral özellikleri ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Nilpotent, Sıfır-bölen, Total ve Birim Graf, Spektrum.

Tez Danışman: Prof. Dr. Sezer SORGUN

Sayfa Adeti: 120

ON SOME ALGEBRAIC STRUCTURES OF GRAPHS

(Ph.D. Thesis)

Hatice Pınar CANTEKİN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2023

ABSTRACT

In recent years, graph definitions on algebraic structures, classifications of obtained graph types, and their properties have become interesting research topics concerning the properties of algebraic structures. Consequently, the question of whether graphs can be defined on different elements of frequently used algebraic structures such as groups or rings has emerged. If a graph structure is obtained, to which graph family does it belong? Can the graph parameters, matrices and spectra of the obtained graphs be determined? Can graphs be formed as subgraphs of algebraic structures such as subgroups or subrings? Do similar structures emerge among the graphs of similar algebraic structures? These questions have raised curiosity and led to the formulation of certain graph definitions. Various graph structures defined on rings, such as zero-divisor graphs, nilpotent graphs, nilradical and non-nilradical graphs, total graphs and unit graphs have been introduced in the literature.

In this thesis study, new graph structures analogous to nilpotent, total and unit graphs over the ring of integers are defined and their spectral analysis is performed. In the second chapter, fundamental definitions and concepts related to graph parameters and ring parameters are compiled. The third chapter provides information from the literature about zero-divisor, nilpotent, nilradical, non-nilradical, total and unit graph structures and some classifications of these graphs. In the fourth chapter, results regarding the analog graph structures and spectral properties of nilpotent, total and unit graphs constructed over the ring of integers are obtained.

Keywords: Nilpotent, Zero-Divisor, Total and Unit Graphs, Spectrum.

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Sezer SORGUN

Page Number: 120

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xv
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	6
2.1. Graf Teori ve Değişmezleri.....	6
2.2. Halka Teori	18
2.2.1. Temel Halka Değişmezleri.....	18
2.2.2. Özel Halkalar	24
3. BÖLÜM	
DEĞİŞMELİ HALKALARDA TANIMLI GRAF YAPILARI	27

3.1.	Sıfır-Bölen Graflar	27
3.2.	Nilpotent Graflar	43
3.3.	Total Graflar	63
3.4.	Nilradikal Graflar	80
3.5.	Nilradikal Olmayan Graflar	83
3.6.	Birim Graflar	88
4. BÖLÜM		
\mathbb{Z}_n ÜZERİNDE TANIMLI FARKLI GRAF YAPILARI.....		95
4.1.	\mathbb{Z}_n Halkası Üzerinde Tanımlı Nilpotent ve Total Grafların Analogları ve Spektrumu	95
4.2.	\mathbb{Z}_n Halkasıyla Bağlantılı Birim Grafların Yapıları ve Spektrumu	104
5. BÖLÜM		
SONUÇ VE ÖNERİLER		112
KAYNAKLAR		116
ÖZGEÇMİŞ		119

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 3. 1.	\mathbb{Z}_n halkası üzerindeki nilpotent grafların Laplasyan spektrumları	62
Tablo 3. 2.	$\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ çap ve çevre değerleri	81
Tablo 3. 3.	$\Omega_C(\mathbb{Z}_n)$ çap ve çevre değerleri.....	85



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. 1.	Könisberg'in Yedi Köprüsü	1
Şekil 1. 2.	Könisberg köprülerinin graf gösterimi	2
Şekil 2. 1.	x noktası ayırık nokta, y ve z sarkıt nokta.....	7
Şekil 2. 2.	İlmek ve katlı kenar	8
Şekil 2. 3.	Tümleyen graf.....	9
Şekil 2. 4.	N_1, N_2, N_3, N_4	9
Şekil 2. 5.	P_1, P_2, P_3, P_4	9
Şekil 2. 6.	Bağlantılı ve bağlantısız graf.....	9
Şekil 2. 7.	K_1, K_2, K_3, K_4, K_5	10
Şekil 2. 8.	$K_{3,4}$ ve $K_{2,5}$	10
Şekil 2. 9.	S_7, S_4	10
Şekil 2. 10.	Düzenli graf örnekleri.....	11
Şekil 2. 11.	C_3, C_4 ve C_5	11
Şekil 2. 12.	Ağaç örnekleri.....	11
Şekil 2. 13.	Alt graf örnekleri.....	12
Şekil 2. 14.	Graf renklendirme örnekleri	12
Şekil 2. 15.	Hamilton graf.....	13
Şekil 2. 16.	Split graf.....	13
Şekil 2. 17.	Düzlemsel ve düzlemsel olmayan graf	13
Şekil 2. 18.	Euler graf	14

Şekil 2. 19.	Kokteyl parti graf.....	14
Şekil 2. 20.	Grafın derece matrisi.....	15
Şekil 2. 21.	Bir grafın komşuluk matrisi.....	16
Şekil 2. 22.	Grafın Laplasyan matrisi.....	16
Şekil 2. 23.	Ayrık graf birleşimi	17
Şekil 2. 24.	Graf birleşimi	17
Şekil 2. 25.	Grafların kaynaştırılması	17
Şekil 3. 1.	$\Gamma_0(\mathbb{Z}_6)$ ve $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$	27
Şekil 3. 2.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$	28
Şekil 3. 3.	$\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7)$	29
Şekil 3. 4.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$	30
Şekil 3. 5.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{27})$	32
Şekil 3. 6.	$\Gamma(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)$	32
Şekil 3. 7.	$\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$	34
Şekil 3. 8.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$	35
Şekil 3. 9.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$	35
Şekil 3. 10.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$	36
Şekil 3. 11.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$	37
Şekil 3. 12.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ ve $\Gamma(\mathbb{Z}_{32})$	37
Şekil 3. 13.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{27})$	38
Şekil 3. 14.	$\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$	39

Şekil 3. 15.	$\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$	39
Şekil 3. 16.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{169})$	40
Şekil 3. 17.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$ ve $\Gamma(\mathbb{Z}_{65})$	40
Şekil 3. 18.	$\Gamma(R)$ düzlemsel örnekleri	41
Şekil 3. 19.	$\Gamma(\mathbb{Z}_n[x]/\langle x^m \rangle)$ düzlemsel örnekleri	42
Şekil 3. 20.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$	44
Şekil 3. 21.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_7)$	44
Şekil 3. 22.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_9)$	45
Şekil 3. 23.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{35})$	47
Şekil 3. 24.	$\Gamma_N(R)$ örnekleri	47
Şekil 3. 25.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{50})$	49
Şekil 3. 26.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$	50
Şekil 3. 27.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15})$	51
Şekil 3. 28.	$\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$	51
Şekil 3. 29.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle \times \mathbb{Z}_2)$	52
Şekil 3. 30.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_4) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle)$	52
Şekil 3. 31.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_9) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle)$	52
Şekil 3. 32.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_8) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 - 2 \rangle)$	53
Şekil 3. 33.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ örnekleri	55
Şekil 3. 34.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{3^2})$ grafının özdeğer örneği	56
Şekil 3. 35.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{2^5})$ grafının özdeğer örneği	56

Şekil 3. 36.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{7^2})$ grafinın özdeğer örneği.....	57
Şekil 3. 37.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{10}) \cong K_{1,4}$	57
Şekil 3. 38.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15}) \cong K_{2,4}$	57
Şekil 3. 39.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{35}) \cong K_{4,6}$	58
Şekil 3. 40.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{42})$	58
Şekil 3. 41.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{63})$	59
Şekil 3. 42.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{60})$	59
Şekil 3. 43.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})$	61
Şekil 3. 44.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})$ Laplasyan matrisi.....	61
Şekil 3. 45.	$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_6)$	63
Şekil 3. 46.	$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{25})$	64
Şekil 3. 47.	$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{12})$	64
Şekil 3. 48.	$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$	68
Şekil 3. 49.	$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$ ve alt grafları.....	69
Şekil 3. 50.	$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4)$ ve alt grafları.....	70
Şekil 3. 51.	$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$	72
Şekil 3. 52.	$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_9)$	74
Şekil 3. 53.	$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_6)$	74
Şekil 3. 54.	Total ve total tümleyen graf örnekleri.....	77
Şekil 3. 55.	$\overline{\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{10})}$	80

Şekil 3. 56.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{45})$	81
Şekil 3. 57.	$\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_{45})$	81
Şekil 3. 58.	$\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ düzlemsel örnekleri	83
Şekil 3. 59.	$\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ düzlemsel olmayan örnekleri	83
Şekil 3. 60.	$\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$	84
Şekil 3. 61.	$\Omega(\mathbb{Z}_{20})$	84
Şekil 3. 62.	Düzlemsel ve düzlemsel olmayan $\Omega(R)$ örnekleri	86
Şekil 3. 63.	\mathbb{Z}_n halkasının bazı $\mathcal{G}(R)$ örnekleri	88
Şekil 3. 64.	İki izomorf halkanın $\mathcal{G}(R)$ örnekleri.....	88
Şekil 3. 65.	\mathbb{Z}_4 ve \mathbb{Z}_6 halkalarının $\mathcal{G}(R)$ örnekleri	89
Şekil 3. 66.	$\mathcal{G}(R)$ örnekleri.....	92
Şekil 3. 67.	$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ düzlemsel graf.....	93
Şekil 3. 68.	$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_7)$ Hamilton graf.....	94
Şekil 4. 1.	$N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_{18}))$	95
Şekil 4. 2.	$N_T(\Gamma(\mathbb{Z}_{18}))$	96
Şekil 4. 3.	$N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_{30}))$	98
Şekil 4. 4.	$N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ nilpotent bölen graf modellemesi	100
Şekil 4. 5.	$N_T(\Gamma(\mathbb{Z}_{40}))$	103
Şekil 4. 6.	$N_T(\Gamma(\mathbb{Z}_{45}))$	103
Şekil 4. 7.	$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{13})$	106

Şekil 4. 8.	$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_9)$	107
Şekil 4. 9.	$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{16})$	108
Şekil 4. 10.	$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{24})$	110
Şekil 4. 11.	$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{40})$	111



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$(R, +, \cdot)$	Halka
$A(R)$	Aritmetik birim kümesi
$Kar(R)$	Halka karakteristiği
\mathbb{F}	Cisim
I	İdeal
$\langle a \rangle$	Esas ideal
M	Maksimal ideal
$J(R)$	Halkanın Jacobson radikali
φ	Halkanın Homomorfizmi
$R \cong S$	Halkanın İzomorfizmi
$(R/I, +, \cdot)$	Bölüm Halkası
$K(R)$	Toplam bölüm halkası
(R, S)	Lokal halka
$Z(R)$	Sıfır bölen kümesi
$N(R)$	Nilpotent eleman kümesi
$Nil(R)$	Nilpotent elemanların ideali
$Reg(R)$	$R \setminus Z(R)$
$U(R)$	Birim elemanlarının kümesi
$G = (V, E)$	Graf
$V(G)$	Grafın nokta kümesi

d_i	Grafın nokta derecesi
e	Grafın kenar sayısı
$N_G(v)$	Komşuluk Kümesi
$\Delta(G)$	Maksimum derece
$\delta(G)$	Minimum derece
$diam(G)$	Grafın çapı
$gr(G)$	Grafın çevresi
$\epsilon(v)$	Grafın dış merkezliği
$r(G)$	Grafın yarı çapı
$c(G)$	Grafın merkezi
$\omega(G)$	Grafın maksimum klik sayısı
$\alpha(G)$	Grafın maksimum bağımsızlık sayısı
$\chi(G)$	Grafın kromatik sayısı
χ'	Grafın kromatik (renklendirilmiş) kenar sayısı
$G \cong G'$	Graf İzomorfizm
$M(G)$	Graf matrisi
$spec(M(G))$	Graf spektrumu
$Kar(M(G))(x)$	Grafın karakteristik polinomu
$\mathcal{E}(G)$	Grafın enerjisi
$D(G)$	Köşegen matrisi
$A(G)$	Komşuluk matrisi

$L(G)$	Laplasyan matrisi
$G_i \dot{\cup} G_j$	Ayrık graf birleşimi
$G_i + G_j$	Graf birleşimi
$G_i \circ G_j$	Graf kaynaştırması
$\bar{G} = (V, \bar{E})$	Tümleyen graf
N_n	Null graf
P_n	Path (yol) graf
K_n	Tam graf
$K_{n,m}$	İki parçalı tam graf
K_{p_1, p_2, \dots, p_r}	Çok parçalı tam graf
S_n	Yıldız graf
C_n	Döngü graf
CP	Kokteyl parti graf
$\Gamma(R)$	Sıfır bölen graf
$\Gamma(R)^c$	Sıfır bölen grafın tümleyen grafi
$\Gamma_N(R)$	Nilpotent graf
CS	Tam bölünmüş graf
$\mathcal{T}(R)$	Total graf
$\overline{\mathcal{T}(R)}$	Total grafın tümleyen grafi
$\Gamma_{Nil}(R)$	Nilradikal graf

$\Omega(\mathbf{R})$	Nilradikal olmayan graf
$\Omega_c(\mathbf{R})$	Nilradikal olmayan grafın bağlantılı kısmı
$\mathcal{G}(\mathbf{R})$	Birim graf
$N_D(\Gamma(\mathbf{R}))$	Nilpotent-bölen graf
$N_T(\Gamma(\mathbf{R}))$	Nilpotent-total graf



1. BÖLÜM

GİRİŞ

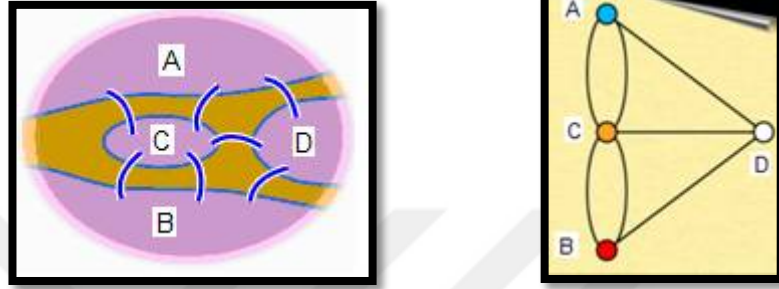
Bazı büyük bilimsel teoriler çok basit sorulara aranan çözümlerden doğmuştur. Bunlardan birisi de matematiğin bir dalı olarak bilinen graf teori veya çizge kuramıdır. Bu teorinin doğuşuna neden olanlar eski Prusya'daki Könisberg kentinin meraklı halkıdır. Könisberg'in içinden geçen Pregel ırmağı kent içinde bir ada ile bir yarımada oluşturur. Adanın bir yanında iki kol halinde, öteki yanında tek kol halinde devam eder. Irmak üzerinde şekilde görülen yedi köprü vardır.



Şekil 1. 1. Könisberg'in Yedi Köprüsü

Könisbergliler merak ya da eğlence amacıyla bir oyun oynamaya başladılar. "*Kentin belirli bir noktasından hareket edip her köprüyü bir ve yalnız bir kez geçerek başlangıç noktasına dönülebilir mi?*" Kent halkı farklı noktalardan hareket ederek başladıkları noktaya dönmeyi denediler. Hiç birisi bu geziyi başaramadı. Kentin ortak merakı haline gelen bu problem o dönemin ünlü matematikçisi Leonhard Euler (1707-1783)'in ilgisini çekti. Euler, 1735 yılında kent akademisine söz konusu gezinin imkansızlığını kanıtlayan matematiksel ispatını sundu. 1741 yılında bu ispat "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (Konum geometrisiyle ilgili bir problemin çözümü)*" adıyla akademinin dergisinde yayınlandı. Makalenin adından da anlaşılacağı üzere, Euler, içinde uzaklık ve ölçü kavramı olmayan ama konumlarla ilgilenen yeni bir geometriden söz ettiğinin farkındaydı. Euler, köprüleri yürümek yerine problemi kâğıt ve kalemle çözmeye başladı. Önce şu basit tespiti yaptı. Problemin özü, geziye başlayacak birinin hangi özel noktada

durduğu ile değil, ırmağın hangi kıyısında olduğu veya hangi ada da olduğu ile ilgilidir. O halde ırmağın iki yakasını ve adaları birer nokta ile köprüleri ise birer çizgi ile göstermek mümkündür. Böyle düşününce Könisberg' in köprüleri basit bir çizim ile gösterilebilir. Euler, problemi çözerken somut bir olayı modelleyip soyut bir şekle dönüştürerek adına graf teorisi denilen yepyeni bir teorinin temellerini atmıştır.



Şekil 1. 2. Könisberg köprülerinin graf gösterimi

Graf, bir noktalar kümesi ve bu kümedeki noktaları birbirine bağlayan kenarlardan oluşur. Günlük hayatta karşılaşılan durumlar, bireyler, davranışlar, nesnelere veya problemler noktalarla ve nesnelere arasındaki ilişkilerde kenarlarla ifade edilerek graf modelleri oluşur. Graf teorisi her şeyden önce çözümünü aranan bir problemi ya da bir sorunu en iyi şekilde modellemeye, düzenlemeye ve çözmeye yardımcı olur. Bir problem grafa dönüştürüldükten sonra en hızlı ve en kolay yolu bulmak için sistematik yöntemler aranır. Bu durumun doğal bir sonucu olarak, graf teorisi farklı uygulama alanlarına sahiptir. Ulaşım ağları optimizasyonunda, elektrik şebekeleri kavramında, haberleşme ağlarında, istatistiksel mekanikte, kimyasal yapılarda, bilgisayar kuramında, toplumsal bilimlerde, coğrafyada, mimarlıkta, tıpta, genetikte, çevre biliminde,... vb. alanlarda kullanılmaktadır.

Euler' den sonra birçok yazar graf teorisini farklı alanlarda kullanmışlardır. 1847' de Kirchhoff, Matrix-Tree teoremini oluşturarak graf teorisini elektrik devrelerine uygulamıştır. Cayley ve Sylvester bazı özel grafların birkaç özelliğini keşfederek bunları ağaç olarak adlandırmışlardır. 1850' li yıllarda Cayley ağaç kavramını kullanarak molekülde karbon atomlarının olası durumlarına göre kaç farklı kimyasal diyagram oluşacağını göstermiştir. 1852' de Thomas Guthrie meşhur dört renk problemini bulmuştur. 1913' de H. Dudeney bir puzzle probleminden bahsetmiştir. Dört renk problemi oluşturulduktan bir asır sonra Kenneth Appel ve Wolfgang Haken tarafından

çözümüştür. 1930' larda Erich Hückel, "Hückel Moleküler Yörünge (HMO) Teorisi" olarak literatüre giren model ile kuantum kimyada birleşik hidrokarbonlardaki elektronlarının davranışlarını incelemiştir. Burada elektronların enerji seviyelerini belirtmek için grafların öz değerlerini kullanmıştır. Graf teorisinin birçok bilim dalına uygulanması ile yeni bilimsel veriler elde edilmiştir.

Cebir ve graf teorisinin kombinasyonundan meydana gelen cebirsel graf teorisi, 1974' ten bugüne gelişimine devam etmektedir. Bu dal, cebirsel özellikleri graflarla ilişkilendirir ve cebirde kullanılan araçlarla graf özelliklerini çeşitlendirir. Bu konuda literatürde yazılmış birçok kaynak bulunmaktadır. Özellikle son yıllarda graf teorisinin alt branşlarından cebirsel graf teorisi ve spektral graf teorisi olmak üzere iki önemli branşta çalışmalar sıklıkla yapılmaktadır. Spektral graf teorisi, graflara ilişkin matrislerin spektral özellikleri ile graf yapısı arasındaki ilişkileri incelemeye ve anlamlandırmaya çalışmaktadır.

Son yıllarda cebirsel yapıların özellikleri üzerine graf tanımlamaları, elde edilen graf türlerinin sınıflandırmaları ve özellikleri ilginç araştırma konularından biri haline gelmiştir. Dolayısıyla "Sıklıkla kullanılan cebirsel yapılardan grup veya halkanın farklı elemanları üzerine graf tanımlanabilir mi? Eğer graf yapısı elde edilirse hangi graf ailesine ait olur? Elde edilen grafların, graf parametreleri, matrisleri ve spektrumları belirlenebilir mi? Cebirsel olarak halka veya grupların alt grup, alt halka yapıları oluşurken grafların alt grafları oluşturulabilir mi? Benzer cebirsel yapıların grafları arasında da benzer yapılar oluşur mu?" sorularını doğurmuştur.

Anderson ve Livingston (1999), " R birimli, değişmeli halka olsun. R ' nin sıfır bölenlerinin kümesi $Z(R)$ olsun. R ' nin sıfır bölen grafi $\Gamma(R)$, $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ nokta kümesi ile bir graftır. Öyle ki $x \neq y$ ve $x, y \in Z(R)^*$ için x ve y komşudur gerek ve yeter şart $xy = 0$ dır" tanımı ile literatüre sıfır bölen graf tanımını kazandırmışlardır.

R bir halka ve $N(R)$ kümesi halkanın bütün nilpotent elemanların kümesi olmak üzere; Chen (2003), R halkası üzerinde R ' nin bütün elemanlarını noktalar kabul eden ve " x ve y noktalarının komşu olması için gerek ve yeter koşul $xy \in N(R)$ " önermesini sağlayacak şekilde yeni bir graf yapısı tanımlamıştır.

Li (2010), " R birimli bir halka olmak üzere R' nin nilpotent grafini genişleterek aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$\Gamma_N(R)$ nilpotent grafi, $0 \neq y \in R$ için $V_N(R)^* = \{0 \neq x \in R \mid xy \in N(R)\}$ grafin noktalar kümesi olmak üzere " farklı iki x ve y noktası komşudur ancak ve ancak $xy \in N(R)$ " önermesini sağlayan bir yapıdır.

Sıfır-bölen graflar söz konusu olduğunda grafların kenarı için halkanın elemanlarının çarpımı kullanılırken bunun bir varyasyonu olarak halkanın elemanlarının toplamı kullanılarak bir graf oluşturulmuştur ve buna değişmeli halkaların total grafi denilmektedir. İlk olarak 2008' de D.F. Anderson ve A.Badawi tarafından [34] de total graf tanımlanmıştır:

" R değişmeli, birimi sıfırdan farklı bir halka olsun. $\mathcal{T}(R)$ ile gösterilen total graf, noktaları R' nin bütün elemanları olan basit bir graftır. Burada farklı $x, y \in R$ için x ve y komşudur ancak ve ancak $x + y \in \mathcal{Z}(R)$ ' dir. "

R bir halka olmak üzere; Bishop, Cuchta, Lokken, Pechenik (2008)'de;

" $\Gamma_{Nil}(R)$ ile gösterilen nilradikal graf, R' nin sıfırdan farklı nilpotent elemanları grafin noktaları olmak üzere; iki nokta bir kenar ile bağlantılı olduğunda ancak ve ancak çarpımları 0' dır."

" $\Omega(R)$ ile gösterilen non-nilradikal graf, R' nin nilpotent olmayan sıfır bölenleri grafin noktaları olmak üzere; iki nokta bir kenar ile bağlantılı olduğunda ancak ve ancak çarpımları 0' dır." Önermelerini sağlayan sıfır bölen grafin alt grafi olan iki yeni graf tanımlamışlardır.

Ashrafi, Maimani, Pournaki ve Yassemi (2010)' da komaksimal grafin alt grafi olan birim grafi ;

" R bir halka ve $U(R)$, R halkasının birimsel elemanlarının kümesi olsun. R' nin $\mathcal{G}(R)$ ile gösterilen birim grafi, R' nin tüm elemanları grafin noktaları olması ve farklı x ve y noktaları komşudur ancak ve ancak $x + y \in U(R)$ olması koşuluyla elde edilen graftır." önermesini sağlayacak şekilde tanımlamışlardır.

Bir G grafi için komşuluk, Laplasyan vb. matrisler tanımlanır. G' nin spektrumu, tanımlanan matrisin spektrumudur ve komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu vb. olarak isimlendirilir. Genelde grafların spektral karakterizasyon problemi, cebirsel graf teorisi alanında zor problemlerden biridir. Kısaca açıklamak gerekirse herhangi bir G grafinin spektrumunu hesaplamak kolay olmasına rağmen herhangi bir spektruma göre grafların belirlenebileceğini tahmin etmek oldukça zordur. Özellikle nilpotent, nilradikal, nilradikal olmayan ve birim grafların graf çapı, dış merkezliği, girth vb. parametreleri ile ilgili çok az sayıda çalışma bulunmaktadır. Fakat spektral karakterizasyonları ile ilgili herhangi bir çalışma olmaması bu konuyu daha ilgi çekici hale getirmiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, öncelikle çalışma boyunca kullanılacak olan ve hem lisans hem de lisansüstü öğrencilerin faydalanacağı şekilde temel bilgilerden ve graf teorideki bazı temel kavramlardan ve bağıntılardan bahsedilmektedir.

Üçüncü bölümde literatür incelemesi sonucu sıfır-bölen graf, nilpotent graf, total graf, nilradikal, nilradikal olmayan ve birim graflarının, graf parametreleri ve graf türleri üzerine yapılan çalışmaları derleme olarak anlatılmaktadır.

Dördüncü bölümde nilpotent, total ve birim grafların yeni analog graf yapıları tanımlanmıştır. Tam sayılar halkası üzerinde yeni tanımlanan grafların spektrum incelemesi, graf türleri ve özellikleri anlatılmaktadır.

2.BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde verilen temel tanım, kavram ve teoremler birçok graf ve cebir kitaplarında bulunmasına karşılık lisans ve lisansüstü öğrencilerin yararlanması amacıyla bilimsel disiplin gözetilerek verilmiştir.

2.1. Graf Teori ve Değişmezleri

Bu alt bölümde tanımlarda [1-6] kaynaklarından faydalanılmıştır.

Tanım 2.1.1. Bir G grafı, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ noktalar kümesi ve V kümesindeki farklı nokta çiftlerinin sıralanması ile elde edilen $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenarlar kümesi olmak üzere; $G = (V, E)$ sıralı ikilisi şeklinde tanımlanır. G grafının nokta ve kenar kümesi $V(G)$ ve $E(G)$ ile gösterilir. $|V| = n$ ve $|E| = m$ ise G' ye n -noktalı ve m -kenarlı bir graf denir. Nokta sayısına kısaca G' nin mertebesi denir.

Tanım 2.1.2. $G = (V, E)$ bir graf ve $u, v \in V$ olsun. Eğer, $e = \{u, v\}$ olacak biçimde bir $e \in E$ kenarı varsa u ve v noktaları komşu noktalardır denir ve $u \sim v$ ile gösterilir. Eğer $e = \{v\}$ ise v noktası kendisine komşudur denir. $v \in V$ olmak üzere v 'nin komşuluk kümesi

$$N_G(v) = \{u \in V : u \sim v\} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3. Sonlu sayıda noktası ve sonlu sayıda kenarı olan graflara sonlu graf denir. Aksi takdirde ise sonsuz graf denir.

Tanım 2.1.4. $G = (V, E)$ bir graf ve $v \in V$ olsun. Bir v noktasının derecesi, v noktasına komşu olan noktaların sayısıdır. $deg(v)$ ya da $d(v)$ ile gösterilir. $G = (V, E)$ grafının noktaları v_1, v_2, \dots, v_n olsun. Buna göre bu grafın maksimum ve minimum dereceleri sırasıyla

$$\Delta(G) = \max\{deg(v_i) : 1 \leq i \leq n\} \quad (2.2)$$

ve

$$\delta(G) = \min\{deg(v_i): 1 \leq i \leq n\} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. Herhangi bir $v \in G$ olmak üzere; $\delta(G) \leq deg(v) \leq \Delta(G)$ 'dir.

Tanım 2.1.5. Derecesi sıfır olan noktaya ayırık nokta (isolated vertex) ve derecesi bir olan noktaya sarkıt nokta (pendant vertex) ve bu noktaya bağlanan kenara sarkıt kenar (pendant edge) denir.



Şekil 2. 1. x noktası ayırık nokta, y ve z sarkıt nokta

Tanım 2.1.6. Bir grafın derecelerinin azalan biçimde sıralandırılmasıyla oluşturulan diziyi derece dizisi denir.

Teorem 2.1.7. Bir grafın derecelerinin toplamı kenarlarının iki katına eşittir. Yani, d_i, i noktasının derecesi ve e , grafın kenar sayısı olmak üzere

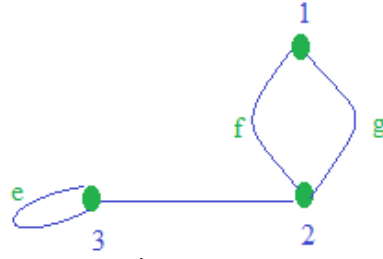
$$\sum_{i=1}^n d_i = 2e \quad (2.4)$$

eşitliği sağlanır [1].

Teorem 2.1.8. Herhangi bir G grafı için $\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$ ' dir [1].

Teorem 2.1.9. Herhangi bir G grafında tek dereceli noktaların sayısı daima çifttir [1].

Tanım 2.1.10. $G = (V, E)$ bir graf ve $u, v \in V$ olsun. G grafının bir noktasını kendisine bağlayacak biçimde bir $e \in E$ varsa e ' ye bir ilmek (loop)denir. Eğer E kümesinde $g = \{u, v\} = f$ olacak biçimde farklı iki g ve f kenarı varsa bu kenarlara katlı kenar (multiple edge) denir.



Şekil 2. 2. İlmek ve katlı kenar

Tanım 2.1.11. G grafi, herhangi bir ilmek (loop) ve katlı kenar içermiyorsa bu grafa basit graf denir.

Tanım 2.1.12. G grafında alınan herhangi iki nokta çifti arasındaki en büyük uzaklığa G 'nin çapı (diameter) denir ve $diam(G)$ biçiminde gösterilir.

$$diam(G) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in G\} \quad (2.5)$$

Tanım 2.1.13. G grafında alınan herhangi iki nokta çifti arasındaki en kısa döngü uzunluğuna G 'nin çevresi (girth) denir. $gr(G)$ ile gösterilir. Eğer G grafi döngü içermiyorsa $gr(G) = \infty$ ' dir.

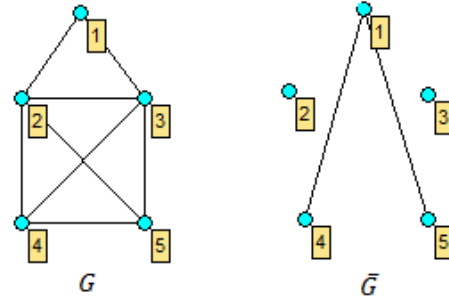
Tanım 2.1.14. G grafında keyfi bir $v \in V$ için herhangi bir nokta ile arasındaki maksimum uzaklığa v noktasının dış merkezliği denir ve $\epsilon(v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.15. G grafında herhangi bir noktanın minimum dış merkezliğine grafın yarı çapı (radius) denir ve $r(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16. G grafının merkezi; $c(G) = \{v \in V: \epsilon(v) = r(G)\}$ şeklinde tanımlanır.

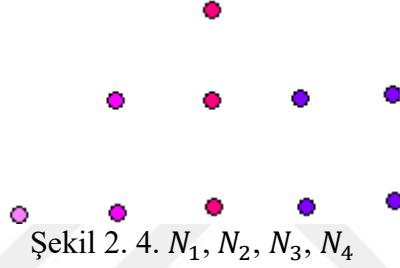
Tanım 2.1.17. G grafının her noktasının dış merkezliği aynı ise öz-merkezli graf (self-centered) denir. Yani $c(G) = G$ ya da $r(G) = diam(G)$ ' dir.

Tanım 2.1.18. $G = (V, E)$ grafında $E = \{x, y \in V: e = x \sim y\}$ olmak üzere; G grafının aynı nokta kümesi ve $\bar{E} = \{x, y \in V: x \sim y \notin E\}$ kümesi üzerinde tanımlı olan $\bar{G} = (V, \bar{E})$ grafına tümleyen graf denir.



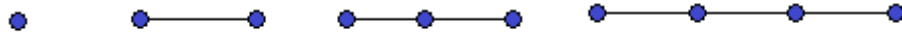
Şekil 2. 3. Tümleyen graf

Tanım 2.1.19. $G = (V, E)$ grafına; $V = \emptyset$ ise boş graf, $|V| = 1$ ise aşikar graf, $E = \emptyset$ ise sıfır (*null*) graf denir. N_n ile gösterilir. $|V| = 1$ ve $|E| = 0$ ise tek nokta (*singleton*) grafi denir. Genellikle K_1 ile gösterilir. Bundan dolayı bir noktalı boş graf da denilir.



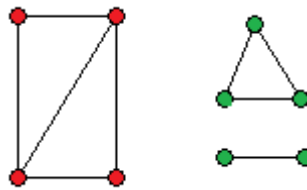
Şekil 2. 4. N_1, N_2, N_3, N_4

Tanım 2.1.20. Bir yol (path), v_i ' ler birbirinden farklı olmak üzere $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ ve $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k\}$ şeklinde boştan farklı graftir. P_n ile gösterilir. G ' de alınan i, j noktalarının uzaklığı G ' de en kısa $i - j$ yol uzunluğudur ve $d_G(i, j)$ olarak gösterilir.



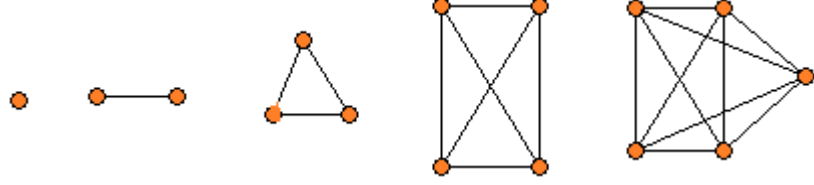
Şekil 2. 5. P_1, P_2, P_3, P_4

Tanım 2.1.21. G boştan farklı bir graf olmak üzere G ' nin herhangi iki noktası bir yol oluşturuyorsa G ' ye bağlantılı (connected) graf denir. Bağlantılı olmayan grafa bağlantısız graf denir.



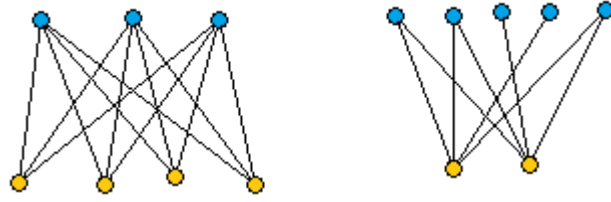
Şekil 2. 6. Bağlantılı ve bağlantısız graf

Tanım 2.1.22. G boştan farklı bir graf olmak üzere her bir farklı nokta çiftinin sadece bir tek kenar oluşturduğu grafa tam graf denir ve nokta sayısı n olmak üzere K_n ile gösterilir.



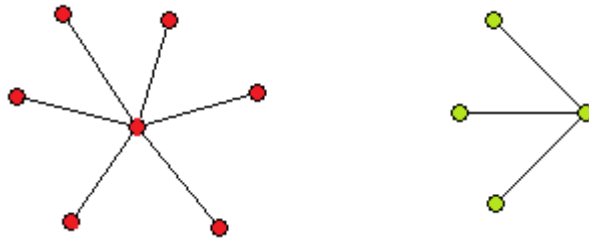
Şekil 2. 7. K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

Tanım 2.1.23. G grafının V noktalar kümesi V_1 ve V_2 bağımsız iki kümeye parçalanabiliyorsa, G grafına iki parçalı graf (bipartite) denir. V_1 bağımsız kümesindeki her nokta V_2 bağımsız kümesindeki her noktaya komşu ise G grafına iki parçalı tam graf (complete bipartite) denir. İki parçalı graflar $|V_1| = n$ ve $|V_2| = m$ olmak üzere $K_{n,m}$ biçiminde gösterilir. Daha da genellenirse, bir grafın V noktalar kümesi r tane kümeye parçalanabiliyorsa, grafa r –parçalı graf (çok parçalı graf) denir.



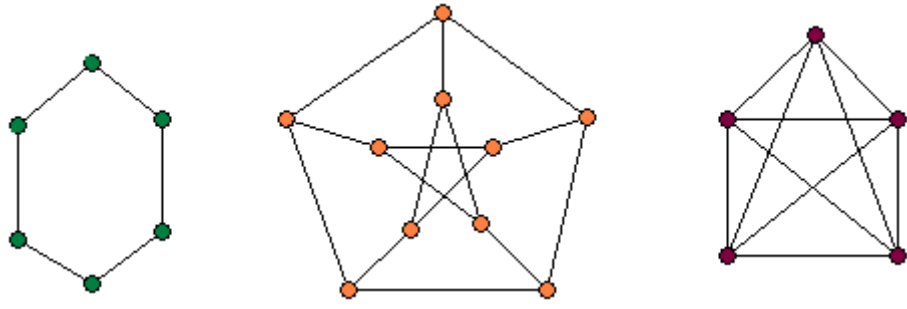
Şekil 2. 8. $K_{3,4}$ ve $K_{2,5}$

Tanım 2.1.24. n noktalı bir grafa, bir noktasının derecesi $n - 1$, diğer noktalarının derecesi 1 olan grafa yıldız (star) graf denir. $K_{1,n-1}$ ya da S_n ile gösterilir.



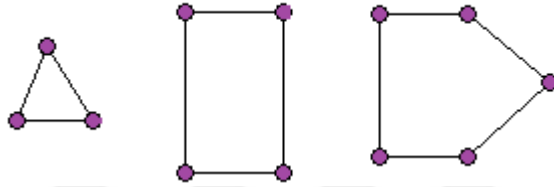
Şekil 2. 9. S_7, S_4

Tanım 2.1.25. Bir G grafında her noktanın derecesi aynı ise G grafına düzenli (*regüler*) graf denir. G grafındaki $\forall v \in V(G)$ için $deg(v) = k$ ise k –düzenli graf denir. Her tam graf $(n - 1)$ –düzenli graftır.



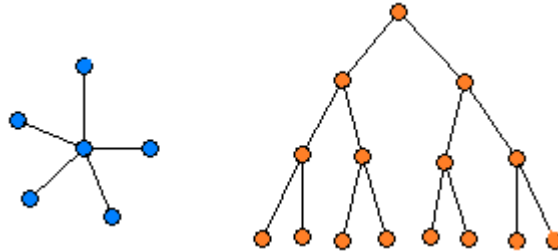
Şekil 2. 10. Düzenli graf örnekleri

Tanım 2.1.26. Bir G grafında başlangıç ve bitiş noktası aynı olan bir yol varsa G grafına döngü graf denir. C_n ile gösterilir.



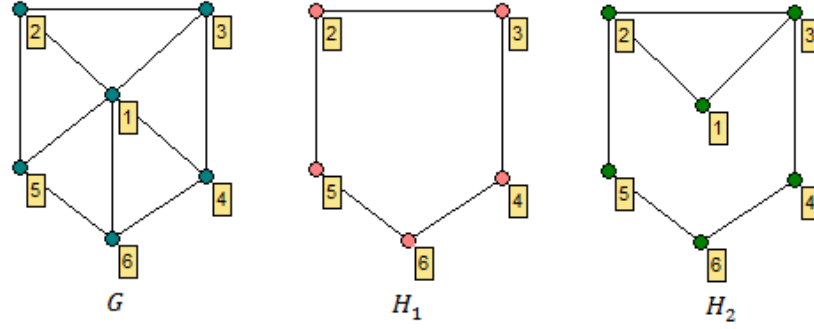
Şekil 2. 11. C_3 , C_4 ve C_5

Tanım 2.1.27. Döngü içermeyen bağlantılı basit bir grafa ağaç denir. Bileşenlerin hepsi ağaç olan bir grafa ise orman denir.



Şekil 2. 12. Ağaç örnekleri

Tanım 2.1.28. $G = (V, E)$ grafı için $V' \subseteq V$ ve $E' \subseteq E$ olmak üzere, $H = (V', E')$ grafına G 'nin bir alt grafı denir ve $H \subseteq G$ ile gösterilir. G grafının noktalarından bazılarının ve bu noktalara bağlı bütün kenarların silinmesi ile elde edilen alt grafa nokta indirgenmiş alt graf denir. Kısaca indirgenmiş alt graf denir. Bazı noktalar sabit kalarak bağlı kenarların silinmesi ile elde edilen alt grafa G 'nin kenar indirgenmiş alt grafı denir.

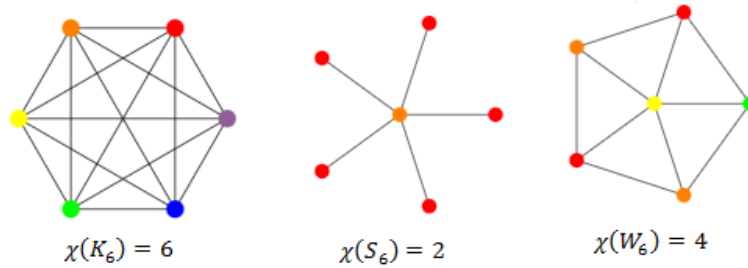


Şekil 2. 13. Alt graf örnekleri

Tanım 2.1.29. $G = (V, E)$ grafının $H = (V', E')$ alt grafı için V' kümesindeki tüm noktalar birbirine komşu ise H alt grafına G grafına ait bir klik denir. Bir kliğin mertebesi klikteki nokta sayısıdır. Bir G grafının en büyük mertebeli kliğine maksimum klik denir. G grafındaki maksimum kliğin nokta sayısına klik sayısı denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.30. G grafının bağımsız nokta kümelerinden eleman sayısı en fazla olana G' nin maksimum bağımsız nokta kümesi denir. Maksimum bağımsız nokta kümesinin kardinalitesine bağımsızlık sayısı denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.31. G grafının komşu olan iki noktası aynı renk olmayacak şekilde grafın noktalarını renklendirmek için gerekli olan en küçük renk sayısına G grafının kromatik sayısı denir ve χ ile gösterilir. G grafının aynı noktasına gelen iki kenarın aynı renge sahip olmaması için her bir kenarı renklendirmek için gereken en az renk sayısına kromatik indeks ya da kenar kromatik sayısı denir. χ' ile gösterilir.



