T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
İbrahim ERDEM

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

AĞUSTOS 2023

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
İbrahim ERDEM

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

AĞUSTOS 2023

Prof. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında **İbrahim ERDEM** tarafından hazırlanan "Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri ve Çözümlerinin Davranışları Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

22/08/2023

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Necati TAŞKARA

Üye : Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Merve KARA

ONAY:

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitü Yönetim Kurulunun………………….tarih ve…………….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

… / … / 2023

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İbrahim ERDEM

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam boyunca bana kıymetli vaktini ayıran, ilgisini eksik etmeyen, bütün bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, akademik olarak yetişmeme ve gelişmeme katkıda bulunan, tüm süreç boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, tezimin hazırlanmasında her türlü desteği sağlayan ve tezimi titizlikle inceleyen saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yasin YAZLIK'a teşekkür ederim.

Doktora öğrenim sürecinde tavsiye ve desteklerinden faydalandığım Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ'a ve Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU'ya teşekkür ederim.

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına teşekkür ederim.

Doktora öğrenim sürecim boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen biricik eşim Gülizar ERDEM'e de sonsuz teşekkür ederim. Bu tezi çok sevdiğim kızım Zeynep ve oğlum Emin Eren'e ithaf ediyorum.

BAZI FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

İbrahim ERDEM

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2023

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklemleri ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalardan bahsedilmiştir. Ayrıca fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde,

$$x_n = \frac{x_{n-k} y_{n-l}}{b x_{n-k} + a y_{n-k-l}}, \quad y_n = \frac{y_{n-k} z_{n-l}}{d y_{n-k} + c z_{n-k-l}}, \quad z_n = \frac{z_{n-k} x_{n-l}}{f z_{n-k} + e x_{n-k-l}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sistemi tanımlanarak çözümleri elde edilip çözümlerinin asimptotik davranışı incelenmiştir. Dördüncü bölümde,

$x_{n+1} = y_n^{\alpha} z_{n-1}^{\beta},\ y_{n+1} = z_n^{\gamma} t_{n-1}^{\delta},\ z_{n+1} = t_n^{\varepsilon} x_{n-1}^{\mu},\ t_{n+1} = x_n^{\xi} y_{n-1}^{\rho},\ n \in \mathbb{N}_0$ sisteminin kapalı formda çözülebilirliği gösterilip bazı özel durumlar için de çözümler elde edilmiştir. Beşinci bölümde, üçüncü bölümdeki fark denklem sistemi ile ilgili elde edilen özellikleri destekleyen nümerik örnekler verilmiştir. Altıncı bölümde ise sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Fark Denklemi, Fark Denklem Sistemi, Asimptotik Davranış, Periyodiklik.

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yasin YAZLIK
Sayfa sayısı: 105

ON THE SOLUTIONS OF SOME SYSTEM OF DIFFERENCE EQUATIONS AND BEHAVIORS OF THEIR SOLUTIONS

(PhD Thesis)

İbrahim ERDEM

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATUREL AND APPLIED SCIENCES

Aug 2023

ABSTRACT

This study consists of six chapters. In the first chapter, the general information about the difference equations is given. In the second chapter, studies in literatüre on difference equations and systems of difference equations are mentioned. Also, some definitions and theorems are given about difference equations and system of difference equations. In the third chapter, system of difference equation

$$x_n = \frac{x_{n-k} y_{n-l}}{b x_{n-k} + a y_{n-k-l}}, \quad y_n = \frac{y_{n-k} z_{n-l}}{d y_{n-k} + c z_{n-k-l}}, \quad z_n = \frac{z_{n-k} x_{n-l}}{f z_{n-k} + e x_{n-k-l}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

is defined, its solutions are obtained and the asymptotic behavior of the solutions is investigated. In the fourth chapter, solvability of system of difference equation $x_{n+1} = y_n^{\alpha} z_{n-1}^{\beta},\ y_{n+1} = z_n^{\gamma} t_{n-1}^{\delta},\ z_{n+1} = t_n^{\varepsilon} x_{n-1}^{\mu},\ t_{n+1} = x_n^{\xi} y_{n-1}^{\rho},\ n \in \mathbb{N}_0$ is shown and general solution is obtained for some special cases. In the fifth chpater, numerical examples supporting the obtained properties related to the system of difference equations studied in the third chapter are given. In the sixth chapter, results and discussions are given.

Keywords: Difference equation, System of difference equations, Asymptotic behaviour, Periodicity.

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Yasin YAZLIK
Pages: 105

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
E	Kaydırma operatörü
Δ	İleri fark operatörü
F_n	n. Fibonacci sayısı
Δ^{-1}	Ters fark operatörü
$\square$	Reel sayılar
$\square_0$	Doğal sayılar
$\square$	Sayma sayılar
$\square_{n_0}$	$\{n \mid n \geq n_0,\ n, n_0 \in \square_0\}$
$\square^+$	Pozitif Tam Sayılar
$\square$	Kompleks Sayılar
$\mathcal{F}$	Forbidden Set (Yasaklı Küme)
$\sum$	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım senbolü
lim	Limit
$\overline{a,b}$	$\{n \mid a \leq n \leq b,\ n, a, b \in \square\}$
O	Landau Sembolü
$EBOB(a,b)$	a,b sayılarının en büyük ortak bölen

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fark denklemleri ve fark denklem sistemleri, matematiğin birçok dalını etkileyen bir alandır. Bu yüzden yıllardır bu denklemler ve denklem sistemleri ilgi çekici bir alan olmuş ve olmaya da devam etmektedir [25]. Ayrıca fark denklemleri, gözlenen olağanüstü gelişimlerin doğal tanımları olarak ortaya çıkar. Çünkü zamanla gelişen değişkenlerin ölçümlerinin çoğu ayrıktır ve bu denklemler kendi başlarına önemli matematiksel modellerdir [50].

Fark denklemleri ve fark denklem sistemlerinin çözülebilirliği hiç şüphesiz bu alanda ki konuların en ilgi çekicilerinden bir tanesidir. Fark denklemlerinin çözümleriyle ilgili ilk sonuçlar de Moivre tarafından elde edilmiş ve daha sonra bu sonuçlar Euler tarafından geliştirilmiştir. On sekizinci yüzyılın ikinci yarısında, başta Lagrange ve Laplace olmak üzere birçok matematikçi tarafından daha önemli sonuçlar elde edilmiştir. On dokuzuncu yüzyılın sonuna kadar ise fark denklemleri hakkında elde edilen bilgilerin bir kısmı kitaplarda yayınlanmıştır. On dokuzuncu yüzyılda fark denklemleriyle ilgilenen araştırmacılar, denklemlere yaklaşık çözümler bulma, denklemlerin niteliksel teorisi vb. gibi konulara yönelmişlerdir. Son çeyrek asırda da pek çok yazar fark denklemleriyle uğraşırken bilgisayarları ve bilgisayar programlarını kullanmıştır. Yazarların bir kısmı bilgisayarları, fark denklemleri ve fark denklem sistemlerinin çözümlerinin davranışları hakkında tahminlerde bulunmak için kullanmış, bir kısmı ise açık çözümlerinin yanı sıra kapalı formdaki çözümlerinin formüllerini elde etmek için kullanmıştır. Denklemlerin çözümlerinde bazı teorilerin bilinmemesi ve bazı formüllerin yeni olması sıklıkla problemlere yol açmış olsa da çalışılan makalelerin bir kısmı ile bu tür problemler incelenmiş ve bu şekilde elde edilen bazı formüllerin teorik açıklamaları verilmiştir. Teorik açıklamalardan biri de ele alınan denklem ya da sistemi uygun dönüşümler vasıtasıyla $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, şeklinde lineer fark denklemine indirgeyerek çözümleri elde etmektir. İndirgenen bu fark denkleminin çözümleri, $P_k(\lambda)=\lambda^k-a_1\lambda^{k-1}-a_2\lambda^{k-2}-\cdots-a_{k-1}\lambda-a_k$, polinomunun kökleri ile ilişkili olacağı açıktır. Bu polinomun derecesi beşten büyük veya beşe eşitse polinomun esas kökler vasıtasıyla çözülebilir olmasına gerek olmadığı bilinmektedir. $x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\cdots+a_kx_{n-k}$, denkleminin genel çözümü $x_n=\sum_{j=1}^{m}Q_j(n)\lambda_j^n$ formülü ile verildiğinden bu durumda $P_k(\lambda)=\lambda^k-a_1\lambda^{k-1}-a_2\lambda^{k-2}-\cdots-a_{k-1}\lambda-a_k$, polinomunun tüm köklerini esas kök olarak bulmak mümkün olmayabilir. Dolayısıyla bu gibi durumlarda $x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\cdots+a_kx_{n-k}$, denkleminin teorik olarak çözülebilir olduğu söylenebilir. Bir fark denkleminin teorik olarak çözülebilir olması için bahsi geçen polinomun genel forma sahip olması önemlidir. Bir fark denklem sistemi çözümleri tanımlı yapmayan başlangıç koşullarına sahip olsa da bu, genelde sistemin çözülebilirliğini etkilemediğinden, sistemin sonlu sayıda kapalı formda formülü varsa bu sistemin kapalı formda çözülebilir olduğu kabul edilir [85], [86].