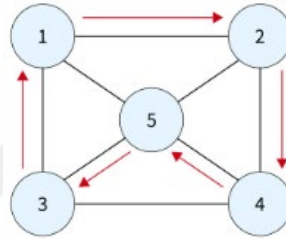
Şekil 2. 14. Graf renklendirme örnekleri

Tanım 2.1.32. $G = (V, E)$ ve $G' = (V', E')$ grafları için bir birebir ve örten $f: V \rightarrow V'$ dönüşümü aşağıdaki koşulu sağlıyorsa, bu dönüşüme G ve G' arasında bir izomorfizma denir.

$$\forall u, v \in V \text{ için } u \sim v \Leftrightarrow f(u), f(v) \in V' \text{ ve } f(u) \sim f(v) \quad (2.6)$$

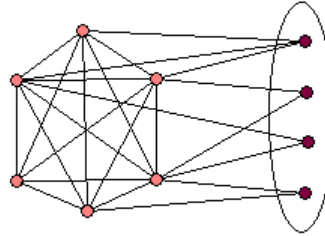
Aralarında en az bir izomorfizmanın tanımlı olduğu herhangi iki G ve G' grafına izomorf graflar denir. $G \cong G'$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.33. G grafında her bir noktadan sadece bir kere geçen bir yol varsa iki nokta arasındaki bu yola Hamilton yolu denir. G 'nin tüm noktalarını kapsayan bir alt grafi döngü oluşturuyorsa bu alt grafa G 'nin bir Hamilton döngüsü denir. Hamilton döngüsü içeren bir grafa ise Hamilton graf denir.



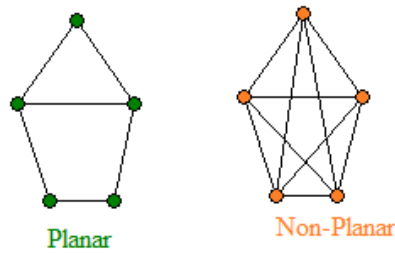
Şekil 2. 15. Hamilton graf

Tanım 2.1.34. G bir graf olmak üzere bağımsız bir kümeye ve kliğe bölünebilirse bölünmüş graf (split graph) denir. Öyle ki bağımsız kümedeki her nokta kliktaki her noktaya komşu ise tam bölünmüş graf (complete split graph) denir.



Şekil 2. 16. Split graf

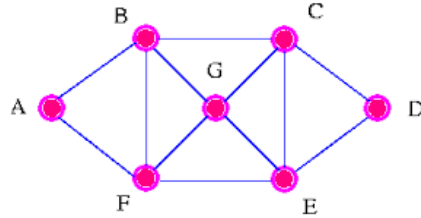
Tanım 2.1.35. G bir graf olmak üzere düzlemde iki kenarın birbirleriyle kesiştikleri nokta haricinde birbirlerini karşılamayacak şekilde çizildiğinde G' ye düzlemsel graf (planar graph) denir. Böyle bir çizime G 'nin düzlemsel çizimi denir.



Şekil 2. 17. Düzlemsel ve düzlemsel olmayan graf

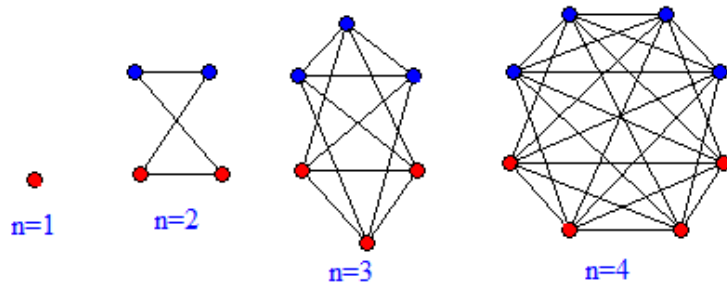
Tanım 2.1.36. G grafının noktaları kenarları kesişmeyecek şekilde bir çember üzerine yerleştirilebilirse çembersel (toroidal) graf denir. Yani düzlemsel olmayan kenar geçişleri bir çember üzerinde olan graflardır.

Tanım 2.1.37. Bir grafın her kenarından bir kez ve sadece bir kez geçmek şartıyla gidilen yola Euler yolu (Eulerian trail) denir. Başlanılan noktadan farklı bir nokta da bitirilebilir. Bu tür graflara çaprazlanabilir denir. Bir döngü içeren Euler yolu varsa Euler döngüsü (Eulerian circuit) denir. Öyle ki aynı noktada başlar ve biter. Euler döngüsü içeren bir grafa ise Euler graf (Eulerian graph) denir.



Şekil 2. 18. Euler graf

Tanım 2.1.38. n noktalı bir G grafının eşleştirilmiş olanlar dışındaki tüm noktalarının bir kenar ile bağlandığı iki sıra eşleştirilmiş noktalardan oluşan grafa kokteyl parti graf (cocktail party) denir ve CP ile gösterilir. Aynı zamanda hiperoktahedral graf olarak da adlandırılır.



Şekil 2. 19. Kokteyl parti graf

Tanım 2.1.39. R birimli, değişmeli bir halka ve R' nin elemanları grafın noktaları olmak üzere iki farklı eleman a ve b komşudur ancak ve ancak $Ra + Rb = R$ şartını sağlayan grafa komaksimal graf denir.

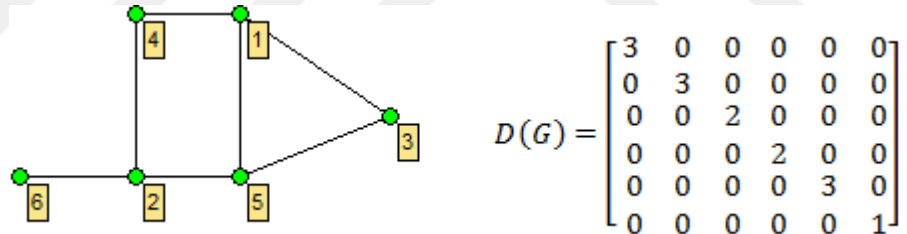
Tanım 2.1.40. Bir grafın parametrelerinden bazıları arasındaki ilişkileri gösteren bir matrise graf matrisi denir.

Tanım 2.1.41. $M(G)$ ya da kısaca M , G grafına ait bir graf matrisi ve I_n birim matris olmak üzere $\det(xI - M(G))$ polinomuna G 'nin $M(G)$ karakteristik polinomu denir ve $Kar(M(G))(x)$ ile gösterilir. Bu polinomun köklerinden yani $M(G)$ matrisinin öz değerlerinden oluşan kümeye ise G 'nin $M(G)$ spektrumu denir ve $spec(M(G))$ ile gösterilir. Ya da matrisin adına göre komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu v.b. de denir.

Tanım 2.1.42. G grafının bir graf matrisi $M(G)$ ve $\lambda \in spec(M(G))$ olsun. $(x - \lambda)^k / (Kar(M(G))(x))$ olacak biçimde en büyük k pozitif tamsayısına öz değerine cebirsel katı denir.

Tanım 2.1.43. $G = (V, E)$ grafı verilsin ve $V = \{1, \dots, n\}$ olsun. $\forall i \in V$ için $d(i)$, i noktasının derecesini göstermek üzere $n \times n$ tipinde $D(G) = diag(d(1), \dots, d(n))$ köşegen matrise G grafının derece matrisi denir.

Örnek 2.1.44. Bir G grafı ve derece matrisi aşağıdaki gibidir.

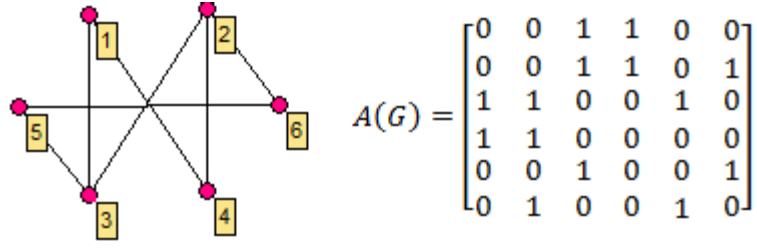


Şekil 2. 20. Grafın derece matrisi

Tanım 2.1.45. $G = (V, E)$ grafı n noktalı m kenarlı bir graf olmak üzere $\forall i, j \in V$ için G grafının komşuluk matrisi aşağıdaki gibi tanımlanan ve $A(G)$ ile gösterilen $n \times n$ tipinde bir matristir.

$$A(G) = [a_{ij}] \text{ öyle ki } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases} \quad (2.7)$$

Örnek 2.1.46. Bir G grafının komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir.



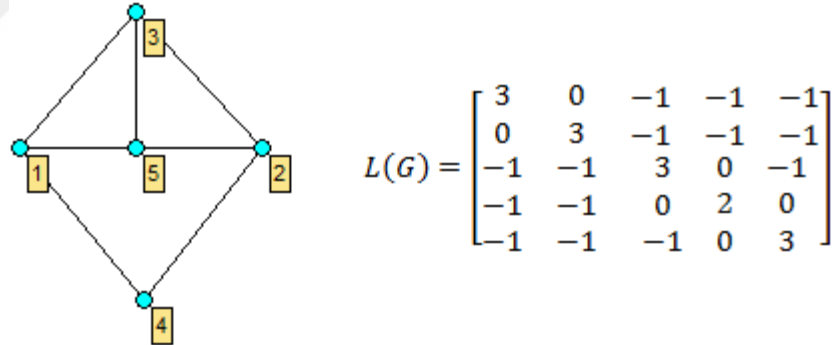
Şekil 2. 21. Bir grafın komşuluk matrisi

Tanım 2.1.47. $G = (V, E)$ grafının Laplasyan matrisi aşağıdaki gibi tanımlanan ve $L(G)$ ile gösterilen $n \times n$ tipindeki bir matristir.

$$L(G) = [b_{ij}] \text{ öyle ki } b_{ij} = \begin{cases} d(i), \text{ eğer } i = j \text{ ise} \\ -1, \text{ eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0, \text{ eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases} \quad (2.8)$$

Buradan görüldüğü üzere $L(G) = D(G) - A(G)$ olur.

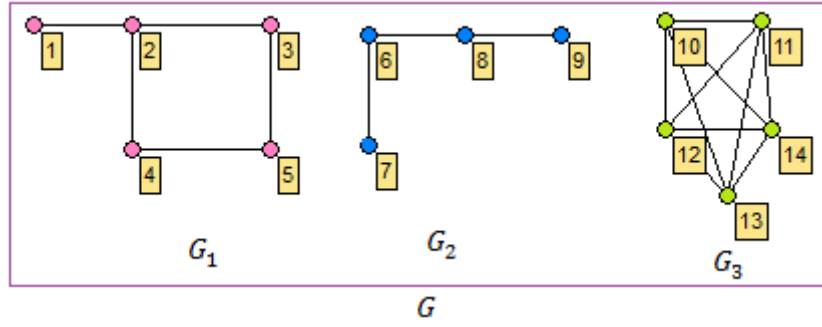
Örnek 2.1.48. Aşağıda bir G grafi ve Laplasyan matrisi verilmiştir.



Şekil 2. 22. Grafın Laplasyan matrisi

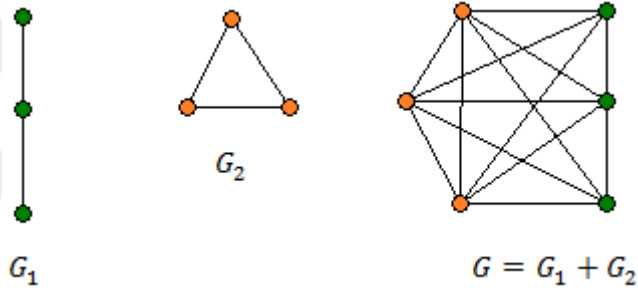
Tanım 2.1.49. G grafının komşuluk matrisi $A(G)$ ve $A(G)$ ' nin spektrumları $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olmak üzere; graf enerjisi $\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.50. $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_n = (V_n, E_n)$ nokta ve kenar kümeleri ayırık kümeler olan graflar verilsin. $V' = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ ve $E' = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ olmak üzere $G = (V', E')$ grafına G_i graflarının ayırık birleşimi denir ve $G = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_n$ şeklinde gösterilir.



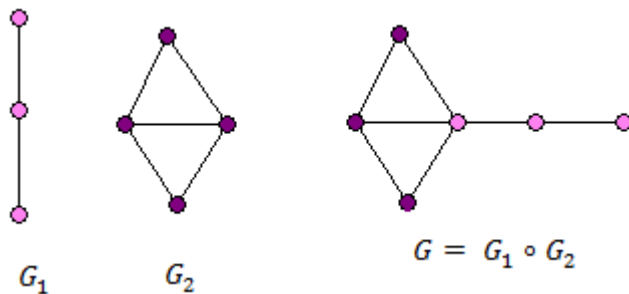
Şekil 2. 23. Ayrık graf birleşimi

Tanım 2.1.51. $G_1 = (V_1, E_1)$,..., $G_n = (V_n, E_n)$ nokta ve kenar kümeleri ayrık kümeler olan graflar verilsin. $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $i \neq j$ olmak üzere V_i kümesindeki her bir noktanın V_j kümesindeki her bir noktaya bir kenar ile bağlanmasına grafların birleşimi denir. $G = G_i + G_j$ ile gösterilir.



Şekil 2. 24. Graf birleşimi

Tanım 2.1.52. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ayrık graflar olmak üzere; keyfi $u \in V_1$, $v \in V_2$ noktalarının çakıştırılması ile elde edilen yeni grafa G_1 ve G_2 graflarının kaynaştırılması denir. $G = G_1 \circ G_2$ ile gösterilir.



Şekil 2. 25. Grafların kaynaştırılması

2.2. Halka Teori

Bu alt bölümde tanımlarda [3-13] kaynaklarından faydalanılmıştır.

2.2.1. Temel Halka Değişmezleri

Tanım 2.2.1.1. $\sim, \emptyset \neq A$ kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer her $a, b, c \in A$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa bu durumda \sim bağıntısına A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

- $a \sim a$ (Yansıma özelliği)
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (Simetri özelliği)
- $a \sim b$ ve $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (Geçişme özelliği)

Tanım 2.2.1.2. A boştan farklı bir küme olmak üzere $f: A \rightarrow A$, $1-1$ ve üzerine dönüşümüne A kümesinin permütasyonu denir. A kümesinin bütün permütasyonlarının kümesi S_A ile gösterirsek o halde bu küme dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir grup teşkil eder.

Tanım 2.2.1.3. $n \geq 1$ tam sayısı olmak üzere n ' yi geçmeyen ve n ile aralarında asal olan sayıların sayısına Euler fonksiyonu denir. $\phi(n)$ ile gösterilir. Euler fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibi sıralanmaktadır.

- p asal ise; $\phi(p) = p - 1 = p \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ ' dir.
- p asal ve $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ ise; $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ ' dir.
- Euler fonksiyonu çarpımsaldır. Yani $(a, b) = 1$ için $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ ' dir.
- p_i ' ler farklı asallar ve $\alpha_i \geq 1$ olmak üzere $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ ise;
$$\phi(n) = \phi(p_1^{\alpha_1})\phi(p_2^{\alpha_2}) \dots \phi(p_r^{\alpha_r}) \quad (2.9)$$

$$= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \quad (2.10)$$

Ya da

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \quad (2.11)$$

dir.

Tanım 2.2.1.4. G bir grup, e , G 'nin birim elemanı ve $g \in G$ olmak üzere $g^n = e$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ tamsayısı varsa, g elemanına sonlu mertebededir denir. Eğer $g^n = e$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ yoksa o halde g elemanına sonsuz mertebededir denir. $g \in G$ sonlu mertebeden olmak üzere $g^n = e$ olacak şekildeki en küçük $n \in \mathbb{Z}^+$ tamsayısına g 'nin mertebesi denir ve $o(g)$ ya da $|g|$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1.5. Boştan farklı bir R kümesi üzerinde toplama (+) ve çarpma (\cdot) denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o zaman $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir .

- $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.
- R kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $\forall a, b \in R$ için $ab \in R$ dir.
- R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ dir.
- Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a, b, c \in R$ için;

$$a(b + c) = ab + ac \quad (2.12)$$

ve

$$(b + c)a = ba + ca \quad (2.13)$$

dır.

Tanım 2.2.1.6. $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir halka olmak üzere çarpma işlemine göre değişmeli ise yani $\forall a, b \in R$ için $ab = ba$ ise o takdirde $(R, +, \cdot)$ halkasına değişmeli halka denir. Çarpma işlemine göre birim elemana sahip ise yani $\forall a \in R$ için;

$$a1_R = 1_R a = a \quad (2.14)$$

olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa o zaman $(R, +, \cdot)$ halkasına birimli halka denir.

Örnek 2.2.1.7. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cebirsel yapıları birer halkadır.

Örnek 2.2.1.8. R bir halka olmak üzere $M_n(R)$ elemanları R halkasına ait olan bütün $n \times n$ karesel matrislerin kümesi olsun. O takdirde bu küme üzerinde toplama işlemi olarak matrislerin bilinen toplama işlemi ve çarpma işlemi olarak da bilinen matris çarpımını göz önüne alınırsa o zaman $(M_n(R), +, \cdot)$ cebirsel yapısı birimli fakat değişmeli olması gerekmeyen bir halka teşkil eder. Buna göre $M_n(\mathbb{Z})$, $M_n(\mathbb{Q})$, $M_n(\mathbb{R})$ ve $M_n(\mathbb{C})$ kümeleri de birer halkadır.

Tanım 2.2.1.9. $(R, +, \cdot)$ birimli bir halka olmak üzere bir $a \in R$ ' nin çarpmaya göre tersi varsa o zaman a elemanına tersinirdir denir. $a \in R$ tersinir ise a ' nin tersi a^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.2.1.10. R birimli bir halka olmak üzere R ' nin merkezi $M(R)$ şeklinde gösterilir ve

$$M(R) = \{x \in R : ax = xa, \forall a \in R \text{ için}\} \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.1.11. R bir halka ve $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ varsa a ' ya R halkasının nilpotent elemanı denir. Öyle ki $a^2 = a$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa halkanın idempotent elemanı denir.

Örnek 2.2.1.12. $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ halkasının elemanlarına bakılırsa;

$$3^2 = 0, 6^2 = 0$$

\mathbb{Z}_9 halkasının sıfırdan farklı 2 tane $\{3,6\}$ nilpotent elemanı vardır.

Tanım 2.2.1.13. R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına sol sıfır bölen denir. Yine $0 \neq a \in R$ olmak üzere $ba = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına sağ sıfır bölen denir. Eğer a elemanı hem sağ sıfır bölen hem de sol sıfır bölen ise kısaca a ' ya sıfır bölen denir.

Örnek 2.2.1.14. $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ halkasında;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elemanları göz önüne alındığında $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olmasına karşılık $AB = 0$ dir. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O halde A matrisi sol sıfır bölen B matrisi sağ sıfır bölen olur.

Tanım 2.2.1.15. R bir halka olsun. p , halkanın ne tersinir ne de sıfır bölen olan bir elemanı olsun. Her x, y için $p = xy$ eşitliği x ya da y ' nin tersinir olmasını gerektiriyorsa, o zaman p ' ye indirgenemez denir. Bu bir anlamda p elemanı gerçekten başka elemanların çarpımı olarak yazılamıyor demektir.

Tanım 2.2.1.16. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halkaya tamlık bölgesi denir. Bu tanıma göre bir tamlık bölgesindeki bir çarpımda sadece çarpanlardan biri sıfır olduğunda çarpım sıfırdır yani sadece $a = 0$ ya da $b = 0$ olduğunda $ab = 0$ dir.

Örnek 2.2.1.17. p asal sayı olmak üzere $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ halkası da bir tamlık bölgesidir.

Örnek 2.2.1.18. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tam sayılar halkası, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ rasyonel sayılar halkası ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kompleks sayılar halkası birer tamlık bölgesidir.

Tanım 2.2.1.19. R bir tamlık bölgesi olmak üzere $a \in R$ için $ab = 1$ şartına karşılık $b \in R$ varsa a elemanına R ' nin bir aritmetik birimi denir. Buna göre R ' nin bütün aritmetik birimlerinden oluşan küme $A(R)$ ile gösterilirse;

$$a \in A(R) \Leftrightarrow a|1 \tag{2.16}$$

elde edilmiş olur.

Tanım 2.2.1.20. Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre bir tersi varsa o zaman bu halkaya bir cisim denir ve genel olarak \mathbb{F} ile gösterilir.

Örnek 2.2.1.21. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cebirsel yapıları bir cisim olmasına karşılık $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkası bir cisim değildir. Gerçekten; $2 \in \mathbb{Z}$ ' nin çarpmaya göre tersi $\frac{1}{2}$ olup $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkası bir cisim olamaz.

Sonuç 2.2.1.22. Her cisim bir tamlık bölgesidir [7].

Teorem 2.2.1.23. Her sonlu tamlık bölgesi bir cisimdir [7].

Sonuç 2.2.1.24. p asal sayı olmak üzere $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ halkası bir cisimdir [7].

Tanım 2.2.1.25. R bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa o takdirde bu özelliği sağlayan en küçük pozitif tamsayıya halkanın karakteristiği denir. Eğer böyle bir pozitif tamsayı yoksa yani her $a \in R$ için $na = 0$ olması $n = 0$ olmasını gerektiriyorsa o zaman R halkasının karakteristiği sıfırdır denir. Bir R halkasının karakteristiğini kısaca $Kar(R)$ ile gösterilmektedir.

Örnek 2.2.1.26. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ halkalarının karakteristikleri sıfırdır. Yani;

$$Kar(\mathbb{Z}) = Kar(\mathbb{Q}) = Kar(\mathbb{R}) = Kar(\mathbb{C}) = 0$$

dır.

Örnek 2.2.1.27. \mathbb{Z}_n halkasının karakteristiği n 'dir. Yani $Kar(\mathbb{Z}_n) = n$ 'dir.

Tanım 2.2.1.28. R bir halka ve I, R' nin bir alt halkası olmak üzere her $r \in R \forall a \in I$ için $ra \in I$ ve $ar \in I$ ise o takdirde I ya R halkasının bir ideali denir. Böylece I, R' nin bir alt halkası olmak üzere her $r \in R$ için $rI \subseteq I$ ve $Ir \subseteq I$ ise o zaman I, R' nin bir idealidir. $rI \subseteq I$ ise I ya R' nin sol ideali $Ir \subseteq I$ ise I ya R' nin sağ ideali denir.

Tanım 2.2.1.29. R bir halka ve I, R' nin bir ideali olmak üzere I, R' nin hakiki bir alt kümesi ise yani $I \subset R$ ise o zaman I ya R' nin bir hakiki ideali denir.

Teorem 2.2.1.30. R bir halka ve I, R' nin boştan farklı herhangi bir alt kümesi olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o takdirde I, R halkasının bir idealidir.

- $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$
- $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için $ar \in I$ ve $ra \in I$ dır [7].

Tanım 2.2.1.31. R bir halka olmak üzere $\{0\}$ ve R' nin kendisi R halkasının birer ideali olup bu ideallere aşık ideal denir.

Örnek 2.2.1.32. $I = \{0,3,6,9\}$ alt halkası \mathbb{Z}_{12} halkasının bir idealidir.

Tanım 2.2.1.33. R birimli, değişmeli bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda;

$$\langle a \rangle = \{ra : r \in R\} \quad (2.17)$$

kümesi R halkasının bir ideali olup bu ideale a elemanı tarafından üretilen esas ideal denir.

Teorem 2.2.1.34. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkasının her ideali bir esas idealdir [7].

Tanım 2.2.1.35. R bir halka ve I, R' nin bir ideali olmak üzere $I^k = 0$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ varsa I' ya R' nin nilpotent ideali denir.

Tanım 2.2.1.36. R değişmeli bir halka ve I, R' nin hakiki bir ideali olmak üzere $xy \in I$ olması $x \in I$ ya da $y \in I$ olmasını gerektiriyorsa bu durumda I' ya R' nin bir asal ideali denir.

Örnek 2.2.1.37. \mathbb{Z} tamsayılar halkası ve p asal bir tamsayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$ ideali \mathbb{Z} halkasının bir asal idealidir. Yani $xy \in p\mathbb{Z}$ ise o takdirde ya $x \in p\mathbb{Z}$ ya da $y \in p\mathbb{Z}$ dir. Gerçekten $xy \in p\mathbb{Z}$ ise bu durumda $pt = xy$ olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $p|xy$. Halbuki p asal olduğundan $p|x$ ya da $p|y$ olmalıdır. Böylece x ya da y, p' nin bir katıdır. Bundan dolayı ya $x \in p\mathbb{Z}$ ya da $y \in p\mathbb{Z}$ olur ki bu da asal ideal tanımından $p\mathbb{Z}'$ nin \mathbb{Z} tamsayılar halkasının asal ideali olduğunu gösterir.

Tanım 2.2.1.38.

- a) M değişmeli olması gerekmeyen herhangi bir R halkasının bir hakiki ideali olsun. Bu durumda $M \subseteq I \subseteq R$ olacak şekilde R' nin bir ideali olduğunda ya $I = M$ ya da $I = R$ oluyorsa o zaman M idealine R' nin maksimal ideali denir.
- b) R halkasının bütün maksimal ideallerinin kesişimine Jacobson radikal denir. $J(R) = \bigcap M$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1.39. Her ideali esas ideal olan (yani bir tek eleman tarafından üretilen) bir tamlık bölgesine esas ideal bölgesi denir.

Tanım 2.2.1.40. R birimli, değişmeli bir halka ve I, R' nin bir ideali ve $I, r \in R$ elemanlarından oluşmak üzere; $\forall x \in I$ için $0 \in R$ olduğunda $r \cdot x = 0$ ise I' ya yok eden (annihilator) ideal denir.

Tanım 2.2.1.41. $(R, +, \cdot)$ ve $(S, +, \cdot)$ iki halka olmak üzere

$$\varphi: R \rightarrow S$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa φ' ye bir halka homomorfizmi denir.

- $\forall x, y \in R$ için $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\forall x, y \in R$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Tanım 2.2.1.42. $\varphi: R \rightarrow S, 1 - 1$ ve üzerine bir halka homomorfizmi ise o zaman φ' ye bir halka izomorfizmi denir. Bu durumda R ve S halkalarına izomorftur (ya da izomorftür) denir ve $R \cong S$ ile gösterilir.

2.2.2. Özel Halkalar

Tanım 2.2.2.1. R bir halka ve I, R' nin bir ideali olmak üzere $(R/I, +, \cdot)$ halkasına R' nin I' ya göre bölüm halkası denir.

Örnek 2.2.2.2. $5\mathbb{Z} = \{5k: k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi \mathbb{Z} tamsayılar halkasının bir ideali olup $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ bölüm halkasından söz edilebilir. Burada;

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0 + 5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}$$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ bölüm halkasının toplama işlemine göre birim elemanı $0 + 5\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$ ve çarpma işlemine göre birim elemanı $1 + 5\mathbb{Z}'$ dir.

Tanım 2.2.2.3. R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa R halkasına bir (von Neumann) regüler halka denir.

Örnek 2.2.2.4. Bir Boole halkası, her elemanı $a^2 = a$ koşulunu karşılayan bir halkadır. Her Boole halkası (von Neumann) regüler halkadır.

Tanım 2.2.2.5. R bir halka ve S maksimal ideali olmak üzere tek maksimal ideali olan halkalara lokal halka denir. (R, S) ile gösterilir.

Örnek 2.2.2.6. Tüm cisimler lokal halkadır. Çünkü bu halkaların tek maksimal ideali $\{0\}$ 'dir.

p asal ve $n \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ halkası lokal halkadır. Tek maksimal ideal p 'nin bütün katlarından oluşur.

Tanım 2.2.2.7. Her ideali esas ideal olan değişmeli bir halkaya esas ideal halkası denir. Bir tamlık bölgesi olan esas ideal halkası aynı zamanda esas ideal bölgesidir.

Örnek 2.2.2.8. \mathbb{Z} tamsayılar halkası ve $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bölüm halkası genel halka işlemlerine göre esas ideal halkasıdır.

Tanım 2.2.2.9. R değişmeli, birimli bir halka ve S , R 'nin sıfır-bölen olmayan elemanlarının kümesi olsun. O halde S sıfır içermeyen çarpımsal kapalı bir kümedir. Dolayısıyla toplam bölüm halkasını elde etmek için S kümesinde R halkası yerleştirilir. Toplam bölüm halkası $K(R) = S^{-1}R$ şeklinde gösterilir. Eğer R tamlık bölgesi ise o zaman $S = R - \{0\}$ ve toplam bölüm halkası ile kesirler cismi aynıdır. Yerelleştirme, bir halkaya çarpımsal tersler eklemenin sistematik bir yöntemidir. Yerelleştirme, bir R halkası ve S alt kümesi verildiğinde S kümesinin görüntüsünün birimlerden (ters çevrilebilir elemanlar) oluşmasını sağlayacak şekilde bir halka homomorfizmi ile elde edilir.

Tanım 2.2.2.10. R bir halka olsun. R halkasının sıfır ideali indirgenemez ise halkaya indirgenemez halka denir. Yani I ve J sıfırdan farklı R 'nin iki ideali olsun. $a \in I$ ve $b \in J$ sıfırdan farklı elemanları olmak üzere; $0 \neq ab \in I \cap J$ 'dir. Dolayısıyla indirgenemez halka sıfır olmayan iki idealin kesişiminin her zaman sıfır olmadığı halkadır.

Tanım 2.2.2.11. R bir halka olsun. R sıfır olmayan nilpotent elemanlara sahip değilse R 'ye indirgenmiş halka denir.

Tanım 2.2.2.12. Azalan bir zincir $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$, R halkasındaki sol (sağ) idealleri sonlu ise veya tüm $n \geq k$ için $I_n = I_k$ olacak şekilde bir k indeksi varsa sonlanır. R 'nin sol (sağ) ideallerinin azalan her zinciri sona ererse R azalan zincir koşulunu sağlamaktadır. Azalan zincir koşulunu sağlayan halkaya Artin (Artinian) halka denir.

Tanım 2.2.2.13. Artan bir zincir $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$, R halkasındaki sol (sağ) idealleri sonlu ve ideallerin bir maksimum elemanı varsa öyle bir n indeksi vardır ki $I_n = I_{n+1} = \dots$ dir. R ' nin sol (sağ) ideallerinin artan her zinciri sonlu olarak üretilirse R artan zincir koşulunu sağlamaktadır. Artan zincir koşulunu sağlayan halkaya Noeter (Noetherian) halka denir.

Örnek 2.2.2.14. \mathbb{Z} tamsayılar halkası bir Noeter halkasıdır fakat Artin halka değildir. Çünkü her ideal tek bir eleman tarafından üretilir. Mesela;

$\langle 5\mathbb{Z} \rangle \supset \langle 25\mathbb{Z} \rangle \supset \langle 125\mathbb{Z} \rangle \supset \dots \supset \langle 5^n\mathbb{Z} \rangle \supset \dots$ dır.

Tanım 2.2.2.15. R bir halka olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlıyorsa nilpotent halka olarak adlandırılır.

1. $x_1, x_2, \dots, x_c, x_{c+1} \in R$ ' deki herhangi bir eleman seçimi için öyle bir c sabiti vardır ki ve herhangi bir $a_1, a_2, \dots, a_c, a_{c+1}$ dizisi için $a_1 = x_1$ ve $a_{i+1}, a_i \cdot x_{i+1}$ veya $x_{i+1} \cdot a_i$ çarpımlarından biri olacak şekilde $a_{c+1} = 0$ olmalıdır.
2. $x_1, x_2, \dots, x_m \in R$ ' deki herhangi bir eleman seçimi için öyle bir m sabiti vardır ki her x_i ' yi tam olarak bir kez içeren herhangi bir çarpım 0 değerine sahiptir.
3. R ' nin üst merkez serisi, sonlu birçok adımda R ' ye ulaşır.

3.BÖLÜM

DEĞİŞMELİ HALKALARDA TANIMLI GRAF YAPILARI

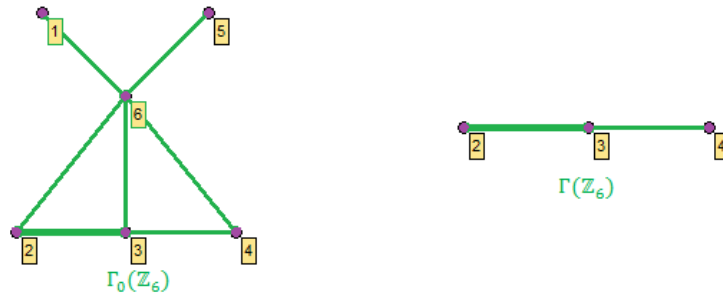
Bu bölümde değişmeli halkalar üzerine tanımlı grafların literatür incelemesi sonucunda derleme yapılmıştır. [14-42] kaynaklarından faydalanılmıştır.

3.1. Sıfır-Bölen Graflar

Değişmeli bir R halkasının sıfır-bölenleriyle ilişkilendirilen $\Gamma_0(R)$ ile gösterilen bir graf fikri, 1988' de I. Beck tarafından bu tür grafların renklendirmelerini çalıştığı yerde ortaya atıldı [16]. Beck, bu grafi tanıttıktan sonra $\Gamma_0(R)$ ' ın klik sayısı ile kromatik sayısının eşit olduğunu tahmin etti. 1993 yılında D.D. Anderson ve M. Naseer bir karşı örnek sağlayarak Beck' in varsayımını olumsuz olarak belirlediler [17]. Tanım, sıfır-bölen graf adıyla birlikte Beck ' in tanımını değiştirdikten sonra D.F. Anderson ve P.S. Livingston tarafından 1999' da tanıtıldı [14]. Ayrıca değişmeli bir halkanın halka-teori özellikleri ile sıfır-bölen grafın graf-teori özellikleri arasındaki etkileşimi de verilmiştir. Anderson v.d. tarafından verilen tanımda, Beck, değişmeli R halkasının tüm elemanlarını $\Gamma_0(R)$ grafının noktaları olarak aldı [16]. Sıfır-bölen grafın değiştirilmiş tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.1.1. R birimli, değişmeli halka olsun. R ' nin sıfır bölenlerinin kümesi $\mathcal{Z}(R)$ olsun. R ' nin sıfır bölen grafi $\Gamma(R)$, $\mathcal{Z}(R)^* = \mathcal{Z}(R) - \{0\}$ nokta kümesi olmak üzere “ $x \neq y$ ve $x, y \in \mathcal{Z}(R)^*$ için x ve y komşudur gerek ve yeter şart $xy = 0$ ” koşullu bir graftır [14].

Örnek 3.1.2. $R = \mathbb{Z}_6$ ise o zaman $\mathcal{Z}(R) = \{0,2,3,4\}$ ' tür. $\Gamma_0(\mathbb{Z}_6)$ ve $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ grafları Şekil 3.1.' de verilmiştir.



Şekil 3. 1. $\Gamma_0(\mathbb{Z}_6)$ ve $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$

$\Gamma(R)$ 'nin sonsuz olabileceği unutulmamalıdır. Yani bir R halkasının sonsuz sayıda sıfır-bölene olabilir. Fakat muhtemelen $\Gamma(R)$ sonlu olduğunda en çok ilgiyi çekmektedir. Çünkü o zaman $\Gamma(R)$ çizilebilir.

Teorem 3.1.3. R değişmeli bir halka olsun. Bu durumda $\Gamma(R)$ sonludur gerek ve yeter şart R sonludur veya tamlık bölgesidir. Özellikle $1 \leq |\Gamma(R)| \leq \infty$ ise R halkası sonludur ve cisim değildir [14].

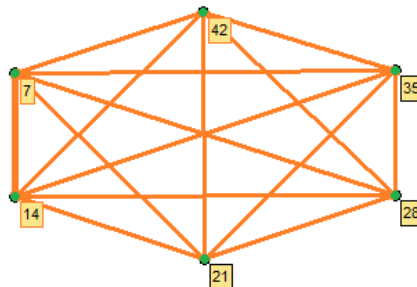
Teorem 3.1.4. R değişmeli bir halka olsun. O zaman $\Gamma(R)$ 'nin her noktasına komşu olan bir noktası vardır ancak ve ancak ya $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$, burada A bir tamlık bölgesidir ya da $Z(R)$ bir yok eden idealdir (dolayısıyla asaldir) [14].

Sonuç 3.1.5. R bir değişmeli Noether halka olsun. O zaman $\Gamma(R)$ 'nin her noktasına komşu olan bir noktası vardır ancak ve ancak ya A bir (Noetherian) tamlık bölgesi ya da $Z(R)$, R 'nin bir (asal) ideali olmak üzere $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A'$ dir. Ek olarak $\dim(R) = 0$ ise o zaman A bir cisim olduğunda ya $R \cong \mathbb{Z}_2 \times A$ ya da $\{0\}$, R 'nin aşikar idealidir (yani $Z(R) = N(R)$) [14].

Sonuç 3.1.6. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman $\Gamma(R)$ 'nin her noktasına komşu olan bir noktası vardır ancak ve ancak F sonlu bir cisim ya da R lokal olmak üzere $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F'$ dir. Ayrıca bazı p asalları ve $n \geq 1$ tam sayıları için $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ ise $|\Gamma(R)| = |F| = p^n$ ve R lokal ise $|\Gamma(R)| = p^n - 1$ dir [14].

Teorem 3.1.7. R değişmeli bir halka olsun. O zaman $\Gamma(R)$ tam graftır ancak ve ancak $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ veya $\forall x, y \in Z(R)$ için $xy = 0$ [14].

Örnek 3.1.8. $R = \mathbb{Z}_{49}$ halkası incelenirse $Z(R)^* = \{7,14,21,28,35,42\}$ ' tür. $\forall x, y \in Z(R)^*$ için $xy = 0$ olduğundan $\Gamma(R)$ tam graftır.



Şekil 3. 2. $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$
28

Sonuç 3.1.9. R değişmeli bir halka olsun. $x, y \in Z(R)$ için $xy = 0$ veya $x = y$ ise $x \sim y$ şeklinde ve $xy = 0$ ise $x \sim^* y$ şeklinde tanımlansın.

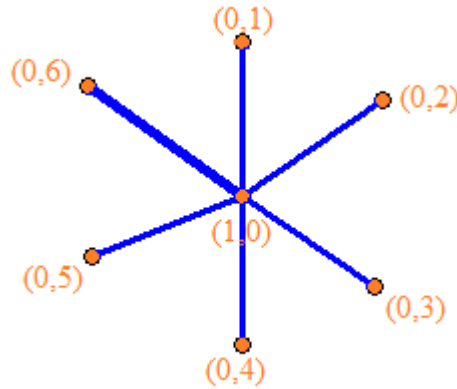
- a) \sim bağıntısı geçişlidir (eşdeğer olarak, denklik bağıntısı) $\Leftrightarrow \Gamma(R)$ tam graftır.
- b) \sim^* bağıntısı geçişlidir (eşdeğer olarak, denklik bağıntısı) $\Leftrightarrow \Gamma(R)$ tam graftır ve $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [14].

Teorem 3.1.10. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. Eğer $\Gamma(R)$ tam graf ise o zaman ya $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ya da $Kar(R) = p$ (veya p^2) olacak şekilde R lokaldir ve p asal, $n \geq 1$ olduğunda $|\Gamma(R)| = p^n - 1$ 'dir [14].

Lemma 3.1.11. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. Eğer $\Gamma(R)$ 'nin tam olarak bir noktası diğer her noktasına komşu ve başka komşu noktası yoksa o zaman ya F sonlu cisim ve $|F| \geq 3$ olacak şekilde $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ ya da S maksimal ideali $R/S \cong \mathbb{Z}_2, S^3 = 0$ ve $|S^2| \leq 2$ olacak şekilde R lokaldir. Dolayısıyla bazı p asalı ve $n \geq 1$ tamsayıları için $|\Gamma(R)|$ ya p^n ya da $2^n - 1$ 'dir [14].

Teorem 3.1.12. R sonlu, değişmeli bir halka $|\Gamma(R)| \geq 4$ olsun. O zaman $\Gamma(R)$ yıldız graftır ancak ve ancak F sonlu bir cisim olduğunda $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ 'dir. Özellikle $\Gamma(R)$ yıldız graf ise o zaman bazı p asalı ve $n \geq 1$ tamsayıları için $|\Gamma(R)| = p^n$ dir. Tersine her p^n mertebeli yıldız graf $\Gamma(R)$ olarak anlaşılabilir [14].

Örnek 3.1.13. $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$ halkasında \mathbb{Z}_7 sonlu bir cisim olduğu için $\Gamma(R)$ yıldız graftır. Bu halkanın $Z(R)^* = \{(1,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6)\}$ 'dir. $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7)$ incelenirse;



Şekil 3. 3. $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7)$

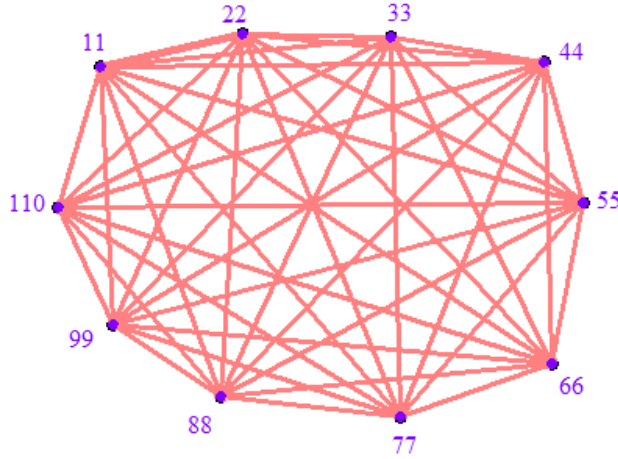
Şekil 3.3. ' den görüldüğü üzere $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7) \cong K_{1,6}$ ' dir.

Teorem 3.1.14. R bir tamlık bölgesi olmayan değişmeli bir halka ve $\Gamma(R)$ ' nin her noktası sonlu dereceye sahipse R sonludur [15].

Teorem 3.1.15. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. $\Gamma(R)$ düzenli bir graf ise o halde ya $\Gamma(R) \cong K_{m,n}$ ya $\Gamma(R) \cong K_n$ ' dir [15].

Teorem 3.1.16. R değişmeli bir halka olsun. $\Gamma(R)$ bir döngü içeriyorsa $\Gamma(R)$ bağlantılıdır ve $gr(\Gamma(R)) \leq 7$ ' dir [14].

Örnek 3.1.17. $R = \mathbb{Z}_{121}$ halkasını alalım. $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$ 'nin nokta kümesi $Z(R)^* = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110\}$ olup grafi çizilirse;



Şekil 3. 4. $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$

Şekil 3.4. deki gibi olur. $\forall v \in Z(R)^*$ için $d(v) = 9$ olduğundan düzenli graftır. Teorem 3.1.15' den $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$ tam graf olur. Teorem 3.1.16' dan $gr(\Gamma(\mathbb{Z}_{121})) = 3$ tür.

Teorem 3.1.18. R değişmeli bir Artin halka olsun (özellikle R sonlu, değişmeli bir halka olabilir). $\Gamma(R)$ bir döngü içeriyorsa o zaman $gr(\Gamma(R)) \leq 4$ tür [14].

Teorem 3.1.19. R tamlık bölgesi olmayan değişmeli bir halka olsun. O zaman tam olarak aşağıdakilerden biri sağlanır.

- $gr(\Gamma(R)) \leq 4$;
- $\Gamma(R)$ bir yıldız graftır;
- $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ veya $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ [18].

Lemma 3.1.20. $K(R)$ toplam bölüm halkası olacak şekilde R değişmeli bir halka olsun. O zaman $diam(\Gamma(K(R))) = diam(\Gamma(R))$ ve $gr(\Gamma(K(R))) = gr(\Gamma(R))$ ' tir [19].

Teorem 3.1.21. R indirgenmiş değişmeli halkası için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- a) $gr(\Gamma(R)) \leq 4$;
- b) $T(R) = F_1 \times F_2$, her F_i , $|F_i| \geq 3$ olacak şekilde bir cisim olduğunda;
- c) $\Gamma(R) = K_{m,n}$, $m, n \geq 2$ [19].

Teorem 3.1.22. $N(R) \neq \{0\}$ olmak üzere R değişmeli halkası için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- a) $gr(\Gamma(R)) = 4$;
- b) $R \cong D \times B$; $|D| \geq 3$ olacak şekilde D bir tamlık bölgesi ve $B = \mathbb{Z}_4$ veya $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ olduğunda (dolayısıyla $K(R) \cong K(D) \times B$).
- c) $\Gamma(R) = \bar{K}_{m,3}$, $m \geq 2$ [19].

Teorem 3.1.23. R indirgenmiş değişmeli halkası için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

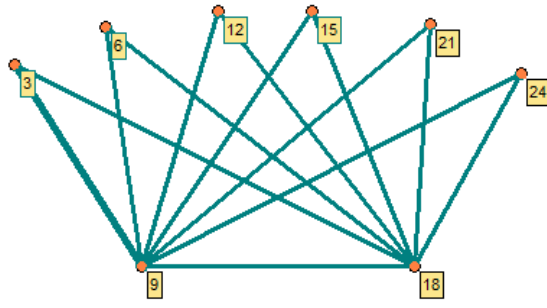
- a) $\Gamma(R)$ boş değildir ve $gr(\Gamma(R)) = \infty$;
- b) F bir cisim olmak üzere, $K(R) = \mathbb{Z}_2 \times F$;
- c) Bazı $n \geq 1$ için $\Gamma(R) = K_{1,n}$ [19].

Teorem 3.1.24. $N(R) \neq \{0\}$ olmak üzere R değişmeli halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

- a) $gr(\Gamma(R)) = \infty$;
- b) $B = \mathbb{Z}_4$ veya $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ olduğunda veya $\Gamma(R)$ bir yıldız graf ise $R \cong B$ veya $R \cong \mathbb{Z}_2 \times B$;
- c) Bazı $n \geq 1$ için $\Gamma(R)$ tek noktalıdır, $\bar{K}_{1,3}$ veya $K_{1,n}$ ' dir [19].

Teorem 3.1.25. R değişmeli bir halka olsun. Bu durumda $diam(\Gamma(R)) \leq 3$ ' tür [14].

Örnek 3.1.26. $R = \mathbb{Z}_{27}$ halkası olsun. O halde;



Şekil 3. 5. $\Gamma(\mathbb{Z}_{27})$

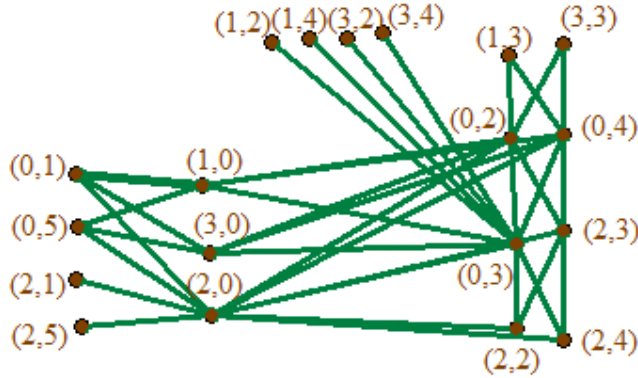
Teorem 3.1.25.' den $diam(\Gamma(\mathbb{Z}_{27})) = 2$ ' dir.

Teorem 3.1.27. R_1 ve R_2 her ikisi de tamlık bölgesi olmayan birimli, değişmeli halkalar olsun. O zaman $diam(\Gamma(R_1 \times R_2)) = 3$ ' tür [20].

Örnek 3.1.28. $R_1 = \mathbb{Z}_4$ ve $R_2 = \mathbb{Z}_6$ olsun. Böylece;

$$\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)^* = \left\{ \begin{array}{l} (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,0), (2,0), (3,0), (1,2), (1,3), (1,4), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,3), (3,4) \end{array} \right\}$$

dir. $\Gamma(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)$ aşağıdaki gibidir.



Şekil 3. 6. $\Gamma(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)$

$diam(\Gamma(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)) = 3$ ve $gr(\Gamma(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)) = 3$ ' tür.

Teorem 3.1.29. R_1, R_2, \dots, R_n değişmeli halkaları (birimli olmak zorunda değil) ve $diam(\Gamma(R_1)) = diam(\Gamma(R_2)) = \dots = diam(\Gamma(R_n)) = 1$ ve $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n (n > 2)$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

a) $diam(\Gamma(R)) = 1 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n$ için $R_i = \mathcal{Z}(R_i)$;

- b) $diam(\Gamma(R)) = 2 \Leftrightarrow$ bazı $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $R_i = Z(R_i)$ ve $R_j \neq Z(R_j)$;
c) $diam(\Gamma(R)) = 3 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n$ için $R_i \neq Z(R_i)$ [21].

Teorem 3.1.30. R_1, R_2, \dots, R_n değişmeli halkaları (birimli olmak zorunda değil) ve $diam(\Gamma(R_1)) = diam(\Gamma(R_2)) = \dots = diam(\Gamma(R_n)) = 2$ ve $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n (n > 2)$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- a) $diam(\Gamma(R)) \neq 1$;
b) $diam(\Gamma(R)) = 2 \Leftrightarrow$ bazı $i = 1, \dots, n$ için $R_i = Z(R_i)$;
c) $diam(\Gamma(R)) = 3 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n$ için $R_i \neq Z(R_i)$ [21].

Teorem 3.1.31. R_1, R_2, \dots, R_n değişmeli halkaları (birimli olmak zorunda değil) ve $diam(\Gamma(R_1)) = diam(\Gamma(R_2)) = \dots = diam(\Gamma(R_n)) = 3$ ve $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n (n > 2)$ olsun. O zaman $diam(\Gamma(R)) = 3$ [21].

Teorem 3.1.32. R_1, R_2, \dots, R_n değişmeli halkaları (birimli olmak zorunda değil) verilsin. Bazı $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $diam(\Gamma(R_i)) = 1$ ve $diam(\Gamma(R_j)) = 2$ ve $diam(\Gamma(R_k)) = 3$ olacak biçimde en az bir $k \in \{1, \dots, n\}$ olmasın. Bu durumda $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n (n > 2)$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- a) $diam(\Gamma(R)) \neq 1$;
b) $diam(\Gamma(R)) = 2 \Leftrightarrow$ bazı $i = 1, \dots, n$ için $R_i = Z(R_i)$;
c) $diam(\Gamma(R)) = 3 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n$ için $R_i \neq Z(R_i)$ [21].

Teorem 3.1.33. R_1, R_2, \dots, R_n değişmeli halkaları (birimli olmak zorunda değil) verilsin. Bazı $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $diam(\Gamma(R_i)) = 1$, $diam(\Gamma(R_j)) = 3$ ve $diam(\Gamma(R_k)) = 2$ olacak biçimde en bir $k \in \{1, \dots, n\}$ olmasın. Bu durumda $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n (n > 2)$ halkası için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- a) $diam(\Gamma(R)) \neq 1$;
b) $diam(\Gamma(R)) = 2 \Leftrightarrow$ bazı $i = 1, \dots, n$ için $diam(\Gamma(R_i)) = 1$ ve $R_i = Z(R_i)$;
c) $diam(\Gamma(R)) = 3 \Leftrightarrow diam(\Gamma(R_i)) = 1$ olan $i \in \{1, \dots, n\}$ yoktur ve $R_i \neq Z(R_i)$ [21].

Teorem 3.1.34. R_1, R_2, \dots, R_n değişmeli halkaları (birimli olmak zorunda değil) olsun. Bazı $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $diam(\Gamma(R_i)) = 2$ ve $diam(\Gamma(R_j)) = 3$ ve $diam(\Gamma(R_k)) = 1$ olacak biçimde en az bir $k \in \{1, \dots, n\}$ olmasın. Bu durumda $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ ($n > 2$) halkası için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

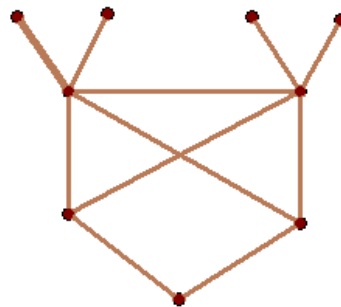
- a) $diam(\Gamma(R)) \neq 1$;
- b) $diam(\Gamma(R)) = 2 \Leftrightarrow$ bazı $i = 1, \dots, n$ için $diam(\Gamma(R_i)) = 2$ ve $R_i = \mathcal{Z}(R_i)$;
- c) $diam(\Gamma(R)) = 3 \Leftrightarrow diam(\Gamma(R_i)) = 2$ olan $i \in \{1, \dots, n\}$ yoktur ve $R_i \neq \mathcal{Z}(R_i)$ [21].

Teorem 3.1.35. R_1, R_2, \dots, R_n değişmeli halkaları (birimli olmak zorunda değil) olsun. Bazı $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ için $diam(\Gamma(R_i)) = 1$, $diam(\Gamma(R_j)) = 2$, $diam(\Gamma(R_k)) = 3$ olsun. $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ ($n > 2$) olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- a) $diam(\Gamma(R)) \neq 1$;
- b) $diam(\Gamma(R)) = 2 \Leftrightarrow$ bazı $i = 1, \dots, n$ için $diam(\Gamma(R_i)) \leq 2$ ve $R_i = \mathcal{Z}(R_i)$;
- c) $diam(\Gamma(R)) = 3 \Leftrightarrow diam(\Gamma(R_i)) \leq 2$ olan $i \in \{1, \dots, n\}$ yoktur ve $R_i \neq \mathcal{Z}(R_i)$ [21].

Sonuç 3.1.36. R_1, R_2, \dots, R_n birimli, değişmeli halkalar ve $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ ($n > 2$) olsun. O zaman $diam(\Gamma(R)) = 3$ [21].

Örnek 3.1.37. $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ birimli, değişmeli halka olsun. O zaman Sonu 3.1.36.' dan da anlaşılacağı üzere;



şekil 3. 7. $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$

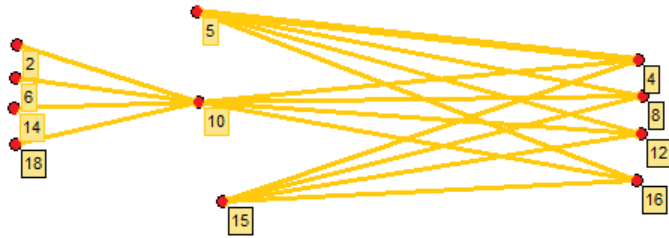
$diam(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)) = 3$ tür.

Teorem 3.1.38. R değişmeli bir halka olsun (birimli olmak zorunda değil). Bu durumda;

- a) $diam(\Gamma(R)) \in \{0,1,2,3\}$ olacak biçimde $\Gamma(R)$ bağlantılıdır;
- b) $gr(\Gamma(R)) \in \{3,4, \infty\}$;
- c) $\Gamma(R)$ tam graftır $\Leftrightarrow R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ veya $\mathcal{Z}(R)^2 = \{0\}$;
- d) $\mathcal{Z}(R) \neq \{0\}$ ise o zaman $\Gamma(R)$ sonludur $\Leftrightarrow R$ sonludur [22].

Örnek 3.1.39. $R = \mathbb{Z}_{20}$ ve $R = \mathbb{Z}_{49}$ halkalarının sıfır-bölen graflarını inceleyelim.

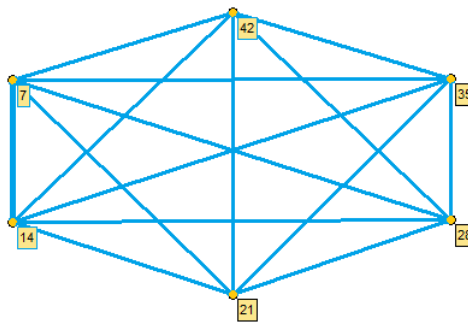
$\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_{20})^* = \{2,4,5,6,8,10,12,14,15,16,18\}$ olmak üzere;



Şekil 3. 8. $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$

Teorem 3.1.38.' de belirtildiği üzere $\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_{20}) \neq \{0\}$ olduğu için $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$ sonludur ve bağlantılıdır. $diam(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})) = 3$ ve $gr(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})) = 4$ ' tür.

$\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_{49})^* = \{7,14,21,28,35,42\}$ olmak üzere;



Şekil 3. 9. $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$

$\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_{49}) \neq \{0\}$ olduğu için $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ sonludur, bağlantılıdır ve tam graftır. $diam(\Gamma(\mathbb{Z}_{49})) = 1$ ve $gr(\Gamma(\mathbb{Z}_{49})) = 3$ ' tür.

Teorem 3.1.40. R sonlu, değişmeli birimsiz bir halka olsun. O zaman;

- a) $R = \mathcal{Z}(R)$;

- b) R_1 bir birime sahip ve $R_2 = Nil(R_2) \neq \{0\}$ olduğu zaman ya $R = Nil(R)$ ya da $R = R_1 \times R_2$;
- c) $diam(\Gamma(R)) \in \{0,1,2\}$ olacak şekilde $\Gamma(R)$ bağlantılıdır;
- d) $gr(\Gamma(R)) \in \{3, \infty\}$ [22].

Teorem 3.1.41. $R = Z(R)$ olacak şekilde R değişmeli bir halka olsun.

- a) $\Gamma(R)$ tam graftır $\Leftrightarrow \forall x, y \in R$ için $xy = 0$;
- b) $gr(\Gamma(R)) \in \{3, \infty\}$;
- c) $diam(\Gamma(R)) = 3$ ise o zaman $gr(\Gamma(R)) = 3$;
- d) $gr(\Gamma(R)) = \infty$ ise o zaman p asal, $n \geq 1$ tamsayı ve m sonsuz kardinal sayısı olmak üzere $\Gamma(R)$ ya K_1 , $K_2 = K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,2p^{n-2}}$ ya da $K_{1,m}$ ' dir [22].

Teorem 3.1.42. p ve q farklı asallar ise o zaman $\chi(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq^2})) = q$ [23].

Teorem 3.1.43. p ve q farklı asallar ise o zaman $\chi(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2q^2})) = pq - 1$ [23].

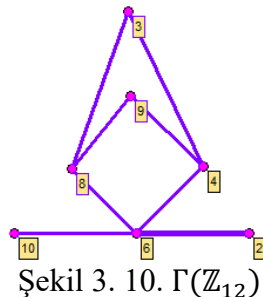
Teorem 3.1.44. p_1, p_2, p_3 ve p_4 farklı asallar olmak üzere $\chi(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3p_4})) = 4$ ' tür [23].

Teorem 3.1.45. n pozitif tam sayı ve p asal sayı ise o zaman;

$$\chi(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \begin{cases} n \text{ tek ise,} & p^{\binom{n-1}{2}} \\ n \text{ çift ise,} & p^{\binom{n}{2}} - 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

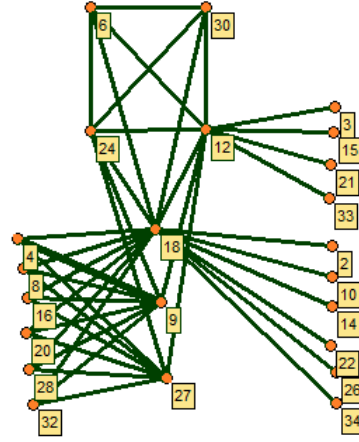
dir [23].

Örnek 3.1.46. $\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_{32}, \mathbb{Z}_{36}$ halkalarının sıfır-bölen graflarının kromatik sayıları incelenirse;



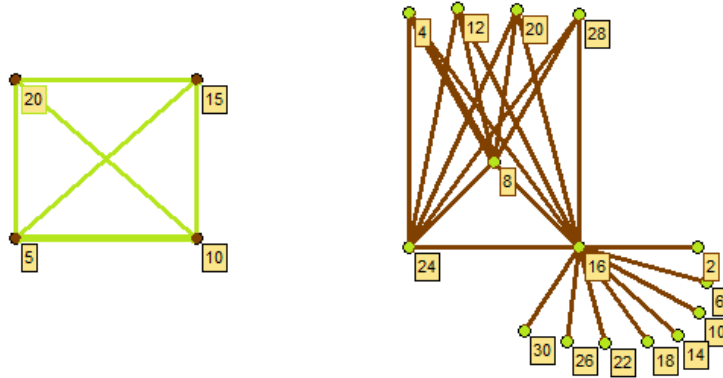
Şekil 3. 10. $\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$

Teorem 3.1.42.' den $\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_{3,2^2}$ olduğundan $\chi(\Gamma(\mathbb{Z}_{12})) = 2'$ dir.



Şekil 3. 11. $\Gamma(\mathbb{Z}_{36})$

Teorem 3.1.43.' den $\mathbb{Z}_{36} = \mathbb{Z}_{3^2,2^2}$ olduğundan $\chi(\Gamma(\mathbb{Z}_{36})) = 5'$ dir.



Şekil 3. 12. $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ ve $\Gamma(\mathbb{Z}_{32})$

Teorem 3.1.45.' den $\mathbb{Z}_{25} = \mathbb{Z}_{5^2}$ ve $\mathbb{Z}_{32} = \mathbb{Z}_{2^5}$ olduğundan $\chi(\Gamma(\mathbb{Z}_{25})) = \chi(\Gamma(\mathbb{Z}_{32})) = 4'$ tür.

Teorem 3.1.47. R sonlu, değişmeli bir halka ve F_i sonlu bir cisim olsun. O zaman;

a) $\omega(\Gamma(R)) = 2 \Leftrightarrow R$ aşağıdaki 8 tip halkadan birine izomorftur:

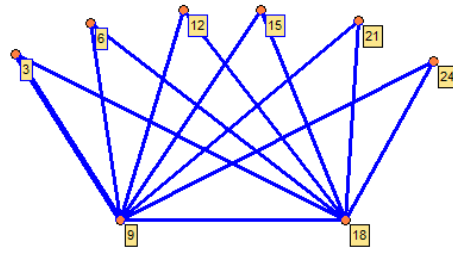
$$F_1 \times F_2, \quad F \times \mathbb{Z}_4, \quad F \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \quad \mathbb{Z}_8, \quad \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle, \quad \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle, \\ \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 - 2 \rangle;$$

b) $\omega(\Gamma(R)) = 3 \Leftrightarrow R$ aşağıdaki 31 tip halkadan birine izomorftur:

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \quad \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \quad F_1 \times F_2 \times F_3, \quad F_1 \times F_2 \times \\ \mathbb{Z}_4, \quad F_1 \times F_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \quad F \times \mathbb{Z}_8, \quad F \times \mathbb{Z}_9, \quad F \times \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle, \quad F \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle, \\ F \times \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 - 2 \rangle, \quad \mathbb{Z}_{16}, \quad \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 \rangle, \quad \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^3 - 2 \rangle,$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 - 2 \rangle, \quad \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle, \quad \mathbb{F}_4[x]/\langle x^2 \rangle, \quad \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle, \\
& \mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x, y \rangle^2, \quad \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2, x \rangle^2, \quad \mathbb{Z}_{27}, \quad \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 \rangle, \mathbb{Z}_9[x]/\langle 3x, x^2 - 3 \rangle, \\
& \mathbb{Z}_9[x]/\langle 3x, x^2 - 6 \rangle, \quad \mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, y^2 - xy \rangle, \quad \mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, y^2 \rangle, \\
& \mathbb{Z}_8[x]/\langle 2x - 4, x^2 \rangle, \quad \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 \rangle, \quad \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 - 2x \rangle, \\
& \mathbb{Z}_4[x, y]/\langle x^2, xy - 2, y^2, 2x, 2y \rangle, \\
& \mathbb{Z}_4[x, y]/\langle x^2, xy - 2, x^2 - xy, 2x, 2y \rangle [24].
\end{aligned}$$

Örnek 3.1.48. $R = \mathbb{Z}_{27}$ olsun ve aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_{27})) = 3$ ' tür.



Şekil 3. 13. $\Gamma(\mathbb{Z}_{27})$

Teorem 3.1.49. R değişmeli bir halka olsun.

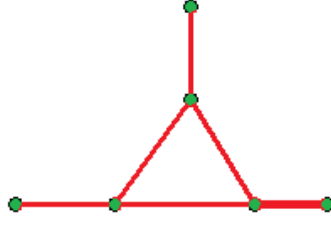
- $\omega(\Gamma(R)) = \infty \Leftrightarrow \Gamma(R)$ sonsuz kliğe sahiptir.
- $\omega(\Gamma(R)) < \infty \Leftrightarrow |\text{Nil}(R)| < \infty$ ve $\text{Nil}(R)$ asal ideallerin sonlu kesişimidir [24].

Teorem 3.1.50. R değişmeli bir halka, $0 \neq x \in \text{Nil}(R)$ ve $x^n = 0$ olacak şekilde n en küçük pozitif tam sayı olsun.

- $n = 2k$ ise o zaman $\omega(\Gamma(R)) \geq 2^k - 1$;
- $n = 2k + 1$ ise o zaman $\omega(\Gamma(R)) \geq 2^k$ [24].

Teorem 3.1.51. R_1, R_2, \dots, R_n tamlık bölgeleri ($n \geq 2$) ve $R = R_1 \times \dots \times R_n$ olsun. Bu durumda $\omega(\Gamma(R)) = n$ ' dir [24].

Örnek 3.1.52. $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ olsun. O halde Teorem 3.1.51.' den $\omega(\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)) = 3$ olur.



Şekil 3. 14. $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

Teorem 3.1.53. R ve S cisim olmayan sonlu, indirgenmiş, değişmeli halkalar olsun. Bu durumda $\Gamma(R) \cong \Gamma(S) \Leftrightarrow R \cong S'$ tur [24].

Teorem 3.1.54. Bütün $i \in I$ ve $j \in J$ için F_i ve F_j' ler sonlu cisimler olduğunda $R = \prod_{i \in I} F_i$ ve $S = \prod_{j \in J} F_j'$ olsun. $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ ise o zaman $R \cong S'$ tur [23].

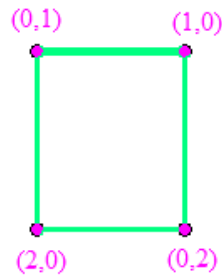
Teorem 3.1.55. $n, m \geq 2$ için R_1, R_2, \dots, R_n ve S_1, S_2, \dots, S_m sonlu lokal halkalar olsun. O zaman $\Gamma(R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n) \cong \Gamma(S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m) \Leftrightarrow n = m$ ve $\{1, 2, \dots, n\}$ ' nin φ permütasyonu vardır öyle ki herhangi $1 \leq i \leq n$ için $|R_i| = |S_{\varphi(i)}|$ ve $\Gamma(R_i) \cong \Gamma(S_{\varphi(i)})'$ tur [15].

Teorem 3.1.56. R sonlu indirgenmiş bir halka ve S tamlık bölgesi olmayan bir halka olsun. $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ ise $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6$ ve S lokal halka olmadıkça $R \cong S'$ tur [15].

Teorem 3.1.57. $K(R)$ toplam bölüm halkası olacak şekilde R değişmeli bir halka olsun. Bu durumda $\Gamma(R) \cong \Gamma(K(R))'$ tur [25].

Teorem 3.1.58. R sonlu, değişmeli $R_1 \times R_2$ biçiminde yazılabilen bir halka olsun. $\Gamma(R)$ bir Hamilton graf ise o zaman bazı n doğal sayıları için $\Gamma(R) \cong K_{n,n}'$ tur [15].

Örnek 3.1.59. $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ olmak üzere;



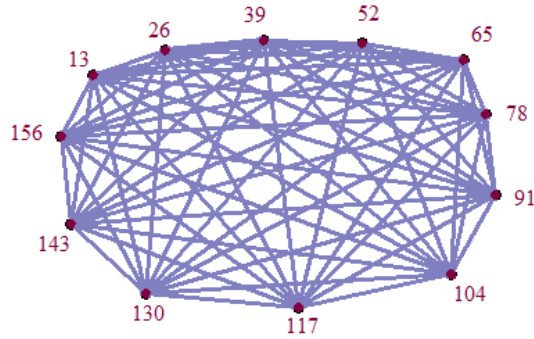
Şekil 3. 15. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

$\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ Hamilton grafi olduğu için $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \cong K_{2,2}$ dir.

Teorem 3.1.60. R sonlu esas ideal halkası olsun. $\Gamma(R)$ Hamilton grafi ise o zaman ya tam grafi ya da iki parçalı tam grafi [15].

Sonuç 3.1.61. $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ bir Hamilton grafi $\Leftrightarrow p, 3$ ' ten büyük bir asal olduğunda $n = p^2$ dir. Bu durumda, $\Gamma(\mathbb{Z}_n) \cong K_{p-1}$ tur [15].

Örnek 3.1.62. $R = \mathbb{Z}_{169}$ olsun. $n = 13^2$ olmak üzere;



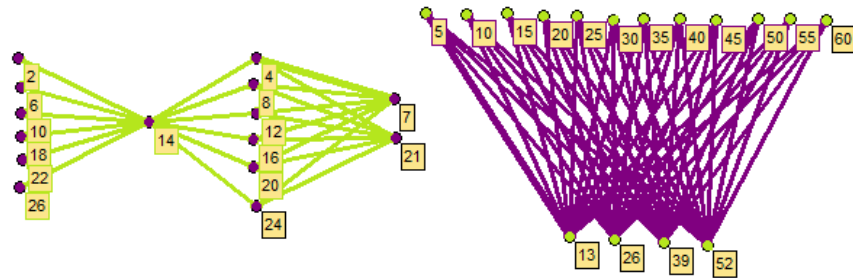
Şekil 3. 16. $\Gamma(\mathbb{Z}_{169})$

$\Gamma(\mathbb{Z}_{169})$ bir Hamilton grafi. Dolayısıyla $\Gamma(\mathbb{Z}_{169}) \cong K_{12}$ dir.

Teorem 3.1.63. R sonlu, birimli ayrıştırılabilir bir halka olsun. O zaman $\Gamma(R)$ Hamilton grafi $\Leftrightarrow q \neq 2$ ve \mathbb{F}_q, q elemanlı cisim olduğunda $R \cong \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ tur [23].

Teorem 3.1.64. $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ Euler grafi ancak ve ancak ya n tek ve karesel olmayan bir sayıdır ya da $n = 4$ tür [23].

Örnek 3.1.65. $R = \mathbb{Z}_{28}$ ve \mathbb{Z}_{65} halkalarının sıfır-bölen grafları;



Şekil 3. 17. $\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$ ve $\Gamma(\mathbb{Z}_{65})$

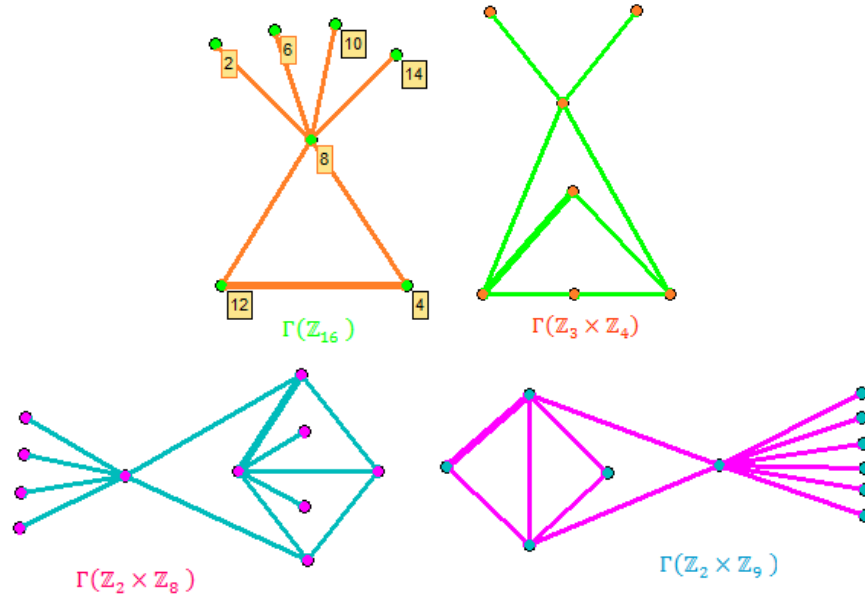
$n = 28$ olduğunda $n|p^2$ olacak şekilde p asalı vardır. Bu nedenle soldaki $\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$ Euler graf değildir. $n = 65$ olduğunda ise $n|p^2$ olacak şekilde p asalı yoktur ve n tektir. Dolayısıyla sağdaki $\Gamma(\mathbb{Z}_{65})$ Euler graftır.

Teorem 3.1.66. R sonlu sıfırdan farklı nilpotent halka olsun. O zaman $\Gamma(R)$ Euler graftır $\Leftrightarrow R$ 'nin çift eleman sayılıdır ve $\forall x \in R$ için $x^2 = 0$ 'dir [23].

Teorem 3.1.67.

- a) $n \geq 2$ asal olmamak üzere; $R = \mathbb{Z}_n$ olsun. O zaman $\Gamma(R)$ düzlemseldir $\Leftrightarrow n \in \{8,12,16,18,25,27\} \cup \{2p, 3p: p \text{ asaldır}\}$;
- b) $r \geq 2$ ve $2 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r$ olmak üzere; $R = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_r}$ olsun. O zaman $\Gamma(R)$ düzlemseldir $\Leftrightarrow p \geq 2$ ve $q \geq 3$ olduğunda $R, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ halkalarından biridir [24].

Örnek 3.1.68. $\Gamma(\mathbb{Z}_{16}), \Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4), \Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8)$ ve $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9)$ grafları aşağıda verilmektedir.



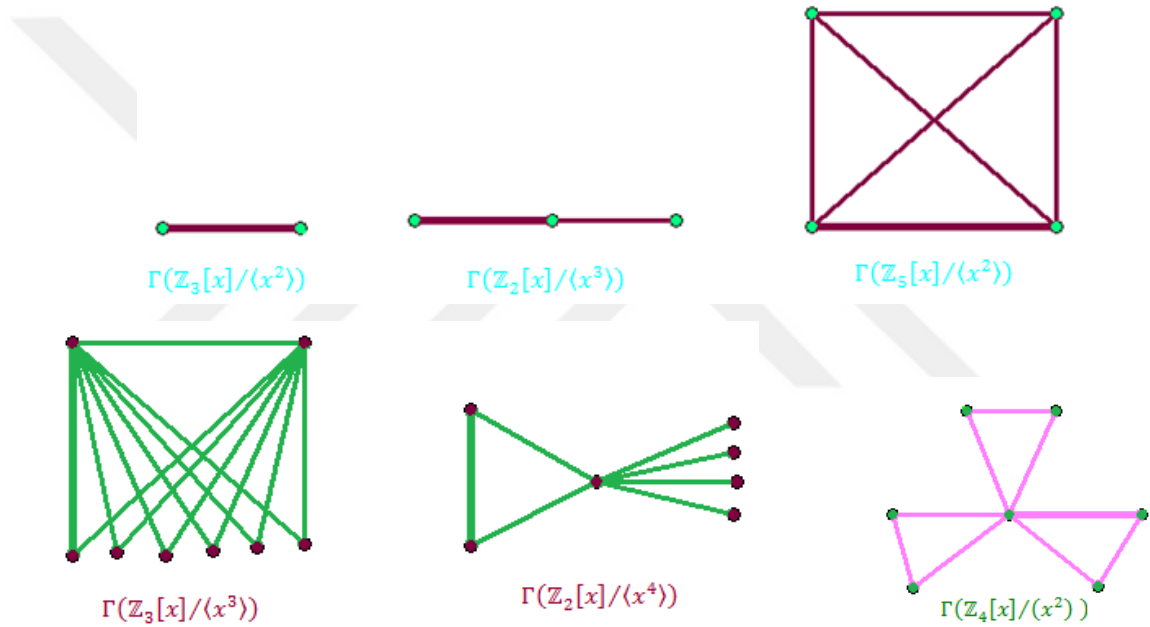
Şekil 3. 18. $\Gamma(R)$ düzlemsel örnekleri

Şekil 3.18.'de görüldüğü üzere nokta çiftleri arasındaki kenarlar hiçbir şekilde birbirini kesmemektedir. Dolayısıyla graflar düzlemseldir.

Teorem 3.1.69. $m, n \geq 2$ olmak üzere $R_{n,m} = \mathbb{Z}_n[x]/\langle x^m \rangle$ olsun.

- a) $\Gamma(R_{n,2})$ düzlemseldir $\Leftrightarrow n \leq 5$;
- b) $\Gamma(R_{n,3})$ düzlemseldir $\Leftrightarrow n \leq 3$;
- c) $\Gamma(R_{n,4})$ düzlemseldir $\Leftrightarrow n = 2$;
- d) $m \geq 5$ olduğunda $\Gamma(R_{n,m})$ düzlemsel olamaz [24].

Örnek 3.1.70. $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle$, $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle$, $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 \rangle$, $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 \rangle$, $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 \rangle$ ve $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 \rangle$ halkalarının sıfır-bölen graflarını inceleyelim.



Şekil 3. 19. $\Gamma(\mathbb{Z}_n[x]/\langle x^m \rangle)$ düzlemsel örnekleri

Teorem 3.1.69.' da verilen değerler doğrultusunda yukarıda verilen Şekil 3.19.' da $\Gamma(\mathbb{Z}_n[x]/\langle x^m \rangle)$ grafları düzlemsel graflardır.

Teorem 3.1.71. R sonlu, değişmeli lokal olmayan bir halka ve F sonlu bir cisim olsun. O halde $\Gamma(R)$ düzlemsel graftır $\Leftrightarrow R$ aşağıdaki halkalardan birine izomorftur:

$\mathbb{Z}_2 \times F$, $\mathbb{Z}_3 \times F$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 - 2 \rangle$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle$ [26].

Teorem 3.1.72. R cisim olmayan sonlu, değişmeli bir halka ve F sonlu bir cisim olsun. O halde $\Gamma(R)$ düzlemsel graftır $\Leftrightarrow R$ aşağıdaki 44 tip halkalardan birine izomorftur:

$\mathbb{Z}_2 \times F, \mathbb{Z}_3 \times F, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$
 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 - 2 \rangle, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_2 \times$
 $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_8,$
 $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle, \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 - 2 \rangle, \mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 \rangle, \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^3 - 2 \rangle,$
 $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 - 2 \rangle, \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle, \mathbb{F}_4[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle,$
 $\mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x, y \rangle^2, \mathbb{Z}_4[x, y]/\langle 2, x \rangle^2, \mathbb{Z}_{27}, \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 \rangle, \mathbb{Z}_9[x]/\langle x^2 - 3, 3x \rangle,$
 $\mathbb{Z}_9[x]/\langle x^2 - 6, 3x \rangle, \mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, y^2 - xy \rangle, \mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, y^2 \rangle,$
 $\mathbb{Z}_8[x, y]/\langle 2x - 4, x^2 \rangle, \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 - 2x \rangle,$
 $\mathbb{Z}_4[x, y]/\langle x^2, xy - 2, y^2 - xy, 2x, 2y \rangle, \mathbb{Z}_4[x, y]/\langle x^2, xy - 2, y^2, 2x, 2y \rangle, \mathbb{Z}_{25},$
 $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 \rangle$ [26].

Sonuç 3.1.73. $|R| \geq 28$ ya da $|\mathcal{Z}(R)| \geq 10$ olacak şekilde R cisim olmayan sonlu, değişmeli lokal bir halka olsun. O halde $\Gamma(R)$ düzlemsel graf değildir [26].

3.2. Nilpotent Graflar

İlk olarak 2003'te nilpotent graf tanımı Chen tarafından [27]'de yapılmıştır. Chen, R halkasının bütün elemanlarını grafın noktaları olarak kabul ederken 2010'da A.Li ve Q.Li tarafından R halkasının sıfırdan farklı elemanları grafın noktaları olarak kabul edilmiştir. Nilpotent graf yeniden düzenlenerek incelenmiştir. Sıfır-bölen graf nilpotent grafın alt grafidir. Bu alt bölümde nilpotent graf üzerine literatürde yapılmış çalışmalar ile tarafımızdan da elde edilen sonuçlar sunulmaktadır.

Tanım 3.2.1. R birimli bir halka olsun. R' nin $\Gamma_N(R)$ ile gösterilen nilpotent grafi, nokta kümesi;

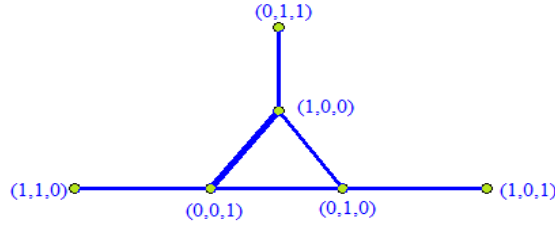
$$V_N(R)^* = \{0 \neq x \in R \mid xy \in N(R), 0 \neq y \in R\} \quad (3.2)$$

olmak üzere kenarlar arasında, " $N(R)$, R' nin bütün nilpotent elemanlarının kümesi olmak üzere iki farklı nokta x ve y komşudur $\Leftrightarrow xy \in N(R)$ dir" koşulunu sağlayan bir graftır.

Örnek 3.2.2. $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkasının nokta kümesi ve nilpotent grafi aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$V_N(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^* = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$$

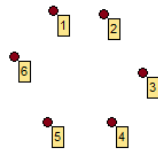
$$N(R) = \{(0,0,0)\}$$



Şekil 3. 20. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

Açıklama 3.2.3. R halkası tamlık bölgesidir $\Leftrightarrow \Gamma_N(R)$ boş graftır. Aslında R bir tamlık bölgesi ise o zaman $V_N(R)^* = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $\Gamma_N(R)$ boştur. Tersine $\Gamma_N(R)$ boş ise o zaman $\Gamma_N(R)$ ' nin tanımından R ' nin sıfırdan farklı sıfır bölenleri yoktur. Böylece R bir tamlık bölgesidir [28].

Örnek 3.2.4. p asal sayı olmak üzere $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ halkası bir tamlık bölgesidir. Fakat sıfırdan farklı hiçbir nilpotent ve sıfır-bölen elemana sahip olmadığı için nilpotent grafi boş graf olmak zorundadır. $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ halkasının nilpotent grafi aşağıdaki gibidir.



Şekil 3. 21. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_7)$

Açıklama 3.2.5. Varsayalım ki R düzenli halka ve birimli olsun. O zaman $R/Z(R)$ ' nin her elemanı birimdir. Gerçekten her $x \in R$ için $xyx = x$ olacak biçimde bir $y \in R$ vardır. Eğer $x \notin Z(R)$ ise $xy = 1$ dir. Dolayısıyla x aritmetik birimdir [28].

Açıklama 3.2.6. R değişmeli veya düzenli halka olsun. Eğer R indirgenmiş ise o zaman $|R| \leq |Z(R)|^2 = |V_N(R)|^2$, aksi takdirde $|V_N(R)^*| = |R| - 1$. Aslında R indirgenmiş ise $\Gamma_N(R) = \Gamma(R)$ olur. Böylece $|R| \leq |Z(R)|^2 = |V_N(R)|^2$ eşitliği sağlanır. R indirgenmemiş değişmeli halka ise o zaman her $r \in R^*$ ve $x \in N(R)^*$ için r ve x

komşudur. Bu nedenle $V_N(R) = R$. Varsayalım ki R indirgenmemiş düzenli halka olsun. r, R^* in keyfi bir elemanı olsun. $r \in \mathcal{Z}(R)$ ise $V_N(R) = R$ dir. Çünkü $\mathcal{Z}(R) \subseteq V_N(R)$ dir. Aksi halde Açıklama 3.2.5.' den r aritmetik birimdir ve ters elemanı r^{-1} ile gösterilir. x sıfırdan farklı nilpotent eleman olsun. $r^{-1}x \neq 0$ olduğunu görmek kolaydır ve $r, r^{-1}x$ e komşudur. Dolayısıyla $r \in V_N(R)'$ dir ve böylece $|V_N(R)| = |R|$ olur [28].