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu tez çalışmasının iki ana amacı vardır. Birincisi; a,b,c,d,e,f parametreleri ve $x_{-i},y_{-i},z_{-i}, i\in\{1,2,...,k+l\}$, başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_n=\frac{x_{n-k}y_{n-l}}{bx_{n-k}+ay_{n-k-l}},\quad y_n=\frac{y_{n-k}z_{n-l}}{dy_{n-k}+cz_{n-k-l}},\quad z_n=\frac{z_{n-k}x_{n-l}}{fz_{n-k}+ex_{n-k-l}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

üç-boyutlu $(k+l)$. mertebeden fark denklem sistemini tanımlayarak kapalı formda çözmek, sistemin iyi tanımlı çözümlerinin *k=2, l=1* durumunda asimptotik davranışları da incelemektir. Tezin diğer amacı ise $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\mu,\xi$ ve ρ parametreleri tamsayı ve $i\in\{0,1\}$ için $x_{-i},y_{-i},z_{-i},t_{-i}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$x_{n+1}=y_n^{\alpha}z_{n-1}^{\beta},\quad y_{n+1}=z_n^{\gamma}t_{n-1}^{\delta},\quad z_{n+1}=t_n^{\varepsilon}x_{n-1}^{\mu},\quad t_{n+1}=x_n^{\xi}y_{n-1}^{\rho},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

dört boyutlu ikinci mertebeden çarpılabilir tipteki fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermek, $\beta=0,\ \delta=0,\ \mu=0,\ \rho=0$ ve $\beta\delta\mu\rho\neq 0$ durumlarına göre genel çözümünü elde etmektir.

BÖLÜM 2

2.1. Kaynak Araştırması

Bu bölümde fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalardan bahsedilecektir.

Elsayed (2010), "*On the solutions of a rational system of difference equations*" adlı çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-k}}{x_n y_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.1}$$

$(k+1).$ mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmiştir. Burada başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılardır [14].

Elabbasy ve çalışma arkadaşları (2011), "*Global behavior of the solutions of some difference equations*" adlı çalışmalarında $x_{-i},\ i\in\{0,1,\ldots,r\}$, başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar, $r=\max\{l,k,p,d\}$ negatif olmayan tamsayı ve $a,\ b,\ c$ pozitif sabitler olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{a x_{n-l}x_{n-k}}{b x_{n-p}-c x_{n-q}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.2}$$

fark denkleminin denge noktasının global çekimliliğini incelemişlerdir. Dahası bazı özel durumlar için çözümlerini ve çözümlerinin asimptotik davranışlarını da incelemişlerdir [10].

Din ve çalışma arkadaşları (2012), "*Dynamics of a fourth-order system of rational difference equations*" adlı çalışmalarında α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, $i\in\{0,1,2,3\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_{n-3}}{\beta+\gamma y_n y_{n-1} y_{n-2} y_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{\alpha_1 y_{n-3}}{\beta_1+\gamma_1 x_n x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.3}$$

dördüncü mertebeden fark denklem sisteminin denge noktası, denge noktasının lokal asimptotik kararlılığı, denge noktasının kararsızlığı, pozitif çözümlerin periyodik davranışı ve global çekimliliğini incelemişlerdir [7].

Karataş ve Yalçınkaya (2012), "*On the solutions of the difference equation*" adlı çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{Ax_{n-(2k+1)}}{-A + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{n-i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.4}$$

$(2k+2)$. mertebeden fark denkleminin çözümünü incelemişlerdir. Burada k pozitif tam sayı, x_{-i}, $i \in \{0,1,\ldots,2k+1\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar ve $\prod_{i=0}^{2k+1} x_{-i} \neq A$ dır [38].

El-Metwally (2013), "*Solutions form for some rational systems of difference equations*" adlı çalışmasında başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_n}{\pm x_{n-1} \pm y_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{\pm y_{n-1} \pm x_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.5}$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini elde etmiştir [13].

Qureshi ve çalışma arkadaşları (2013), "*Global behavior of third order system of rational difference equations*" adlı çalışmalarında, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 parametreleri ve x_0, x_{-1}, x_{-2}, y_0, y_{-1}, y_{-2} başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere aşağıda verilen

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-2}}{\beta + \gamma x_n x_{n-1} x_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha_1 y_{n-2}}{\beta_1 + \gamma_1 y_n y_{n-1} y_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.6}$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklemlemlerinin dinamik davranışlarını çalışmışlardır [48].

Stevic ve çalışma arkadaşları (2013), "*On a class of solvable difference equations*" adlı çalışmalarında, k,l,m,s sabit doğal sayılar, a, b sıfırdan farklı reel sayılar ve x_{-i}, $i = \overline{1,\tau}$, $\tau := \max\{k,l,m,s\}$ başlangıç değerleri reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-k} x_{n-l}}{ax_{n-m} + bx_{n-s}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.7}$$

fark denkleminin literatürdeki mevcut bazı özel durumlarından farklı başka özel durumlar için kapalı formda çözümlerini elde etmişler ve $s=1$ için bu çözümlerin asimptotik davranışını incelemişlerdir [57].

Khan ve Qureshi (2014), "*Behavior of an exponential system of difference equations*" adlı çalışmalarında, α, β, γ, α_1, β_1 ve γ_1 parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, $i\in\{0,1\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha e^{-y_n}+\beta e^{-y_{n-1}}}{\gamma+\alpha x_n+\beta x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{\alpha_1 e^{-x_n}+\beta_1 e^{-x_{n-1}}}{\gamma_1+\alpha_1 y_n+\beta_1 y_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.8}$$

üstel tipten fark denklem sisteminin nitel davranışlarını çalışmışlardır. Daha kesin olarak, sınırlılık karakterini, direncini, pozitif denge noktasının tekliği, lokal ve global davranışı ve sistemin pozitif denge noktasına yakınsayan pozitif çözümlerinin yakınsama oranını araştırmışlardır. Teorik sonuçları doğrulamak için bazı sayısal örnekler de verilmiştir [39].

Khan ve çalışma arkadaşları (2014), "*Asymptotic behavior of an anti-competitive system of rational difference equations*" adlı çalışmalarında,

α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, $r\in(0,\infty)$ ve başlangıç koşulları $x_0, y_0\in(0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha y_n}{\beta+\gamma x_n^r},\quad y_{n+1}=\frac{\alpha_1 x_n}{\beta_1+\gamma_1 y_n^r},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.9}$$

rasyonel fark denklem sisteminin yakınsaklık oranını ve global davranışını araştırmışlardır. Teorik sonuçların doğrulanması için bazı sayısal örnekler de verilmiştir [40].

Qureshi ve çalışma arkadaşları (2014), "*Some systems of second-order rational difference equations*" adlı çalışmalarında, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, a, b, c, a_1, b_1, c_1 parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, $i\in\{0,1\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_{n-1}}{\beta+\gamma y_n^2},\quad y_{n+1}=\frac{\alpha_1 y_{n-1}}{\beta_1+\gamma_1 x_n^2},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.10}$$

ve

$$x_{n+1}=\frac{a y_{n-1}}{b+c x_n^2},\quad y_{n+1}=\frac{a_1 x_{n-1}}{b_1+c_1 y_n^2},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.11}$$

ikinci mertebeden yukarıdaki iki fark denklem sisteminin nitel davranışını çalışmışlardır. Özel olarak denge noktasının lokal asimptotik kararlılığı ve kararsızlığı, denge noktasının global karakteri ve sistemlerin yakınsaklık oranı çalışılmıştır [49].

Stevic ve çalışma arkadaşları (2014), "*On a solvable system of rational difference equations*" adlı çalışmalarında, $k,l \in \mathbb{N}$, $x_{-i}, y_{-i} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1,k+l}$, ve a, b, c, d parametreleri reel sabitler olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-k}y_{n-l}}{bx_{n-k} + ay_{n-k-l}}, \quad y_n = \frac{y_{n-k}x_{n-l}}{dy_{n-k} + cx_{n-k-l}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.12}$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişlerdir [68].

Din (2014), "*Qualitative behavior of an anti-competitive system of third-order rational difference equations*" adlı çalışmasında, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, $i \in \{0,1,2,3\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha y_{n-3}}{\beta + \gamma x_n x_{n-1} x_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha_1 x_{n-3}}{\beta_1 + \gamma_1 y_n y_{n-1} y_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.13}$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin denge noktasının lokal ve global asimptotik davranışı ve yakınsama oranını çalışmıştır [8].

Din (2014), "*On a system of rational difference equation*" adlı çalışmasında, parametreler a, b, c, d, e, $f \in (0,\infty)$ ve başlangıç koşulları $x_0, y_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ay_n}{b + cy_n}, \quad y_{n+1} = \frac{dy_n}{e + fx_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.14}$$

rasyonel fark denklem sisteminin denge noktasının lokal asimptotik kararlılığı, global karakteri ve çözümlerin periyodikliğini çalışmıştır [9].

Elsayed (2014), "*On the solutions and periodic nature of some systems of difference equations*" adlı çalışmasında, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{z_{n-1}x_{n-2}}{x_{n-2} \pm y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{y_{n-2} \pm z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{y_{n-1}z_{n-2}}{z_{n-2} \pm x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.15}$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelemiştir [15].

Tollu ve çalışma arkadaşları (2014), "*On fourteen solvable systems of difference equations*" adlı çalışmalarında, p_n, q_n, r_n ve s_n dizilerinin her biri x_n veya y_n dizilerini temsil etmek üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1+p_n}{q_n},\quad y_{n+1}=\frac{1+r_n}{s_n},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.16}$$

fark denklem sistemini incelemişlerdir. Dahası on altı olası sistemden on dördü çözülmüştür. Bu on dört sistemin on ikisinin çözümleri Fibonacci sayıları ile ilişkilendirilmiştir [71].

Elsayed ve Ibrahim (2015), "*Periodicity and solutions for some systems of nonlinear rational difference equations*" adlı çalışmalarında, x_{-i}, y_{-i}, $i\in\{0,1,2\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-2}y_{n-1}}{y_n\left(\pm1\pm x_{n-2}y_{n-1}\right)},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-2}x_{n-1}}{x_n\left(\pm1\pm y_{n-2}x_{n-1}\right)} \tag{2.17}$$

üçüncü mertebeden lineer olmayan fark denklem sistemlerinin periyodikliğini ve çözümlerinin formlarını araştırmışlardır [16].