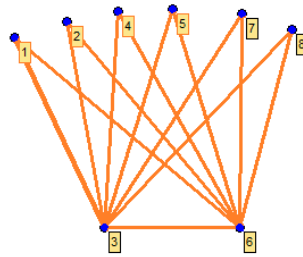
Açıklama 3.2.7. R ' nin merkezinde sıfırdan farklı bir nilpotent eleman varsa R ' nin sıfırdan farklı bütün elemanları nilpotent elemana komşudur. Bu nedenle herhangi bir R halkası için R ' nin merkezi en az bir nilpotent eleman içerirse;

- i. $\Gamma_N(R)$ bağlantılıdır ve $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \leq 2$
- ii. $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 3$ veya ∞ [29].

Örnek 3.2.8. $R = \mathbb{Z}_9$ için nilpotent graf incelenirse;

$$V_N(\mathbb{Z}_9)^* = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$N(R) = \{0,3,6\}$$



Şekil 3. 22. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_9)$

$\Gamma_N(\mathbb{Z}_9)$ bağlantılıdır, $\text{diam}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_9)) = 2$ ve $\text{gr}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_9)) = 3$.

Teorem 3.2.9. R değişmeli, düzenli ve birimli halka olsun. Bu durumda:

- i. $\Gamma_N(R)$ bağlantılıdır.
- ii. $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \leq 3$.
- iii. Eğer $\Gamma_N(R)$ bir döngü içeriyorsa, o halde $\text{gr}(\Gamma_N(R)) \leq 4$. Buna ilaveten R indirgenemez ise o zaman $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 3$ [28].

Teorem 3.2.10. R indirgenemez değişmeli halka olsun. $\Gamma_N(R)$ tek noktalı küme (singleton) olmasın. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = \infty$.
- ii. $\Gamma_N(R)$ bir yıldız graftır.
- iii. R ya 3 mertebeli boş halkadır ya da $|N(R)| = 2$ olacak biçimde $N(R)$, R' nin asal idealidir [28].

Teorem 3.2.11. R indirgenemez düzenli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ yıldız graf olsun. O zaman:

- i. $\Gamma_N(R)$ tam olarak iki noktaya sahip olması için gerek ve yeter şart R halkası 3 mertebeli nilpotent halkadır.
- ii. $\Gamma_N(R)$ en az üç noktaya sahiptir. Bu durumda $|N(R)| = 2$ olmak üzere $N(R)$, R' nin asal idealidir [28].

Lemma 3.2.12. R basit bir graf olsun. Her u noktasının maksimum derecesi için bir $u - v$ kenarı vardır öyle ki; $\Delta(R) - d(v) + 2$, R' deki maksimum dereceli noktaların sayısından daha fazladır. O zaman $\chi'(R) = \Delta(R)$ ' dir [28].

Teorem 3.2.13. R sonlu, indirgenemez ve değişmeli bir halka olsun. R çift mertebeli nilpotent bir halka olmadıkça

$$\chi'(\Gamma_N(R)) = \Delta(\Gamma_N(R)) \quad (3.3)$$

dir [29].

Sonuç 3.2.14. R sonlu, birimli, değişmeli bir halka olsun. O zaman;

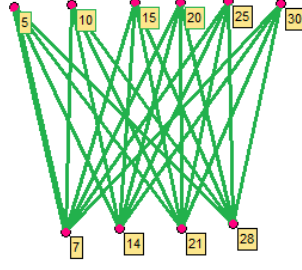
$$\chi'(\Gamma_N(R)) = \Delta(\Gamma_N(R)) \quad (3.4)$$

dir [29].

Teorem 3.2.15. R sonlu, değişmeli, birimli bir halka öyle ki $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman $\Gamma(R)^c$, $\Gamma_N(R)$ ' nin alt grafidir ancak ve ancak R lokal halkadır [29].

Teorem 3.2.16. R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman, $\Gamma_N(R)$ iki parçalı tam graftır gerek ve yeter şart $\Gamma(R)$ tam graftır [29].

Örnek 3.2.17. $R = \mathbb{Z}_{35}$ halkasının nilpotent grafi iki parçalı tam graftır.

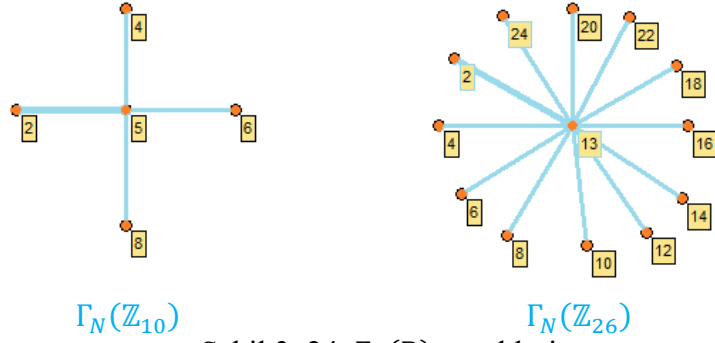


Şekil 3. 23. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{35})$

Teorem 3.2.18. R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

- i. $\Gamma_N(R)$ bir yıldız graftır.
- ii. $\Gamma_N(R)$ bir ağaıtır.
- iii. $R \cong \mathbb{Z}_4$ veya $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ [29].

Örnek 3.2.19. $R = \mathbb{Z}_{10}$ ve \mathbb{Z}_{26} halkaları sonlu değişmeli birimli ve bağlantılıdır. Bu nedenle Şekil 3.24.' de de göreleceği üzere $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{10}) \cong K_{1,4}$ ve $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{26}) \cong K_{1,12}$ dir.



Şekil 3. 24. $\Gamma_N(R)$ örnekleri

Teorem 3.2.20. (R, S) cisim olmayan sonlu lokal halka olsun ve $|R| = p^n$, p asal sayı ve $n > 1$. Eğer $|S^*| \geq 2$ ile $\Gamma_N(R)$ bağlantılı ise o zaman $\Gamma_N(R)$ Euler graf olması için gerek ve yeter koşul $|R|$ tektir ve bütün $x \in S^*$ için $x^2 = 0$ 'dır [29].

Teorem 3.2.21. R sonlu, değişmeli, birimli, lokal olmayan bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ Euler graftır gerek ve yeter şart $|R|$ tek sayılıdır ve bütün $x \in J(R)^*$ için $x^2 = 0$ [29].

Teorem 3.2.22. (R, S) cisim olmayan sonlu lokal halka ve $|R| = p^n \geq 4$, p asal sayı ve $n > 1$ olsun. Bu durumda $\Gamma_N(R)$ Hamilton yoluna sahip olması için gerek ve yeter şart $R/S \cong \mathbb{Z}_2$. Dolayısıyla $|R|$ çifttir [29].

Sonuç 3.2.23. (R, S) cisim olmayan sonlu lokal halka olsun. Bu durumda $\Gamma_N(R)$ Hamilton graf değildir [29].

Teorem 3.2.24. (R, S) sonlu lokal halka, p asal sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere $|R| = p^n$ olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ split graftır [30].

Teorem 3.2.25. R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ düzlemsel olması için gerek ve yeter şart $R; \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_8[x]/\langle x^2 \rangle$ halkalarından birine izomorftur [29].

Teorem 3.2.26. \mathbb{F} bir cisim olmak üzere;

- i. $n \geq 3$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(M_n(\mathbb{F}))) = 2$.
- ii. $\text{diam}(\Gamma_N(M_n(\mathbb{F}))) \leq 3$ [31].

Lemma 3.2.27. \mathbb{F} bir cisim ve x tam kare olmayacak biçimde $x \in \mathbb{F}$ alalım. O halde $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}))) = 3$ [31].

Lemma 3.2.28. \mathbb{F} sonlu bir cisim olsun. O zaman $|\mathbb{F}|$ çift sayıdır gerek ve yeter şart \mathbb{F} 'nin bütün elemanları tam karedir [31].

Sonuç 3.2.29. \mathbb{F} bir sonlu cisim ve $|\mathbb{F}|$ tek sayı ise $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}))) = 3$ 'tür [31].

Lemma 3.2.30.

- i. \mathbb{F} bir cisim ve $\text{Kar}(\mathbb{F}) = 2$ ise o zaman $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}))) = 3$.
- ii. $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}_2))) = 3$ 'tür [31].

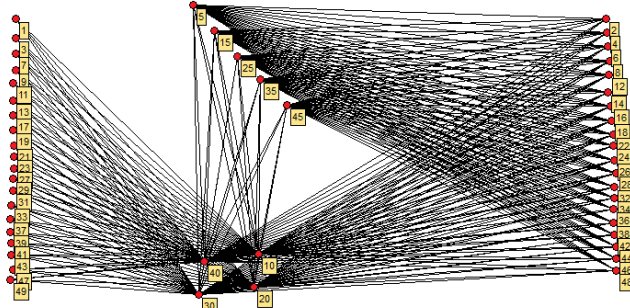
Teorem 3.2.31. \mathbb{F} bir cisim ise $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}))) = 3$ 'tür [31].

Lemma 3.2.32.

- i. $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k$ sonlu cisimler olmak üzere $R \cong \prod_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ ve $1 \leq i \leq k$ için $n_i \geq 3$ ise o zaman $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 2$.
- ii. $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k$ sonlu cisimler olmak üzere $R \cong \prod_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ ve $i = 1, \dots, k$ için $n_i \leq 2$ ve $1 \leq j \leq k$ için $n_j = 2$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 3$ ' tür [31].

Teorem 3.2.33. R sonlu halka ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \leq 3$ ' tür [31].

Örnek 3.2.34. $R = \mathbb{Z}_{50}$ halkası ele alınırsa; sonlu halkadır. Dolayısıyla $\text{diam}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{50})) = 2$.



Şekil 3. 25. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{50})$

Sonuç 3.2.35. R sonlu halka olsun. $J(R) \neq 0$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \leq 2$ [31].

Sonuç 3.2.36. $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k$ cisimler ve n_1, \dots, n_k, k ' lar pozitif tam sayılar olmak üzere $R \cong \prod_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ aşağıdaki şartlar sağlanır:

- i. Bazı i ' ler için $n_i \geq 3$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 2$.
- ii. $\forall i$ için $n_i \leq 2$ ve bazı j ' ler için $n_j = 2$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 3$.
- iii. $k = 2$ ve $n_1 = n_2 = 1$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \in \{1,2\}$.
- iv. $k \geq 3$ ve $n_1 = \dots = n_k = 1$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 3$ ' tür [31].

Lemma 3.2.37. $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k$ cisimler ve n_1, \dots, n_k pozitif tam sayılar ve $k \geq 3$ için $R \cong \prod_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ ise $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 3$ ' tür [31].

Lemma 3.2.38.

- i. \mathbb{F} bir cisim ve $n \geq 2$ ise $\text{gr}(\Gamma_N(M_n(\mathbb{F}))) = 3$.
- ii. $\forall \mathbb{F}_i$ bir cisim ve bazı i ' ler için $|\mathbb{F}_i| \geq 3$, $R \cong M_{n_1}(\mathbb{F}_1) \times M_{n_2}(\mathbb{F}_2)$ olsun. $n_1, n_2 \geq 2$ ise $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 3$.

- iii. $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ cisim ve $n \geq 2$ ise $gr(\Gamma_N(\mathbb{F}_1 \times M_n(\mathbb{F}_2))) = 3$.
- iv. $gr(\Gamma_N(M_{n_1}(\mathbb{Z}_2) \times M_{n_2}(\mathbb{Z}_2))) \in \{3, \infty\}$ ' dir [31].

Teorem 3.2.39. (R_i, S_i) bir lokal halka ve $n \geq 2$ olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n$ sonlu değişmeli birimli halka olsun. O zaman $gr(\Gamma_N(R)) \geq 2$ ' dir [30].

Sonuç 3.2.40. (R, S) sonlu lokal halka olsun. O halde aşağıdaki şartları sağlamaktadır:

- i. $|S^*| = 3$ ve $gr(\Gamma_N(R)) \geq 2$ ise o zaman $R \cong \mathbb{F}_4[x]/\langle x^2 \rangle$ veya $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$.
- ii. $|S^*| \geq 4$ ise o zaman $gr(\Gamma_N(R)) \geq 2$ ' dir [30].

Açıklama 3.2.41. R lokal halka olsun fakat cisim olmasın. O halde nilpotent graf tanımından $\Gamma_N(R)$ bağlantılıdır ve $diam(\Gamma_N(R)) = 2$ ' dir [29].

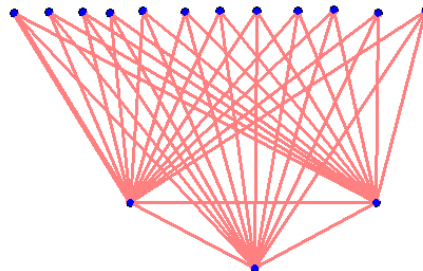
Teorem 3.2.42. R_i bir lokal halka ve $n \geq 2$ olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n$ sonlu, değişmeli, birimli bir halka olsun. $\Gamma_N(R)$ bağlantılıdır gerek ve yeter şart $\forall i$ için R_i cisim değildir. Ayrıca $diam(\Gamma_N(R)) = 2$ ' dir [29].

Teorem 3.2.43. R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun.

- i. $gr(\Gamma_N(R)) = \infty$ gerek ve yeter şart $R \cong \mathbb{Z}_4$ ve $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$.
- ii. $gr(\Gamma_N(R)) = 4$ gerek ve yeter şart $\mathcal{Z}(R)^2 = 0$ ve $|\mathcal{Z}(R)^*| \geq 2$ ile R lokaldir.
- iii. $gr(\Gamma_N(R)) = 3$ gerek ve yeter şart $R \not\cong \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ ve $\mathcal{Z}(R)^2 = 0$ ve $|\mathcal{Z}(R)^*| \geq 2$ ile R lokal halka değildir [29].

Teorem 3.2.44. $gr(\Gamma_N(R)) = 2$ olan sonlu lokal R halkası yoktur [29].

Örnek 3.2.45. $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ halkasının çap ve çevresi aşağıdaki gibi incelenmektedir.



şekil 3. 26. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$

$$V_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)^* =$$

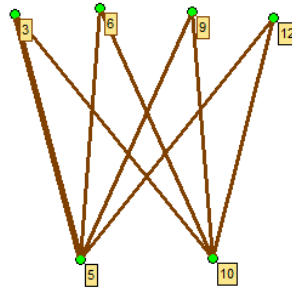
$$\{(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$\text{ve } N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) = \{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)\}$$

Herhangi iki nokta arasında keyfi bir seçimle çap ve çevre incelenirse;

$$\text{diam}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)) = 2 \text{ ve } \text{gr}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)) = 3.$$

Örnek 3.2.46. $R = \mathbb{Z}_{15}$ halkasının;



Şekil 3. 27. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15})$

$$\text{diam}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15})) = 2 \text{ ve } \text{gr}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15})) = 4 \text{ olmaktadır.}$$

Teorem 3.2.47. \mathbb{F}_1 ve \mathbb{F}_2 cisim olmak üzere $R = \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$ sonlu, değişmeli olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ iki parçalı tam graftır ve dolayısıyla $\Gamma_N(R) \cong K_{|\mathbb{F}_1^*|, |\mathbb{F}_2^*|}$ tur [30].

Sonuç 3.2.48. (R, S) sonlu lokal halka, p asal sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere $|R| = p^n$ olsun. O zaman $R^x = R \setminus S$, R' nin bütün aritmetik birimlerinin kümesi olmak üzere $\Gamma_N(R) \cong K_{|S^*|} + \overline{K_{|R^x|}}$ tur [30].

Teorem 3.2.49. (R_i, S_i) bir lokal halka ve \mathbb{F}_j bir cisim olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n \times \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ cisim olmayan, sonlu, değişmeli, birimli halka olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ split graftır gerek ve yeter şart R aşağıdaki halkalardan birine izomorftur.

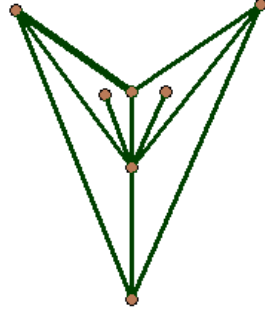
R lokaldır veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}$ veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ dir [30].

Açıklama 3.2.50. R sonlu değişmeli halka olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ tam olması için gerek ve yeter şart $\Gamma_N(R) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ tur [30].



Şekil 3. 28. $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

Teorem 3.2.51. Her bir i için (R_i, S_i) bir lokal halka ve \mathbb{F}_j bir cisim ve $m, n \geq 1$ olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n \times \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ sonlu değişmeli birimli halka olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ düzlemseldir gerek ve yeter şart $R, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ veya $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle \times \mathbb{Z}_2$ halkalarına izomorftur [30].

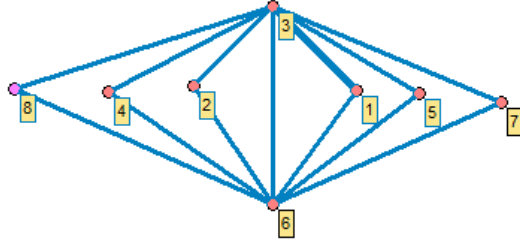


Şekil 3. 29. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle \times \mathbb{Z}_2)$

Örnek 3.2.52.



Şekil 3. 30. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_4) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle)$



Şekil 3. 31. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_9) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle)$

Sonuç 3.2.53. Her bir j için \mathbb{F}_j bir cisim ve $m \geq 2$ olmak üzere $R \cong \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ sonlu değişmeli birimli bir halka olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ düzlemseldir gerek ve yeter şart R aşığıdaki halkalardan birine izomorftur [31].

\mathbb{F} sonlu cisim olmak üzere; $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

Sonuç 3.2.54. Her bir j için \mathbb{F}_j bir cisim ve $m \geq 2$ olmak üzere $R \cong \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ sonlu değişmeli birimli bir halka olsun. O zaman $gr(\Gamma_N(R)) = 1$ gerek ve yeter şart R aşığıdaki halkalardan birine izomorftur;

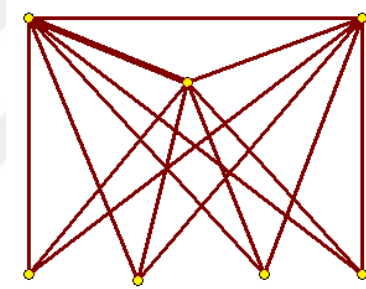
$\mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_4 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{F}_4 \times \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$ veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [30].

Teorem 3.2.55. Her bir i ve j için (R_i, S_i) bir lokal halka ve \mathbb{F}_j bir cisim ve $m, n \geq 1$ olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n \times \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ sonlu değişmeli birimli halka olsun. O zaman $gr(\Gamma_N(R)) = 1$ gerek ve yeter şart R aşağıdaki halkalardan birine izomorftur;

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle \times \mathbb{F}_4$ veya $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{F}_4$ [30].

Teorem 3.2.56. R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman $g(\Gamma_N(R)) = 1$ gerek ve yeter şart $R; \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle, \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 - 2 \rangle, \mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x, y \rangle^2$ veya $\mathbb{Z}_4[x]/\langle 2, x \rangle^2$ halkalarından birine izomorftur [29].

Örnek 3.2.57.



şekil 3. 32. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_8) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 - 2 \rangle)$

Açıklama 3.2.58.

- i. Kabul edelim ki $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ve S indirgenemez değişmeli halka olsun. Eğer $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ ise o zaman Açıklama 3.2.6.' dan $|S| = 3$. Dolayısıyla S üç mertebeli boş graftır.
- ii. Kabul edelim ki $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ve S indirgenemez değişmeli halka olsun. Eğer $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ ise o zaman Açıklama 3.2.5.' den $|S| = 4$. $\Gamma_N(S)$ bir yıldız graf olduğu için $S \cong \mathbb{Z}_4$ veya $S \cong \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ ' tur [28].

Teorem 3.2.59. R sonlu indirgenmiş bir halka ve S tamlık bölgesi olmayan değişmeli bir halka olsun. Eğer $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ ise o zaman $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ve S , 3 mertebeli boş bir halka veya $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ve S, \mathbb{Z}_4 veya $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ ' e izomorf olmadıkça $R \cong S'$ tur [28].

Teorem 3.2.60. R ve S sonlu, indirgenemez, değişmeli halkalar olsun öyle ki $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$. O halde $|R| = |S|$ ve $|N(R)| = |N(S)|$ ' dir [28].

Sonuç 3.2.61. R ve S sonlu, indirgenemez, değişmeli halkalar asal mertebeli $N(R)$ olsun. O zaman $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ gerek ve yeter şart $R \cong S$ tur [28].

Sonuç 3.2.62. R ve S sonlu, indirgenemez, değişmeli, esas ideal halkası olsun. O zaman $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ gerek ve yeter şart $R \cong S$ tur [28].

$R = \mathbb{Z}_n$ halkası verildiğinde bilindiği üzere sıfırdan farklı nilpotent elemanları vardır gerek ve yeter şart n bazı asal sayıların kareleri ile bölünebilirdir. Gerçekten n asal veya $n = p_1 p_2 \dots p_t$ olduğunda \mathbb{Z}_n 'nin sıfırdan farklı hiçbir nilpotent elemanı yoktur. Ayrıca $n = p^m, m > 1$ olduğu zaman;

$$N(\mathbb{Z}_n) = \{0, p, 2p, \dots, (p^{m-1} - 1)p\} \quad (3.5)$$

ve $n = \prod_{i=1}^t p_i^{s_i}, t \geq 2$ olduğunda;

$$N(\mathbb{Z}_n) = \left\{ (p_1 p_2 \dots p_t), 2(p_1 p_2 \dots p_t), \dots, \left(\prod_{i=1}^t p_i^{s_i-1} - 1 \right) (p_1 p_2 \dots p_t) \right\} \quad (3.6)$$

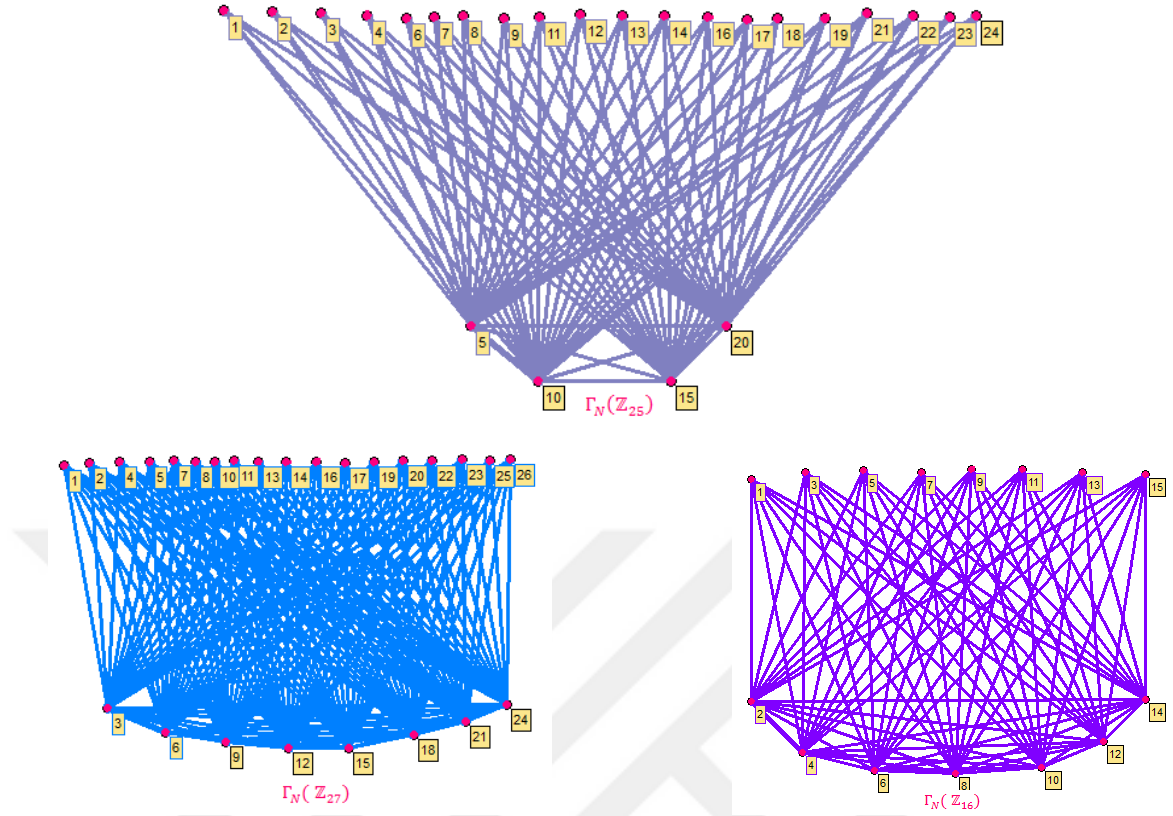
olduğu kolayca görülebilir.

Lemma 3.2.63. $n = p^m$ ve p asal sayı olmak üzere \mathbb{Z}_n tam sayı halkası olsun. O zaman $\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ 'nin nokta kümesi;

$$V_N(\mathbb{Z}_{p^m})^* = \mathbb{Z}_{p^m}^*. \quad (3.7)$$

Dolayısıyla, $i \in N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ için $d_i = p^m - 2$ ve $i \notin N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ için $d_i = p^{m-1} - 1$ olur [32].

Örnek 3.2.64. $\mathbb{Z}_{5^2}, \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{2^4}$ gibi \mathbb{Z}_n halkalarının dereceleri aşığıdaki şekillerde görölmektedir.



Şekil 3. 33. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ örnekleri

$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{25})$ için $d_1 = 5^2 - 2 = 23$ ve $d_2 = 5^{2-1} - 1 = 4$;

$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{27})$ için $d_1 = 3^3 - 2 = 25$ ve $d_2 = 3^{3-1} - 1 = 8$;

$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{16})$ için $d_1 = 2^4 - 2 = 14$ ve $d_2 = 2^{4-1} - 1 = 7$.

Açıklama 3.2.65. Lemma 3.2.63.' den, $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{p^m})$ 'in iki farklı derecesi olduğu görülmektedir. Öyle ki $\Delta = p^m - 2$ ve $\delta = p^{m-1} - 1$ ' dir [32].

Teorem 3.2.66. p asal sayı ise $\Delta = p^m - 2$ ve $\delta = p^{m-1} - 1$ olduğu zaman;

$$\text{spec}_L(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{p^m})) = (0, (\delta)^{(\Delta-\delta)}, (\Delta + 1)^\delta) \quad (3.8)$$

dir [32].

Lemma 3.2.67. G , n noktalı bağlantılı bir graf olsun. O halde G grafı $0, \underbrace{r, \dots, r}_p, \underbrace{n, \dots, n}_q$ biçiminde üç farklı öz değere sahip olması için \Leftrightarrow

1. $(n - r - 1) | p$,
2. $q + 1 \geq \frac{p}{n-r-1}$,
3. $G_1, \frac{p}{n-r-1}$ katsayısı ile $n - r$ izole nokta olmak üzere
 $G = K_{q+1} - \frac{p}{n-r-1} \vee G_1 \vee \dots \vee G_1$.

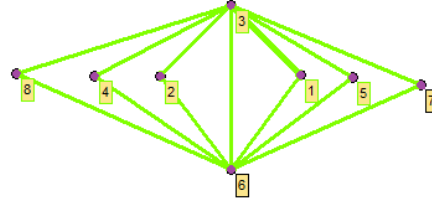
dir [33].

Açıklama 3.2.68. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_p^m)$ grafi üç farklı özdeğere sahiptir. Dolayısıyla Lemma 3.2.67.'den;

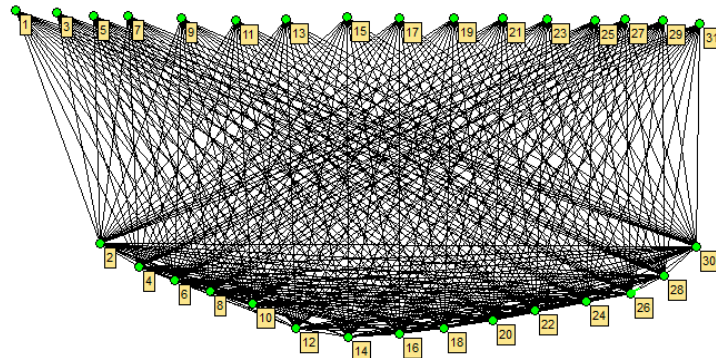
$$\Gamma_N(\mathbb{Z}_p^m) \cong CS(p^m - 1, p^{m-1} - 1) \quad (3.9)$$

elde edilir [32].

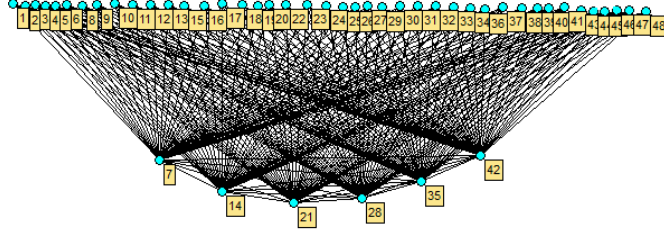
Örnek 3.2.69. $\mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{2^5}, \mathbb{Z}_{7^2}$ halkalarının grafları ve Laplasyan özdeğerleri aşağıda verilmektedir.



Şekil 3. 34. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{3^2}) = \{0, 2^{(5)}, 8^{(2)}\}$



Şekil 3. 35. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{2^5}) = \{0, 15^{(15)}, 31^{(15)}\}$



Şekil 3. 36. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{7^2}) = \{0, 6^{(41)}, 48^{(6)}\}$

Lemma 3.2.70. $n = \prod_{i=1}^t p_i^{s_i}$, $t \geq 2$ olmak üzere $\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ graf olsun.

i. Eğer $\forall i$ için $s_i = 1$ ise o zaman;

$$V_N(\mathbb{Z}_n)^* = \bigcup_{i \in I} S_{p_i} \quad (3.10)$$

$$S_{p_i} = \{p_i k : 1 \leq k \leq \frac{n}{p_i} - 1\} \text{ ve } I = \{1, 2, \dots, t\}.$$

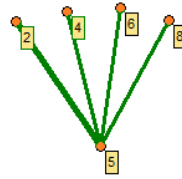
ii. Eğer en az bir i için $s_i \geq 2$ ise o zaman;

$$V_N(\mathbb{Z}_n)^* = \mathbb{Z}_n^* \quad (3.11)$$

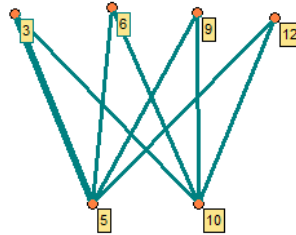
dir [32].

Açıklama 3.2.71. Lemma 3.2.70. (i)' de, $\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ 'nin nokta sayısının $n - 1 - \phi(n)$ olduğu kolayca görülmektedir. $\phi(n)$ ise Euler' in phi(ϕ) fonksiyonudur. Özellikle p, q asalları için $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{pq}) \cong K_{p-1, q-1}$ ve $\Gamma_N(\mathbb{Z}_p) \cong K_0$, K_0 boş graftır [32].

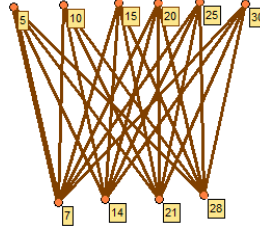
Örnek 3.2.72. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{pq})$ ' nin izomorfı;



Şekil 3. 37. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{10}) \cong K_{1,4}$



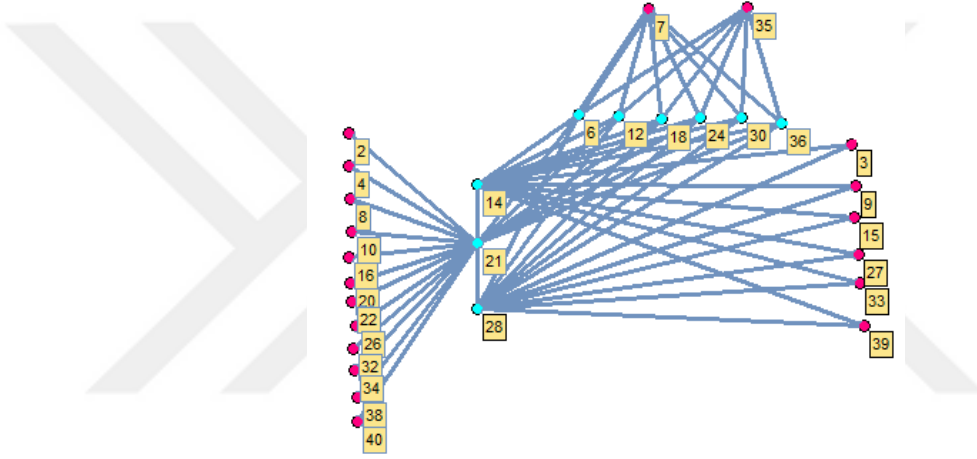
Şekil 3. 38. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15}) \cong K_{2,4}$



Şekil 3. 39. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{35}) \cong K_{4,6}$

şekillerde açıkça görülmektedir.

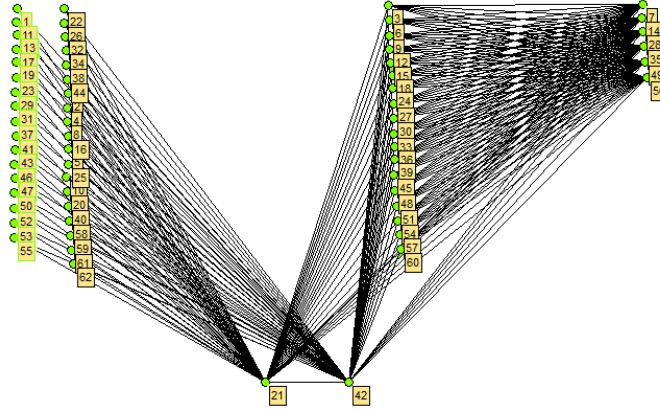
Örnek 3.2.73. \mathbb{Z}_{42} , \mathbb{Z}_{63} ve \mathbb{Z}_{60} halkalarının nilpotent grafları incelenirse;



Şekil 3. 40. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{42})$

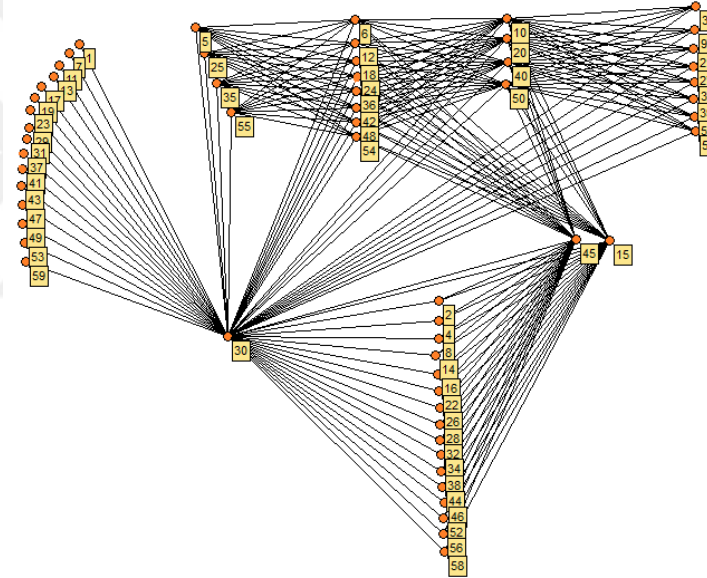
$n = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ve $s_i = 1$ olduğuna göre Lemma 3.2.70. (i)' den $S_{p_i} = \{p_i k : 1 \leq k \leq \frac{n}{p_i} - 1\}$;

$$(V_N(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{42})))^* = S_2 \cup S_3 \cup S_7 = \begin{cases} S_2 = \{2k : 1 \leq k \leq \frac{42}{2} - 1\} \\ S_3 = \{3k : 1 \leq k \leq \frac{42}{3} - 1\} \\ S_7 = \{7k : 1 \leq k \leq \frac{42}{7} - 1\} \end{cases}$$



Şekil 3. 41. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{63})$

Lemma 3.2.70. (ii)' den $s_i \geq 2$ için; $n = 3^2 \cdot 7^1$ olduğundan $V_N(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{63}))^* = \mathbb{Z}_{63}^*$.



Şekil 3. 42. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{60})$

$s_i \geq 2$ için; $n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ olduğundan $V_N(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{60}))^* = \mathbb{Z}_{60}^*$.

Lemma 3.2.74. $n = \prod_{i=1}^t p_i^{s_i}$, $t \geq 2$ olmak üzere $\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ grafi için;

- i. $\forall i \in N(\mathbb{Z}_n)$ için $d_i = n - 2$
- ii. Eğer $i \in V_N(\mathbb{Z}_n)^*$ için $\prod_{m=1}^r p_{l_m} | i$ öyle ki $1 \leq r \leq k$ için $l_1, \dots, l_r \in A$ ve $A = \{1, 2, \dots, k\}$ ise o zaman $\forall j \in A - \{l_1, \dots, l_r\}$ için $z = \prod_j p_j$ olduğunda;

$$N_i = \left\{ z, 2z, \dots, \left(\frac{n}{z} - 1 \right) z \right\} \quad (3.12)$$

Yani;

$$d_i = \frac{n}{z} - 1 \quad (3.13)$$

dir. Sırasıyla d_i ve N_i , i noktasının derecesi ve i 'nin komşuluk kümesidir.

iii. Eğer $\forall 1 \leq k \leq t$ için $(i, p_k) = 1$ ise o zaman;

$$N_i = N(\mathbb{Z}_n^*) = \left\{ (p_1 p_2 \dots p_t), 2(p_1 p_2 \dots p_t), \dots, \left(\prod_{i=1}^t p_i^{s_i-1} - 1 \right) (p_1 p_2 \dots p_t) \right\} \quad (3.14)$$

Yani; sırasıyla d_i ve N_i , i noktasının derecesi ve i 'nin komşuluk kümesi olduğunda;

$$d_i = \prod_{i=1}^t p_i^{s_i-1} - 1 \quad (3.15)$$

dir [32].

Teorem 3.2.75. $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t}$ için \mathbb{Z}_n bir halka olsun. O halde;

$$\Phi_{L(\Gamma_N(\mathbb{Z}_n))}(x) = x(x - d_q)^{\phi(n)} (x - (n - 2))^{\prod_{i=1}^t p_i^{s_i-1}-1} \alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_{t-1}(x) f(x) \quad (3.16)$$

Şöyle ki;

$$\alpha_1(x) = \prod_{k=1}^t (x - d_{p_k})^{W_{p_k}-1}$$

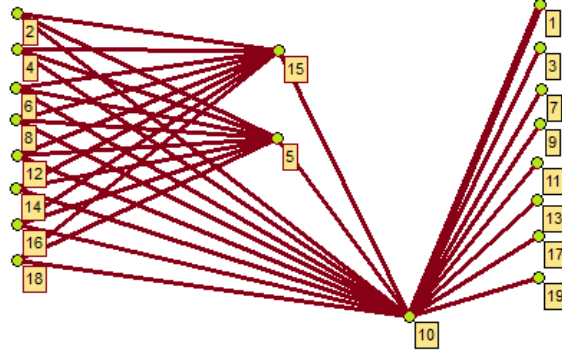
$$\alpha_2(x) = \prod_{k=1, k \neq l}^t (x - d_{p_k p_l})^{W_{p_k p_l}-1}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\alpha_{t-1}(x) = \prod_{k=1, k \neq l \neq \dots}^t (x - d_{p_k \dots p_{t-1}})^{W_{p_k \dots p_{t-1}}-1}$$

$f(x)$ herhangi bir polinomdur öyle ki W_u , $\{v \in \mathbb{Z}_n^* : d_u = d_v\}$ kümesinin eleman sayısıdır; $1 \leq i \leq t$ için $(q, p_i) = 1$ ve ϕ , Euler'in Totient (fi) fonksiyonudur [32].

Örnek 3.2.76. \mathbb{Z}_{20} halkasının nilpotent grafi yardımıyla spektral incelemesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 3. 43. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})$

$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})$ ' nin Laplasyan matrisi;

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 9 & -1 \\
 -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 18
 \end{bmatrix}$$

Şekil 3. 44. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})$ Laplasyan matrisi

Görüldüğü üzere köşegen üzerindeki elemanlar grafin noktalarının derecelerine eşittir. $\mathbb{Z}_{20} = \mathbb{Z}_{2^2 \cdot 5^1}$ halkasının nilpotent elemanının derecesi $d_{10} = n - 2 = 18$ ve diğer çarpanlarının dereceleri $d_2 = \frac{n}{z} - 1 = \frac{20}{5} - 1 = 3$, $d_5 = \frac{n}{z} - 1 = \frac{20}{2} - 1 = 9$ ve kalan sınıfının dereceleri $d_{R_S} = |N(\mathbb{Z}_{20})| = 1$. Lemma 3.2.70.(i)' den $S_{p_i} = \{p_i k : 1 \leq k \leq \frac{n}{p_i} - 1\}$ kümesinin eleman sayısı spektrumların katlarını verir.

$$\text{spec}_L(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})) = \{0, 1^{(8)}, 3^{(7)}, 9^{(1)}, 11^{(1)}, 19^{(1)}\}.$$

Sonuç 3.2.77. $4 \leq n \leq 100$ için \mathbb{Z}_n indirgenmemiş halka olacak biçimde bütün nilpotent grafların Laplasyan spektrumları belirlenmiştir. Hemen hemen bütün Laplasyan özdeğerleri tam sayıdır [32].