El-Dessoky ve Elsayed (2015), "*On the solutions and periodic nature of some systems of rational difference equations*" adlı çalışmalarında, x_{-i}, y_{-i}, $i\in\{0,1\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_{n-1}}{y_{n-1}\pm y_n},\quad y_{n+1}=\frac{y_n x_{n-1}}{x_{n-1}\pm x_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.18}$$

ikinci mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve periyodikliğini çalışmışlardır [11].

Stevic (2015), "*First-order product-type systems of difference equations solvable in closed form*" adlı çalışmasında, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z_0,w_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere

$$z_{n+1}=\alpha z_n^a w_n^b,\quad w_{n+1}=\beta z_n^c w_n^d,\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.19}$$

birinci mertebeden fark denklem sisteminin çözümlerini kapalı formda bularak, sistemin kapalı formda çözülebilirliğini göstermiştir [51].

Stevic (2015), "*Product-type system of difference equations of second-order solvable in closed form*" adlı çalışmasında, $a,b,c,d,f,g\in\mathbb{Z}$, $x_{-i},y_{-i},z_{-i}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $i\in\{0,1\}$, olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{y_n^a}{z_{n-1}^b},\quad y_{n+1}=\frac{z_n^c}{x_{n-1}^d},\quad z_{n+1}=\frac{x_n^f}{y_{n-1}^g},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.20}$$

çarpılabilir tipteki fark denklem sisteminin kapalı formdaki çözümlerini elde etmiştir [52].

Stevic ve çalışma arkadaşları (2015), "*On a product-type system of difference equations of second order solvable in closed form*" adlı çalışmalarında, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $z_{-1},z_0,w_{-1},w_0\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$z_{n+1}=\frac{z_n^a}{w_{n-1}^b},\quad w_{n+1}=\frac{w_n^c}{z_{n-1}^d},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.21}$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişlerdir [53].

Touafek ve Elsayed (2015), "*On a second order rational systems of difference equations*" adlı çalışmalarında, $x_{-i},\ y_{-i},\ i\in\{0,1\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_n x_{n-1}}{\pm x_{n-1}\pm y_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_n y_{n-1}}{\pm x_n\pm y_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.22}$$

ikinci mertebeden fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını ve periyodikliğini çalışmışlardır [76].

Touafek ve Elsayed (2015), "*On a third order rational systems of difference equations*" adlı çalışmalarında, $x_{-i},\ y_{-i},\ i\in\{0,1,2\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}y_n}{y_n\pm y_{n-2}},\quad y_{n+1}=\frac{x_n y_{n-1}}{x_n\pm x_{n-2}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.23}$$

üçüncü mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelemişlerdir [77].

Yazlık ve çalışma arkadaşları (2015), "*On the solutions of a max-type difference equation system*" adlı çalışmalarında, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, A parametresi pozitif reel sayı ve x_0, y_0 başlangıç değerleri pozitif reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_n},\min\left\{1,\frac{A}{y_n}\right\}\right\},\quad y_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{y_n},\min\left\{1,\frac{A}{x_n}\right\}\right\},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.24}$$

max-type fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmişlerdir [78].

Elsayed ve Ahmed (2016), "*Dynamics of a three-dimensional systems of rational difference equations*" adlı çalışmalarında, başlangıç koşulları x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i\in\{0,1,2\}$, sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_n x_{n-2}}{x_{n-2}\pm z_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{z_n y_{n-2}}{y_{n-2}\pm x_{n-1}},\quad z_{n+1}=\frac{x_n z_{n-2}}{z_{n-2}\pm y_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.25}$$

üç-boyutlu fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve periyodikliğini araştırmışlardır [17].

Ibrahim (2016), "*Closed form expression of tractable semi-max-type two-dimensional system of difference equations with variable coefficients*" adlı çalışmasında, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ve $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ iki periyotlu pozitif diziler ve x_{-i}, y_{-i}, $i\in\{0,1\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sabitler olmak üzere

$$x_{n+1}=\max\left\{\frac{A_n}{y_{n-1}},x_{n-1}\right\},\quad y_{n+1}=\max\left\{\frac{B_n}{x_{n-1}},y_{n-1}\right\},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.26}$$

ikinci mertebeden iki-boyutlu max-type fark denklem sisteminin periyodikliğini ve çözümlerini incelemiştir [24].

Khan ve Qureshi (2016), "*Qualitative behavior of two systems of higher-order difference equations*" adlı çalışmalarında, $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,a,b,c,a_1,b_1,c_1$ parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, $i\in\{0,1,\ldots,k\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sabitler olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_{n+k}}{\beta+\gamma y_{n-k+1}^2},\quad y_{n+1}=\frac{\alpha_1 y_{n+k}}{\beta_1+\gamma_1 x_{n-k+1}^2},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.27}$$

ve

$$x_{n+1} = \frac{a y_{n+k}}{b + c x_{n-k+1}^2}, \quad y_{n+1} = \frac{a_1 x_{n+k}}{b_1 + c_1 y_{n-k+1}^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.28}$$

yüksek mertebeden iki fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin nitel davranışını çalışmışlardır. Daha kesin olarak, denge noktalarını, denge noktalarının lokal asimptotik kararlılığını, kararsızlığını, global asimptotik kararlılığını ve bu sistemlerin $P_0 = (0,0)$ denge noktasına yakınsayan pozitif çözümlerinin yakınsaklık oranlarını çalışmışlardır. Elde edilen teorik sonuçların desteklenmesi için de bazı sayısal örneklere yer vermişlerdir [41].

Stevic (2016), "*Solvability of a class of product-type systems of difference equations*" adlı çalışmasında, karmaşık sayılar kümesinde iki bağımlı değişkene sahip çözülebilir çarpılabilir fark denklem sistemlerinin bir sınıfını sunmuştur. Ana sonuçlar literatürdeki bazı sonuçları tamamlarken ispatları bazı metodolojik ayrıntılar içermektedir. İkinci mertebeden

$$z_n = \alpha z_{n-1}^a w_{n-2}^b, \quad w_n = \beta z_{n-1}^d w_{n-2}^c, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.29}$$

çarpılabilir tipteki fark denklem sistemin genel çözümleri için kapalı formda formülleri sağlamış veya bunların nasıl elde edileceğine dair prosedürler vermiştir [55].

Stevic (2016), "*Solvability of a product-type system of difference equations with six parameters*" adlı çalışmasında, altı parametreli

$$z_{n+1} = \alpha z_n^a w_n^b, \quad w_{n+1} = \beta z_n^d w_{n-1}^c, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.30}$$

çarpılabilir tipteki fark denklem sisteminin iyi tanımlı kompleks değerli çözümleri için kapalı formda formüller elde etmiştir. Çözümlerin formu parametreler ve başlangıç değerleri açısından ayrıntılı olarak açıklanmıştır [65].

Stevic ve çalışma arkadaşları (2016), "*Two-dimensional product-type system of difference equations solvable in closed form*" adlı çalışmalarında,

$$z_{n+1} = \alpha z_n^a w_{n-1}^b, \quad w_{n+1} = \beta z_{n-1}^d w_{n-1}^c, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.31}$$

iki-boyutlu çarpılabilir tipteki fark denklem sisteminin çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Dahası fark denklem sisteminin genel çözümü için kapalı formda formüller elde etmişlerdir [54].

Stevic ve Rankovic (2016), "*On a practically solvable product-type system of difference equations of second order*" $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $z_{-1}, z_0, w_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere,

$$z_{n+1} = \alpha z_n^a w_n^b, \quad w_{n+1} = \beta w_n^c z_{n-1}^d, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.32}$$

ikinci mertebeden fark denklem sisteminin çözülebilirliğini çalışmışlardır [56].

Yazlık ve çalışma arkadaşları (2016), "*On the solutions of a three-dimensional system of difference equations*" adlı çalışmalarında, literatürdeki bazı sonuçları genişleterek

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{a_0 x_n + b_0 y_{n-2}}, \; y_{n+1} = \frac{y_n z_{n-1}}{a_1 y_n + b_1 z_{n-2}}, \; z_{n+1} = \frac{z_n x_{n-1}}{a_2 z_n + b_2 x_{n-2}}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.33}$$

üç-boyutlu fark denklem sisteminin açık çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca çözümlerin açık formlarını kullanarak sistemin iyi tanımlı çözümlerinin asimptotik davranışını da incelemişlerdir [79].

Ibrahim (2017), "*Behavior of two and three-dimensional systems of difference equations in modelling competitive populations*" adlı çalışmasında, $\{a_n\}$ dizisi ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 ve z_0 başlangıç koşulları $x_{-1}y_0 \neq -a_0$, $x_0 y_1 \neq -a_1$, $y_{-1}x_0 \neq -a_0$ ve $y_0 x_1 \neq -a_1$ koşullarını sağlamak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{a_n + x_{n-1} y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{a_n + y_{n-1} x_n}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{y_n z_n}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.34}$$

rekabetçi popülasyonlarda modellenmiş lineer olmayan fark denklem sisteminin kapalı formdaki çözümlerini belirlemiş ve sayısal örnekler vermiştir [25].

Elsayed ve çalışma arkadaşları (2017), "*On a solutions of fourth order rational systems of difference equations*" adlı çalışmalarında, x_{-i}, y_{-i}, $i \in \{0,1,2,3\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_n x_{n-2}}{y_n+y_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{x_n y_{n-2}}{\pm x_n \pm x_{n-3}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.35}$$

dördüncü mertebeden fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını elde etmişlerdir [18].