Tablo 3. 1. \mathbb{Z}_n halkası üzerindeki nilpotent grafların Laplasyan spektrumları

n	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ 'nin Laplasyan Spektrumları
4	{0,1,3}
8	{0, 3 ⁽³⁾ , 7 ⁽³⁾ }
9	{0, 2 ⁽⁵⁾ , 8 ⁽²⁾ }
12	{0, 1 ⁽⁴⁾ , 5 ⁽¹⁾ , 7 ⁽¹⁾ , 11 ⁽¹⁾ }
16	{0, 7 ⁽⁷⁾ , 15 ⁽⁷⁾ }
18	{0, 2 ⁽⁶⁾ , 5 ⁽⁵⁾ , 8 ⁽²⁾ , 11 ⁽¹⁾ , 17 ⁽²⁾ }
20	{0, 1 ⁽⁸⁾ , 3 ⁽⁷⁾ , 9 ⁽¹⁾ , 11 ⁽¹⁾ , 19 ⁽¹⁾ }
24	{0, 3 ⁽⁸⁾ , 7 ⁽⁷⁾ , 11 ⁽³⁾ , 15 ⁽¹⁾ , 23 ⁽³⁾ }
25	{0, 4 ⁽¹⁹⁾ , 24 ⁽⁴⁾ }
27	{0, 8 ⁽¹⁷⁾ , 26 ⁽⁸⁾ }
28	{0, 1 ⁽¹²⁾ , 3 ⁽¹¹⁾ , 13 ⁽¹⁾ , 15 ⁽¹⁾ , 27 ⁽¹⁾ }
32	{0, 15 ⁽¹⁵⁾ , 31 ⁽¹⁵⁾ }
36	{0, 5 ⁽¹²⁾ , 11 ⁽¹¹⁾ , 17 ⁽⁵⁾ , 15 ⁽¹⁾ , 23 ⁽¹⁾ , 35 ⁽⁵⁾ }
40	{0, 3 ⁽¹⁶⁾ , 7 ⁽¹⁵⁾ , 19 ⁽³⁾ , 23 ⁽¹⁾ , 39 ⁽³⁾ }
44	{0, 1 ⁽²⁰⁾ , 3 ⁽¹⁹⁾ , 21 ⁽¹⁾ , 23 ⁽¹⁾ , 43 ⁽¹⁾ }
45	{0, 2 ⁽²⁴⁾ , 8 ⁽¹¹⁾ , 14 ⁽⁵⁾ , 20 ⁽¹⁾ , 44 ⁽²⁾ }
48	{0, 7 ⁽¹⁶⁾ , 15 ⁽¹⁵⁾ , 23 ⁽⁷⁾ , 31 ⁽¹⁾ , 47 ⁽⁷⁾ }
49	{0, 6 ⁽⁴¹⁾ , 48 ⁽⁶⁾ }
50	{0, 4 ⁽²⁰⁾ , 9 ⁽¹⁹⁾ , 24 ⁽⁴⁾ , 29 ⁽¹⁾ , 49 ⁽⁴⁾ }
54	{0, 8 ⁽¹⁸⁾ , 17 ⁽¹⁷⁾ , 26 ⁽⁸⁾ , 35 ⁽¹⁾ , 53 ⁽⁸⁾ }
56	{0, 3 ⁽²⁴⁾ , 7 ⁽²³⁾ , 27 ⁽³⁾ , 31 ⁽¹⁾ , 55 ⁽³⁾ }
60	{0, 1 ⁽¹⁶⁾ , 2.29, 3 ⁽¹⁵⁾ , 4.44, 5 ⁽⁷⁾ , 9 ⁽³⁾ , 11 ⁽⁷⁾ , 13.30, 19 ⁽³⁾ , 23.69, 29 ⁽¹⁾ , 31.26, 59 ⁽³⁾ }
63	{0, 2 ⁽³⁶⁾ , 8 ⁽¹⁷⁾ , 20 ⁽⁵⁾ , 26 ⁽¹⁾ , 62 ⁽²⁾ }
72	{0, 11 ⁽²⁴⁾ , 23 ⁽²³⁾ , 35 ⁽¹¹⁾ , 47 ⁽¹⁾ , 71 ⁽¹¹⁾ }
75	{0, 4 ⁽⁴⁰⁾ , 14 ⁽¹⁹⁾ , 24 ⁽⁹⁾ , 34 ⁽¹⁾ , 74 ⁽⁴⁾ }
80	{0, 7 ⁽³¹⁾ , 15 ⁽³¹⁾ , 39 ⁽⁷⁾ , 47 ⁽¹⁾ , 78 ⁽⁷⁾ }
81	{0, 25 ⁽⁵⁵⁾ , 80 ⁽²⁴⁾ }
88	{0, 3 ⁽³⁷⁾ , 7 ⁽³⁹⁾ , 43 ⁽³⁾ , 47 ⁽¹⁾ , 87 ⁽³⁾ }

90	$\{0, 2^{(24)}, 3.94, 5^{(23)}, 7.16, 8^{(11)}, 14^{(5)}, 17^{(11)}, 20.45, 29^{(5)}, 36.04, 44^{(2)}, 47.39, 8\}$
98	$\{0, 6^{(42)}, 13^{(41)}, 48^{(6)}, 55^{(1)}, 97^{(6)}\}$
99	$\{0, 2^{(60)}, 8^{(29)}, 32^{(5)}, 38^{(1)}, 98^{(2)}\}$
100	$\{0, 9^{(40)}, 19^{(39)}, 49^{(9)}, 59^{(1)}, 99^{(9)}\}$

3.3. Total Graflar

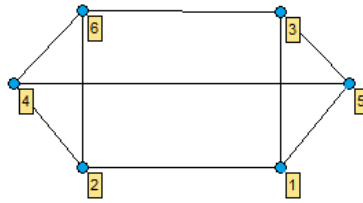
Bir halka üzerinde bağlantılı graflardan biri de total graflardır. Sıfır-bölen graflar söz konusu olduğunda grafların kenarı için halkanın elemanlarının çarpımı kullanılır. Bunun bir varyasyonu olarak halkanın elemanlarının toplamı kullanılarak bir graf oluşturulur ve buna değişmeli halkaların total grafi denir. İlk olarak 2008' de D.F. Anderson ve A. Badawi tarafından [34] de total graf aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

Tanım 3.3.1. R değişmeli, birimi sıfırdan farklı bir halka olsun. $\mathcal{T}(R)$ ile gösterilen total graf, noktaları R ' nin bütün elemanları olan basit bir graftır. Burada farklı $x, y \in R$ için x ve y komşudur ancak ve ancak $x + y \in \mathcal{Z}(R)$ ' dir [34].

R ' nin düzenli grafi [23] olarak adlandırılan $\mathcal{T}(Reg(R))$, noktaları $Reg(R) = R \setminus \mathcal{Z}(R)$ olan ve noktaları $\mathcal{Z}(R)$ olan $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ 'in indirgenmiş alt grafları olsun. A , değişmeli bir B halkasının bir alt halkasıysa, $\mathcal{T}(A)$ ' nin $\mathcal{T}(B)$ ' nin indirgenmiş bir alt grafi olması gerekmez. $x, y \in A$, $\mathcal{T}(B)$ ' de komşu olmasına rağmen $\mathcal{Z}(A) \subseteq \mathcal{Z}(B)$ olduğundan $\mathcal{T}(A)$ ' da komşu ise elemanlar $\mathcal{T}(B)$ ' de komşu olabilir fakat $\mathcal{T}(A)$ ' da komşu değildir. Aslında $\mathcal{T}(A)$, $\mathcal{T}(B)$ ' nin indirgenmiş bir alt grafidir ancak ve ancak $\mathcal{Z}(B) \cap A = \mathcal{Z}(A)$.

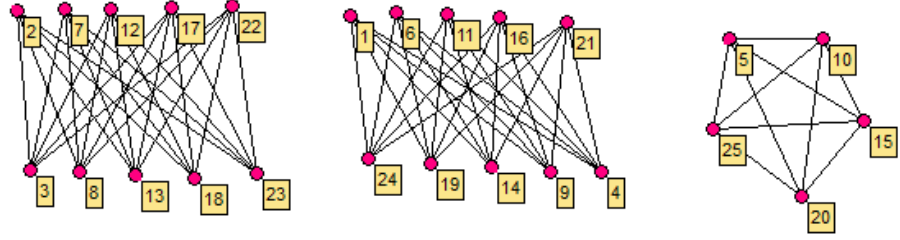
Örnek 3.3.2.

- i. $R = \mathbb{Z}_6$ olsun. O halde, $\mathcal{Z}(R) = \{2,3,4,6\}$ ve total grafi;



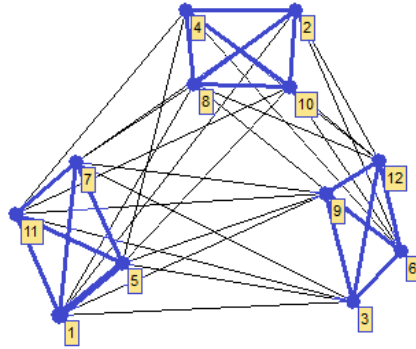
Şekil 3. 45. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_6)$

ii. $R = \mathbb{Z}_{25}$ olsun. O halde, $\mathcal{Z}(R) = \{5,10,15,20,25\}$ ve total grafi;



Şekil 3. 46. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{25})$

iii. $R = \mathbb{Z}_{12}$ olsun. O halde, $\mathcal{Z}(R) = \{2,3,4,6,8,9,10,12\}$ ve total grafi;



Şekil 3. 47. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{12})$

$\mathcal{T}(R)$ üzerine yapılan çalışmalar $\mathcal{Z}(R)$ ' nin R ' nin ideali olup olmadığına bağlı olarak iki duruma ayrılır. $\mathcal{T}(R)$ ' in $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ alt grafi daima bağlantılıdır ve $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ tamdır ancak ve ancak $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin idealidir. Ayrıca $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin ideali ise o zaman $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ ve $\mathcal{T}(Reg(R))$, $\mathcal{T}(R)$ ' in ayrık alt graflarıdır. $\mathcal{T}(Reg(R))$, her biri tam graf ya da iki parçalı tam graf olan ayrık grafların birleşimidir. Ancak $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin ideali değilse $\mathcal{T}(R)$ ' in $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ ve $\mathcal{T}(Reg(R))$ alt grafları asla ayrık değildir ve $\mathcal{T}(R)$ ancak ve ancak $\mathcal{Z}(R) = R$ ise bağlantılıdır.

Teorem 3.3.3. $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin ideali olacak şekilde R değişmeli bir halka olsun. O zaman $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$, $\mathcal{T}(R)$ ' in tam indirgenmiş alt grafidir ve $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$, $\mathcal{T}(Reg(R))$ ' den ayrıktır [34].

Teorem 3.3.4. $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali olacak şekilde R , değişmeli bir halka ve $|\mathcal{Z}(R)| = \alpha$ ve $|R/\mathcal{Z}(R)| = \beta$ olsun.

1. $2 \in \mathcal{Z}(R)$ ise o zaman $\mathcal{T}(Reg(R))$, $\beta - 1$ tane ayrık K_α ' nin birleşimidir.
2. $2 \notin \mathcal{Z}(R)$ ise o zaman $\mathcal{T}(Reg(R))$, $\frac{\beta-1}{2}$ tane ayrık $K_{\alpha,\alpha}$ ' nin birleşimidir [34].

Açıklama 3.3.5. $Z(R) = \{0\}$ ise yani R bir tamlık bölgesi ise $2 \in Z(R)$ olması için gerek ve yeter koşul $Kar(R) = 2$ olmasıdır. R bir tamlık bölgesi değilse bunun geçerli olması gerekmez, örneğin $R = \mathbb{Z}_4$. $R, Kar(R) = 2$ ile birlikte bir tamlık bölgesi ise o zaman $\mathcal{T}(Reg(R))$, $\beta - 1$ tane ayrık K_1 'lerin birleşimidir. $R, Kar(R) \neq 2$ ile birlikte bir tamlık bölgesi ise o zaman $\mathcal{T}(Reg(R))$, $\frac{\beta-1}{2}$ tane ayrık $K_{1,1} = K_2$ 'lerin birleşimidir [34].

Teorem 3.3.6. $Z(R)$, R' nin bir ideali olacak şekilde R , değişmeli bir halka olsun.

1. $\mathcal{T}(Reg(R))$ tamdır \Leftrightarrow ya $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ya da $R \cong \mathbb{Z}_3$.
2. $\mathcal{T}(Reg(R))$ bağlantılıdır \Leftrightarrow ya $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ya da $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$.
3. $\mathcal{T}(Reg(R))$ tamamen bağlantısızdır $\Leftrightarrow R, Kar(R) = 2$ ile birlikte bir tamlık bölgesidir [34].

Teorem 3.3.7. $Z(R)$, R' nin bir ideali olacak şekilde R , değişmeli bir halka olsun. O zaman;

1. $diam(\mathcal{T}(Reg(R))) = 0,1,2$ veya ∞ . Özellikle $\mathcal{T}(Reg(R))$ bağlantılı ise $diam(\mathcal{T}(Reg(R))) \leq 2$ 'dir.
2. $gr(\mathcal{T}(Reg(R))) = 3,4$ veya ∞ . Özellikle $\mathcal{T}(Reg(R))$ bir döngü içeriyorsa $gr(\mathcal{T}(Reg(R))) \leq 4$ tür [34].

Teorem 3.3.8. $Z(R)$, R' nin bir ideali olacak şekilde R , değişmeli bir halka olsun.

1. (a) $diam(\mathcal{T}(Reg(R))) = 0 \Leftrightarrow R \cong \mathbb{Z}_2$.
 (b) $diam(\mathcal{T}(Reg(R))) = 1 \Leftrightarrow$ ya $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ve $R \not\cong \mathbb{Z}_2$ (yani $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ve $|Z(R)| \geq 2$) ya da $R \cong \mathbb{Z}_3$.
 (c) $diam(\mathcal{T}(Reg(R))) = 2 \Leftrightarrow R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$ ve $R \not\cong \mathbb{Z}_3$ (yani $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$ ve $|Z(R)| \geq 2$).
 (d) Diğer durumlarda, $diam(\mathcal{T}(Reg(R))) = \infty$.
2. (a) $gr(\mathcal{T}(Reg(R))) = 3 \Leftrightarrow 2 \in Z(R)$ ve $|Z(R)| \geq 3$.

$$(b) \text{gr}(\mathcal{T}(\text{Reg}(R))) = 4 \Leftrightarrow 2 \notin \mathcal{Z}(R) \text{ ve } |\mathcal{Z}(R)| \geq 2.$$

$$(c) \text{Diğer durumlarda, } \text{gr}(\mathcal{T}(\text{Reg}(R))) = \infty.$$

$$3. (a) \text{gr}(\mathcal{T}(R)) = 3 \Leftrightarrow |\mathcal{Z}(R)| \geq 3.$$

$$(b) \text{gr}(\mathcal{T}(R)) = 4 \Leftrightarrow 2 \notin \mathcal{Z}(R) \text{ ve } |\mathcal{Z}(R)| = 2.$$

$$(c) \text{Diğer durumlarda, } \text{gr}(\mathcal{T}(R)) = \infty [34].$$

Örnek 3.3.9. $m \geq 2$ tam sayı olsun. O zaman $\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_m), \mathbb{Z}_m'$ in bir idealidir ancak ve ancak bazı p asalı ve $n \geq 1$ tam sayısı için $m = p^n$ 'dir. Öyleyse kabul edelim ki $\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_m), \mathbb{Z}_m'$ in bir ideali olsun. Dolayısıyla $\mathcal{T}(\text{Reg}(\mathbb{Z}_m))$ bağlantılıdır gerek ve yeter şart bazı $n \geq 1$ tam sayısı için ya $m = 2^n$ ya da $m = 3^n$ dir. Bu nedenle $\mathcal{T}(\text{Reg}(\mathbb{Z}_m))$ tam graftır gerek ve yeter şart bazı $n \geq 1$ tam sayısı için ya $m = 2^n$ ya da $m = 3^n$ dir [34].

Teorem 3.3.10. $\mathcal{Z}(R), R'$ nin bir ideali olmak üzere R , değişmeli bir halka olsun.

1. $G, \mathcal{T}(\text{Reg}(R))$ ' nin indirgenmiş bir alt grafi olsun. x ve y G' de bir yolla bağlantılı olan G' nin farklı noktaları olsun. O zaman x ve y arasında en fazla 2 uzunluğunda G' de bir yol vardır. Özellikle $\mathcal{T}(\text{Reg}(R))$ bağlantılı ise o zaman $\text{diam}(\mathcal{T}(\text{Reg}(R))) \leq 2$.
2. x ve y R' nin bir yolla bağlı farklı düzenli elemanları olsun. $x + y \notin \mathcal{Z}(R)$ ise yani x ve y komşu değilse o zaman $\mathcal{T}(\text{Reg}(R))$ ' de x ve y arasında 2 uzunluğunda $x - (-x) - y$ ve $x - (-y) - y$ yolları vardır [34].

Teorem 3.3.11. $\mathcal{Z}(R), R'$ nin bir ideali olmak üzere R , değişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler eşittir.

1. $\mathcal{T}(\text{Reg}(R))$ bağlantılıdır.
2. $\forall x, y \in \text{Reg}(R)$ için ya $x + y \in \mathcal{Z}(R)$ ya da $x - y \in \mathcal{Z}(R)$ ' dir.
3. $\forall x, y \in \text{Reg}(R)$ için ya $x + y \in \mathcal{Z}(R)$ ya da $x + 2y \in \mathcal{Z}(R)$ ' dir. Özellikle $\forall x \in \text{Reg}(R)$ için ya $2x \in \mathcal{Z}(R)$ ya da $3x \in \mathcal{Z}(R)$ (ancak ikisi birden değil).
4. Ya $\mathcal{Z}(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ya da $R/\mathcal{Z}(R) \cong \mathbb{Z}_3$ ' tur [34].

Sırasıyla $Nil(R) \subseteq \mathcal{Z}(R)$ ve $U(R) \subseteq Reg(R)$ noktaları ile $Nil(R)$ ve $U(R)$ kümelerinin noktalarından elde edilen total grafi, $\mathcal{T}(R)$ ' in indirgenmiş iki alt grafi olarak düşünülebilir.

Teorem 3.3.12. R , değişmeli bir halka olsun.

1. $Nil(R)$ noktaları ile oluşan total graf ile $\mathcal{Z}(R)$ noktalarından elde edilen total grafın tam indirgenmiş bir alt grafıdır.
2. $\mathcal{T}(Nil(R))$ ' nin her bir noktası $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ ' nin her farklı noktasına komşudur.
3. $\mathcal{T}(Nil(R)), \mathcal{T}(Reg(R))$ ' den ayrıktır.
4. $\{0\} \neq Nil(R) \subset \mathcal{Z}(R)$ ise o zaman $gr(\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))) = 3$ ' tür [34].

Teorem 3.3.13. $\mathcal{Z}(R), R'$ nin bir ideali değil ve R , değişmeli bir halka olsun.

1. $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R)), diam(\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))) = 2$ ile bağlantılıdır.
2. $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ ' nin bazı noktaları $\mathcal{T}(Reg(R))$ ' de bir noktaya komşudur. Özellikle $\mathcal{T}(R)$ ' in alt grafları $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$, ve $\mathcal{T}(Reg(R))$ ayrık değildir.
3. $\mathcal{T}(Reg(R))$ bağlantılı ise $\mathcal{T}(\Gamma(R))$ 'da bağlantılıdır [34].

Teorem 3.3.14. $\mathcal{Z}(R), R'$ nin bir ideali değil ve R , değişmeli bir halka olsun. O zaman $\mathcal{T}(R)$ 'in bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{Z}(R) = R$. Yani bazı $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{Z}(R)$ için $R = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ 'dir. Özellikle R sonlu, değişmeli bir halka ve $\mathcal{Z}(R), R'$ nin bir ideali değilse o halde $\mathcal{T}(\Gamma(R))$ bağlantılıdır [34].

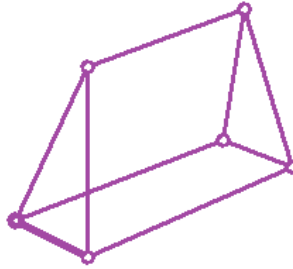
Teorem 3.3.15. $\mathcal{Z}(R), R'$ nin bir ideali değil ve $\mathcal{Z}(R) = R$ yani $\mathcal{T}(R)$ bağlantılı olacak şekilde R , değişmeli bir halka olsun. $n \geq 2$ en küçük tam sayı öyle ki bazı $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{Z}(R)$ için $R = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ olsun. O zaman $diam(\mathcal{T}(R)) = n$ olur. Özellikle R sonlu, değişmeli bir halka ve $\mathcal{Z}(R), R'$ nin bir ideali değilse o halde $diam(\mathcal{T}(R)) = 2$ ' dir [34].

Sonuç 3.3.16. R , değişmeli bir halka öyle ki $\mathcal{Z}(R), R'$ nin bir ideali değil ve kabul edelim ki $\mathcal{T}(R)$ bağlantılı olsun. $diam(\mathcal{T}(R)) = n$ ise o halde, $\mathcal{T}(Reg(R)) \geq n - 2$ ' dir [34].

Sonuç 3.3.17. R , değişmeli bir halka olsun. R aşık olmayan bir idempotente sahipse o zaman $\mathcal{T}(R), diam(\mathcal{T}(R)) = 2$ ile bağlantılıdır [34].

Sonuç 3.3.18. $|\Lambda| \geq 2$ ile $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ değişmeli halkaların bir ailesi ve $R = \prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$ olsun. O zaman $\mathcal{T}(R)$, $diam(\mathcal{T}(R)) = 2$ ile bağlantılıdır [34].

Örnek 3.3.19. $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ olsun. O zaman $diam(\mathcal{T}(R)) = 2$ olur. Buradan $diam(\mathcal{T}(Reg(R))) = 1$ olduğunu kontrol etmek kolaydır. Dolayısıyla $diam(\mathcal{T}(R)) > diam(\mathcal{T}(Reg(R)))$.



Şekil 3. 48. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$

Teorem 3.3.20. $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali değil ve R , değişmeli bir halka olsun. O zaman $\mathcal{T}(R)$, $diam(\mathcal{T}(R)) = 2$ ile bağlantılıdır. Özellikle R sonlu ve $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali değilse o halde $\mathcal{T}(R)$, $diam(\mathcal{T}(R)) = 2$ ile bağlantılıdır [34].

Teorem 3.3.21. Değişmeli bir R halkasının asal idealleri P_1 ve P_2 olsun. Bazı $x \in P_1 \setminus P_2$ ve $y \in P_2 \setminus P_1$ için $xy = 0$ ve $S = R \setminus (P_1 \cup P_2)$ olsun. O zaman $\mathcal{T}(R_S)$, $diam(\mathcal{T}(R_S)) = 2$ ile bağlantılıdır [34].

Örnek 3.3.22. $R = \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]/\langle X_1 X_2 X_3 \rangle = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$, R halkasının asal idealleri $P_1 = (x_1)$ ve $P_2 = (x_2)$ olmak üzere, $x = x_1$ ve $y = x_2 x_3$ olsun. O zaman $xy = 0$ ve $x \in P_1 \setminus P_2$ ve $y \in P_2 \setminus P_1$. $S = R \setminus (P_1 \cup P_2) \supset R \setminus \mathcal{Z}(R)$ olsun. O halde $\mathcal{T}(R_S)$, $diam(\mathcal{T}(R_S)) = 2$ ile bağlantılıdır. Teorem 3.3.14. ve Teorem 3.3.21.' den $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali değil ve $\mathcal{Z}(R) \subset R$ olduğunda $\mathcal{T}(R)$ ' in bağlantısız olduğu açıktır.

Lemma 3.3.23. $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali değil ve R , değişmeli bir halka olsun. O zaman $2\mathcal{Z}(R) = \{0\} \Leftrightarrow Kar(R) = 2'$ dir [34].

Teorem 3.3.24. $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali değil ve R , değişmeli bir halka olsun.

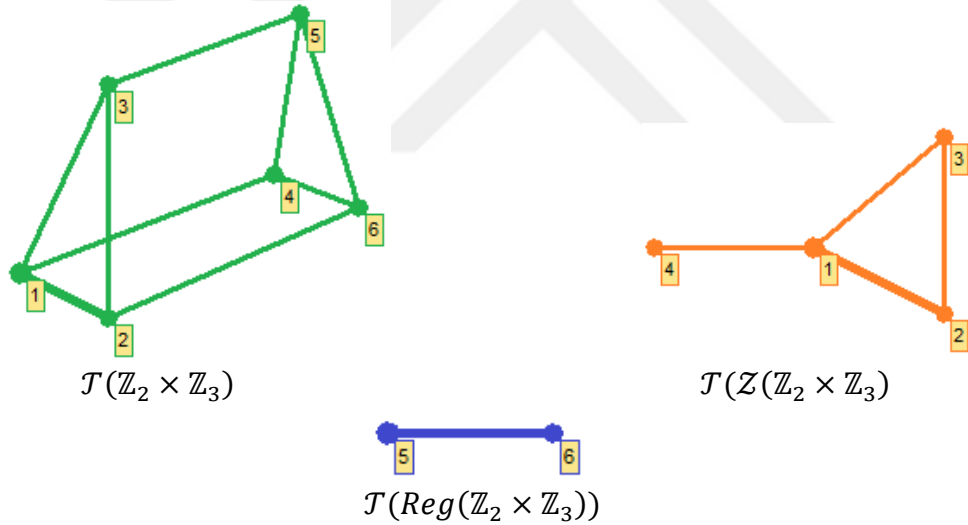
1. $gr(\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))) = 3$ veya $gr(\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))) = \infty$. Ayrıca $gr(\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))) = \infty$ ise o zaman; $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Yani $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ merkezi 0 olan $K_{1,2}$ star graftır.

2. $gr(\mathcal{T}(R)) = 3 \Leftrightarrow gr(\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))) = 3$ (ancak ve ancak $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$).
3. $gr(\mathcal{T}(R)) = 4 \Leftrightarrow gr(\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))) = \infty$ (ancak ve ancak $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$).
4. $Kar(R) = 2$ ise o zaman $gr(\mathcal{T}(Reg(R))) = 3$ veya ∞ . Özellikle $Kar(R) = 2$ ve $\mathcal{T}(Reg(R))$ bir döngü içeriyorsa $gr(\mathcal{T}(Reg(R))) = 3$.
5. $gr(\mathcal{T}(Reg(R))) = 3, 4$ veya ∞ . Özellikle $\mathcal{T}(Reg(R))$ bir döngü içeriyorsa $gr(\mathcal{T}(Reg(R))) \leq 4$ tür [34].

Örnek 3.3.25. (a) $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ olsun.

$$V(R) = \left\{ \underbrace{(0,0)}_1, \underbrace{(0,1)}_2, \underbrace{(0,2)}_3, \underbrace{(1,0)}_4, \underbrace{(1,1)}_5, \underbrace{(1,2)}_6 \right\} \text{ ve}$$

$$\mathcal{Z}(R) = \left\{ \underbrace{(0,0)}_1, \underbrace{(0,1)}_2, \underbrace{(0,2)}_3, \underbrace{(1,0)}_4 \right\} \text{ olur.}$$



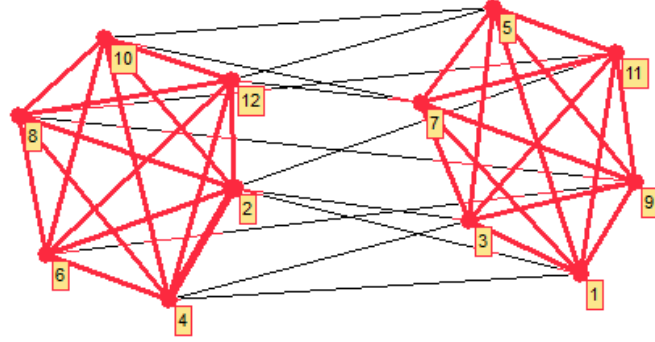
Şekil 3. 49. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$ ve alt grafları

$gr(\mathcal{T}(\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3))) = gr(\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)) = 3$ ve $gr(\mathcal{T}(Reg(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3))) = \infty$ olduğu kolayca görülmektedir.

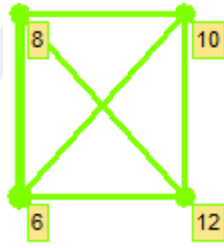
(b) $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ olsun.

$$V(R) = \left\{ \underbrace{(0,0)}_1, \underbrace{(0,1)}_2, \underbrace{(0,2)}_3, \underbrace{(0,3)}_4, \underbrace{(1,0)}_5, \underbrace{(1,1)}_6, \underbrace{(1,2)}_7, \underbrace{(1,3)}_8, \underbrace{(2,0)}_9, \underbrace{(2,1)}_{10}, \underbrace{(2,2)}_{11}, \underbrace{(2,3)}_{12} \right\} \text{ ve}$$

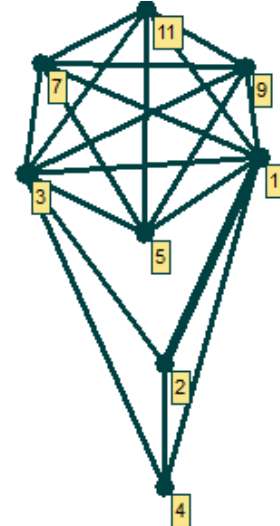
$$Z(R) = \left\{ \underbrace{(0,0)}_1, \underbrace{(0,1)}_2, \underbrace{(0,2)}_3, \underbrace{(0,3)}_4, \underbrace{(1,0)}_5, \underbrace{(1,2)}_7, \underbrace{(2,0)}_9, \underbrace{(2,2)}_{11} \right\} \text{ olur.}$$



$\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4)$



$\mathcal{T}(\text{Reg}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4))$



$\mathcal{T}(\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4))$

Şekil 3. 50. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4)$ ve alt grafları

$$gr(\mathcal{T}(\text{Reg}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4))) = gr(\mathcal{T}(\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4))) = gr(\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4)) = 3' \text{ tür.}$$

Açıklama 3.3.26. R sonsuz ve tamlık bölgesi değilse o zaman $\mathcal{Z}(R)$ sonsuzdur. Dolayısıyla R sonsuzdur ancak ve ancak her $v \in V(\mathcal{T}(R))$ için $deg_{\mathcal{T}(R)}(v) = \infty$ olur [23].

Teorem 3.3.27. $i = 1, 2, \dots, n$ için I_i , R 'nin hakiki idealleri ve R değişmeli bir halka olsun. $R \setminus \cup_{i=1}^n I_i$ sonlu ise o zaman R 'de sonludur [35].

Sonuç 3.3.28. R değişmeli bir Noether halka olsun. O zaman $\text{Reg}(R)$ sonlu ise o zaman R 'de sonludur [35].

Lemma 3.3.29. R değişmeli bir Noeter halka ve $|Reg(R)| \leq 2$ olsun. O halde R , r pozitif tam sayı olduğunda aşağıdaki halkalardan birine,

$$\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_2^r, \mathbb{Z}_2^r \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2^r \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2^r \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$$

izomorf olur [35].

R_1 ve R_2 iki değişmeli halka olmak üzere $R_1 \cong R_2$ ise o zaman $\mathcal{T}(R_1) \cong \mathcal{T}(R_2)$. Ancak tersi doğru değildir. $R_1 = \mathbb{Z}_4$ ve $R_2 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ olsun. O halde; $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_4) \cong \mathcal{T}(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle) = 2K_2$ fakat $\mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ olur.

Lemma 3.3.30. R sonlu, değişmeli bir halka ve x , $\mathcal{T}(R)$ ' de bir nokta olsun. O zaman ya $deg(x) = |\mathcal{Z}(R)|$ ya da $deg(x) = |\mathcal{Z}(R)| - 1$ ' dir. Özellikle $2 \in \mathcal{Z}(R)$ ise $\mathcal{T}(R)$, $(|\mathcal{Z}(R)| - 1)$ -düzenli graftır [23].

Teorem 3.3.31. $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali olmayacak şekilde R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman $\mathcal{T}(R)$, Euler graftır ancak ve ancak $2 \in \mathcal{Z}(R)$ ve $|\mathcal{Z}(R)|$ tektir [36].

Sonuç 3.3.32. $n \geq 2$ için $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_n)$ Euler graf değildir [36].

Lemma 3.3.33. $2 \in \mathcal{Z}(R)$ ve $|\mathcal{Z}(R)|$ tek sayılı olacak şekilde R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman $Kar(R) = 2$ [23].

Teorem 3.3.34. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman $\mathcal{T}(R)$, Euler graftır ancak ve ancak R , çift sıralı iki veya daha fazla cismin direkt toplamına izomorftur. Yani bazı $k \geq 2$ için $R \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{F}_{2^{t_i}}$ tur [23].

Lemma 3.3.35. $Kar(R_1/S_1) \neq 2$ ve $Kar(R_2/S_2) \neq 2$ olacak şekilde (R_1, S_1) ve (R_2, S_2) iki sonlu, değişmeli, lokal halka olsun. O zaman $\mathcal{T}(R_1 \times R_2)$ ve $\mathcal{T}(Reg(R_1 \times R_2))$ Hamilton graftır [35].

Lemma 3.3.36. $Kar(R_1/S_1) = 2$ ve $Kar(R_2/S_2) \neq 2$ olacak şekilde (R_1, S_1) ve (R_2, S_2) iki sonlu, değişmeli, lokal halka olsun. O zaman aşağıdaki verileri sağlamaktadır.

1. $R_1 \times R_2 \not\cong \mathbb{Z}_6$ ise o zaman $\mathcal{T}(Reg(R_1 \times R_2))$ Hamilton graftır.
2. $\mathcal{T}(R_1 \times R_2)$ bir Hamilton graftır [35].

Lemma 3.3.37. $Kar(R_1/S_1) = 2$ ve $Kar(R_2/S_2) = 2$ olacak şekilde (R_1, S_1) ve (R_2, S_2) iki sonlu, değişmeli, lokal halka olsun. O zaman aşağıdaki verileri sağlamaktadır.

1. $R_1 \times R_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ halkalarından herhangi birine izomorf değilse, o halde $\mathcal{T}(Reg(R_1 \times R_2))$ Hamilton graftır.
2. $\mathcal{T}(R_1 \times R_2)$ bir Hamilton graftır [35].

Lemma 3.3.38. R_1 ve R_2 iki sonlu, değişmeli, lokal halka olsun. O zaman aşağıdaki verileri sağlamaktadır.

1. $\mathcal{T}(R_1)$ bir Hamilton graf ise o zaman $\mathcal{T}(R_1 \times R_2)$ ' de bir Hamilton graftır.
2. $\mathcal{T}(Reg(R_1))$ bir Hamilton graf ise o zaman $\mathcal{T}(Reg(R_1 \times R_2))$ ' de bir Hamilton graftır [35].

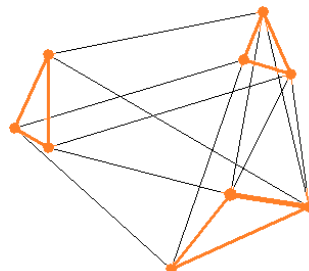
Teorem 3.3.39. $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali olmayacak şekilde R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki verileri sağlamaktadır.

1. $\mathcal{T}(R)$ bir Hamilton graftır.
2. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $\mathcal{T}(Reg(R))$ bir Hamilton graftır ancak ve ancak R , \mathbb{Z}_2^{n+1} , $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ halkalarından herhangi birine izomorf değildir [35].

Açıklama 3.3.40. R sonlu, değişmeli, lokal halka ise o zaman $\mathcal{Z}(R)$ bir ideal ve $\mathcal{T}(R)$ ' de bağlantısızdır. Dolayısıyla $\mathcal{T}(R)$ bir Hamilton graf değildir [35].

Teorem 3.3.41. $diam(\mathcal{T}(R)) = 2$ olacak şekilde (dolayısıyla $\mathcal{T}(R)$ bağlantılıdır) R değişmeli bir halka olsun. O halde $\mathcal{T}(R)$ Hamilton graftır [36].

Örnek 3.3.42. $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ olsun. Bu halkanın total grafi;



Şekil 3. 51. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

Şekil 3.51.' de görüldüğü gibi basit bir şekilde $diam(\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)) = 2$ olduğu görülmektedir. $diam(\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)) = 2$ ve $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ halkası değişmeli ve bütün noktalardan bir kez geçecek şekilde bir döngü olduğu için $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ Hamilton graftır.

Sonuç 3.3.43. $Z(R)$, R' nin bir ideali olmayacak şekilde R değişmeli bir Artin halka olsun. O halde $\mathcal{T}(R)$ Hamilton graftır [36].

Sonuç 3.3.44. $Z(R)$, R' nin bir ideali olmayacak şekilde R sonlu, değişmeli bir halka ise o halde $\mathcal{T}(R)$ Hamilton graftır [23].

Lemma 3.3.45. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman;

1. $\mathcal{T}(R)$, $|R| - 1$ dereceli bir noktaya sahip değildir.
2. R bir tamlık bölgesi değilse o zaman $\mathcal{T}(R)$ izole noktaya sahip değildir [36].

Lemma 3.3.46. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman; $\mathcal{T}(R)$ bir izole $a \in R$ noktasını içerir gerek ve yeter şart R bir cisimdir ve $2a = 0$ (Yani $a = -a$) [36].

Sonuç 3.3.47. R sonlu, değişmeli bir halka olsun.

1. $\mathcal{T}(R)$ bağlantısızdır \Leftrightarrow bazı $k \in \mathbb{N}$ için $R \cong \mathbb{F}_{2^k}$.
2. $\mathcal{T}(R)$ ' de R^* tarafından indirgenmiş alt graf 1 -düzenlidir ancak ve ancak R bir cisimdir ve $\forall a \in R^*$ için $a \neq -a$ [36].

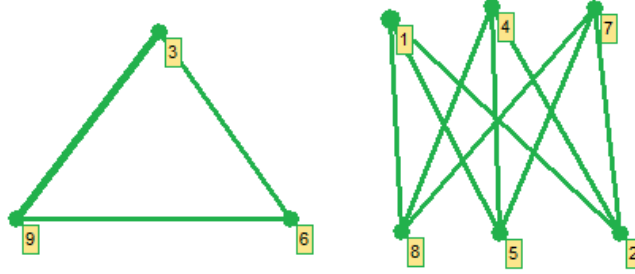
Açıklama 3.3.48. R tamlık bölgesi olmayan sonlu, değişmeli bir halka ise o zaman $\forall v \in V(\mathcal{T}(R))$ için $1 \leq deg(v) \leq |R| - 2$. Ayrıca bu sınırlar nettir. $R = \mathbb{Z}_4$ ise $\forall v \in R$ için $deg(v) = 1$ olur. Hâlbuki $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ise $\forall v \in R$ için $deg(v) = |R| - 2$ ' dir [36].

Önerme 3.3.49. R cisim olmayan sonlu, değişmeli bir halka olsun.

1. Bazı $v \in V(\mathcal{T}(R))$ için $deg(v) = 1 \Leftrightarrow R \cong \mathbb{Z}_4$ veya $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$.
2. Bazı $v \in V(\mathcal{T}(R))$ için $deg(v) = |R| - 2 \Leftrightarrow m$ pozitif bir tam sayı olduğunda $R \cong \mathbb{Z}_2^m$ tur [36].

Sonuç 3.3.50. Bazı $r \in \mathbb{N}$ için $R \cong \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_2^r$ ve cisim olmayacak şekilde R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman; $\forall v \in V(\mathcal{T}(R))$ için $2 \leq \deg(v) \leq |R| - 3$ tür [36].

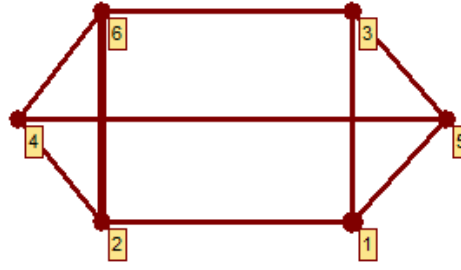
Örnek 3.3.51. i) $R = \mathbb{Z}_9$ ise;



Şekil 3. 52. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_9)$

$\forall v \in \mathcal{Z}(R)$ için $\deg(v) = 2$ ' dir.

ii) $R = \mathbb{Z}_6$ ise;



Şekil 3. 53. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_6)$

$\forall v \in R$ için $\deg(v) = |R| - 3$ ' tür.

Lemma 3.3.52. R sonlu, değişmeli bir halka ve $\mathcal{T}(R) = G$ olsun. Eğer a ve b R' de bağlantılı ise $\deg_G(a) = \deg_G(b)$ [36].

Önerme 3.3.53. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. $\mathcal{T}(R)$ öz-merkezli graf olur $\Leftrightarrow \mathcal{Z}(R), R'$ nin bir ideali değildir [36].

Teorem 3.3.54. Her sonlu indirgenmiş halka için;

$$\chi(\mathcal{T}(R)) = \omega(\mathcal{T}(R)) = \begin{cases} 4 & , R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \\ \max\{|m| \mid m \in \text{Max}(R)\} & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.17)$$

eşitliğini sağlıyorsa o zaman her sonlu halka için de sağlar [23].

Teorem 3.3.55. $n \geq 2$ pozitif tam sayı ve F_1, F_2, \dots, F_n sonlu cisimler olmak üzere $|F_1| \leq |F_2| \leq \dots \leq |F_n|$ olsun. Varsayalım ki aşağıdaki şartlardan birini sağlasın;

1. F_1 cismi çift karakteristiğe sahiptir.
2. Her F_i tek karakteristiğe sahiptir ve $F_1 \times F_2 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. O zaman;

$$\chi(\mathcal{J}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n)) = |F_2| \dots |F_n|$$
 [23].

Teorem 3.3.56. S maksimal ideali ile R sonlu lokal halka, $|S| = \lambda$ ve $|R/S| = \mu$ olsun. Eğer $2 \in Z(R)$ ise o zaman $\alpha(\mathcal{J}(R)) = \mu$. Eğer $2 \notin Z(R)$ ise o zaman $\alpha(\mathcal{J}(R)) = \lambda \left(\frac{\mu-1}{2} \right) + 1$ dir [23].

Teorem 3.3.57. R sonlu, değişmeli bir halka ve $\mathcal{J}(R)$ düzlemsel olsun. O zaman aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. R lokal halka ise o zaman R bir cisimdir veya R aşağıdaki halkalardan birine izomorftur:

$$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle, \mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x, y \rangle^2, \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 \rangle, \mathbb{Z}_4[x]/\langle 2x, x^2 - 2 \rangle,$$

$$\mathbb{Z}_8, \mathbb{F}_4[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_4[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle;$$
2. R lokal halka değilse o zaman $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ veya $R \cong \mathbb{Z}_6$ dir [23].

Teorem 3.3.58. R sonlu, değişmeli bir halka ve $\mathcal{J}(R)$ çembersel olsun. O zaman aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. R lokal halka değilse o zaman R, \mathbb{Z}_9 veya $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 \rangle$ 'ye izomorftur.
2. R lokal halka değilse o zaman R , aşağıdaki halkalardan birine izomorftur:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$
 [23].

Teorem 3.3.59. R , sonlu değişmeli bir halka ve $I, Z(R)$ ' de yer alan bir ideal, $|I| = \lambda \geq 3$ ve $|R/I| = \mu$ olsun. O zaman aşağıdaki şartlar doğrudur:

1. $2 \in I$ ise o halde $gr(\mathcal{J}(R)) \geq \mu \left\lceil \frac{(\lambda-3)(\lambda-4)}{12} \right\rceil$
2. $2 \notin I$ ise o halde $gr(\mathcal{J}(R)) \geq \left\lceil \frac{(\lambda-3)(\lambda-4)}{12} \right\rceil + \left(\frac{\mu-1}{2} \right) \left\lceil \frac{(\lambda-2)^2}{4} \right\rceil$ 'tir [23].

Sonuç 3.3.60. $\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali olacak şekilde R sonlu, değişmeli bir halka $|\mathcal{Z}(R)| = \alpha$ ve $|R/\mathcal{Z}(R)| = \beta$ olsun. O zaman aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $2 \in \mathcal{Z}(R)$ ise o halde $gr(\mathcal{T}(R)) = \beta \left\lfloor \frac{(\alpha-3)(\alpha-4)}{12} \right\rfloor$
2. $2 \notin \mathcal{Z}(R)$ ise o halde $gr(\mathcal{T}(R)) = \left\lfloor \frac{(\alpha-3)(\alpha-4)}{12} \right\rfloor + \left(\frac{\beta-1}{2} \right) \left\lfloor \frac{(\alpha-2)^2}{4} \right\rfloor$, tir [23].

Teorem 3.3.61. I , R' deki hakiki ideallerin arasında maksimal kardinaliteye sahip bir ideal olacak şekilde R sonlu değişmeli bir halka, $|R/I| = \mu$ ve $2 \leq \lambda \not\equiv 5,9 \pmod{12}$ olsun. $\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali değil ve $2 \in I$ ise o zaman;

$$gr(\mathcal{T}(R)) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{\mu}{2} \left\lfloor \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{6} \right\rfloor \right\rfloor & , \mu \text{ çift ise} \\ \left\lfloor \frac{(\mu-1)}{2} \left\lfloor \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{6} \right\rfloor \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\lambda-3)(\lambda-4)}{12} \right\rfloor & , \mu \text{ tek ise} \end{cases} \quad (3.18)$$

dir [23].

Teorem 3.3.62. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman $gr(\mathcal{T}(R)) = 2$ gerek ve yeter şart R ya \mathbb{Z}_{10} 'a ya da $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}_4$ 'e izomorftur [23].

Teorem 3.3.63. R birimli değişmeli bir halka olsun. O zaman:

1. $\mathcal{T}(R)$ bir yol değildir.
2. $\mathcal{T}(R)$ tam graf değildir.
3. $\mathcal{T}(R)$ bir yıldız değildir.
4. $\mathcal{T}(R)$ bir dōngüdür $\Leftrightarrow R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
5. $\mathcal{T}(R)$ iki parçalı graftır $\Leftrightarrow R$ ya tamlık bölgesi ya \mathbb{Z}_4 ya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ya da $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ ' dir [36].

Tanım 3.3.64. R değişmeli halkasının total grafının tümleyen grafı $\overline{\mathcal{T}(R)}$ ile gösterilsin. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ basit ve yōnsüz bir graftır. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ ' deki iki farklı nokta x ve y komşudur gerek ve yeter şart $x + y \in Reg(R)$ olmasıdır.

R' ye karşılık gelen birim grafın R' den elde edilen komaksimal grafın alt grafı olduğu gözlemlenmektedir. Başka bir ifade ile $\overline{\mathcal{T}(R)}$ ve R' nin komaksimal grafı arasında bir

ilişki yoktur. Örneğin \mathbb{Z} halkası $\overline{\mathcal{T}(\mathbb{Z})}$ 'de 2, 4'e komşu iken \mathbb{Z} 'nin komaksimal grafında değildir. Ayrıca \mathbb{Z} 'nin komaksimal grafında 1, -1 'e komşu iken $\overline{\mathcal{T}(\mathbb{Z})}$ 'de değildir.

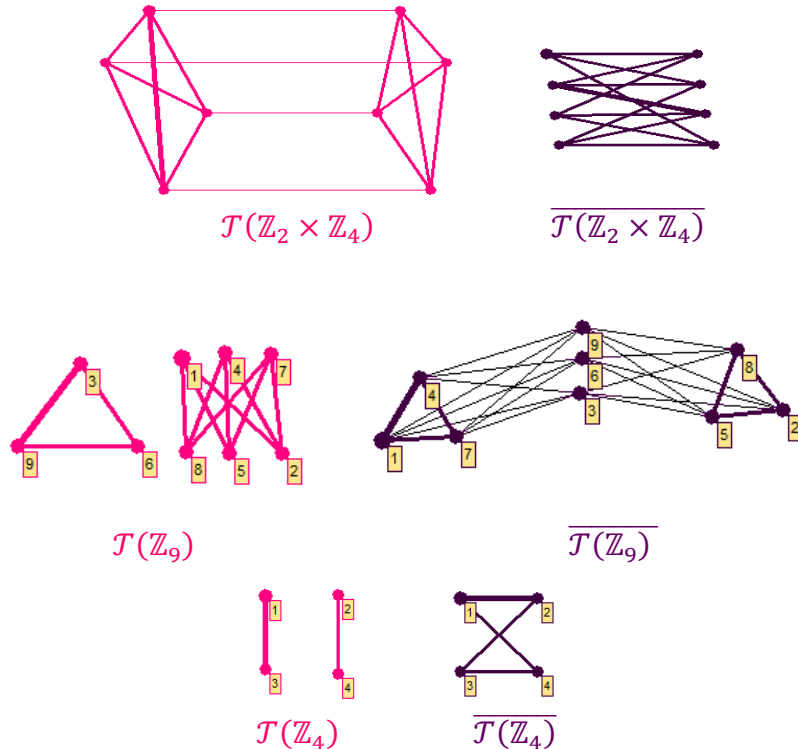
Sonuç 3.3.65. $Reg(R)$ sonlu olacak şekilde R değişmeli bir halka olsun.

1. $2 \in \mathcal{Z}(R)$ ise o zaman $\overline{\mathcal{T}(R)}$ düzenlidir ve bu durumda $\forall v \in V(\overline{\mathcal{T}(R)})$ için $deg(v) = |Reg(R)|$.
2. $2 \notin \mathcal{Z}(R)$ ise o zaman $\Delta(\overline{\mathcal{T}(R)}) = \delta(\overline{\mathcal{T}(R)}) + 1$. Ayrıca $v \in \mathcal{Z}(R)$ ise $deg(v) = \Delta(\overline{\mathcal{T}(R)}) = |Reg(R)|$ ve $v \notin \mathcal{Z}(R)$ ise $deg(v) = \delta(\overline{\mathcal{T}(R)})$ 'dir [36].

Açıklama 3.3.66. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki şartlar doğrudur:

1. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ izole noktaya sahip değildir.
2. R bir tamlık bölgesi değilse o zaman $\overline{\mathcal{T}(R)}$, $|R| - 1$ dereceli bir noktaya sahip değildir.
3. $\overline{\mathcal{T}(R)}$, $d_{(a)} = |R| - 1$ olan bir $a \in R$ noktasını içerir gerek ve yeter koşul R bir cisimdir ve $a = -a$ olmasıdır [36].

Örnek 3.3.67. R değişmeli halkalarla $\overline{\mathcal{T}(R)}$ grafını inceleyelim:



Şekil 3. 54. Total ve total tümleyen graf örnekleri

$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_9$ ve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ halkalarının total tümleyen graflarında hiçbir izole nokta yoktur. Bu halkalar tamlık bölgesi olmadığı için hiçbir noktanın derecesi $|R| - 1$ değildir.

Teorem 3.3.68. R değişmeli bir halka olsun.

1. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bir yol graftır $\Leftrightarrow R \cong \mathbb{Z}_2$.
2. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bir tam graftır $\Leftrightarrow R$ bir tamlık bölgesidir ve $Kar(R) = 2$.
3. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bir yıldız graftır $\Leftrightarrow R \cong \mathbb{Z}_2$ veya \mathbb{Z}_3 .
4. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bir döngü graftır \Leftrightarrow ya $R \cong \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ ya da \mathbb{Z}_6 .
5. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ iki parçalı tam graftır \Leftrightarrow ya $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ olacak şekilde $Z(R)$, R ' nin bir ideali ya da $R \cong \mathbb{Z}_3$ ' tur [36].

Teorem 3.3.69. R değişmeli bir halka, $|Reg(R)| = 2$ ve $|Z(R)| = \alpha$ (sonsuz olabilir) olsun. O zaman, $1 \leq j \leq s$ için $3 \leq l_j \leq \alpha - 1$ ve $1 \leq i \leq r$ için $3 \leq k_i \leq \alpha - 2$ olduğunda;

$$\overline{\mathcal{T}(R)} = \begin{cases} C_{|R|} & , 2 \in Z(R) \text{ ve } \langle Z(R)^* \rangle \text{ bağlantılı ise} \\ \bigcup_{i=1}^r C_{k_i} & , 2 \in Z(R) \text{ ve } \langle Z(R)^* \rangle \text{ bağlantısız ise} \\ K_{1,2} \cup \bigcup_{j=1}^s C_{l_j} & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.19)$$

dir [36].

Teorem 3.3.70. $|Reg(R)| = 2$ olacak şekilde R değişmeli bir halka olsun. O halde burada $r(> 1)$, k ve s pozitif tam sayılardır. Ayrıca $R \cong \mathbb{Z}_2^r \times \mathbb{Z}_3$ ise $k = 6$ ve $R \cong \mathbb{Z}_2^s \times \mathbb{Z}_4$ veya $\mathbb{Z}_2^s \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ ise $k = 4$ ' tür.

$$\overline{\mathcal{T}(R)} = \begin{cases} C_{|R|} & , R \cong \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \text{ ise} \\ \frac{|R|}{k} C_k & , R \cong \mathbb{Z}_2^r \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2^s \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2^s \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle \text{ ise} \\ K_{1,2} & , R \cong \mathbb{Z}_3 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.20)$$

dir [36].

Önerme 3.3.71. R değişmeli bir halka olsun. O halde aşağıdaki şartlar doğrudur:

1. $Z(R)$, R ' nin bir ideali ise o zaman $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantılıdır.
2. R bir tamlık bölgesi ise o zaman $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantılıdır.
3. $|Reg(R)| = 1$ ise o zaman $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantılıdır $\Leftrightarrow R \cong \mathbb{Z}_2$.
4. $|Reg(R)| = 2$ ise o zaman $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantılıdır $\Leftrightarrow R \cong \mathbb{Z}_3$ veya \mathbb{Z}_4 veya $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ' tur [36].

Örnek 3.3.72.

- i. $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ise o zaman $\overline{\mathcal{T}(R)} = K_2 \cup K_2$ ve böylece $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantısızdır. Oysaki $K_2 = \langle Z(R)^* \rangle \subseteq \overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantılıdır.
- ii. $r \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere $R = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle \times \mathbb{Z}_2^r$ ise o halde $\overline{\mathcal{T}(R)}$ ' in bağlantılı olup olmadığı kontrol edilebilir fakat $\langle Z(R)^* \rangle$ tamamen bağlantısızdır [36].

Teorem 3.3.73. $r \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere $R \not\cong \mathbb{Z}_2^r$ ve R tamlık bölgesi olmayan değişmeli bir halka olsun. Eğer $\langle Z(R)^* \rangle \subseteq \overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantılı ve R aşağıdaki şartlardan herhangi birini sağlıyorsa o zaman $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantılıdır:

1. R ' nin sıfırdan farklı bir nilpotent elemanı vardır.
2. $Reg(R)$, $Z(R)^*$ ' deki eleman sayısından daha fazla eleman içerir.
3. $u = 1 + 1 + \dots$ olacak şekilde bir $u \in Z(R)^*$ elemanı vardır.
4. $x + y \in Z(R)^*$ olacak şekilde $x, y \in Reg(R)$ olmak üzere iki farklı eleman vardır.
5. R bir Noeter halkasıdır [36].

Lemma 3.3.74. R tamlık bölgesi olmayan değişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki koşullar doğrudur:

1. $Z(R)$, R ' nin bir ideali ise o zaman $diam(\overline{\mathcal{T}(R)}) = 2$.
2. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantılı ve $G_1 = \langle Reg(R) \cup \{0\} \rangle \subseteq \overline{\mathcal{T}(R)}$ ise o halde $diam(G_1) \leq 2$. Özellikle $diam(G_1) = 1 \Leftrightarrow$ bazı pozitif r tam sayıları için $R \cong \mathbb{Z}_2^r$.
3. $|N(R)| \geq 2$, $R_1 = Reg(R) \cup N(R)$ ve $G_2 = \langle R_1 \rangle \subseteq \overline{\mathcal{T}(R)}$ ise o zaman $diam(G_2) = 2$ ' dir [36].

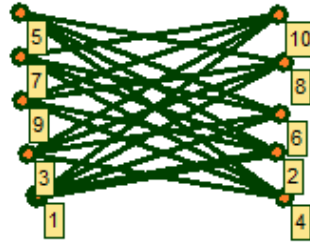
Sonuç 3.3.75. $\overline{\mathcal{T}(R)}$ ve $\langle \mathcal{Z}(R)^* \rangle \subseteq \overline{\mathcal{T}(R)}$ bağlantılı ise o zaman $2 \leq \text{diam}(\overline{\mathcal{T}(R)}) \leq \text{diam}(\langle \mathcal{Z}(R)^* \rangle) + 3$ tür [36].

Teorem 3.3.76. R değişmeli bir halka olsun. O zaman $gr(\overline{\mathcal{T}(R)}) \in \{3,4,6, \infty\}$. Ayrıca;

1. $gr(\overline{\mathcal{T}(R)}) = \infty \Leftrightarrow r$ doğal sayı olmak üzere R ya \mathbb{Z}_3 ya da \mathbb{Z}_2^r ' dir.
2. $gr(\overline{\mathcal{T}(R)}) = 6 \Leftrightarrow r$ doğal sayı olmak üzere $R = \mathbb{Z}_2^r \times \mathbb{Z}_3$.
3. $gr(\overline{\mathcal{T}(R)}) = 4 \Leftrightarrow \text{Reg}(R) + \text{Reg}(R) \subseteq \mathcal{Z}(R)$ ve herhangi üç eleman $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{Z}(R)$ için bazı $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3$ için $z_i + z_j \in \mathcal{Z}(R)$. Özellikle $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali ise o zaman $gr(\overline{\mathcal{T}(R)}) = 4 \Leftrightarrow R/\mathcal{Z}(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ve $2 \in \mathcal{Z}(R)$.
4. $gr(\overline{\mathcal{T}(R)}) = 3$, diğer durumlarda [36].

Lemma 3.3.77. $\mathcal{Z}(R)$, R ' nin bir ideali olmayacak şekilde R sonlu değişmeli bir halka olsun. O zaman $\overline{\mathcal{T}(R)}$ Euler graftır $\Leftrightarrow 2 \in \mathcal{Z}(R)$ ve $|\text{Reg}(R)|$ çifttir [36].

Örnek 3.3.78. $R = \mathbb{Z}_{10}$ lokal olmayan bir halka ise o zaman;



Şekil 3. 55. $\overline{\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{10})}$

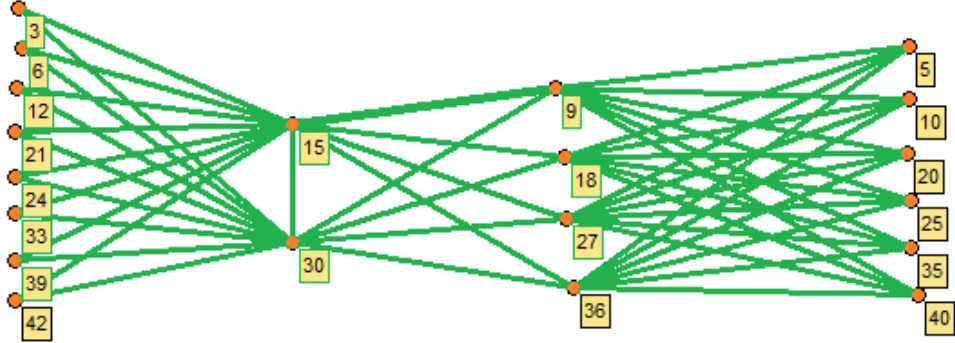
$\overline{\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{10})} = K_{5,5}$ ve böylece $\overline{\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{10})}$ bağlantılıdır. Teorem 3.3.76. (3)' den spesifik şartları sağlamaktadır. Dolayısıyla $gr(\overline{\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{10})}) = 4$ olmaktadır.

3.4. Nilradikal Graflar

Bu bölümde değişmeli halkaların sıfır- bölen graflarının alt grafi olan yeni bir graf yapısı ile benzer yapısal ve cebirsel özellikleri sunulmaktadır.

Tanım 3.4.1. R değişmeli bir halka olmak üzere $\Gamma_{Nil}(R)$ ile gösterilen nilradikal graf, noktaları R ' nin sıfırdan farklı nilpotentleri olan ve iki noktanın bir kenarla ancak ve ancak çarpımları 0 ise birbirine bağlandığı graftır [37].

Örnek 3.4.2. $R = \mathbb{Z}_{45}$ için sıfır bölen $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ ve nilradikal $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ graflar;



Şekil 3. 56. $\Gamma(\mathbb{Z}_{45})$



Şekil 3. 57. $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_{45})$

Teorem 3.4.3. Herhangi bir değişmeli R halkası için, $\Gamma_{Nil}(R)$ bağlantılıdır. Çapı 2' den küçük veya eşittir ve çevresi 3 veya ∞ ' dur [37].

Teorem 3.4.4. $R=\mathbb{Z}_n$ modüler halkası olmak üzere aşığıdaki tablo $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ için geçerlidir [37].

Tablo 3. 2. $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ çap ve çevre değerleri

n'nin çarpanları	Diameter	Girth
$p_1 p_2 \dots p_m$ öyle ki bütün p_i 'ler farklı asallar	-	-
$4k, \text{ebob}(2, k) = 1, p^2 \nmid k$, bütün p asalları için	0	∞
$9k, \text{ebob}(3, k) = 1, p^2 \nmid k$, bütün p asalları için	1	∞
p^2, p asal, $p > 3$	1	3
$2p^2, p$ asal, $p > 3$	1	3
$p^2 q^2, p$ ve q asal, $p \neq q$	1	3
$p^2 d, \text{ebob}(p, d) = 1, p$ asal, $p > 3, d$ aşıkâr olmayan herhangi bir küp ile bölünemez	1	3

$8k, ebob(8, k) = 1, p^2 \nmid k$, bütün p asalları için	2	∞
$p^l a, l \geq 3, p$ asal, $p > 2$	2	3
$2^l b, l \geq 3, b$ farklı asalların çarpımı olamaz	2	3

Sonuç 3.4.5. $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ çapı 0 ve çevresi ∞ ise, o zaman; tek nokta $\frac{n}{2}$ 'dir [37].

Sonuç 3.4.6. $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ çapı 1 ve çevresi ∞ ise, o zaman; iki farklı sıfır olmayan nilpotenti vardır ve toplamları n 'dir [37].

Sonuç 3.4.7. $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ çapı 2 ve çevresi ∞ ise, o zaman; iki uç noktanın toplamı n 'dir ve merkez nokta $\frac{n}{2}$ 'dir [37].

Teorem 3.4.8. $R = \mathbb{Z}_n$ olmak üzere; p ve q farklı asal sayılar ve n pozitif tam sayı ise, o zaman;

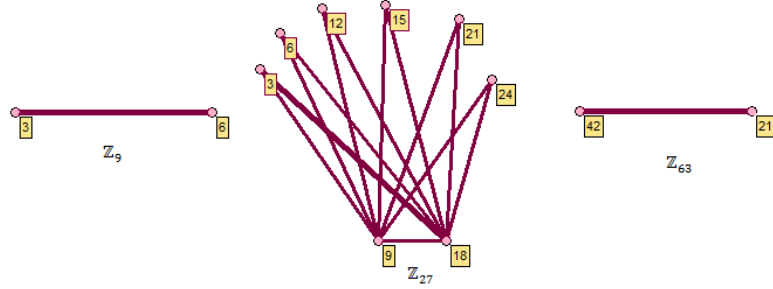
1. $\chi(\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)) = 0$, $n = pq$ ise;
2. $\chi(\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)) = p - 1$, $n = p^2$ ise;
3. $\chi(\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)) = pq - 1$, $n = p^2 q^2$ ise;
4. $\chi(\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)) = p$, $n = p^3$ ise;
5. $\chi(\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)) = p - 1$, $n = p^2 q$ ise [38].

Teorem 3.4.9. p ve q farklı asal sayılar ve n pozitif tam sayı ise, o zaman;

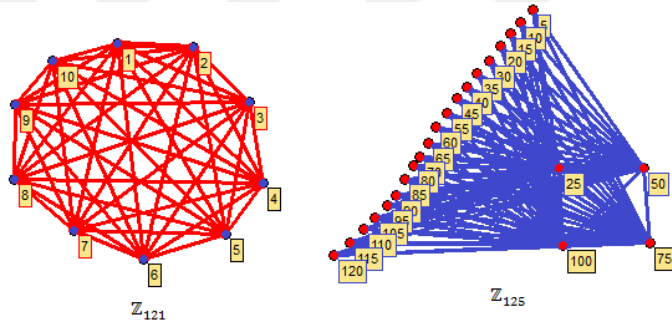
1. $n = pq$ olduğunda; $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ düzlemseldir.
2. $n = p^2$ olduğunda; $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$, $p \leq 5$ için düzlemseldir ve $p > 5$ için düzlemsel değildir.
3. $n = p^2 q$ olduğunda; $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$, $p \leq 5$ ve q herhangi bir asal sayısı için düzlemseldir.
4. $n = p^3$ olduğunda; $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$, $p < 5$ için düzlemseldir ve $p \geq 5$ için düzlemsel değildir.
5. $n = 4k$, $ebob(2, k) = 1$, herhangi bir p asalı ve herhangi bir k pozitif tam sayısı $p^2 \nmid k$ olduğunda; $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ düzlemseldir.

6. $n = 9k$, $ebob(3, k) = 1$, herhangi bir p asalı ve herhangi bir k pozitif tam sayısı $p^2 \nmid k$ olduğunda; $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ düzlemseldir [38].

Örnek 3.4.10. $R=\mathbb{Z}_n$ olmak üzere; $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ örnekleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 3. 58. $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ düzlemsel örnekleri



Şekil 3. 59. $\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)$ düzlemsel olmayan örnekleri

Teorem 3.4.11. p asalı için $n = p^2$ ise, o zaman; $\mathcal{E}(\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)) = 2p - 4$ ' tür [38].

Teorem 3.4.12. p ve q farklı asal sayılar olmak üzere $n = pq$ ise, o zaman; $\mathcal{E}(\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)) = 0$ ' dır [38].

Teorem 3.4.13. Bütün p ve q farklı asalları ve $n = p^2q$ için; $\mathcal{E}(\Gamma_{Nil}(\mathbb{Z}_n)) = 2p - 4$ ' tür [38].

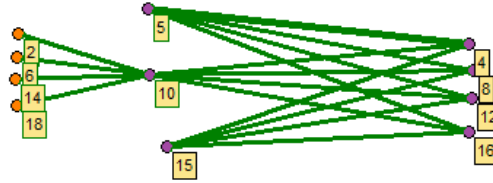
3.5. Nilradikal Olmayan Graflar

Bu bölümde değişmeli halkaların sıfır- bölen graflarının alt grafi olan yeni bir graf yapısı ve cebirsel özellikleri anlatılmaktadır.

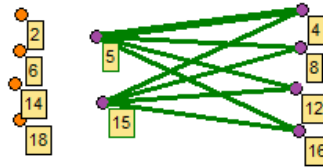
Tanım 3.5.1. R değişmeli bir halka olmak üzere $\Omega(R)$ ile gösterilen nilradikal olmayan graf, noktaları R ' nin nilpotent olmayan sıfır-bölenleri ve iki noktanın bir kenarla ancak ve ancak çarpımları 0 ise birbirine bağlandığı graftır [37].

R ' nin sıfırdan farklı her sıfır-böleni tam olarak $\Gamma_{Nil}(R)$ veya $\Omega(R)$ ' nin birinde noktadır.

Örnek 3.5.2. $R = \mathbb{Z}_{20}$ için sıfır-bölen $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ ve nilradikal olmayan $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ grafları;



Şekil 3. 60. $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$



Şekil 3. 61. $\Omega(\mathbb{Z}_{20})$

şeklindedir.

Tanım 3.5.3. Herhangi izole olmayan iki nokta arasında bir yol varsa graf hemen hemen bağlantılıdır [37].

Teorem 3.5.4. R herhangi değişmeli bir halka olmak üzere; $\Omega(R)$ hemen hemen bağlantılıdır ve bağlı bileşenin çapı 3'e eşit veya 3'den küçük ve çevresi 3, 4 veya ∞ olur [37].

$\Omega(R)$ ' nin bağlantılı kısmı $\Omega_c(R)$ olarak adlandırılır. Sıfır-bölen graflarla aynı çap ve çevre koşullarını sağladığı unutulmamalıdır. Sonlu, birimli halkaların nilradikal olmayan graflarının çap ve çevre yapısı sınıflandırılmaktadır. Bu nilradikal graflar için sunulan sınıflandırmadan daha genel bir sınıflandırmadır.

Lemma 3.5.5. R sonlu, birimli lokal halka ise, o zaman $\Omega_c(R)$ boştur [37].

Lemma 3.5.6. R üç veya daha fazla birimli, değişmeli halkanın direkt çarpımı ise, o zaman $\Omega_c(R)$ ' nin çapı 3 ve çevresi 3' tür [37].

Teorem 3.5.7. Sonlu, değişmeli, birimli bir R halkası için; $\Omega_c(R)$ boştur, çapı 1 ve çevresi ∞ , çapı 2 ve çevresi ∞ , çapı 2 ve çevresi 4 veya çapı 3 ve çevresi 3' tür [37].

Sonuç 3.5.8. Aşağıdaki tablo $\Omega_c(\mathbb{Z}_n)$ için geçerlidir [37].

Tablo 3. 3. $\Omega_c(\mathbb{Z}_n)$ Çap ve çevre değerleri

n'nin çarpanları	Diameter	Girth
p^m , p asal ve $m \in (\mathbb{Z})^+$ olduğunda	-	-
$2p^k$, p tek asal ve $k > 1$ olduğunda	2	∞
$p^k q^l$, p ve q farklı asallar, $k, l \in (\mathbb{Z})^+$, $p^k, q^l \neq 2$	2	4
$p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_c^{e_c}$, bütün p_i ' ler farklı $e_i \in (\mathbb{Z})^+$ ve $c \geq 3$	3	3

Sonuç 3.5.9. $\Omega_c(\mathbb{Z}_n)$ ' nin çapı 2 ve çevresi ∞ ise, o zaman star grafın merkezi $\frac{n}{2}$ 'dir [37].

Sonuç 3.5.10. $\Omega_c(\mathbb{Z}_n)$ ' nin çapı 2 ve çevresi ∞ ise, o zaman ya $n = 18$ ya da $N(\mathbb{Z}_n)$ ' nin çapı 2 ve çevresi 3' tür [37].

Örnek 3.5.11. $R = \mathbb{Z}_2[x, y, z]/\langle xy, yz, xz, x^3 \rangle$ olsun. O zaman; $diam(\Omega_c(R)) = 3$ ve $gr(\Omega_c(R)) = 4$. R 'nin sıfır-bölenlerinin kümesi $\{a_1x + a_2x^2 + \sum_{i=1}^m b_i y^i + \sum_{i=1}^n c_i z^i \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_2\}$. Sıfırdan farklı nilpotentleri x, x^2 ve $x + x^2$ ' dir. $\Omega(R)$ ' nin izole noktaları sadece nilpotentlere komşu olduğu için toplamda hem y hem de z ' nin sıfırdan farklı kuvvetlerini içeren sıfır-bölenleridir. $\Omega_c(R)$ ' de 4-döngülü bir örnek; $y - z - x + y - x^2 + z - y$. y' yi içeren herhangi bir polinom, yalnızca bir nilpotent elemana veya z' yi içeren bir polinomla bağlanabilir. Benzer şekilde, z' yi içeren herhangi bir polinom yalnızca bir nilpotent elemana veya y' yi içeren bir polinomla bağlanabilir. Öyleyse her döngü çift sayıda kenara sahip olmalıdır. Dolayısıyla $gr(\Omega_c(R)) = 4$.

$\Omega_c(R)$ ' de $x + x^2 + z$ ve $x + y$ arasında 3-yol vardır, yani $(x + x^2 + z) - (y) - (z) - (x + y)$. $\Omega_c(R)$ ' de hem $(x + x^2 + z)$ 'ye hem de $(x + y)$ 'ye bağlı bir nokta olamayacağından onların arasında en kısa yol yoktur. Yani; $diam(\Omega_c(R)) = 3$.

Teorem 3.5.12. Birimli, değişmeli, sonlu bir R halkası için, $\Omega(R)$ en az bir izole nokta içerir gerek ve yeter şart $N(R) \neq \{0\}$ ve $N(R) \neq Z(R)$, yani ancak ve ancak $\Omega(R), \Gamma(R)$ 'nin özel bir alt grafıdır [37].

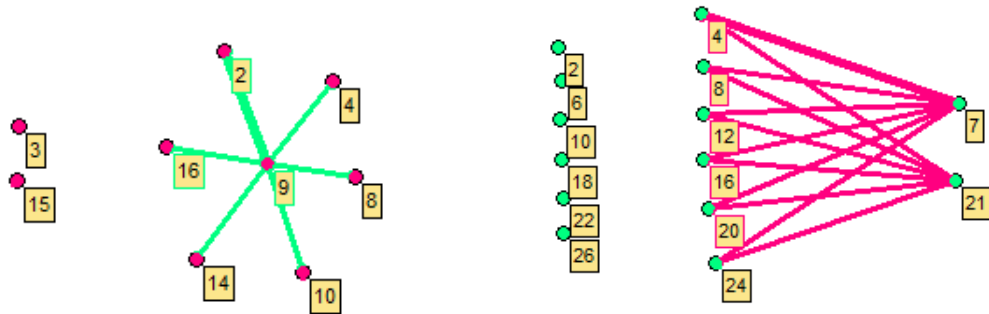
Teorem 3.5.13. R birimli, değişmeli, lokal olmayan sonlu bir halka olsun. O zaman; $\chi(\Omega(R)) = n$, R 'nin ayrışımındaki lokal halkaların sayısı n 'dir [37].

Teorem 3.5.14. R birimli, değişmeli, sonlu bir halka olsun. R , üç veya daha fazla lokal halkaların L_1, L_2, \dots, L_n direkt çarpımlarına izomorf olmadığı sürece $\Omega_c(R) \cup \{0\}$ çarpımsal olarak kapalıdır ve $\Gamma(L_i)$ bazı i 'ler için tam değildir [37].

Teorem 3.5.15. $R = \mathbb{Z}_n$ olmak üzere; p ve q farklı asal sayılar ve n pozitif tam sayı ise, o zaman;

1. $n = pq$ özellikle $p \geq 5$ ve $q \geq 3$ için, $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ düzlemsel değildir.
2. $n = p^2$ için, $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ düzlemseldir.
3. $n = p^3$ için, $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ düzlemseldir.
4. $n = 4k$, $ebob(2, k) = 1$ ve $p^2 \nmid k$, p bir asal ve k herhangi bir pozitif tam sayı olduğunda; $\Omega(\mathbb{Z}_n)$, $k \leq 6$ için düzlemseldir ve bütün $k > 6$ için düzlemsel değildir.
5. $n = 9k$, $ebob(3, k) = 1$ ve $p^2 \nmid k$, p bir asal ve k herhangi bir pozitif tam sayı olduğunda; $\Omega(\mathbb{Z}_n)$, $k \leq 4$ için düzlemseldir ve $k \geq 5$ için düzlemsel değildir.
6. $n = p^2q$ için, p herhangi bir asal sayı ve $q = 2$ ve 3 olduğunda, $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ düzlemseldir [38].

Örnek 3.5.16. $R = \mathbb{Z}_n$ olmak üzere; $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ örnekleri aşağıdaki gibidir.



$\Omega(\mathbb{Z}_{18})$

$\Omega(\mathbb{Z}_{28})$

Şekil 3. 62. Düzlemsel ve düzlemsel olmayan $\Omega(R)$ örnekleri

Lemma 3.5.17. p ve q asal sayılar olmak üzere; $n = pq$ ise, o zaman $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ ' de izole nokta yoktur [38].

Lemma 3.5.18. Herhangi bir p asalı için $n = p^3$ ise, o zaman $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ izole noktaya sahip değildir [38].

Gözlem 3.5.19. p ve q farklı asal sayılar için; $n = p^2q$ ise, o zaman $\Omega(\mathbb{Z}_n)$, $(p - 1)(q - 1)$ tane izole noktaya sahiptir [38].

Teorem 3.5.20. p asalı için $n = p^2$ veya $n = p^3$ ise $\mathcal{E}(\Omega(\mathbb{Z}_n)) = 0$ ' dir [38].

Teorem 3.5.21. p ve q farklı asal sayılar olmak üzere, $n = pq$ ise o zaman $\mathcal{E}(\Omega(\mathbb{Z}_n)) = 2\sqrt{(p - 1)(q - 1)}$ 'dir [38].

Gözlem 3.5.22. $n = p^2q$ ise o zaman;

1. $p = 2$ ve q herhangi bir asal sayı olmak üzere; $\mathcal{E}(\Omega(\mathbb{Z}_n)) = 2\sqrt{pq - 2}$
2. $p = 3$ ve q herhangi bir asal sayı olmak üzere; $\mathcal{E}(\Omega(\mathbb{Z}_n)) = 2\sqrt{pq + p(q - 2)}$
3. $p = 5$ ve q herhangi bir asal sayı olmak üzere; $\mathcal{E}(\Omega(\mathbb{Z}_n)) = 2\sqrt{2pq + 2p(q - 2)}$ ' dir [38].

[38]' da yapılan çalışmalarda $n = p^2q$ için bazı asallara bağlı kalarak $\mathcal{E}(\Omega(\mathbb{Z}_n))$ hesaplamaları yapılmıştır. Yaptığımız incelemeler sonucunda özel koşullar olmaksızın bütün asallar için genel bir hesaplama yapılmıştır.

Teorem 3.5.23. p ve q farklı asal sayılar olmak üzere, $n = p^2q$ ise o zaman $\mathcal{E}(\Omega(\mathbb{Z}_n)) = 2\sqrt{p(p - 1)(q - 1)}$ 'dir.

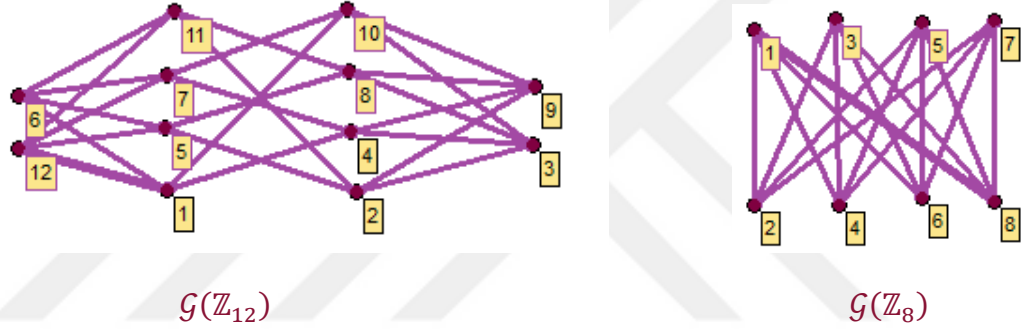
İspat. p ve q farklı asal sayılar olmak üzere, $n = p^2q$ olduğunda; $\Omega(\mathbb{Z}_n) = K_{\varphi(p^2), \varphi(q)} \cup I$ şeklinde olur. I izole nokta kümesi olmak üzere; $|I| = (p - 1)(q - 1)$ ' dir. Ayrıca $\Omega(\mathbb{Z}_n)$ ' nin karakteristik polinomu; $f(x) = x^{(p^2q-2)} \cdot (x^2 - p(p - 1)(q - 1))$. Dolayısıyla 0'dan farklı özdeğerleri $\pm\sqrt{p(p - 1)(q - 1)}$ olur. Böylece $\mathcal{E}(\Omega(\mathbb{Z}_n)) = 2\sqrt{p(p - 1)(q - 1)}$ elde edilir.

3.6. Birim Graflar

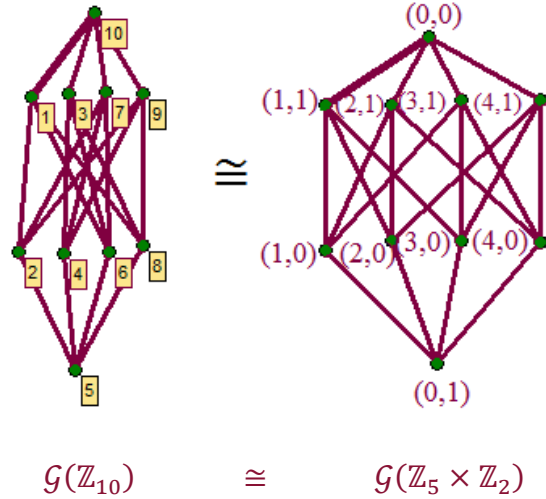
Bu bölümde değişmeli halkaların birim graflarının yapısal ve cebirsel özellikleri anlatılmaktadır.

Tanım 3.6.1. R bir halka ve $U(R)$, R halkasının birimsel elemanlarının kümesi olsun. R 'nin $\mathcal{G}(R)$ ile gösterilen birim grafi, R 'nin tüm elemanları grafın noktaları olmak üzere farklı x ve y noktaları komşudur ancak ve ancak $x + y \in U(R)$ olması koşuluyla elde edilen graftır.

Örnek 3.6.2. R halkası için verilen bazı özel halkaların birim grafları;



Şekil 3. 63. \mathbb{Z}_n halkasının bazı $\mathcal{G}(R)$ örnekleri



Şekil 3. 64. İki izomorf halkanın $\mathcal{G}(R)$ örnekleri

R ve S iki farklı halka olmak üzere; eğer $R \cong S$ ise o zaman $\mathcal{G}(R) \cong \mathcal{G}(S)$ olduğunu görmek kolaydır. \mathbb{Z}_{10} ve $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ halkalarını ele aldığımızda graf örneklerinde basitçe $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{10}) \cong \mathcal{G}(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2)$ olduğu görülmektedir.

Önerme 3.6.3. R sonlu bir halka olsun. O zaman R 'nin birim grafi için aşağıdaki şartlar sağlanmaktadır.

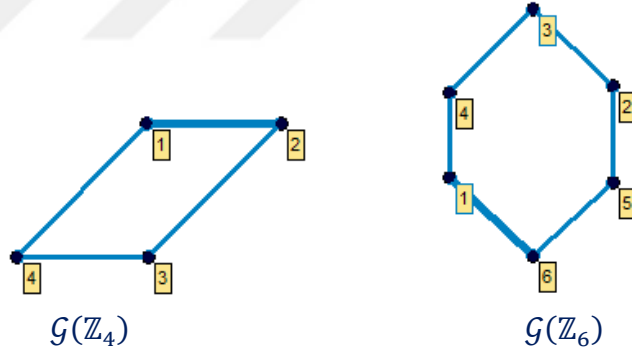
- i. Eğer $2 \notin U(R)$ ise o zaman $\mathcal{G}(R)$, $|U(R)|$ –düzenli graftır.
- ii. Eğer $2 \in U(R)$ ise o zaman $\forall x \in U(R)$ için $\deg(x) = |U(R)| - 1$ ve $\forall x \in R \setminus U(R)$ için $\deg(x) = |U(R)|$ elde edilir [39].

Teorem 3.6.4. R sonlu bir halka olsun. O zaman $\mathcal{G}(R)$ birim grafi bir döngü graftır ancak ve ancak R aşağıdaki halkalardan birine;

- i. \mathbb{Z}_4 ,
- ii. \mathbb{Z}_6 ,
- iii. $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$

izomorftur [39].

Örnek 3.6.5. $R = \mathbb{Z}_4$ ve $R = \mathbb{Z}_6$ halkalarının birim grafları incelenirse;



Şekil 3. 65. \mathbb{Z}_4 ve \mathbb{Z}_6 halkalarının $\mathcal{G}(R)$ örnekleri

$R \cong \mathbb{Z}_4$ veya \mathbb{Z}_6 olduğunda $\mathcal{G}(R)$, döngü graf olduğu açıktır.