Stevic (2017), "*Product-type system of difference equations with a complex structure of solutions*" adlı çalışmasında, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $\alpha,\beta,w_{-2},w_{-1},w_0,z_{-2},z_{-1},z_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere

$$z_{n+1}=\alpha z_n^a w_n^b,\quad w_{n+1}=\beta w_{n-2}^c z_{n-2}^d,\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.36}$$

fark denklem sisteminin çözülebilirliği çeşitli metodlar kullanılarak çalışılmıştır. Bu sistem şimdiye kadar çalışılmış ilgili sistemlerin içinde en karmaşık yapıya sahip olan sistemdir ve çözümlerin bazı formları ilk defa ortaya çıkmıştır [58].

Stevic (2017), "*Solution to the solvability problem for a class of product-type systems of difference equations*" adlı çalışmasında,

$$z_n=\alpha z_{n-1}^a w_{n-1}^b,\quad w_n=\beta w_{n-2}^c z_{n-2}^d,\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.37}$$

çarpılabilir tipteki fark denklem sistemlerinin bir sınıfı için çözülebilirlik probleminin çözümü için, sistemin çözümleri açık formüller sunularak verilmiştir. Esas olarak en karmaşık durumlarda iki farklı yöntem kullanılarak çözülmüştür[59].

Stevic (2017), "*Solvable product-type system of difference equations with two dependent variables*" adlı çalışmasında,

$$z_{n+1}=\alpha z_n^a w_n^b,\quad w_{n+1}=\beta w_{n-2}^c z_{n-1}^d,\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.38}$$

kapalı formda çözülebilen iki boyutlu çarpılabilir tipteki fark denklem sistemlerinin sınıflarının sınırlı sayıda olduğunun farkedildiğini belirtmiştir. Bu tipten yeni bir sınıf sunmuştur. Çözüm formlarının ayrıntılı bir analizi verilmiştir. Sonuçlar, bu tipteki sistemlerde öncekileri tamamlar nitelikte ve çözüm formlarını açıklamanın son adımlarından birini sunar. [60].

Stevic (2017), "*Two-dimensional product-type systems of difference equations of delay-type (2, 2, 1, 2)*" adlı çalışmasında, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta, w_{-1}, w_0, z_{-1}, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$z_{n+1} = \alpha z_{n-1}^{a} w_{n}^{b}, \quad w_{n+1} = \beta w_{n-1}^{c} z_{n-1}^{d}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.39}$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini ispatlamıştır. En karmaşık formüller sırasıyla $a=0$, $c=0$ ve $abcd \neq 0$ durumlarına karşılık gelen sistemlere ilişkin üç farklı polinomun sıfırları cinsinden elde etmiştir [61].

Stevic ve çalışma arkadaşları (2017), "*On a solvable class of product-type systems of difference equations*" adlı çalışmalarında, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta, z_{-2}, z_{-1}, z_0, w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$z_{n+1} = \alpha z_{n}^{a} w_{n}^{b}, \quad w_{n+1} = \beta w_{n}^{c} z_{n-2}^{d}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.40}$$

fark denklem sisteminin çözülebilirliğini göstermişlerdir. Parametrelere göre elde edilen her durumda sistemlerin çözümleri için kapalı formda formüller elde etmişlerdir [62].

Tollu ve çalışma arkadaşları (2017), "*Global behavior of solutions for a difference equation of third order*" adlı çalışmalarında, a parametresi sıfırdan farklı reel sayı ve başlangıç değerleri $y_{-2}, y_{-1}, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{a} \right\}$ olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{1 - a y_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.41}$$

üçüncü mertebeden fark denklemini göz önünde bulundurmuşlardır. Yukarıdaki denklemin çözümlerinin hem formlarını hem de global davranışını belirlemişlerdir. Ayrıca çözümlerin global davranışını açıklamaya katkıda bulunan Padovan sayıları ile bu çözümlerin ilişkili olduğunu göstermişlerdir [72].

Haddad ve çalışma arkadaşları (2018), "*Well-defined solutions of a system of difference equations*" adlı çalışmalarında, a, b, α, β parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, $i \in \{0,1\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a x_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{b x_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.42}$$

fark denklem sisteminin çözümlerini ve çözümlerinin davranışını incelemişlerdir. Ayrıca bazı özel durumlara ve sayısal örneklere de yer vermişlerdir [19].

Khaliq ve Elsayed (2018), "*Qualitative study of a higher order rational difference equation*" adlı çalışmalarında, $r=\max\{l,m\}$ için $x_{-i},\ i\in\{0,1,\ldots,r\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar ve α, β ve γ sabitler olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_n x_{n-l}}{\beta x_{n-m}+\gamma x_{n-l}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.43}$$

fark denkleminin davranışlarını incelemişler ve bazı özel durumların çözümlerini elde etmişlerdir. Son olarak da elde edilen teorik sonuçların desteklenmesi için sayısal örneklere yer verilmiştir [26].

Almatrafi ve çalışma arkadaşları (2018), "*Qualitative behavior of two rational difference equations*" adlı çalışmalarında, α, β, $\gamma\in\mathbb{R}^+$ sabit ve $x_{-i},\ i\in\{0,1,2,3\}$, başlangıç koşullarının sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_n x_{n-3}}{\beta x_{n-3}-\gamma x_{n-2}},\quad x_{n+1}=\frac{\alpha x_n x_{n-3}}{-\beta x_{n-3}+\gamma x_{n-2}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.44}$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklemlerinin denge noktasının lokal ve global kararlılığı, çözümlerin sınırlılığı ve davranışını analiz etmişlerdir [6].

Okumuş ve Soykan (2018), "*Dynamical behavior of a system of three-dimensional nonlinear difference equations*" adlı çalışmalarında, $A\in(0,\infty)$ ve başlangıç koşulları $x_i, y_i, z_i\in(0,\infty),\ i\in\{-1,0\}$, olmak üzere

$$x_{n+1}=A+\frac{x_{n-1}}{z_n},\ y_{n+1}=A+\frac{y_{n-1}}{z_n},\ z_{n+1}=A+\frac{z_{n-1}}{y_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.45}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini, sınırlılığını, direncini ve pozitif denge noktalarının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir [47].

Stevic (2018), "*A four-dimensional solvable system of difference equations in the complex domain*" adlı çalışmasında, $a_i, b_i, c_i, d_i,\ i\in\{1,2,3,4\}$, x_0, y_0, z_0, u_0 kompleks sayılar olmak üzere

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{a_1}{x_n y_n z_n} + \frac{b_1}{y_n z_n u_n} + \frac{c_1}{z_n u_n x_n} + \frac{d_1}{u_n x_n y_n}, \\
y_{n+1} &= \frac{a_2}{x_n y_n z_n} + \frac{b_2}{y_n z_n u_n} + \frac{c_2}{z_n u_n x_n} + \frac{d_2}{u_n x_n y_n}, \\
z_{n+1} &= \frac{a_3}{x_n y_n z_n} + \frac{b_3}{y_n z_n u_n} + \frac{c_3}{z_n u_n x_n} + \frac{d_3}{u_n x_n y_n}, \\
u_{n+1} &= \frac{a_4}{x_n y_n z_n} + \frac{b_4}{y_n z_n u_n} + \frac{c_4}{z_n u_n x_n} + \frac{d_4}{u_n x_n y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

dört-boyutlu fark denklem sistemini kapalı formda çözmüştür [64].

Stevic ve çalışma arkadaşları (2018), "*Product-type system of difference equations with multiplicative coefficients solvable in closed form*" adlı çalışmalarında, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere

$$
z_{n+1} = \alpha z_n^a w_{n-1}^b, \quad w_{n+1} = \beta w_n^c z_{n-1}^d, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.47}
$$

çarpılabilir tipteki fark denklem sisteminin çözülebilirliğini çalışmışlardır [63].

Tollu ve çalışma arkadaşları (2018), "*On a solvable nonlinear difference equation of higher order*" adlı çalışmalarında, k ve l sabit doğal sayılar, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ parametreleri ve x_{-i}, $i=\overline{1,k+l}$, başlangıç değerleri reel sayılar, öyle ki $\beta^2+\gamma^2 \neq 0$ olmak üzere, yüksek mertebeden lineer olmayan

$$
x_n = \alpha x_{n-k} + \frac{\delta x_{n-k} x_{n-(k+l)}}{\beta x_{n-(k+l)} + \gamma x_{n-l}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.48}
$$

fark denklemini göz önünde bulundurmuşlardır. (2.48) denklemi kapalı formda çözmüşler ve literatürdeki bazı sonuçları önemli ölçüde genişletmişlerdir. $l=1$ durumu için elde edilen formülleri kullanarak, çözümlerin asimptotik davranışını ve başlangıç değerlerini iyi tanımlı yapmayan noktalar kümesini belirlemişlerdir [73].

Akrour ve çalışma arkadaşları (2019), "*On a system of difference equations of second order solved in a closed from*" adlı çalışmalarında, x_{-i}, y_{-i}, $i \in \{0,1\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı keyfi reel sabitler ve $c \neq 0$ olmak üzere a, b ve c parametreleri reel sabitler olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{ay_nx_{n-1}+bx_{n-1}+c}{y_nx_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{ax_ny_{n-1}+by_{n-1}+c}{x_ny_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0,\tag{2.49}$$

fark denklem sistemini kapalı formda çözmüşlerdir. Bu denklem sisteminin özel durumlarının çözümlerini Tribonacci ve Padovan sayıları ile karakterize etmişlerdir [1].

Akrour ve çalışma arkadaşları (2019), "*On a system of difference equations of third order solved in closed form*" adlı çalışmalarında, a, b, c ve d $(d\neq 0)$ parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, $i\in\{0,1,2\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sabitler olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{ay_{n-2}x_{n-1}y_n+bx_{n-1}y_{n-2}+cy_{n-2}+d}{y_{n-2}x_{n-1}y_n},\; y_{n+1}=\frac{ax_{n-2}y_{n-1}x_n+by_{n-1}x_{n-2}+cx_{n-2}+d}{x_{n-2}y_{n-1}x_n},\; n\in\mathbb{N}_0,\tag{2.50}$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişlerdir. Burada $a=b=c=d=1$ için elde edilen çözümlerin Tetrenacci sayıları ile ilişkilendirildiği görülmüştür [2].