Teorem 3.6.6. R bir halka olsun. O zaman $\mathcal{G}(R)$ birim grafi bir tam graftır gerek ve yeter şart R , $\text{Kar}(R) = 2$ olacak şekilde bir bölüm halkasıdır [39].

Teorem 3.6.7. R değişmeli bir halka ve S , R 'nin maksimal ideali öyle ki $|R/S| = 2$ olsun. O zaman $\mathcal{G}(R)$ iki parçalı graftır. Ayrıca, $\mathcal{G}(R)$ iki parçalı tam graftır ancak ve ancak R bir lokal halkadır [39].

Teorem 3.6.8. R bir halka, n pozitif bir tam sayı ve p tek asal sayı olsun. O halde; $\mathcal{G}(R) \cong K_1 \vee CP_{(p^n-1)} \Leftrightarrow R, p^n$ elemanlı bir cisimdir [39].

Tanım 3.6.9. R bir halka ve k pozitif bir tam sayı olsun. $u_1, u_2, \dots, u_k \in U(R)$ olduğunda $r = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ yazılabiliyorsa $r \in R$ elemanına $k - iyi$ denir. R 'nin her elemanı $k - iyi$ ise R halkası $k - iyi$ olarak adlandırılır. $u(R)$ ile gösterilen birim toplam sayısı şu şekilde verilir:

- Bazı $k \geq 1$ için $R, k - iyi$ ise $\min\{k \mid R, k - iyidir\}$;
- $\omega, \forall k$ için $R, k - iyi$ değilse ancak R 'nin her elemanı bazı k 'lar için $k - iyi$ ise (yani en azından $U(R)$ toplamsal olarak R 'yi ürettiğinde);
- ∞ aksi halde (yani $U(R)$ toplamsal olarak R 'yi üretmediğinde) [39].

Örnek 3.6.10. D bölüm halkası olsun. $|D| \geq 3$ ise o zaman $u(D) = 2$; oysa ki $|D| = 2$ ise, yani $D = \mathbb{Z}_2$ iki elemanlı bir cisimdir o zaman $u(\mathbb{Z}_2) = \omega$. Ayrıca $u(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \infty$.

Teorem 3.6.11. R bir halka olsun. O zaman $\mathcal{G}(R)$ birim grafi bağlantılıdır $\Leftrightarrow u(R) \leq \omega$ [39].

Sonuç 3.6.12. R bir halka olsun. $U(R), \mathcal{G}(R)$ 'nin baskın kümesi ise o halde $\mathcal{G}(R)$ birim grafi bağlantılıdır [39].

Örnek 3.6.13. R , bir $2 - iyi$ halka ise o zaman $U(R), \mathcal{G}(R)$ 'nin baskın kümesidir. Bunu gösterebilmek için $x \in R \setminus U(R)$ verilsin. $u_1, u_2 \in U(R)$ olduğunda $x = u_1 + u_2$ yazılabilir. Bu da x 'in u_1 'e komşu olduğu anlamına gelir ve dolayısıyla $U(R)$, baskın bir kümedir. Bu durumun tersinin genel olarak doğru olmaması dikkat çekicidir. Örneğin; $U(\mathbb{Z}_2) = \{1\}$, $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_2)$ 'nin baskın kümesidir. Fakat $u(\mathbb{Z}_2) = \omega$ olduğundan \mathbb{Z}_2 bir $2 - iyi$ halka değildir.

Önerme 3.6.14. R değişmeli bir halka olsun. Eğer R indirgenmiş bir halka ise o zaman $\mathcal{G}(R[x])$ birim grafi bağlantısız graftır [39].

Önerme 3.6.15. $|R| > 2$ olacak şekilde R bir cisim ve $n > 1$ olmak üzere $M_n(R)$, R üzerinde $n \times n$ matris halkası olsun. O zaman $\mathcal{G}(M_n(R))$ birim grafi bağlantılı graftır [39].

Sonuç 3.6.16. $|R| > 2$ olacak şekilde R bir cisim ve $n > 1$ olmak üzere $M_n(R)$, R üzerinde $n \times n$ matris halkası olsun. O zaman $diam(\mathcal{G}(M_n(R))) \leq 4$ tür [39].

Lemma 3.6.17. $Kar(R) = 2$ olan R cisim olmayacak şekilde R sonlu değişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki şartlar geçerlidir:

- i. R bölüm olarak \mathbb{Z}_2' ye sahip olamazsa ya da R, S tek maksimal ideali $|R/S| = 2$ olacak şekilde lokal bir halka ise o zaman $diam(\mathcal{G}(R)) = 2$.
- ii. R bölüm olarak \mathbb{Z}_2' ye sahip ve R bölüm olarak $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ ye sahip olamazsa ve R, S tek maksimal ideali $|R/S| = 2$ olacak şekilde lokal bir halka değilse o zaman $diam(\mathcal{G}(R)) = 3$.
- iii. R bölüm olarak $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ ye sahipse o zaman $diam(\mathcal{G}(R)) = \infty$ dur [39].

Sonuç 3.6.18. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman $diam(\mathcal{G}(R)) \in \{1, 2, 3, \infty\}$ [39].

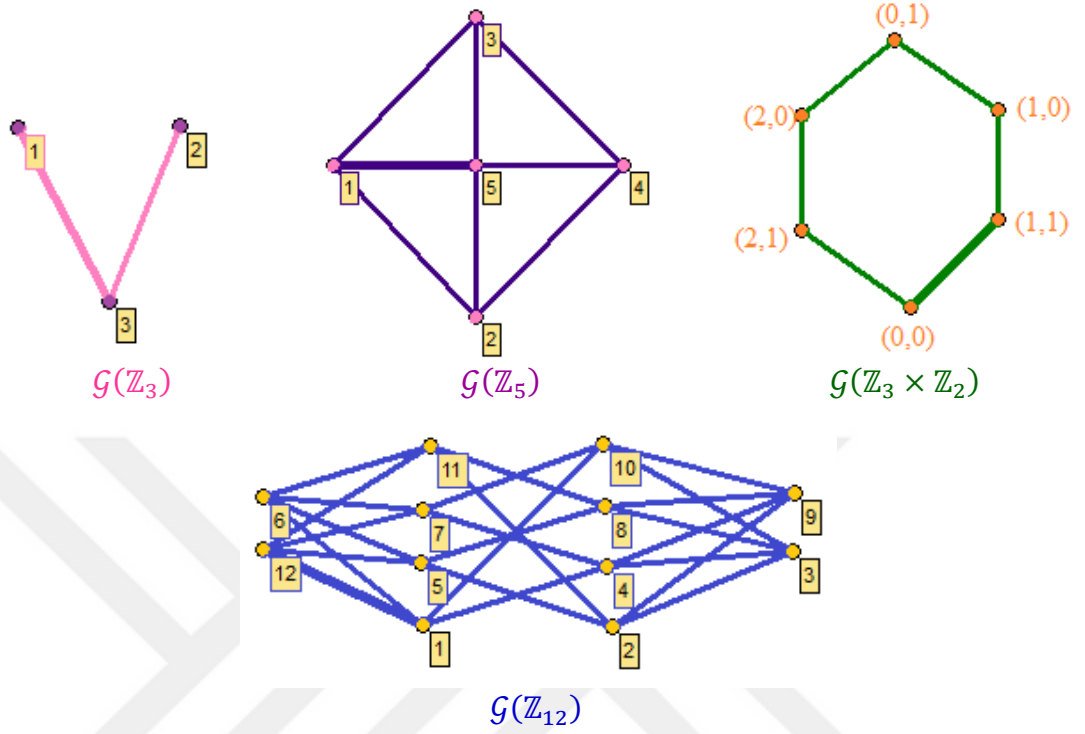
Teorem 3.6.19. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- i. $diam(\mathcal{G}(R)) = 1 \Leftrightarrow R, Kar(R) = 2$ olan bir cisimdir.
- ii. $diam(\mathcal{G}(R)) = 2 \Leftrightarrow$ aşağıdaki durumlardan biri meydana gelirse:
 - a) $R, Kar(R) \neq 2$ olan bir cisimdir;
 - b) R bir cisim değil ve R bölüm olarak \mathbb{Z}_2' ye sahip olamaz;
 - c) R, S maksimal ideali $|R/S| = 2$ olacak şekilde lokal bir halka ve $R \not\cong \mathbb{Z}_2$;
- iii. $diam(\mathcal{G}(R)) = 3 \Leftrightarrow R$ bölüm olarak \mathbb{Z}_2' ye sahip olması ve bölüm olarak $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ ye sahip olmaması ve R 'nin lokal bir halka olmaması durumunda.
- iv. $diam(\mathcal{G}(R)) = \infty \Leftrightarrow R$ bölüm olarak $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ ye sahiptir [39].

Örnek 3.6.20. $R = \mathbb{Z}$ ve $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkaları incelenirse $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ ve $\mathcal{G}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ birim graflarının her ikisi de bağlantılıdır ve $diam(\mathcal{G}(\mathbb{Z})) = diam(\mathcal{G}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) = \infty$. Dikkat edilirse \mathbb{Z} bölüm olarak \mathbb{Z}_2' ye sahip ve $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bölüm olarak $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ ye sahipken \mathbb{Z} bölüm olarak $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ ye sahip olamaz.

Önerme 3.6.21. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman $gr(\mathcal{G}(R)) \in \{3, 4, 6, \infty\}$ [39].

Örnek 3.6.22. Farklı R halkalarının birim grafları ele alınırsa;



Şekil 3. 66. $G(R)$ örnekleri

Yukarıda verilen graflardan; $gr(G(\mathbb{Z}_3)) = \infty$, $gr(G(\mathbb{Z}_5)) = 3$, $gr(G(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)) = 6$ ve $gr(G(\mathbb{Z}_{12})) = 4$ olduğu kolaylıkla görülmektedir.

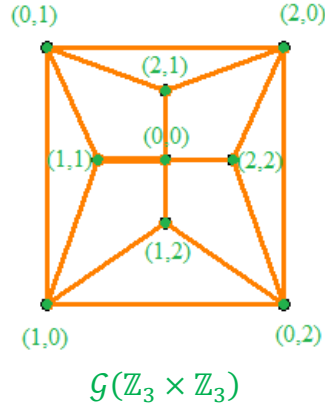
Bu nedenle $\forall n \in \{3,4,6, \infty\}$ için bir R halkası vardır öyle ki $gr(G(R)) = n$ olur.

Teorem 3.6.23. R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman $G(R)$ birim grafi düzlemseldir gerek ve yeter şart R aşağıdaki halkalardan birine izomorftur:

- \mathbb{Z}_5 veya $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$;
- $\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2}_{l \text{ tane}} \times S$, $l \geq 0$ ve $S \cong \mathbb{Z}_2$, $S \cong \mathbb{Z}_3$, $S \cong \mathbb{Z}_4$, $S \cong \mathbb{F}_4$ veya $S \cong$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}' \text{ tur [39].}$$

Örnek 3.6.24. $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ kabul edilirse birim grafi düzlemsel graftır.



Şekil 3. 67. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ düzlemsel graf

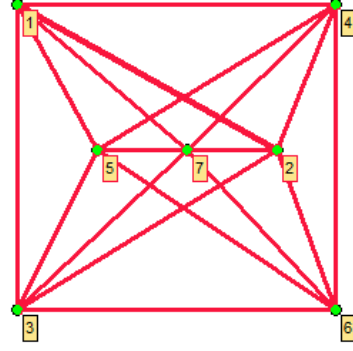
Teorem 3.6.25. $R, R \cong \mathbb{Z}_2$ ve $R \cong \mathbb{Z}_3$ olacak şekilde bir halka olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

- i. $\mathcal{G}(R)$, Hamilton graftır.
- ii. R halkası bölüm olarak $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sahip olamaz.
- iii. R halkası birimleri tarafından üretilir.
- iv. R 'nin birim toplam sayısı ω' den küçük veya eşittir.
- v. $\mathcal{G}(R)$ birim grafi bağlantılıdır [40].

Önerme 3.6.26. $n \geq 3$ olacak şekilde n noktalı bir G graf ve her nokta en az $n/2$ dereceye sahipse o zaman G Hamilton graftır [41].

Lemma 3.6.27. $|R| \geq 4$ olmak üzere R bir lokal halka olsun. O zaman $\mathcal{G}(R)$, Hamilton graftır [40].

Örnek 3.6.28. Her cisim lokal halkadır çünkü bu halkaların tek maksimal ideali $\{0\}$ 'dir. p asal sayı olmak üzere \mathbb{Z}_p halkası cisimdir. Dolayısıyla $|\mathbb{Z}_p| \geq 4$ olacak şekilde bir lokal halka seçerek birim grafini inceleyelim. $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_7$ olsun. O halde; $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_7)$ birim grafi, aşağıda görüldüğü üzere Hamilton graftır.



$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_7)$

Şekil 3. 68. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_7)$ Hamilton graf

Lemma 3.6.29. T , Hamilton birim grafına sahip bir halka ve F bir cisim olsun. Eğer $F \not\cong \mathbb{Z}_2$ ise o halde $\mathcal{G}(T \times F)$ birim grafı, Hamilton graftır [40].

Lemma 3.6.30. T , bir halka ve R, S tek maksimal ideali olacak şekilde bir lokal halka olsun. $\mathcal{G}(T \times R/S)$ birim grafı Hamilton ise o zaman $\mathcal{G}(T \times R)$, Hamilton graftır [40].

Lemma 3.6.31. $\forall R_i, S_i$ maksimal ideali olacak şekilde lokal halka olduğunda; $R \cong R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ olsun. Kabul edelim ki $R \not\cong \mathbb{Z}_3$ ve $\forall i$ için $1 \leq i \leq n$, $R_i/S_i \not\cong \mathbb{Z}_2$ vardır. O zaman; $\mathcal{G}(R)$ birim grafı, Hamilton graftır [40].

Önerme 3.6.32. G grafı X ve Y parça kümelerine sahip öyle ki $|X| = |Y| = n \geq 2$ olacak şekilde iki parçalı bir graf olsun. G' nin her noktası için $deg(x) > n/2$ ise o zaman G , Hamilton graftır [42].

Lemma 3.6.33. Her bir i için R_i, S_i maksimal ideali olacak şekilde lokal halka olduğunda; $R \cong R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n \times \mathbb{Z}_2$ olsun. $\forall i$ için $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde, $R_i/S_i \not\cong \mathbb{Z}_2$ ise o zaman; $\mathcal{G}(R)$ birim grafı, Hamilton graftır [40].

Lemma 3.6.34. R bir halka öyle ki $R \not\cong \mathbb{Z}_2$ ve $R \not\cong \mathbb{Z}_3$ olsun. R , bölüm olarak $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sahip olamazsa o halde $\mathcal{G}(R)$ birim grafı, Hamilton graftır [40].

4.BÖLÜM

\mathbb{Z}_n ÜZERİNDE TANIMLI FARKLI GRAF YAPILARI

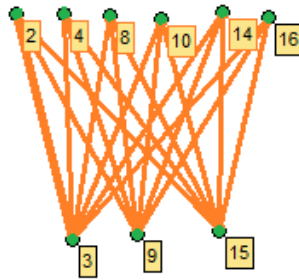
4.1. \mathbb{Z}_n Halkası Üzerinde Tanımlı Nilpotent ve Total Grafların Analogları ve Spektrumu

Bu bölümde R birimli, değişmeli bir halka olmak üzere literatürdeki tanımlamalardan farklı olarak R halkasının $Z(R)$, $N(R)$ ve $U(R)$ kümelerine bağlı olarak yeni graf tanımlamaları yapılmaktadır. Bu bölüm boyunca özel olarak $R = \mathbb{Z}_n$ halkası için elde edilen yeni graf yapılarının özellikleri, graf parametreleri ve spektral karakterizasyonu sunulmaktadır.

Tanım 4.1.1. R birimli değişmeli halka olmak üzere nilpotent-bölen grafi $N_D(\Gamma(R))$ ile gösterilsin. R 'nin sıfır-bölen $Z(R)$ ve nilpotent elemanları $N(R)$ grafın noktaları olmak üzere;

Her farklı $x, y \in Z(R) - N(R)$ için x ve y komşudur $\Leftrightarrow x \cdot y \in N(R)$ ' dir.

Örnek 4.1.2. $R = \mathbb{Z}_{18}$ halkası olmak üzere; $Z(R) = \{0,2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16\}$ ve $N(R) = \{0,6,12\}$ ' dir. $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_{18}))$ Şekil 4.1.' de verilmektedir.

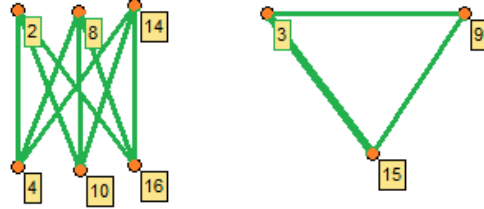


Şekil 4. 1. $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_{18}))$

Tanım 4.1.3. R birimli değişmeli halka olmak üzere nilpotent-total grafi $N_T(\Gamma(R))$ ile gösterilsin. R 'nin sıfır-bölen $Z(R)$ ve nilpotent elemanları $N(R)$ grafın noktaları olmak üzere;

Her farklı $x, y \in Z(R) - N(R)$ için x ve y komşudur $\Leftrightarrow x + y \in N(R)$ ' dir.

Örnek 4.1.4. $R = \mathbb{Z}_{18}$ halkası olmak üzere; $\mathcal{Z}(R) = \{0,2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16\}$ ve $N(R) = \{0,6,12\}$ ' dir. $N_T(\Gamma(\mathbb{Z}_{18}))$ grafi Şekil 4.2. ' de verilmektedir.



Şekil 4. 2. $N_T(\Gamma(\mathbb{Z}_{18}))$

Not 4.1.5. $n = \prod_{i=1}^k p_i^{m_i}$ olmak üzere $R = \mathbb{Z}_n$ halkası için $2^k - 2$ tane nilpotent elemanlar hariç sıfır-bölenlerin küme parçalanışına sahiptir. Gerçekten $\overline{p_i}$, $\overline{p_i p_j}, \dots, \overline{p_i p_j \dots p_k}$ kümeleri

$$\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} = \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k-1} \quad (4.1)$$

$$= 2^k - 2 \quad (4.2)$$

dir.

Bu bölümde $k \leq 3$ için \mathbb{Z}_n halkası alınarak graf yapıları ve böylece spektrumları elde edilmiştir.

Lemma 4.1.6. $R = \mathbb{Z}_n$ halkası için p_i 'ler asal sayı ve $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere; $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ olsun. Not 4.1.5.' den \mathbb{Z}_n 6 farklı nilpotent içermeyen sıfır-bölen kümelerine sahip olup bu kümeler $\overline{p_2 p_3} \setminus \overline{p_1 p_2 p_3}$, $\overline{p_1 p_2} \setminus \overline{p_1 p_2 p_3}$, $\overline{p_1 p_3} \setminus \overline{p_1 p_2 p_3}$, $\overline{p_1} \setminus (\overline{p_1 p_2} \cup \overline{p_1 p_3})$, $\overline{p_3} \setminus (\overline{p_1 p_3} \cup \overline{p_2 p_3})$ ve $\overline{p_2} \setminus (\overline{p_1 p_2} \cup \overline{p_2 p_3})$ biçimindedir ve

$$k_1 = |\overline{p_2 p_3} \setminus \overline{p_1 p_2 p_3}| = p_2^{m_2-1} p_3^{m_3-1} \phi(p_1^{m_1}) \quad (4.3)$$

$$k_2 = |\overline{p_1 p_2} \setminus \overline{p_1 p_2 p_3}| = p_1^{m_1-1} p_2^{m_2-1} \phi(p_3^{m_3}) \quad (4.4)$$

$$k_3 = |\overline{p_1 p_3} \setminus \overline{p_1 p_2 p_3}| = p_1^{m_1-1} p_3^{m_3-1} \phi(p_2^{m_2}) \quad (4.5)$$

$$k_4 = |\overline{p_1} \setminus (\overline{p_1 p_2} \cup \overline{p_1 p_3})| = p_1^{m_1-1} \phi(p_2^{m_2}) \phi(p_3^{m_3}) \quad (4.6)$$

$$k_5 = |\overline{p_3} \setminus (\overline{p_1 p_3} \cup \overline{p_2 p_3})| = p_3^{m_3-1} \phi(p_1^{m_1}) \phi(p_2^{m_2}) \quad (4.7)$$

$$k_6 = |\overline{p_2} \setminus (\overline{p_1 p_2} \cup \overline{p_2 p_3})| = p_2^{m_2-1} \phi(p_1^{m_1}) \phi(p_3^{m_3}) \quad (4.8)$$

dir.

İspat. $N(\mathbb{Z}_n) = \{p_1 p_2 p_3, 2p_1 p_2 p_3, \dots, (p_1^{m_1-1} p_2^{m_1-1} p_3^{m_1-1}) p_1 p_2 p_3\}$ ' dir. Tanımdan $V = \mathcal{Z}(\mathbb{Z}_n) - N(\mathbb{Z}_n)$ olduğu için grafın noktaları $\overline{p_i}$ ve $\overline{p_i p_j}$ ' lerden oluşmaktadır. $i \neq j \neq k$ için;

$$\overline{p_i} = \{p_i, 2p_i, 3p_i, \dots, (p_i^{m_i-1} p_j^{m_j} p_k^{m_k}) p_i\} \quad (4.9)$$

$$\overline{p_i p_j} = \{p_i p_j, 2p_i p_j, \dots, (p_i^{m_i-1} p_j^{m_j-1} p_k^{m_k}) p_i p_j\} \quad (4.10)$$

$$\overline{p_i p_j p_k} = \{p_i p_j p_k, 2p_i p_j p_k, \dots, (p_i^{m_i-1} p_j^{m_j-1} p_k^{m_k-1}) p_i p_j p_k\} = N(\mathbb{Z}_n) \quad (4.11)$$

Her bir $1 \leq i \neq j \neq k \leq 3$ değerleri için komşuluk kümeleri;

$p_i \sim p_j p_k$, $p_j \sim p_i p_k$, $p_k \sim p_i p_j$, $p_i p_j \sim p_i p_k$, $p_i p_j \sim p_j p_k$, $p_i p_k \sim p_j p_k$ ' dir.

Dolayısıyla 6 tane ayrık küme elde edilir. $\overline{p_i p_j p_k} \subset \overline{p_i p_j} \subset \overline{p_i}$ olduğu için $1 \leq i \neq j \neq k \leq 3$ olmak üzere kümelerin kardinalitesi;

$$\left| \overline{\bigcup p_i} \right| = \{ \overline{p_i} \setminus (\overline{p_i p_j} \cup \overline{p_i p_k} \setminus \overline{p_i p_j p_k}) \} \quad (4.12)$$

$$\left| \overline{\bigcup p_i p_j} \right| = \{ \overline{p_i p_j} \setminus \overline{p_i p_j p_k} \} \quad (4.13)$$

şeklindedir. (4.9), (4.10) ve (4.11)' deki eşitliklerden yararlanılarak;

$$\left| \overline{\bigcup p_i p_j} \right| = p_i^{m_i-1} p_j^{m_j-1} p_k^{m_k} - p_i^{m_i-1} p_j^{m_j-1} p_k^{m_k-1} = p_i^{m_i-1} p_j^{m_j-1} (p_k^{m_k} - p_k^{m_k-1}) \quad (4.14)$$

$$\left| \overline{\bigcup p_i p_j} \right| = p_i^{m_i-1} p_j^{m_j-1} \phi(p_k^{m_k}) \quad (4.15)$$

ve

$$\begin{aligned}
|\overline{\bigcup p_i}| &= (p_i^{m_i-1} p_j^{m_j} p_k^{m_k}) - (p_i^{m_i-1} p_j^{m_j-1} p_k^{m_k} + p_i^{m_i-1} p_j^{m_j} p_k^{m_k-1} - p_i^{m_i-1} p_j^{m_j-1} p_k^{m_k-1}) \\
&= p_i^{m_i-1} (p_j^{m_j} p_k^{m_k} - p_j^{m_j-1} p_k^{m_k} - p_j^{m_j} p_k^{m_k-1} + p_j^{m_j-1} p_k^{m_k-1}) \\
&= p_i^{m_i-1} (p_j^{m_j} (p_k^{m_k} - p_k^{m_k-1}) - p_j^{m_j-1} (p_k^{m_k} - p_k^{m_k-1})) \\
&= p_i^{m_i-1} ((p_j^{m_j} - p_j^{m_j-1}) \cdot (p_k^{m_k} - p_k^{m_k-1}))
\end{aligned}$$

$$|\overline{\bigcup p_i}| = p_i^{m_i-1} \cdot \phi(p_j^{m_j}) \cdot \phi(p_k^{m_k}) \quad (4.16)$$

elde edilir. Diğer küme kardinaliteleri de benzer olarak gösterilebilir.

Örnek 4.1.7. \mathbb{Z}_{30} halkası incelenirse $n = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ olmak üzere;

$$k_1 = |15k| = 3^0 \cdot 5^0 \cdot \phi(2^1) = 1$$

$$k_2 = |6k| = 2^0 \cdot 3^0 \cdot \phi(5^1) = 4$$

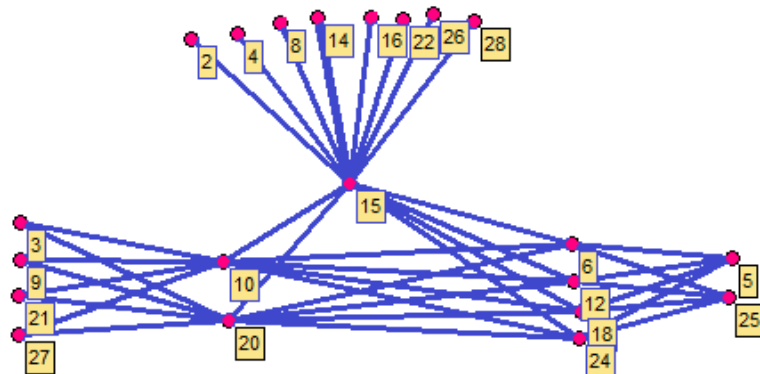
$$k_3 = |10k| = 2^0 \cdot 5^0 \cdot \phi(3^1) = 2$$

$$k_4 = |2k| = 2^0 \cdot \phi(3^1) \cdot \phi(5^1) = 8$$

$$k_5 = |5k| = 5^0 \cdot \phi(2^1) \cdot \phi(3^1) = 2$$

$$k_6 = |3k| = 3^0 \cdot \phi(2^1) \cdot \phi(5^1) = 4$$

kümelerinin elemanları Şekil 4.3.' de görülmektedir.



Şekil 4. 3. $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_{30}))$

Lemma 4.1.8. G bir graf olsun. Bu durumda

- i. $G \cong K_{m,n}$ olmak üzere $\text{spec}(K_{m,n}) = \left\{ \sqrt{\pm mn}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m+n-2} \right\}$,
- ii. $G \cong K_n$ olmak üzere $\text{spec}(K_n) = \left\{ (n-1), \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-1} \right\}$,
- iii. G, H iki graf olmak üzere $\text{spec}(G + H) = \text{spec}(G) \cup \text{spec}(H)$ ' dir [43].

Teorem 4.1.9. p_i 'ler asal sayı ve $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere; $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ ve \mathbb{Z}_n tam sayı halkası olsun. Bu durumda

$$p_{A(N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n)))}(x) = x^{\sigma-6}(x^6 - u_1x^4 - 2u_2x^3 + u_3x^2 - u_4) \quad (4.17)$$

dir. Burada σ ; $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ grafın nokta sayısı, ρ nilpotent elemanlar sayısı ve $S = \frac{p_1^{m_1-1}}{\phi(p_1^{m_1})} + \frac{p_2^{m_2-1}}{\phi(p_2^{m_2})} + \frac{p_3^{m_3-1}}{\phi(p_3^{m_3})}$ olmak üzere katsayılar 6. dereceden polinomun katsayıları $u_1 = \rho\phi(n)[3 + S]$, $u_2 = \rho^2\phi(n)$, $u_3 = \rho^2\phi^2(n)[3 + S]$, $u_4 = \rho^3\phi^3(n)$ ' dir.

İspat. $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ olmak üzere \mathbb{Z}_n halkası üzerinde $N_D(\Gamma(R))$ grafını alalım. Önce bu grafın noktalar kümesi $\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_n) - N(\mathbb{Z}_n)$ olmak üzere kardinalitesini bulalım. \mathbb{Z}_n halkasının nilpotent elemanların kümesi ve sıfır bölen elemanlar kümesi sırasıyla

$$N(\mathbb{Z}_n) = \{p_1p_2p_3, 2p_1p_2p_3, \dots, (p_1^{m_1-1}p_2^{m_1-1}p_3^{m_1-1})p_1p_2p_3\} \quad (4.18)$$

ve

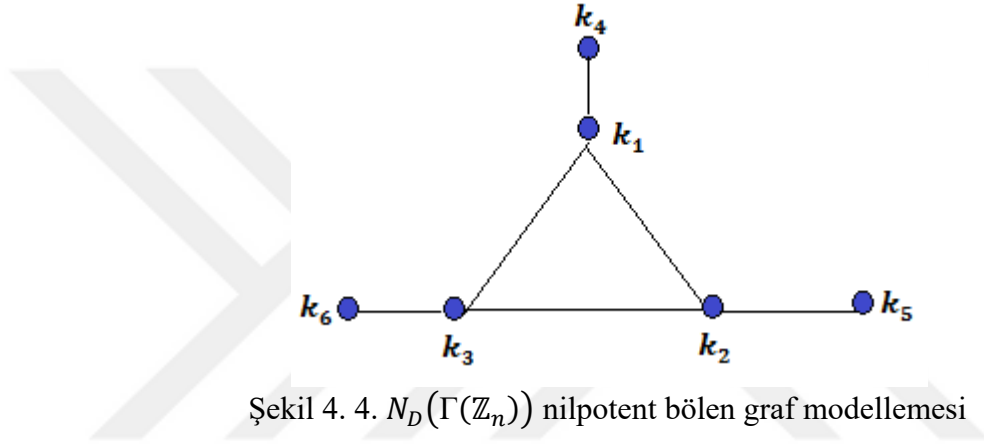
$$\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_n) = \overline{p_1} \cup \overline{p_2} \cup \overline{p_3} \quad (4.19)$$

dir. Şimdi V nokta kümesinin kardinalitesi için nilpotent bölen graf tanımından $x, y \in \mathcal{Z}(R) - N(R)$ olmak üzere $xy \in N(\mathbb{Z}_n)$ olacak biçimde noktaları belirleyelim. Bu durumda Lemma 4.1.6.' da verilen kümeler göz önüne alındığında;

$$\begin{aligned} |V| = & |\overline{p_1} \setminus (\overline{p_1p_2} \cup \overline{p_1p_3})| + |\overline{p_3} \setminus (\overline{p_1p_3} \cup \overline{p_2p_3})| + |\overline{p_2} \setminus (\overline{p_1p_2} \cup \overline{p_2p_3})| \\ & + |\overline{p_1p_2} \setminus \overline{p_1p_2p_3}| + |\overline{p_1p_3} \setminus \overline{p_1p_2p_3}| + |\overline{p_2p_3} \setminus \overline{p_1p_2p_3}| \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
&= p_1^{m_1-1} \phi(p_2^{m_2}) \phi(p_3^{m_3}) + p_2^{m_2-1} \phi(p_1^{m_1}) \phi(p_3^{m_3}) + p_3^{m_3-1} \phi(p_1^{m_1}) \phi(p_2^{m_2}) \\
&+ p_1^{m_1-1} p_2^{m_2-1} \phi(p_3^{m_3}) + p_1^{m_1-1} p_3^{m_3-1} \phi(p_2^{m_2}) + p_2^{m_2-1} p_3^{m_3-1} \phi(p_1^{m_1}) \quad (4.21)
\end{aligned}$$

bulunur. $|N(\mathbb{Z}_n)| = \rho$ ve $|V| = \sigma$ diyelim. Her $x \in \bar{p}_i \setminus (\bar{p}_i \bar{p}_j \cup \bar{p}_i \bar{p}_k)$ ($i \neq j \neq k$) ve her $y \in \bar{p}_i$ için $xy \in N(\mathbb{Z}_n)$ olduğundan $x \sim y$ ' dir, yani x, y noktası kenar oluşturur. Ayrıca her $x \in \bar{p}_i \bar{p}_j$ ve her $y \in \bar{p}_i \bar{p}_k$ ($i \neq j \neq k$) için de $x \sim y$ olur. Böylece $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ grafi Şekil 4.4.' de verildiği gibi 3 parçalı bir graf modelidir.



Şekil 4. 4. $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ nilpotent bölen graf modellemesi

verilen grafın komşuluk matrisi J bütün elemanları 1 olan matris olmak üzere;

$$A(N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n))) = \begin{bmatrix} 0_{k_1 \times k_1} & J_{k_1 \times k_2} & J_{k_1 \times k_3} & J_{k_1 \times k_4} & 0_{k_1 \times k_5} & 0_{k_1 \times k_6} \\ J_{k_2 \times k_1} & 0_{k_2 \times k_2} & J_{k_2 \times k_3} & 0_{k_2 \times k_4} & J_{k_2 \times k_5} & 0_{k_2 \times k_6} \\ J_{k_3 \times k_1} & J_{k_3 \times k_2} & 0_{k_3 \times k_3} & 0_{k_3 \times k_4} & 0_{k_3 \times k_5} & J_{k_3 \times k_6} \\ J_{k_4 \times k_1} & 0_{k_4 \times k_2} & 0_{k_4 \times k_3} & 0_{k_4 \times k_4} & 0_{k_4 \times k_5} & 0_{k_4 \times k_6} \\ 0_{k_5 \times k_1} & J_{k_5 \times k_2} & 0_{k_5 \times k_3} & 0_{k_5 \times k_4} & 0_{k_5 \times k_5} & 0_{k_5 \times k_6} \\ 0_{k_6 \times k_1} & 0_{k_6 \times k_2} & J_{k_6 \times k_3} & 0_{k_6 \times k_4} & 0_{k_6 \times k_5} & 0_{k_6 \times k_6} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

biçiminde bloklanır. Her bir i satırında k_i tane özdeş satır olduğundan (4.22) matrisinin $|V| - 6$ tane 0 özdeğeri vardır. Geriye kalan özdeğerler (4.22) matrisinin bölüm matrisinden elde edilir. Yani, bölüm matrisi Q olmak üzere her bir bloğun satır toplamları alınır

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & k_2 & k_4 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_3 & 0 & k_5 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 & 0 & 0 & k_6 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

bulunur. Böylece Q nun karakteristik polinomu

$$S = \frac{p_1^{m_1-1}}{\phi(p_1^{m_1})} + \frac{p_2^{m_2-1}}{\phi(p_2^{m_2})} + \frac{p_3^{m_3-1}}{\phi(p_3^{m_3})} \quad (4.24)$$

ve $\rho = \text{nilpotent eleman sayısı}$ olmak üzere; katsayıları

$$u_1 = \rho\phi(n)[3 + S], u_2 = \rho^2\phi(n), u_3 = \rho^2\phi^2(n)[3 + S], u_4 = \rho^3\phi^3(n) \quad (4.25)$$

olan

$$p_Q(x) = x^6 - u_1x^4 - 2u_2x^3 + u_3x^2 - u_4 \quad (4.26)$$

polinomudur. Böylece, $p_{N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n))}(x) = x^{\sum_{i=1}^6 k_i - 6} p_Q(x)$ olup istenen elde edilmiş olur.

Sonuç 4.1.10. $n = p^\alpha q^\beta$ ($\alpha, \beta \neq 0$) olmak üzere $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) \cong K_{p^{\alpha-1}\phi(q^\beta), q^{\beta-1}\phi(p^\alpha)}$ olup özdeğerleri $p^{\alpha-1}\phi(q^\beta) + q^{\beta-1}\phi(p^\alpha) - 2$ cebirsel katlı 0; ve sıfırdan farklı özdeğerleri de $\mp \sqrt{p^{\alpha-1}q^{\beta-1}\phi(n)}$ ' dir.

İspat. Bir önceki teoremin ispatına benzer olarak $n = p^\alpha q^\beta$ için graf iki parçalı tam graf olur. İki parçalı tam grafların öz değerleri iyi bilinir.

Sonuç 4.1.11. $n = p^\alpha$ ($\alpha \neq 0$) olmak üzere $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ ve $N_T(\Gamma(R))$ grafları noktalar kümesi boş küme olacağından boş graf olur.

Teorem 4.1.12. $R = \mathbb{Z}_n$ halkası için p_i 'ler asal sayı ve $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere; $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ ($p_3 > p_2 > p_1$) olsun. O halde; $p_1 = 2$ için $N_T(\Gamma(R)) \cong K_\rho + aK_{\rho, \rho}$, $\forall p_i \neq 2$ için $N_T(\Gamma(R)) \cong bK_{\rho, \rho}$ dir. Burada ρ nilpotent sayısı ve Lemma 4.1.6.' dan $a = \frac{|V| - k_1}{2\rho}$ ve $b = \frac{|V|}{2\rho}$, dir.

İspat. Kabul edelim ki $p_1 = 2$, $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ ($p_3 > p_2 > p_1$) ve Lemma 4.1.6.' da verilen ayırık sıfır-bölen kümelerini alalım. Her $x, y \in \overline{p_2 p_3} \setminus \overline{p_1 p_2 p_3}$ için $x + y \in N(R)$ olacağından $x \sim y$ 'dir. Gerçekten;

$x \in \overline{p_2 p_3} \setminus \overline{p_1 p_2 p_3}$ için $x = p_2 p_3 t_1$ olacak şekilde t_1 tek tam sayısı vardır. $y \in \overline{p_2 p_3} \setminus \overline{p_1 p_2 p_3}$ için $y = p_2 p_3 t_2$ olacak şekilde t_2 tek tam sayısı vardır.

$x + y = p_2 p_3 (t_1 + t_2)$ olup $(t_1 + t_2)$ çift tam sayı olduğu için $x + y \in \overline{p_1 p_2 p_3}$ olur ki bu da $x + y \in N(R)$ olduğunu gösterir. Bunu sağlayacak şekilde tam olarak $k_1 = p_2^{m_2-1} p_3^{m_3-1} \phi(p_1^{m_1})$ tane nokta olacağından bu noktalar kümesinden $K_{|N(R)|}$ elde edilir.

Diğer taraftan; $\forall x \in \overline{p_1 p_j} \setminus \overline{p_1 p_j p_k}$, ($2 \leq j \neq k \leq 3$) için $x + (p_1 p_2 p_3)t \in \overline{p_1 p_j} \setminus \overline{p_1 p_j p_k}$ ' dir. Böylece $x \in \overline{p_1 p_j} \setminus \overline{p_1 p_j p_k}$ ise $-x \in \overline{p_1 p_j} \setminus \overline{p_1 p_j p_k}$ ' dir. O halde;

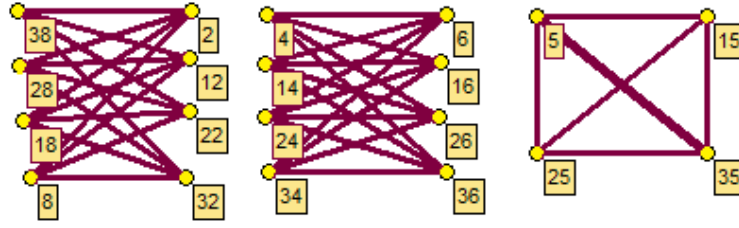
$$W = \{x + (p_1 p_2 p_3)t : t \in \mathbb{Z}\} \quad (4.27)$$

$$V = \{-x + (p_1 p_2 p_3)t : t \in \mathbb{Z}\} \quad (4.28)$$

kümelerini alalım. $\forall y \in W$ ve $\forall z \in V$ için $y + z \in N(R)$ olup böylece $\overline{p_1 p_j} \setminus \overline{p_1 p_j p_k}$ kümesi üzerinde parçalanışı W ve V olan iki parçalı tam graf elde edilir. Benzer olarak diğer $\overline{p_1} \setminus (\overline{p_1 p_2} \cup \overline{p_1 p_3})$, $\overline{p_2} \setminus (\overline{p_1 p_2} \cup \overline{p_2 p_3})$ ve $\overline{p_3} \setminus (\overline{p_1 p_3} \cup \overline{p_2 p_3})$ kümelerinden de iki parçalı tam ayırık graflar elde edilir. Böylece Lemma 4.1.6.' dan ve $a = \frac{|V| - k_1}{2\rho}$ olmak üzere $N_T(\Gamma(R)) \cong K\rho + aK_{\rho, \rho}$ elde edilir.

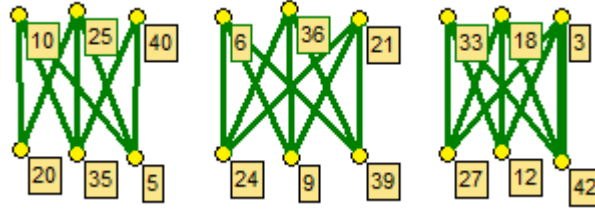
Kabul edelim ki $p_i \neq 2$ olsun. Yukarıdaki ispata benzer olarak bütün ayırık kümeler için $N_T(\Gamma(R)) \cong bK_{\rho, \rho}$ olduğunu görmek kolaydır.

Örnek 4.1.13. $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ ve $p_1 = 2$ için $n = 40$ olsun. Bu durumda $N_T(\Gamma(\mathbb{Z}_{40})) \cong K4 + 2K_{4,4}$ ' tür.



Şekil 4. 5. $N_T(\Gamma(\mathbb{Z}_{40}))$

$\forall p_i \neq 2$ ve $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ için $n = 45$ olsun. Bu durumda $N_T(\Gamma(\mathbb{Z}_{45})) \cong 3K_{3,3}$ ' tür.



Şekil 4. 6. $N_T(\Gamma(\mathbb{Z}_{45}))$

Teorem 4.1.14. $R = \mathbb{Z}_n$ halkası için p_i 'ler asal sayı ve $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere; $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ ($p_3 > p_2 > p_1$) olsun. O halde; $p_1 = 2$ için;

$$\text{spec}_A(N_T(\Gamma(R))) = \{(\rho - 1)^1, (-1)^{(\rho-1)}, (\rho)^a, (-\rho)^a, (0)^{2a(\rho-1)}\} \quad (4.29)$$

ve $p_i \neq 2$ için;

$$\text{spec}_A(N_T(\Gamma(R))) = \{(\rho)^b, (-\rho)^b, (0)^{2b(\rho-1)}\} \quad (4.30)$$

dir.

İspat. Lemma 4.1.6. ve Teorem 4.1.12.' den açıktır.

4.2. \mathbb{Z}_n Halkasıyla Bağlantılı Birim Grafların Yapıları ve Spektrumu

R birimli, değişmeli bir halka olmak üzere birim graf yapısı, literatürde ilk olarak Grimaldi tarafından \mathbb{Z}_n halkası üzerinde tanımlanmıştır [44]. Ashrafi ve arkadaşları tarafından rastgele bir R halkası için birim graf $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' den $\mathcal{G}(R)$ ' ye genelleştirilmiştir [39]. $\mathcal{G}(R)$ ' nin bağlantısallığı, kromatik indeksi, çapı, çevresi ve düzlemselliği üzerine çeşitli karakterizasyon sonuçları elde edilmiştir. Bu sonuçlara 3. Bölümde yer verilmektedir.

Bu bölümde R ' nin $\mathcal{G}(R)$ ile gösterilen birim grafi, R bir halka ve $U(R)$, R halkasının birimsel elemanlarının kümesi olsun. R ' nin tüm elemanları grafin noktaları olmak üzere farklı x ve y noktaları komşudur ancak ve ancak $x + y \in U(R)$ önermesi ile tanımlanır. Bu noktaya kadar $\mathcal{G}(R)$ ' nin üzerinde yapılan çalışmalarda çoğunlukla graf teorisinin değişmezlerine odaklanılmıştır. Birim grafların spektral karakterizasyonu üzerine herhangi bir çalışma bulunmamaktadır.

Bu bölüm boyunca özel olarak $R = \mathbb{Z}_n$ halkası için $\mathcal{G}(R)$ grafinin spektral karakterizasyonu sunulmaktadır.

Teorem 4.2.1. $r \geq 2$ için K_{p_1, p_2, \dots, p_r} çok parçalı tam grafların Laplasyan spektrumu $n = l_1 + l_2 + \dots + l_r$ olmak üzere;

$$\text{spec}_L(K_{l_1, l_2, \dots, l_r}) = \{0, n^{(r-1)}, (n - l_i)^{(l_i-1)}\} \quad (4.31)$$

dir [45].

Teorem 4.2.2. \mathbb{Z}_n tamsayılar halkası ve $|\mathcal{Z}(\mathbb{Z}_n)| = \rho$ olsun. O zaman;

- i. $n = p$ ($p \geq 7$) bir asal sayı ise o halde $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n) \cong K_{l_1, l_2, \dots, l_{\frac{p+1}{2}}}$ ' tur. Burada $l_1 = 1$ ve bütün $l_i = 2$ ($i = 2, \dots, \frac{p+1}{2}$)' dir. Dolayısıyla,
$$\text{spec}_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \left\{0, (p-2)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}, p^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}\right\} \quad (4.32)$$
- ii. $\alpha \geq 2$ ve $p > 2$ asal sayısı için $n = p^\alpha$ ise o halde $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n) \cong K_{l_0, l_1, \dots, l_{p-1}}[\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{p-1}]$ ' tur. Öyle ki $\mathcal{W}_0 \cong p^{\alpha-1}K_1$, $\mathcal{W}_i \cong K_{p^{\alpha-1}}$ ($i \geq 1$). Dolayısıyla $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' in Laplasyan spektrumu,

$$\text{spec}_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \left\{ 0, (p^\alpha - 2p^{\alpha-1})\binom{p-1}{2}, \phi(n)^{(p^\alpha-p)}, (p^\alpha)\binom{p-1}{2} \right\} \quad (4.33)$$

dir.

İspat.

- i. p bir asal sayı olsun. O halde $U(\mathbb{Z}_n)$ ' nin sıfırdan farklı her elemanı birimseldir. Çünkü bütün $0_{\mathbb{Z}_n} \neq x \in \mathbb{Z}_n$, $x + 0_{\mathbb{Z}_n} = x \in U(\mathbb{Z}_n)$ için $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' nin noktaları \mathbb{Z}_n ' nin bütün elemanlarıdır. Dolayısıyla $0_{\mathbb{Z}_n}$, $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' de her noktaya komşu olan tek noktadır. Buna ek olarak \mathbb{Z}_n ' deki her x birimi sadece bir toplamsal ters $-x$ ' e (ayrıca birim) sahiptir, yani $x \sim -x$ ' dir. Bu nedenle her bölümün nokta çiftlerinden oluştuğu ve farklı bölümlerdeki elemanların toplamının da birim olduğu $\frac{p-1}{2}$ tane bölünme oluşur. Böylece $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' nin farklı bölümlerindeki tüm noktalar komşu olmak zorundadır. Dolayısıyla $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n) \cong K_{l_1, l_2, \dots, l_{\frac{p-1}{2}}}$ elde edilir.

Teorem 4.2.1.' den Laplasyan spektrumunu görmek kolaydır.

- ii. $n = p^\alpha$ olsun. $U(\mathbb{Z}_n) = \{x \in \mathbb{Z}_n : \text{ebob}(x, n) = 1\}$ kümesi vardır. O halde $|U(\mathbb{Z}_n)| = \phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ ve dolayısıyla $|Z(\mathbb{Z}_n)| = p^{\alpha-1}$ ' dir. $Z(\mathbb{Z}_n)$ ' deki her x, y çifti için $x + y \in Z(\mathbb{Z}_n)$ olduğundan dolayı $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' de $x \sim y$ ' dir. Bu nedenle $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' deki ilk bölüm indirgenmiş alt graf olarak $p^{\alpha-1}$ - izole noktadan oluşur. Bu bölüme \mathcal{W}_0 diyelim.

Buna ek olarak $n = p^\alpha$ olduğunda $U(\mathbb{Z}_n) = \cup_{1 \leq i \leq p-1} \mathcal{W}_i$ elde edilir öyle ki

$\mathcal{W}_i = \{i + pk : k \in \mathbb{Z}\}$. Dikkat edilirse $U(\mathbb{Z}_n)$ ' nin $p - 1$ ayrık kümesi vardır.

$x \in \mathcal{W}_i$ olsun. x ' in toplamsal tersi \mathcal{W}_{p-i} kümesindedir. Yani $y \in \mathcal{W}_{p-i}$ için $x +$

$y \in Z(\mathbb{Z}_n)$ ' dir, dolayısıyla $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' de $x \sim y$ ' dir. Diğer taraftan, $x, y \in \mathcal{W}_i$ için

$x + y \in U(\mathbb{Z}_n)$ ' dir, $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' de $x \sim y$ ' dir ve dolayısıyla \mathcal{W}_i ' deki noktalar

indirgenmiş bir alt graf olarak klikleri (ayrıca tam graf) oluşturur. Eğer $x \in \mathcal{W}_i$

ve $y \in \mathcal{W}_j$ ($j \neq p - i$) ise, $x + y \in U(\mathbb{Z}_n)$ ' dir. Dolayısıyla \mathcal{W}_i ' deki noktalar

\mathcal{W}_{p-i} haricinde \mathcal{W}_j ' deki noktalara komşudur. Bu nedenle $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$, indirgenmiş

bir alt graf olarak $p - 1$ tane $K_{|\mathcal{W}_i|}$ graf içerir. Son olarak $x \in Z(\mathbb{Z}_n)$, $y \in \mathcal{W}_i$

için $x + y \in U(\mathbb{Z}_n)$ olduğundan \mathcal{W}_0 ' daki her x noktası \mathcal{W}_i bölümündeki her

noktaya komşudur. Bu nedenle $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$, tam p -parçalı graftır, yani $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n) \cong$

$K_{l_0, l_1, \dots, l_{p-1}}[\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{p-1}]$. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' nin Laplasyan matrisi aşağıdaki şekilde bloklanabilir. $u = p^{\alpha-1}$ ve $X = L(K_{p^{\alpha-1}}) + (p^\alpha - 2p^{\alpha-1})I$ olduğunda;

$$L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \begin{bmatrix} \phi(n)I_u & -J_u & -J_u & -J_u & \cdots & -J_u \\ -J_u & X_u & 0_u & -J_u & \cdots & -J_u \\ -J_u & 0_u & X_u & -J_u & \cdots & -J_u \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -J_u & \cdots & \cdots & \cdots & X_u & 0_u \\ -J_u & \cdots & \cdots & \cdots & 0_u & X_u \end{bmatrix}_{p \times p} \quad (4.34)$$

dir.

(4.34)' ün spektrumu bütün köşegen blok matrislerinin spektrumlarından oluşur.

$spec_L(K_{p^{\alpha-1}}) = \{0, (p^{\alpha-1})^{(p^{\alpha-1}-1)}\}$ ve $spec((p^\alpha - 2p^{\alpha-1})I) = \{(p^\alpha - 2p^{\alpha-1})^{(p^{\alpha-1})}\}$ olduğu için,

$$spec(X) = \{\phi(n)^{(p^{\alpha-1}-1)}, (p^\alpha - 2p^{\alpha-1})^{(1)}\} \quad (4.35)$$

dir. Bu nedenle (4.34)' ün spektrumu, $\phi(n)I_u$ matrisinin spektrumu ile

$$\{\phi(n)^{(p^\alpha-p)}, (p^\alpha - 2p^{\alpha-1})^{(p-1)}\} \quad (4.36)$$

çoklu kümesinden oluşur. Kalan özdeğerler (4.34)' ün bölüm matrisinden gelir.

Çünkü matris 2 sınıflı eşit bölüme sahiptir. Bu yüzden

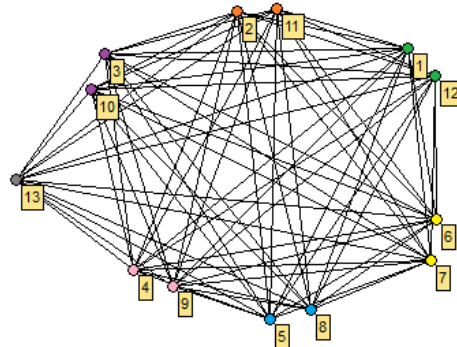
$$\mathcal{Q}_{L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n))} = \begin{bmatrix} \phi(n) & -\phi(n) \\ -p^{\alpha-1} & p^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

ve (4.37)' nin karakteristik polinomu $x(x - \phi(n) - p^{\alpha-1})$ ' dir. Dolayısıyla

$$spec_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \{0^{(1)}, \phi(n)^{(p^\alpha-p)}, (p^\alpha - 2p^{\alpha-1})^{(\frac{p-1}{2})}, (p^\alpha)^{(\frac{p-1}{2})}\} \quad (4.38)$$

elde edilir.

Örnek 4.2.3. $n = 13$ olsun. O halde $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{13}) \cong K_{1,2,2,2,2,2}$ olur. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{13})$ 'ün graf yapısı Şekil 4.7.' de verilmektedir.



Şekil 4. 7. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{13})$

$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{13})$ ' ün Laplasyan matrisi aşağıdaki şekildedir.

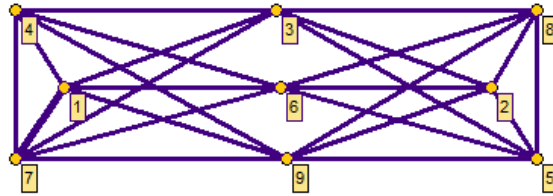
$$L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{13})) = \begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 11 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla matristen yapılan hesaplamalarla $spec_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{13})) = \{0, 11^6, 13^6\}$ elde edilir.

Örnek 4.2.4. $n = 3^2$ ise o halde $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_9) \cong K_{3,3,3}[3K_1, K_3, K_3]$ ' tur. O halde $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_9)$ ' nin Laplasyan spektrumu;

$$spec_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_9)) = \{0, 3^1, 6^6, 9^1\}$$

olur. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_9)$ ' nin graf yapısı Şekil 4.8.' de verilmektedir.



Şekil 4. 8. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_9)$

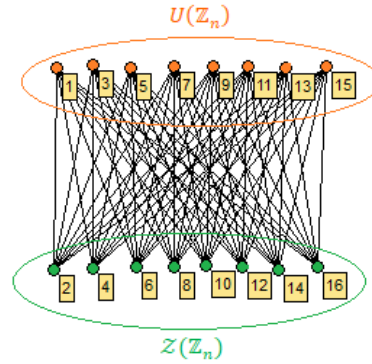
Sonuç 4.2.5. $\alpha \geq 2$ ve $p = 2$ asal sayısı için $n = p^\alpha$ ise o halde $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n) \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ ' tur.

Dolayısıyla $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' in Laplasyan spektrumu,

$$spec_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \left\{ 0^{(1)}, \left(\frac{n}{2}\right)^{(n-2)}, (n)^{(1)} \right\} \quad (4.39)$$

dir.

Örnek 4.2.6. $n = 2^4$ olsun. Sonuç 4.2.5.' den $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{16}) \cong K_{8,8}$ ' tur.



Şekil 4. 9. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{16})$

$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{16})$ ' in Laplasyan spektrumu; $spec_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{16})) = \{0^{(1)}, (8)^{(14)}, (16)^{(1)}\}$ elde edilir.

Teorem 4.2.7. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ birim graf öyle ki p ve q asal sayı olmak üzere $n = p^\alpha q^\beta$ olsun.

Eğer $p = 2$ ise o zaman $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' nin Laplasyan spektrumu;

$$spec_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) =$$

$$\left\{ 0^{(1)}, \phi(n)^{(n-2q)}, (2^{\alpha-1}q^\beta)^{(q-1)}, (2^{\alpha-1}(q^\beta - 2q^{\beta-1}))^{(q-1)}, 2\phi(n)^{(1)} \right\} \quad (4.40)$$

dir.

İspat. $n = 2^\alpha q^\beta$ olsun. Böylece 4 ayrık nokta kümesine sahip oluruz öyle ki $P_1 = N(\mathbb{Z}_n)$, $P_2 = U(\mathbb{Z}_n)$, $P_3 = \bar{p} \setminus \bar{p}q$ ve $P_4 = \bar{q} \setminus \bar{p}q'$ dir. $|P_1| = p^{\alpha-1}q^{\beta-1}$ ve $|P_2| = \phi(n)$. P_1 kümesinden

$$\begin{aligned} |\bar{p} \setminus \bar{p}q| &= |\bar{p}| - |\bar{p}q| \\ &= p^{\alpha-1}q^\beta - p^{\alpha-1}q^{\beta-1} \\ &= p^{\alpha-1}\phi(q^\beta) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $|\bar{q} \setminus \bar{p}q| = q^{\beta-1}\phi(p^\alpha)$. Ayrıca $|P_2| = |P_3|$ ve $|P_1| = |P_4|$ (sırasıyla $u = |P_1|$ ve $v = |P_2|$ diyelim). Çünkü $p = 2$ için $2^\alpha - 2^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}$ dir.

Şimdi $x \in P_1$ olsun. Eğer $y \in P_2$ ise $x + y \in P_2$ ' dir bu nedenle $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' de $x \sim y$ ' dir. Ayrıca $y \in P_3$ veya $y \in P_4$ ise $x + y$ çifttir, yani $ebob(x + y, n) \neq 1$ ve $x \not\sim y$ ' dir. O halde P_1 ' deki noktalar sadece P_2 ' deki noktalara komşudur.

$x \in P_4$ olsun. Eğer $y \in P_3$ ise $x \sim y$ ' dir çünkü $ebob(x + y, n) = 1$. Benzer şekilde P_4 ' deki noktalar sadece P_3 ' deki noktalara komşudur. Önerme 3.6.3.' den biliyoruz ki $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$,

v -regüler graftır. Dolayısıyla P_2 bölümünden P_3 bölümüne komşu noktaların sayısı $v - u$ dur. Bu nedenle $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' nin Laplasyan matrisi şu şekilde bloklanabilir;

$$L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = M + \text{diag}(vI_u, vI_v, vI_v, vI_u) \quad (4.41)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0_{u \times u} & 0_{u \times u} & 0_{u \times v} & -J_{u \times v} \\ 0_{u \times u} & 0_{u \times u} & -J_{u \times v} & 0_{u \times v} \\ 0_{v \times u} & -J_{v \times u} & 0_{v \times v} & X_{v \times v} \\ -J_{v \times u} & 0_{v \times u} & X_{v \times v} & 0_{v \times v} \end{bmatrix} \text{ ve } X, \text{ elemanları } u' \text{ nun sayısında } 0 \text{ aksi takdirde}$$

-1 olan $v \times v$ tipinde bir matristir. Şimdi X ' in yapısını genişletelim.

$$X = \begin{bmatrix} -J_{u \times u} & -J_{u \times u} & -J_{u \times u} & \cdots & \cdots & 0_{u \times u} \\ -J_{u \times u} & -J_{u \times u} & -J_{u \times u} & \cdots & 0_{u \times u} & -J_{u \times u} \\ -J_{u \times u} & -J_{u \times u} & -J_{u \times u} & \cdots & 0_{u \times u} & -J_{u \times u} \\ -J_{u \times u} & \cdots & \ddots & -J_{u \times u} & -J_{u \times u} & -J_{u \times u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{u \times u} & -J_{u \times u} & -J_{u \times u} & \cdots & \cdots & -J_{u \times u} \end{bmatrix}_{v \times v}$$

Burada X matrisinin her bir satırında $u \times u$ tipinde $(q - 1)$ tane matris bulunmaktadır.

Yani, $\frac{v}{(q-1)} = u$ olur.

P_2 ve P_3 ' ü $x_i \in P_2$ ve $y_i \in P_3$ için aşağıdaki kümelerin ayrık birleşimleri olarak düşünelim.

$$P_2 = \bigcup_{i=1}^{\phi(2q)} \{x_i + (2q)k : 0 \leq k \leq u - 1\} \quad (4.42)$$

$$P_3 = \bigcup_{i=1}^{\phi(2q)} \{y_i + (2q)k : 0 \leq k \leq u - 1\} \quad (4.43)$$

Herhangi bir $x \in \{x_i + (2q)k\}$ için $x \equiv t \pmod{q}$ olsun. O zaman en az bir $y \in \{y_i + (2q)k\}$ vardır öyle ki $y \equiv q - t \pmod{q}$. Bu durumda $q|x + y$ dir. Dolayısıyla P_2 ' de, P_3 ' e komşu olmayan sadece bir bölüm vardır. Yani, $\{x_i + (2q)k\}$ ' deki elemanlar P_3 ' deki diğer bölümlerin her bir elemanına komşudur. Şimdi $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' nin Laplasyan matrisini hatırlayalım. M ' nin karakteristik polinomu özdeş satırlar nedeniyle x^{v-2q} çarpanına sahiptir. M matrisinin bölüm matrisi;

$$Q_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 0 & -v & 0 \\ 0 & -u & 0 & u - v \\ -u & 0 & u - v & 0 \end{bmatrix}$$

olur ve

$$P_{Q_M}(x) = (x - v). (x + v). (x - u). (x + u) \quad (4.44)$$

elde edilir. Dolayısıyla X matrisi $(q - 1)$ tane blok matrise sahip olduğu için;

$$P_M(x) = x^{v-2q}. (x - v). (x + v). (x - u)^{(q-1)}. (x + u)^{(q-1)} \quad (4.45)$$

elde edilir.

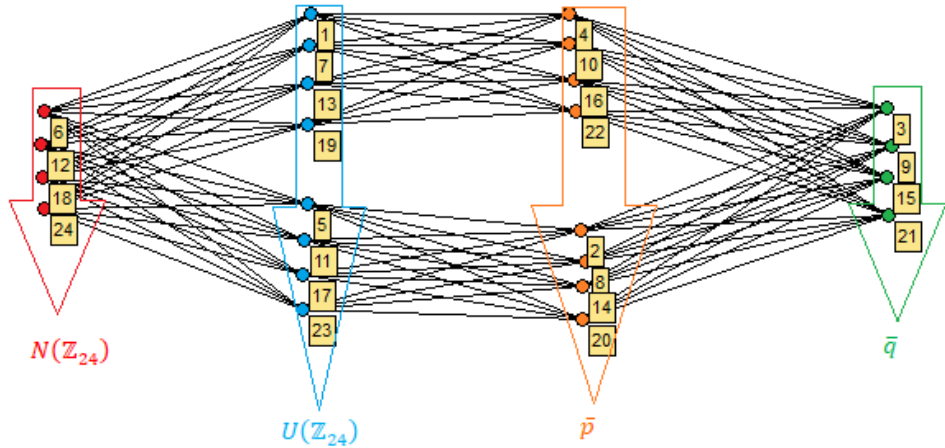
Dolayısıyla (4.45)' den ve $u = p^{\alpha-1}q^{\beta-1}$ ve $v = \phi(n)$ olduğu için;

$$\text{spec}_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \left\{ 0^{(1)}, \phi(n)^{(n-2q)}, (2^{\alpha-1}q^\beta)^{(q-1)}, (2^{\alpha-1}(q^\beta - 2q^{\beta-1}))^{(q-1)}, 2\phi(n)^{(1)} \right\} \quad (4.46)$$

elde edilir.

O halde $L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n))$ ' nin spektrumu iki matrisin özdeğerlerinin toplamından oluşur.

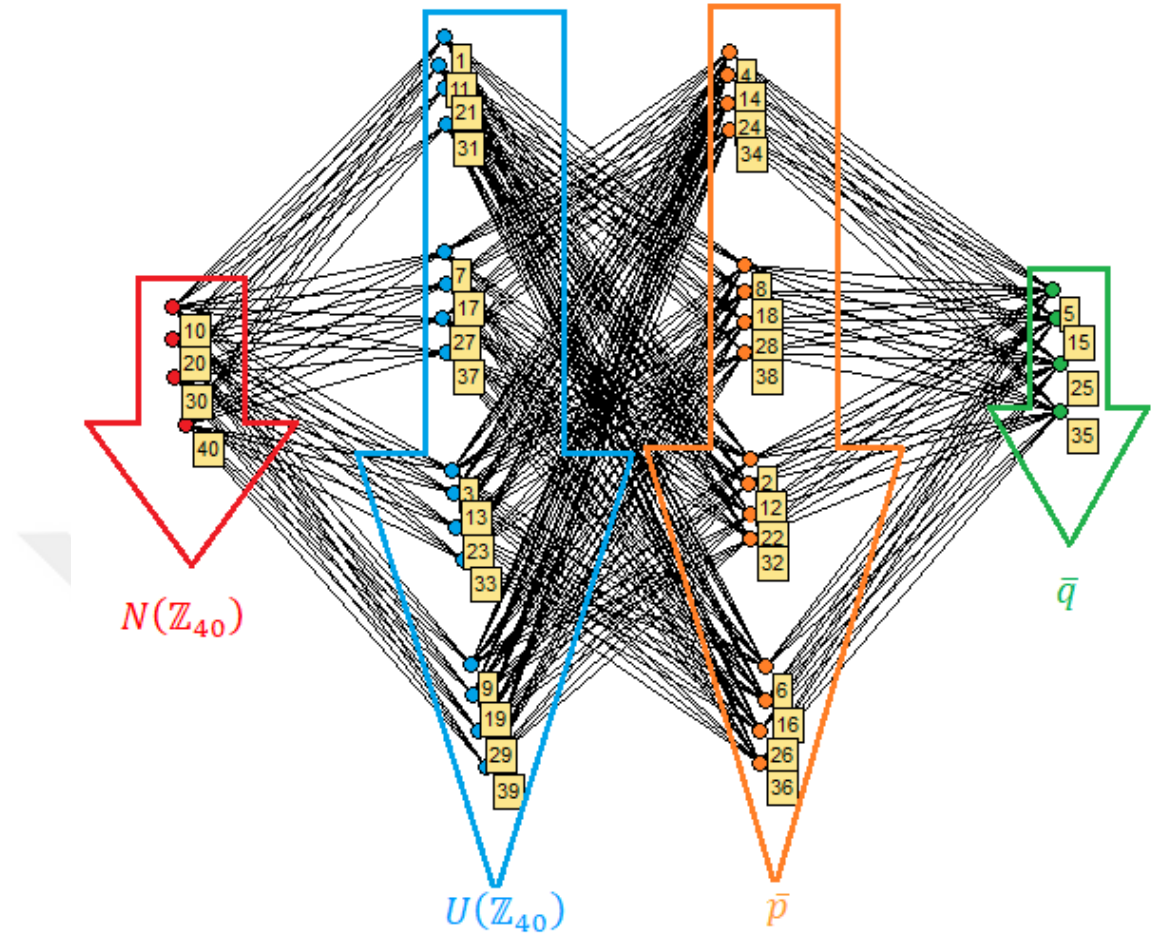
Örnek 4.2.8. $n = 2^3 \cdot 3^1$ olsun. $2 \notin U(\mathbb{Z}_{24})$ olduğu için $|U(\mathbb{Z}_{24})| = \phi(24) = 8$ ' dir. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{24})$ 8-regüler graftır. O halde;



Şekil 4. 10. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{24})$

$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{24})$ ' nin Laplasyan spektrumu; $\text{spec}_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{24})) = \{0^1, 4^2, 8^{18}, 12^2, 16^1\}$ olmaktadır.

Örnek 4.2.9. $n = 2^3 \cdot 5^1$ olsun. $2 \notin U(\mathbb{Z}_{40})$ olduğu için $|U(\mathbb{Z}_{40})| = \phi(40) = 16$ ' dir. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{40})$ 16-regüler graftır. O halde;



Şekil 4. 11. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{40})$

$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{40})$ ' nin Laplasyan spektrumu; $spec_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{40})) = \{0^1, 12^4, 16^{30}, 20^4, 32^1\}$ olmaktadır.

5. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Günümüzde bilim ve teknoloji dünyası için spektral graf teori, graflara ilişkin matrislerin spektral özellikleri ile graf yapısı arasındaki ilişkileri incelemeye ve anlamlandırmaya çalışan bir öneme sahiptir. Bir grafın herhangi bir matrisine göre spektrumlarının belirlenebilir olduğunu söylemek zor bir problemdir. Özellikle halka ve grup gibi cebirsel yapılarla inşa edilen grafların yapısı oldukça ilgi çekici sonuçlar vermektedir. Bu tez çalışmasında, uzun yıllardır açık bir problem olarak duran cebirsel yapılar üzerine inşa edilen graflar için " Hangi graf ailesine ait olur? Elde edilen grafların, graf parametreleri, matrisleri ve spektrumları belirlenebilir mi? Cebirsel olarak halka veya grupların alt grup, alt halka yapıları oluşurken grafların alt grafları oluşturulabilir mi? Benzer cebirsel yapıların grafları arasında da benzer yapılar oluşur mu?" soruları esas alınmıştır. Bu sorular ışığında bazı özel halkalar üzerinde tanımlanan özel graflara indirgenerek komşuluk ve Laplasyan matrislerinin spektrumları üzerinde incelemeler yapılmıştır.

Yapılan literatür çalışması sonucunda birimli, değişmeli bir R halkası üzerinde tanımlı sıfır-bölen graf, nilpotent graf, nilradikal, nilradikal olmayan graf, total graf ve birim graf yapıları ve graf parametrelerinin sonuçları incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında R birimli, değişmeli bir halka olmak üzere literatürdeki tanımlamalardan farklı olarak R halkasının $Z(R)$, $N(R)$ ve $U(R)$ kümelerine bağlı yeni graf tanımlamaları yapılmıştır. Tez çalışması boyunca özel olarak $R = \mathbb{Z}_n$ halkası için elde edilen yeni graf yapılarının özellikleri, graf parametreleri ve spektral karakterizasyonu sunulmuştur.

Sıfır-bölenlerin nilpotent olmayan elemanlarından oluşan $N_D(\Gamma(R))$ nilpotent-bölen graf ve $N_T(\Gamma(R))$ nilpotent-total graf tanımları bu çalışma ile birlikte literatüre kazandırılmıştır. \mathbb{Z}_n halkası için p_i 'ler asal sayı ve $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere; $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ için $N_D(\Gamma(R))$ ' in nokta kümesi 6 ayrık kümeye parçalanmaktadır. Bu kümelerdeki eleman sayıları ve kümeler arasındaki komşuluklar belirlenmiştir. $N_D(\Gamma(R))$ ' in graf modellemesi yapılmış ve komşuluk matrisi bloklanarak karakteristik polinomu elde edilmiştir.

Sonuç 1. $n = p^\alpha q^\beta$ ($\alpha, \beta \neq 0$) olmak üzere $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) \cong K_{p^{\alpha-1}\phi(q^\beta), q^{\beta-1}\phi(p^\alpha)}$ olup özdeğerleri $p^{\alpha-1}\phi(q^\beta) + q^{\beta-1}\phi(p^\alpha) - 2$ cebirsel katlı 0; ve sıfırdan farklı özdeğerleri de $\mp\sqrt{p^{\alpha-1}q^{\beta-1}\phi(n)}$ ' dir.

Sonuç 2. $n = p^\alpha$ ($\alpha \neq 0$) olmak üzere $N_D(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ ve $N_T(\Gamma(R))$ grafları noktalar kümesi boş küme olacağından boş graf olur.

\mathbb{Z}_n halkası için p_i 'ler asal sayı ve $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere; $n = \prod_{i=1}^3 p_i^{m_i}$ için $N_T(\Gamma(R))$ ' ı tam ve iki parçalı tam grafların ayrık birleşimidir. ρ nilpotent sayısı ve $a = \frac{|V|-k_1}{2\rho}$ ve $b = \frac{|V|}{2\rho}$ olsun.

Sonuç 3. $p_1 = 2$ için; $N_T(\Gamma(R)) \cong K\rho + aK_{\rho,\rho}$ ' dir. $\forall p_i \neq 2$ için $N_T(\Gamma(R)) \cong bK_{\rho,\rho}$ dir.

Sonuç 4. $N_T(\Gamma(R))$ ' in spektrumları nilpotent sayısına göre belirlenebilir.

$$p_1 = 2 \text{ için; } \text{spec}_A(N_T(\Gamma(R))) = \{(\rho - 1)^1, (-1)^{(\rho-1)}, (\rho)^a, (-\rho)^a, (0)^{2a(\rho-1)}\}$$

$$\text{ve } p_i \neq 2 \text{ için; } \text{spec}_A(N_T(\Gamma(R))) = \{(\rho)^b, (-\rho)^b, (0)^{2b(\rho-1)}\} \text{ olur.}$$

Literatürde birim grafların bağlantısallığı, kromatik indeksi, çapı, çevresi ve düzlemselliği üzerine birçok çalışma bulunmaktadır. Fakat birim grafların spektral karakterizasyonu üzerine hiçbir çalışma bulunmamaktadır. Bu tez çalışmasında özel olarak \mathbb{Z}_n halkasının n değişkenine göre birim graf yapısı, Laplasyan matrisi ve spektrumları belirlenmiştir. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ çok parçalı graftır.

Sonuç 5. $n = p$ ($p \geq 7$) bir asal sayı ise o halde $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n) \cong K_{l_1, l_2, \dots, l_{\frac{p+1}{2}}}$ ' tur. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' nin Laplasyan spektrumları ve cebirsel katları p asalına göre belirlenebilir.

$$\text{spec}_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \{0, (p-2)^{\binom{p-1}{2}}, p^{\binom{p-1}{2}}\} \text{ olur.}$$

Sonuç 6. $\alpha \geq 2$ ve $p > 2$ asal sayısı için $n = p^\alpha$ ise o halde $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n) \cong K_{l_0, l_1, \dots, l_{p-1}}[\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{p-1}]$ ' tur. Öyle ki $\mathcal{W}_0 \cong p^{\alpha-1}K_1$, $\mathcal{W}_i \cong K_{p^{\alpha-1}}$ ($i \geq 1$).

Dolayısıyla $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' ın Laplasyan spektrumu ve cebirsel katları p asalına ve p^α değerine göre belirlenebilir.

$$\text{spec}_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \left\{ 0, (p^\alpha - 2p^{\alpha-1})^{\binom{p-1}{2}}, \phi(n)^{(p^\alpha-p)}, (p^\alpha)^{\binom{p-1}{2}} \right\}, \text{ dir.}$$

Sonuç 7. $\alpha \geq 2$ ve $p = 2$ asal sayısı için $n = p^\alpha$ ise o halde $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n) \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ tur. $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ iki parçalı graf olduğundan $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' nin Laplasyan spektrumunu belirlemek kolaydır.

$$\text{spec}_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \left\{ 0^{(1)}, \binom{n}{2}^{(n-2)}, (n)^{(1)} \right\}, \text{ dir.}$$

Sonuç 8. p ve q farklı asal sayı olmak üzere $n = p^\alpha q^\beta$ olsun. Eğer $p = 2$ ise o zaman $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ ' nin Laplasyan spektrumu p ve q asallarına bağlı kalarak belirlenebilir.

$$\text{spec}_L(\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)) = \left\{ 0^{(1)}, \phi(n)^{(n-2q)}, (2^{\alpha-1}q^\beta)^{(q-1)}, (2^{\alpha-1}(q^\beta - 2q^{\beta-1}))^{(q-1)}, 2\phi(n)^{(1)} \right\},$$

dir.

Nilpotent, total ve birim grafların spektrası üzerine çok fazla Türkçe çalışma olmaması sebebiyle bu tez ülkemizde Türkçe kaynak olarak kullanılması açısından önem arz etmektedir. Bu tezde verilen temel tanım, kavram ve teoremler birçok graf ve cebir kitaplarında bulunmasına karşılık lisans ve lisansüstü öğrencilerin yararlanması amacıyla bilimsel disiplin gözetilerek verilmiştir.

Bu tezle birlikte literatüre kazandırılan $N_D(\Gamma(R))$ ve $N_T(\Gamma(R))$ grafları farklı halkalar üzerinde nasıl bir graf ailesine ait olur? Bu tezde kullanılan metotlarla farklı halka ve graf yapılarının komşuluk ve Laplasyan spektral incelemelerinin vereceği sonuçlar araştırılmaya değer ilgi çekici problemlerdir.

Problem 1. p_i 'ler asal sayı ve $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere; $n = \prod_{i=1}^n p_i^{m_i}$ için $N_D(\Gamma(R))$ ve $N_T(\Gamma(R))$ graflarının komşuluk, Laplasyan spektrumları ve farklı graf parametreleri belirlenebilir mi?

Problem 2. p_i 'ler asal sayı ve $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ olmak üzere; $n = \prod_{i=1}^n p_i^{m_i}$ için $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$ grafının Laplasyan spektrumları belirlenebilir mi?

Problem 3. Farklı R halkaları için $N_D(\Gamma(R))$ ve $N_T(\Gamma(R))$ graflarının spektrumları ve farklı graf parametreleri belirlenebilir mi?

Genel olarak konu ile ilgili yeni ve açık problemlerin ispatlanabilmesi oldukça zor olmasına karşın imkansız değildir.



KAYNAKLAR

1. Naduvath, S., "Lecture Notes on Graph Theory", *Centre for Studies in Discrete Mathematics Vidya Academy of Science and Technology*, India, 2017.
2. Diestel, R., "Graph Theory", *Springer-Verlag Heidelberg*, New York, 2005.
3. Akiyama, J., Egawa, Y., Enomot, H., "Graph Theory and Application", *Elsevier Science Publishers*, Northern Ireland, 1988.
4. Biggs, N., "Algebraic Graph Theory", *University of Cambridge*, New York, 1993.
5. Samei, K., "On the Comaximal Graph of a Commutative Ring", *Canad. Math. Bull.*, 57 (2), 413-423, 2014.
6. Bapat, R.B., "Graphs and Matrices", *Springer-Verlag*, London, 2010.
7. Taşçı, D., "Soyut Cebir", Ankara, 2010.
8. Taşçı, D., "Lineer Cebir", Ankara, 2011.
9. Grove, L.C., "Algebra", *Dover Publish*, New York, 2004.
10. İnternet: "Academic Dictionaries and Encyclopedies" <https://en-academic.com/>.
11. İnternet: "ProofWiki" <https://proofwiki.org/>.
12. İnternet: "Wolfram MathWorld" <https://mathworld.wolfram.com/>.
13. İnternet: "Groupprops-Subwiki" <https://groupprops.subwiki.org/>.
14. Anderson, D.F., Livingston, P.S., "The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring", *Journal of Algebra*, (217), 434-447, 1999.
15. Akbari, S., Mohammadian, A., "On the Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring", *Journal of Algebra*, (274), 847-855, 2004.
16. Beck, I., "Coloring of Commutative Rings", *Journal of Algebra*, (116), 208-226, 1988.
17. Anderson, D.D., Naseer, M., "Beck's Coloring of Commutative Rings", *Journal of Algebra*, (159), 500-514, 1993.
18. DeMeyer, F., Schneider, K., "Automorphisms and Zero-Divisor Graphs of Commutative Rings", *International Journal Commutative Rings*, (1:3), 93-105, 2002.
19. Anderson, D.F., Mulay, S.B., "On the Diameter and Girth of a Zero-Divisor Graph", *Journal of Pure and Applied Algebra*, (210), 543-550, 2007.
20. Axtell, M., Stickles, J., Warfel, J., "Zero-Divisor Graphs of Direct Products of Commutative Rings", *Houston Journal Math.*, (32:4), 985-994, 2006.

21. Atani, S.E., Kohan, M.S., "The Diameter of a Zero-Divisor Graph for Finite Direct Product of Commutative Rings", *Sarajevo Journal Math.*, (3:16), 149-156, 2007.
22. Anderson, D.F., Weber, D., " The Zero-Divisor Graph of a Commutative Rings without Identity", *Int. Electron. J. Algebra*, (23), 176-202, 2018.
23. Anderson, D.F., Asir, T., Badawi, A., Chelvam, Tamizh, T., "Graphs from Rings", *Springer*, <https://doi.org/10.1007/978-3-030-88410-9>, 2021.
24. Anderson, D.F., Frazier, A., Lauve, A., Livingston, P.S., "The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring-II", *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, (202), 61-72, 2001.
25. Anderson, D.F., Levy, R., Shapiro, J., "Zero-Divisor Graphs, von Neumann Regular Rings and Boolean Algebras", *J. Pure Appl. Algebra*, (180), 221-241, 2003.
26. Smith, N.O., "Planar Zero-Divisor Graphs", *International Journal Commutative Rings*, (2:4), 177-188, 2003.
27. Chen, P.W., "A Kind of Graph of Rings", *Algebra Colloq.*,(10:2), 229-238, 2003.
28. Li, A.H., Li, Q.S., "A Kind of Graph Structure on Von-Neumann Regular Rings", *International Journal of Algebra*, (4), 291-302, 2010.
29. Kala, R., Kavitha, S., "A Typical Graph Structure of a Ring", *Transactions on Combinatorics*, 37-44, 2015.
30. Kavitha, S., "Nilpotent Graph of Commutative Ring", thesis, chapter3, 40-55 <http://shodhganga.inflibnet.ac.in>
31. Nikmehr, M.J., Khojasteh, S., "On the Nilpotent Graph of a Ring", *Turkish Journal of Mathematics*, (37), 553-559, 2013.
32. Cantekin, H.P., Sorgun, S., "Laplacian Spectral Properties of Nilpotent Graphs Over the Ring \mathbb{Z}_n " *Sakarya University Journal of Science*, (21:6), 1443-1447, 2017.
33. Kirkland, S.J., "Completion of Laplacian Integral Graphs Via Edge Additions", *Discrete Math*, (295), 75-90, 2005.
34. Anderson, D.F., Badawi, A., "The Total Graph of a Commutative Ring", *Journal of Algebra*, (320), 2706-2719, 2008.
35. Akbari, S., Kiani, D., Mohammadi, F., Moradi, S., "The Total Graph and Regular Graph of a Commutative Ring", *Journal of Pure and Applied Algebra*, (213), 2224-2228, 2009.

36. Asir, T., Chelvam, Tamizh, T., "On the Total Graph and Its Complement of a Commutative Ring", *Communications in Algebra*, (41), 3820-3835, 2013.
37. Bishop, A., Cuchta, T., Lokken, K., Pechenik, O., "The Nilradical and Non- Nilradical Graphs of Commutative Rings" *International Journal of Algebra* (2:20), 981-994, 2008.
38. Chandra, S., Prakash, O., Suthar, S., "Some Properties of the Nilradical and Non- Nilradical Graphs over Finite Commutative Ring \mathbb{Z}_n " *Algebra and Discrete Mathematics*, (24:2), 181-190, 2017.
39. Ashrafi, N., Maimani, H.R., Pournaki, M.R., Yassemi, S., "Unit graphs Associated with Rings", *Communications in Algebra*, (38:8), 2851-2871, 2010.
40. Maimani, H.R., Pournaki, M.R., Yassemi, S., "Necessary and Sufficient Conditions for Unit Graphs to be Hamiltonian", *Pacific Journal of Mathematics*, (249:2), 419-431, 2011.
41. Dirac, G.A., "Some Theorems on Abstract Graphs" *Proc. London Math. Soc.*, (3-2), 69-81, 1952.
42. Chartrand, G., Oellermann, O.R., " Applied and Algorithmic Graph Theory" *McGraw-Hill College*, New York, 1993.
43. Brouwer, A. E., Haemers, W.H., "Spectra of Graphs", *Springer*, New York, 2012.
44. Grimaldi, R.P. "Graphs from Rings", *Proceedings of the 20th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Atlantic University, 71, syf. 95103, Florida, USA, 1990.
45. Pokorny, M., " QLS-Integrality of Complete r-Partite Graphs", *Filomat*, 29(5), 1043-1051,2015.