El-Dessoky ve çalışma arkadaşları (2019), "*Expressions of the solutions of some systems of difference equations*" adlı çalışmalarında, z_{-i}, t_{-i}, $i\in\{0,1\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$z_{n+1}=\frac{z_nt_{n-1}}{\pm t_n\pm t_{n-1}},\quad t_{n+1}=\frac{t_nz_{n-1}}{\pm z_n\pm z_{n-1}}\tag{2.51}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan fark denklem sistemlerinin periyodik karakterlerini ve çözümlerinin formlarını elde etmişlerdir [12].

Kara ve Yazlık (2019), "*On the system of difference equations* $x_n=\dfrac{x_{n-2}y_{n-3}}{y_{n-1}\left(a_n+b_nx_{n-2}y_{n-3}\right)}$, $y_n=\dfrac{y_{n-2}x_{n-3}}{x_{n-1}\left(\alpha_n+\beta_ny_{n-2}x_{n-3}\right)}$" adlı çalışmalarında, $\forall n\in\mathbb{N}_0$ için, (a_n), (b_n), (α_n), (β_n) dizileri ve x_{-j}, y_{-j}, $j\in\{1,2,3\}$, başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_n=\frac{x_{n-2}y_{n-3}}{y_{n-1}\left(a_n+b_nx_{n-2}y_{n-3}\right)},\quad y_n=\frac{y_{n-2}x_{n-3}}{x_{n-1}\left(\alpha_n+\beta_ny_{n-2}x_{n-3}\right)},\quad n\in\mathbb{N}_0,\tag{2.52}$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişlerdir [28].

Kara ve Yazlık (2019), "*Solvability of a system of nonlinear difference equations of higher order*" adlı çalışmalarında, $k,l\in\mathbb{N}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ve x_{-i}, y_{-i}, $i=\overline{1,k+l}$, başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-k} y_{n-k-l}}{y_{n-l}\left(a_n + b_n x_{n-k} y_{n-k-l}\right)}, \quad y_n = \frac{y_{n-k} x_{n-k-l}}{x_{n-l}\left(\alpha_n + \beta_n y_{n-k} x_{n-k-l}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \qquad (2.53)$$

lineer olmayan yüksek mertebeden fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişlerdir. Ayrıca elde edilen formülleri kullanarak, verilen fark denklem sisteminin $k = 2$, $l = k$ durumunun iyi tanımlı çözümlerinin asimptotik davranışlarını da incelemişlerdir [29].

Stevic ve Tollu (2019), "*Solvability and semi-cycle analysis of a class of nonlinear systems of difference equations*" adlı çalışmalarında, aşağıda verilen

$$x_n = \frac{a + p_{n-1} q_{n-2}}{p_{n-1} + q_{n-2}}, \; y_n = \frac{a + r_{n-1} s_{n-2}}{r_{n-1} + s_{n-2}}, \; n \in \mathbb{N}_0, \qquad (2.54)$$

sekiz fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin yarı-döngü analizini çalışmışlar ve verilen sistemlerin kapalı formda çözülebilir olduklarını göstermişlerdir. Burada $a \in [0, \infty)$, p_n, q_n, r_n ve s_n, x_n ya da y_n dizilerinden birisi ve $x_{-j}, y_{-j}, j \in \{1, 2\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sabitlerdir [66].

Stevic ve Tollu (2019), "*Solvability of eight classes of nonlinear systems of difference equations*" adlı çalışmalarında, $a \in [0, \infty)$, p_n, q_n, r_n ve s_n, x_n ya da y_n dizilerinden birisi ve $x_{-j}, y_{-j}, j \in \{0, 1, 2\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sabitler olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a + p_{n-1} q_{n-2}}{p_{n-1} + q_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{a + r_{n-1} s_{n-2}}{r_{n-1} + s_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \qquad (2.55)$$

sekiz fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin yarı-döngü analizi çalışılmış ve verilen sistemlerin kapalı formda çözülebilir oldukları göstermişlerdir [67].

Tollu ve Yalçınkaya (2019), "*Global behavior of a three-dimensional system of difference equations of order three*" adlı çalışmalarında, u_{-i}, v_{-i}, w_{-i} $i \in \{0, 1, 2\}$, başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar, α_{-j}, β_{-j}, γ_{-j} $j \in \{1, 2, 3\}$ ve p, q, r parametreleri pozitif reel sayılar olmak üzere

$$u_{n+1} = \frac{\alpha_1 u_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 v_{n-2}^p}, \quad v_{n+1} = \frac{\alpha_2 v_{n-1}}{\beta_2 + \gamma_2 w_{n-2}^q}, \quad w_{n+1} = \frac{\alpha_3 w_{n-1}}{\beta_3 + \gamma_3 u_{n-2}^r}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \qquad (2.56)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin global davranışını araştırmışlardır [74].

Yazlık ve Kara (2019), "*On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coefficients*" adlı çalışmalarında, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

dizileri iki periyotlu ve $x_{-i}, y_{-i},\ i \in \{0,1,\ldots,k\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_{n-k+1} y_{n-k}}{y_n - \alpha_n} + \beta_{n+1}, \quad y_{n+1} = \frac{b_n y_{n-k+1} x_{n-k}}{x_n - \beta_n} + \alpha_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.57}$$

fark denklem sisteminin çözülebilirliğini göstermişlerdir. Ayrıca $a_0 = b_1$ ve $a_1 = b_0$ olduğu zaman (2.57) sisteminin çözümlerinin davranışını da incelemişlerdir [80].

Yazlık ve Kara (2019), "*Beşinci mertebeden fark denklem sisteminin çözülebilirliği üzerine*" adlı çalışmalarında, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ birer dizi ve $j \in \{1,2,3,4,5\}$ için x_{-j}, y_{-j} başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-4} y_{n-5}}{y_{n-1}\left(a_n + b_n x_{n-2} y_{n-3} x_{n-4} y_{n-5}\right)}, \quad y_n = \frac{y_{n-4} x_{n-5}}{x_{n-1}\left(\alpha_n + \beta_n y_{n-2} x_{n-3} y_{n-4} x_{n-5}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.58}$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişlerdir. Ayrıca $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin sabit olduğu durumlarda bahsi geçen sistemin çözümlerinin periyodikliği ve asimptotik davranışını da incelemişlerdir [81].

Kara ve çalışma arkadaşları (2020), "*Global behavior of two-dimensional difference equations system with two period coefficients*" adlı çalışmalarında, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizileri pozitif, reel ve iki periyotlu ve x_{-i}, y_{-i}, $i \in \{0,1\}$, başlangıç değerleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{1 + y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{\beta_n}{1 + x_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.59}$$

fark denklem sistemini araştırmışlardır. Ayrıca her pozitif çözümün sınırlı olduğunu göstermişler ve global davranışını da incelemişlerdir [30].

Sanbo ve Elsayed (2019), "*Analytical study of a system of difference equation*" adlı çalışmalarında, avcı ortamını taşıma kapasitesinin av sayısıyla orantılı olduğu yerde av-avcı modelinin niteliksel davranışı üzerine çalışmışlarıdır. Burada x_{-i}, y_{-i}, $i \in \{0,1,2\}$, başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_{n-2}}{y_{n-1}+y_{n-2}},\quad y_{n+1}=\frac{y_n x_{n-2}}{\pm x_{n-1}\pm x_{n-2}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.60}$$

fark denklem sistemleri göz önünde bulundurulmuştur. Ayrıca sistemin bazı özel durumlarının özel çözüm formları verilmiştir. Teorik sonuçların doğrulanması için bazı sayısal örnekler verilmiştir [50].

Kara ve Yazlık (2020), "*On a solvable three-dimensional system of difference equations*" adlı çalışmalarında, a, b, c, d, e, f parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i\in\{1,2,3\}$, reel sayılar olmak üzere

$$x_n=\frac{z_{n-2}x_{n-3}}{ax_{n-3}+by_{n-1}},\quad y_n=\frac{x_{n-2}y_{n-3}}{cy_{n-3}+dz_{n-1}},\quad z_n=\frac{y_{n-2}z_{n-3}}{ez_{n-3}+fx_{n-1}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.61}$$

üç-boyutlu fark denklem sisteminin literatürdeki bazı sonuçları daha da genişleterek çözülebilirliğini göstermişlerdir. Ayrıca elde edilen formülleri kullanarak başlangıç değerlerinin yasaklı kümesini ve çözümlerin asimptotik davranışlarını da incelemişlerdir [31].

Kara ve çalışma arkadaşları (2020), "*Well-defined solutions of a three-dimensional system of difference equations*" adlı çalışmalarında, a, b, c, α, β, γ parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i\in\{0,1\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{ax_n z_{n-1}}{z_n-\beta}+\gamma,\quad y_{n+1}=\frac{by_n x_{n-1}}{x_n-\gamma}+\alpha,\quad z_{n+1}=\frac{cz_n y_{n-1}}{y_n-\alpha}+\beta,\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.62}$$

üç-boyutlu fark denklem sisteminin çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Elde edilen formülleri kullanılarak çözümlerin asimptotik davranışı belirlenmiş ve periyodik çözümlerin varlığı için şartlar verilmiştir. Teorik sonuçların desteklenmesi için bazı sayısal örnekler verilmiştir [43].

Halim ve çalışma arkadaşları (2020), "*Representation of solutions of a two-dimensional system of difference equations*" adlı çalışmalarında, a, b parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, $i\in\{0,1,2\}$, başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}x_{n-2}}{y_n\left(a+by_{n-1}x_{n-2}\right)},\quad y_{n+1}=\frac{x_{n-1}y_{n-2}}{x_n\left(a+bx_{n-1}y_{n-2}\right)},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.63}$$

iki-boyutlu fark denklem sisteminin genel çözümü için formüllerinin temsilini vermişlerdir. Ayrıca bu temsille ilişkili olarak bazı teorik açıklamalar verilmiştir [20].

Halim ve çalışma arkadaşları (2020), "*On a three-dimensional solvable system of difference equations*" adlı çalışmalarında, a, b parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i \in \{0,1\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{z_{n-1}}{a + b y_n z_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{a + b z_n x_{n-1}}, \quad z_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{a + b x_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.64}$$

fark denklem sisteminin çözümlerini formülize etmişlerdir [21].

Khelifa ve çalışma arkadaşları (2020), "*On a system of three difference equations of higher order solved in terms of lucas and fibonacci numbers*" adlı çalışmalarında, x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i \in \{0,1,\ldots,k\}$, başlangıç koşulları -3'ten farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1+2y_{n-k}}{3+y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1+2z_{n-k}}{3+z_{n-k}}, \quad z_{n+1} = \frac{1+2x_{n-k}}{3+x_{n-k}}, \quad n,k \in \mathbb{N}_0, \tag{2.65}$$

yüksek mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin genel çözümünün elde edilmesiyle ilgili teorik açıklamalar vermişlerdir. Ayrıca bu sistem kapalı formda çözülmüş olup çözümleri Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilişkilendirilmiştir [27].

Şahinkaya ve çalışma arkadaşları (2020), "*A solvable system of nonlinear difference equations*" adlı çalışmalarında, $a \in [0,\infty)$ ve x_0, y_0, z_0 başlangıç değerleri reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_n + a}{x_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n z_n + a}{y_n + z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n x_n + a}{z_n + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.66}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin açık formda çözülebilirliğini göstermişlerdir. Ayrıca bu formüller kullanılarak çözümlerin asimptotik davranışlarını araştırmışlar ve bazı sayısal örnekler verilerek teorik sonuçları doğrulatmışlardır [69].

Tollu (2020), "*Periodic solutions of a system of nonlinear difference equations with periodic coefficients*" adlı çalışmasında, x_0, y_0 başlangıç değerleri reel sayılar ve $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, $(c_n)_{n\geq 0}$, $(d_n)_{n\geq 0}$ katsayıları pozitif terimli iki periyotlu diziler olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a_n}{x_n} + \frac{b_n}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{c_n}{x_n} + \frac{d_n}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.67}$$

fark denklem sistemini göz önüne almıştır. Bu sistem, bütün çözümleri iki periyotlu olan ya da iki periyotlu çözümlere yakınsayan bir sistemin genişletilmiş halidir. Sistemi çözmek için yeni bir metod kullanarak sistemin pozitif çözümlerinin davranışı incelemiştir [75].

Akrour ve çalışma arkadaşları (2021), "*Solutions formulas for some general systems of difference equations*" adlı çalışmalarında, $n \in \mathbb{N}_0$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}$ için bire-bir ve sürekli fonksiyonlar, x_{-i}, y_{-i}, $i \in \{0,1,2,3\}$, D kümesinde reel sayılar ve a, b, c ve d keyfi reel sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f^{-1}\left(ag\left(y_n\right)+bf\left(x_{n-1}\right)+cg\left(y_{n-2}\right)+df\left(x_{n-3}\right)\right), \\ y_{n+1} &= g^{-1}\left(af\left(x_n\right)+bg\left(y_{n-1}\right)+cf\left(x_{n-2}\right)+dg\left(y_{n-3}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.68}$$

ve

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f^{-1}\left(a+\frac{b}{g\left(y_n\right)}+\frac{c}{g\left(y_n\right)f\left(x_{n-1}\right)}+\frac{d}{g\left(y_n\right)f\left(x_{n-1}\right)g\left(y_{n-2}\right)}\right), \\ y_{n+1} &= g^{-1}\left(a+\frac{b}{f\left(x_n\right)}+\frac{c}{f\left(x_n\right)g\left(y_{n-1}\right)}+\frac{d}{f\left(x_n\right)g\left(y_{n-1}\right)f\left(x_{n-2}\right)}\right), \end{aligned} \tag{2.69}$$

iki genel fark denklem sistemlerinin çözümlerini elde etmişlerdir [3].

Akrour ve çalışma arkadaşları (2021), "*On the solutions of a system of max-type difference equations*" adlı çalışmalarında, x_{-i}, y_{-i}, $i \in \{0,1,2\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sabitler olmak üzere

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}, \frac{x_n y_{n-1}}{y_{n-2}}\right\}, \quad y_{n+1} = \max\left\{y_{n-1}, \frac{y_n x_{n-1}}{x_{n-2}}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.70}$$

max-type fark denklem sisteminin çözümlerinin açık formüllerini vermişlerdir [4].

Kara ve Yazlık (2021), "*On a solvable system of non-linear difference equations with variable coefficients*" adlı çalışmalarında, $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizileri ve x_{-j}, y_{-j}, z_{-j}, $j \in \{1,2,3\}$, başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-2} z_{n-3}}{z_{n-1}\left(a_n + b_n x_{n-2} z_{n-3}\right)},$$
$$y_n = \frac{y_{n-2} x_{n-3}}{x_{n-1}\left(\alpha_n + \beta_n y_{n-2} x_{n-3}\right)}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.71}$$
$$z_n = \frac{z_{n-2} y_{n-3}}{y_{n-1}\left(A_n + B_n z_{n-2} y_{n-3}\right)},$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişlerdir. Ayrıca elde edilen formülleri kullanarak başlangıç değerlerinin yasaklı kümesini belirlemişlerdir. Son olarak da bahsi geçen sistemin periyodik çözümlerini elde etmişlerdir [32].

Kara ve çalışma arkadaşları (2021), "*On a three-dimensional system of difference equations with variable coefficients*" adlı çalışmalarında, $k \in \mathbb{N}_0$, $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(c_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(d_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(e_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizileri ve x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i \in \{0,1,\ldots,3k\}$, başlangıç değerleri reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} z_{n-3j}}{\prod_{j=1}^{k} x_{n-(3j-1)}\left(a_n + b_n \prod_{j=0}^{k} z_{n-3j}\right)},$$
$$y_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} x_{n-3j}}{\prod_{j=1}^{k} y_{n-(3j-1)}\left(c_n + d_n \prod_{j=0}^{k} x_{n-3j}\right)}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.72}$$
$$z_{n+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k} y_{n-3j}}{\prod_{j=1}^{k} z_{n-(3j-1)}\left(e_n + f_n \prod_{j=0}^{k} y_{n-3j}\right)},$$

üç-boyutlu fark denklem sistemini göz önüne almışlardır. Yukarıdaki sistemin iyi tanımlı çözümleri için açık formüller vermişlerdir. Ayrıca sistemin çözümlerinin yasaklı kümesini bulmuşlardır. Sabit durum için periyodik çözümlerin varlığı gösterilmiş ve çözümlerin asimptotik davranışı da araştırılmıştır [33].

Kara ve Yazlık (2021), "*Solvability of a nonlinear three-dimensional system of difference equations with constant coefficients*" adlı çalışmalarında, a, b, c, d, e, f

parametreleri ve x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i \in \{0,1,2\}$, başlangıç değerleri kompleks sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{a x_{n-2} + b z_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{z_n y_{n-2}}{c y_{n-2} + d x_{n-1}}, \quad z_{n+1} = \frac{x_n z_{n-2}}{e z_{n-2} + f y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.73}$$

üç-boyutlu fark denklem sisteminin çözülebilirliğini göstermişlerdir. Ayrıca elde edilen formüllerle başlangıç değerlerinin yasaklı kümesini belirlemişlerdir. Son olarak üç boyutlu fark denklem sistemi ile ilgili bazı uygulamalar verilmiştir [34].

Khelifa ve Halim (2021), "*General solutions to systems of difference equations and some of their representations*" adlı çalışmalarında, $\{F_n\}_{n=0}^{+\infty}$ Fibonacci dizisi olmak üzere

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{F_{m+2} + F_{m+1} x_{n-k}^{((j+1)\mathrm{mod}(p))}}{F_{m+3} + F_{m+2} x_{n-k}^{((j+1)\mathrm{mod}(p))}}, \quad n, m, p, k \in \mathbb{N}_0, \quad j = \overline{1, p}, \tag{2.74}$$

fark denklem sisteminin çözümlerini Fibonacci sayıları ile karakterize etmişlerdir [42].

Akrour ve çalışma arkadaşları (2022), "*On a three dimensional higher order system of difference equations*" adlı çalışmalarında, α, β, a, b, A, B parametreleri ve $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ için x_{-i}, y_{-i}, z_{-i} başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k+1}^p y_n}{\alpha y_{n-k}^p + \beta y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-k+1}^p z_n}{a z_{n-k}^p + b z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{z_{n-k+1}^p x_n}{A x_{n-k}^p + B x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad p, k \in \mathbb{N}, \tag{2.75}$$

üç boyutlu lineer olmayan yüksek mertebeden fark denklem sisteminin çözüm formlarını türetmişlerdir [5].

Halim ve çalışma arkadaşları (2022), "*On a solvable system of p difference equations of higher order* " adlı çalışmalarında, a, b parametreleri sıfırdan farklı reel sayılar ve $j = \overline{1, p}$ için $x_{-k}^{(j)}$, $x_{-k+1}^{(j)}, \ldots, x_0^{(j)}$ başlangıç koşulları $-\dfrac{a}{b}$ den farklı olmak üzere

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{x_{n-k}^{(j+1)\ (\mathrm{mod}\ p)}}{a + b x_{n-k}^{(j+1)\ (\mathrm{mod}\ p)}}, \quad n, p, k \in \mathbb{N}_0, \ j = \overline{1, p}, \tag{2.76}$$

yüksek mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin iyi tanımlı çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca verilen genel çözüm için bazı teorik açıklamalar yapılmıştır [22].

Hamioud ve çalışma arkadaşları (2022), "*On a three dimensional nonautonomous system of difference equations*" adlı çalışmalarında, $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{r_n\}$ pozitif sayıların 3-periyotlu dizileri ve $i \in \{-3,-2,-1,0\}$ için $x_i, y_i, z_i \in [0,\infty)$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{p_n + y_n}{p_n + y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{q_n + z_n}{q_n + z_{n-3}}, \quad z_{n+1} = \frac{r_n + x_n}{r_n + x_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.77}$$

şeklinde tanımlanan dördüncü mertebeden rasyonel otonom olmayan üç boyutlu fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin global davranışını araştırmışlardır [23].

Kara ve Yazlık (2022), "*On a solvable system of difference equations via some number sequences* " adlı çalışmalarında, a, b, c, d, e, f parametreleri ve $i \in \{1,2,3\}$ için x_{-i} , y_{-i}, z_{-i} başlangıç değerleri reel sayı olmak üzere

$$x_n = \frac{z_{n-1}z_{n-3}}{bx_{n-2} + az_{n-3}}, \quad y_n = \frac{x_{n-1}x_{n-3}}{dy_{n-2} + cx_{n-3}}, \quad z_n = \frac{y_{n-1}y_{n-3}}{fz_{n-2} + ey_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.78}$$

üç boyutlu rasyonel fark denkleminin açık formda çözülebilirliğini göstermişlerdir. Sonrasında bahsi geçen sistemin başlangıç koşullarının yasaklı kümesini elde etmişlerdir. Son olarak elde edilen sonuçları desteklemesi için sayısal örnekler ve uygulamalar verilmiştir [35].

Kara ve Yazlık (2022), "*On a solvable system of rational difference equations of higher order*" adlı çalışmalarında, $n \in \mathbb{N}_0$, $k,l \in \mathbb{N}$ olduğunda, $i \in \overline{1,k+l}$ için x_{-i}, y_{-i}, z_{-i} başlangıç değerleri reel sayılar ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ve $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizileri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-k}z_{n-l}}{b_n x_{n-k} + a_n z_{n-k-l}}, \quad y_n = \frac{y_{n-k}x_{n-l}}{d_n y_{n-k} + c_n x_{n-k-l}}, \quad z_n = \frac{z_{n-k}y_{n-l}}{f_n z_{n-k} + e_n y_{n-k-l}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.79}$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişlerdir. Elde edilen formülleri kullanarak başlangıç koşullarının yasaklı kümesini elde etmişlerdir. Ayrıca $k=3$, $l=1$ durumu için çözümlerin asimptotik davranışlarını belirlemişlerdir [36].

Kara ve Yazlık (2022), "*On the solutions of three-dimensional system of difference equations via recursive relations of order two and applications* " adlı çalışmalarında, $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ parametreleri ve $i \in \{0,1,2\}$ için x_{-i}, y_{-i}, z_{-i} başlangıç değerleri reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_n y_{n-2}}{bx_{n-1} + ay_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{z_n z_{n-2}}{dy_{n-1} + cz_{n-2}}, \quad z_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{fz_{n-1} + ex_{n-2}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.80}$$

üç-boyutlu fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişlerdir. Ayrıca elde edilen çözümleri kullanarak başlangıç koşullarının iyi tanımlı olmayan noktaların kümesini de elde etmişlerdir. Son olarak da bahsi geçen fark denklem sistemi ile ilgili uygulamalar verilmiştir [37].

Kara (2022), "*Solvability of a three-dimensional system of nonlinear difference equations* " adlı çalışmasında, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizileri ve x_{-j}, y_{-j}, $j \in \{1,2,\ldots,5\}$, başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{y_{n-4} z_{n-5}}{y_{n-1}\left(a_n + b_n z_{n-2} x_{n-3} y_{n-4} z_{n-5}\right)}, \\
y_n &= \frac{z_{n-4} x_{n-5}}{z_{n-1}\left(\alpha_n + \beta_n x_{n-2} y_{n-3} z_{n-4} x_{n-5}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\
z_n &= \frac{x_{n-4} y_{n-5}}{x_{n-1}\left(A_n + B_n y_{n-2} z_{n-3} x_{n-4} y_{n-5}\right)},
\end{aligned} \tag{2.81}$$

üç-boyutlu değişken katsayılı fark denklem sisteminin kapalı formda çözümlerini elde etmiştir. Daha sonra katsayıları sabit alarak indirgenen fark denklem sisteminin kapalı formda çözümlerini de formülüze etmiştir. Son olarak elde edilen çözümleri kullanarak başlangıç koşullarının iyi tanımlı olmayan noktaların kümesini de elde etmiştir [44].

Kara ve Yazlık (2022), "*Solutions formulas for three-dimensional difference equations system with constant coefficients*" adlı çalışmalarında, a,b,c parametreleri ve x_{-j}, y_{-j}, z_{-j}, $j \in \{1,2,3\}$, başlangıç değerleri reel sayı olmak üzere

$$x_n = \frac{ax_{n-3} z_{n-2} + b}{cy_{n-1} z_{n-2} x_{n-3}}, \quad x_n = \frac{ay_{n-3} x_{n-2} + b}{cz_{n-1} x_{n-2} y_{n-3}}, \quad x_n = \frac{az_{n-3} y_{n-2} + b}{cx_{n-1} y_{n-2} z_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.82}$$

üç boyutlu fark denklem sisteminin açık formda çözümlerini elde etmişlerdir. Dahası a,b,c parametrelerinin sıfır olup olmamasına bağlı olarak 3 farklı durumda denklem sisteminin çözümlerini de incelemişlerdir. Son olarak $a=b=c=1$ durumu için denklem sisteminin çözümlerini Fibonacci sayıları ile ilişkilendirmişlerdir [45].

Kara ve Aktaş (2022), "*On solutions of three-dimensional system of difference equations with constant coefficients*" adlı çalışmalarında, x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i\in\{1,2,3\}$, başlangıç değerleri ve a, b, c, d, e ve f parametreleri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_n=\frac{x_{n-2}y_{n-3}}{y_{n-1}\left(a+bx_{n-2}y_{n-3}\right)},\ y_n=\frac{y_{n-2}z_{n-3}}{z_{n-1}\left(c+dy_{n-2}z_{n-3}\right)},\ z_n=\frac{z_{n-2}x_{n-3}}{x_{n-1}\left(e+fz_{n-2}x_{n-3}\right)},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.83}$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilirliğini göstermişleridir. Dahası a, c ve e parametrelerinin 1 'e eşit olup olmamalarına göre açık formdaki çözümlerini elde etmişlerdir. Ek olarak bahsi geçen sistemin periyodik çözümlerini elde etmişlerdir. Son olarak elde edilen çözümleri kullanarak başlangıç koşullarını iyi tanımlı yapmayan noktaların kümesini de elde etmişlerdir [46].

Taşkara ve Büyük (2022), "*On the solutions of three-dimensional difference equation systems via Pell numbers*" adlı çalışmalarında, x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i\in\{1,2,3\}$, başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere,

$$x_n=\frac{z_{n-1}z_{n-3}}{x_{n-2}+2z_{n-3}},\quad y_n=\frac{x_{n-1}x_{n-3}}{-y_{n-2}+6x_{n-3}},\quad z_n=\frac{y_{n-1}y_{n-3}}{z_{n-2}+14y_{n-3}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.84}$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini literatürde iyi bilinen Pell sayıları ile karakterize etmişlerdir [70].

2.2. Tanım ve Teoremler

Bu alt bölümdeki tüm tanım ve teoremler [82], [83] ve [84] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

Tanım 2.2.1. $k:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. E öteleme (kaydırma) operatörü

$$E\,k(n)=k(n+1) \tag{2.85}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.2. $k:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için Δ ileri fark operatörü veya k ’nın birinci mertebeden farkı

$$\Delta k(n)=k(n+1)-k(n) \tag{2.86}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.3. $n\geq n_0$ için $\Delta G(n)=g(n)$ olsun. O zaman $n\geq n_0$ için

$$\Delta^{-1}g(n)=G(n)+c \tag{2.87}$$

biçiminde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne, ters fark operatörü denir. $G(n)$ fonksiyonuna da $g(n)$ ’nin ters farkı denir. Burada c keyfi sabittir.

Teorem 2.2.1. $g(n)$, $n\geq n_0$ için tanımlı bir fonksiyon ise o halde

$$\Delta^{-1}g(n)=c+\sum_{j=n_0}^{n-1}g(j), \tag{2.88}$$

dir. Burada c keyfi sabittir.

Tanım 2.2.4. $n\in\mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve $k:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$G(n,k(n),k(n+1),\ldots,k(n+t))=0 \tag{2.89}$$

ifadesine fark denklemi denir. Bu tez boyunca $k(n)$ yerine k_n sembolü kullanılmıştır.

Tanım 2.2.5. Bir fark denkleminde bağımlı değişkenin en büyük indisi ile en küçük indisinin farkına o fark denklmeinin mertebesi ya da basamağı denir.

Tanım 2.2.6. $\beta_1(n),\beta_2(n),...,\beta_t(n)$ katsayıları ile $h(n)$, $n\geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyon ve $\mathbb{N}_{n_0}$ kümesinde $\beta_t(n)\neq 0$ olmak üzere

$$y_{n+t}+\beta_1(n)y_{n+t-1}+\ldots+\beta_t(n)y_n=h(n) \tag{2.90}$$

şeklindeki fark denklemine lineer fark denklemi denir. Bu şekilde olmayan fark denklemlerine ise lineer olmayan fark denklemi denir. Lineer fark denklemleri; lineer homojen fark denklemi, lineer homojen olmayan fark denklemi, sabit katsayılı lineer fark denklemi ve değişken katsayılı lineer fark denklemi şeklinde sınıflandırılır.

Tanım 2.2.7. Reel sayıların herhangi bir alt aralığı W olsun. $g: W^{t+1} \to W$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise $\forall\ y_{-t},\ y_{-(t-1)},\ldots,\ y_0 \in W$ başlangıç koşulları için

$$y_{n+1} = g\left(y_n, y_{n-1}, ..., y_{n-t}\right),\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.91}$$

fark denklemi bir tek $\left\{y_n\right\}_{n=-t}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2.8. $y_{n+1} = g\left(y_n, y_{n-1}, ..., y_{n-t}\right),\ n \in \mathbb{N}_0$, fark denkleminin bir çözümü $\left\{y_n\right\}_{n=-t}^{\infty}$ olsun. Eğer bu çözüm $n \geq -t$ için $y_{n+t} = y_n$ eşitliğini sağlıyorsa bu çözüme $t-$ periyotludur denir. Bu şartı sağlayan sıfırdan büyük en küçük t sayısına da asal periyot denir.

Tanım 2.2.9. $\left\{y_n\right\}$ dizisinden belli sayıda terim çıkartıldığında, kalan sonsuz sayıdaki terim için $y_{n+k} = y_n$ eşitliği sağlanıyorsa bu diziye er geç $k-$periyotludur denir. Bu şartı sağlayan sıfırdan büyük en küçük tam sayı k'dır.

Tanım 2.2.10. (2.91) denkleminde

$$\bar{y} = g\left(\bar{y}, \bar{y}, ..., \bar{y}\right) \tag{2.92}$$

koşulunu sağlayan $\bar{y}$ noktasına (2.91) denkleminin denge noktası denir. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $y_n = \bar{y}$ eşitliği sağlanıyorsa, $\bar{y}$'ye g'nin sabit noktası denir.

Tanım 2.2.11. $r, l \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, r+l}$ için y_{-j} başlangıç koşulları reel sayılar, W reel sayıların herhangi bir alt aralığı ve $g: W^{r+l} \to W$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon

$$y_n = g\left(y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-r-l}\right),\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.93}$$

fark denklemini

$$F = \left\{\left(y_{-r-l}, \ldots, y_{-1}\right) \in \mathbb{R}^{r+l} : j = \overline{0, n-1}\ için\ y_j \in W, y_n \notin W\right\}$$

iyi tanımlı yapmayan noktalar kümesine yasaklı küme (forbidden set) denir.

Teorem 2.2.3. $\left(c_n\right)$ ve $\left(d_n\right)$ birer dizi olsun. $j \in \left\{0, 1, \ldots, n-1\right\}$ için

$$z_{rn+j} = c_n z_{r(n-1)+j} + d_n,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.94}$$

lineer fark denkleminin çözümü

$$z_{rn+j} = \left(\prod_{j=0}^{n} c_j\right) z_{j-r} + \sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{j=k+1}^{n} c_j\right) d_k \tag{2.95}$$

biçimindedir. Eğer c_n ve d_n katsayıları $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $d \in \mathbb{R}$ için $c_n = c$ ve $d_n = d$ biçiminde sabit alınırsa ve $\forall l < j$ için $\prod_{i=j}^{l} \gamma_i = 1$ ve $\sum_{i=j}^{l} \eta_i = 0$ eşitlikleri de göz önünde bulundurulursa

$$z_{rn+j} = c z_{r(n-1)+j} + d, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.96}$$

lineer fark denkleminin çözümü

$$z_{rn+j} = \begin{cases} c^{n+1} y_{j-r} + \dfrac{c^{n+1}-1}{c-1} b, & c \neq 1, \\ y_{j-r} + (n+1) b, & c = 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.97}$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 2.2.12.

$$\begin{cases} g_1\left(y_{n+l}, y_{n+(l-1)}, \ldots, y_n\right) = h_1(n) \\ g_2\left(y_{n+l}, y_{n+(l-1)}, \ldots, y_n\right) = h_2(n) \\ \vdots \\ g_l\left(y_{n+l}, y_{n+(l-1)}, \ldots, y_n\right) = h_l(n), \end{cases} \tag{2.98}$$

sistemine l boyutlu ve $l.$ mertebeden fark denklem sistemi denir.

Tanım 2.2.13. $B(n)$ singüler olmayan $l \times l$ tipinde bir matris fonksiyonu olmak üzere

$$Y(n+1) = B(n) Y(n), \tag{2.99}$$

sistemine homojen lineer fark denklem sistemi denir. Benzer biçimde $h(n) \in \mathbb{R}^l$ olmak üzere

$$Y(n+1) = B(n) Y(n) + h(n), \tag{2.100}$$

sistemine homojen olmayan lineer fark denklem sistemi denir.

Teorem 2.2.4. J_1, J_2, J_3 reel sayıların herhangi üç alt aralığı ve $g_1 : J_1^{k+1} \times J_2^{k+1} \times J_3^{k+1} \to J_1$, $g_2 : J_1^{k+1} \times J_2^{k+1} \times J_3^{k+1} \to J_2$ ve $g_3 : J_1^{k+1} \times J_2^{k+1} \times J_3^{k+1} \to J_3$ sürekli diferansiyellenebilen üç fonksiyon olsun. $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ olmak üzere $\forall \left(x_{-j}, y_{-j}, z_{-j}\right) \in J_1 \times J_2 \times J_3$ başlangıç koşulları için

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_1\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_{n-k}\right), \\ y_{n+1} = g_2\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_{n-k}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ z_{n+1} = g_3\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_{n-k}\right), \end{cases} \tag{2.101}$$

sistemi tek bir $\left\{\left(x_n, y_n, z_n\right)\right\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2.14 Sistem (2.101)' in iyi tanımlı bir çözümü $\left\{\left(x_n, y_n, z_n\right)\right\}_{n=-k}^{\infty}$ olsun. Eğer $\left\{\left(x_n, y_n, z_n\right)\right\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü, $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n,\ y_{n+p} = y_n,\ z_{n+p} = z_n$ koşulunu sağlıyorsa $\left\{\left(x_n, y_n, z_n\right)\right\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü p-periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p sayısına da asal periyot denir.

Teorem 2.2.5. J_1, J_2, J_3, J_4 reel sayıların herhangi dört alt aralığı ve $g_1 : J_1^{k+1} \times J_2^{k+1} \times J_3^{k+1} \times J_4^{k+1} \to J_1$, $g_2 : J_1^{k+1} \times J_2^{k+1} \times J_3^{k+1} \times J_4^{k+1} \to J_2$, $g_3 : J_1^{k+1} \times J_2^{k+1} \times J_3^{k+1} \times J_4^{k+1} \to J_3$ ve $g_4 : J_1^{k+1} \times J_2^{k+1} \times J_3^{k+1} \times J_4^{k+1} \to J_4$ sürekli diferansiyellenebilen dört fonksiyon olsun. $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ olmak üzere $\forall\left(x_{-j}, y_{-j}, z_{-j}, t_{-j}\right) \in J_1 \times J_2 \times J_3 \times J_4$ başlangıç koşulları için

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_1\left(x_n, \ldots, x_{n-k}, y_n, \ldots, y_{n-k}, z_n, \ldots, z_{n-k}, t_n, \ldots, t_{n-k}\right), \\ y_{n+1} = g_2\left(x_n, \ldots, x_{n-k}, y_n, \ldots, y_{n-k}, z_n, \ldots, z_{n-k}, t_n, \ldots, t_{n-k}\right), \\ z_{n+1} = g_3\left(x_n, \ldots, x_{n-k}, y_n, \ldots, y_{n-k}, z_n, \ldots, z_{n-k}, t_n, \ldots, t_{n-k}\right), \\ t_{n+1} = g_4\left(x_n, \ldots, x_{n-k}, y_n, \ldots, y_{n-k}, z_n, \ldots, z_{n-k}, t_n, \ldots, t_{n-k}\right), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.102}$$

sistemi tek bir $\left\{\left(x_n, y_n, z_n, t_n\right)\right\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2.15. $m, k \in \mathbb{N}$ ve $x_{-j}^{(i)} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, m}$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= f_1(x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_{n-1}^{(m)}, \ldots, x_{n-k}^{(m)}), \\ x_n^{(2)} &= f_2(x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_{n-1}^{(m)}, \ldots, x_{n-k}^{(m)}), \\ &\ \vdots \\ x_n^{(m)} &= f_m(x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_{n-1}^{(m)}, \ldots, x_{n-k}^{(m)}), \end{aligned} \tag{2.103}$$

fark denklem sistemi verilsin. $n_0 \geq -1$ iken $-k \leq j \leq n_0$ için $(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, x_j^{(m)})$ vektör dizisi; $0 \leq j < n_0 + 1$ için (2.103) sisteminin bir tanımsız çözümü olarak adlandırılır. Dahası $x_{n_0+1}^{(i_0)}$, $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tanımsız olup bu da

$f_{i_0}(x_{n_0}^{(1)},...,x_{n_0-k+1}^{(1)},x_{n_0}^{(2)}...,x_{n_0-k+1}^{(2)},...,x_{n_0}^{(m)},...,x_{n_0-k+1}^{(m)})$ ifadesinin tanımsız olduğunu gösterir. (2.103) fark denklem sisteminin tanımsız çözümlerini meydana getiren, $j=\overline{1,k}$, $i=\overline{1,m}$ olmak üzere $x_{-j}^{(i)}$ başlangıç koşullarının kümesine fark denklem sisteminin tanımsız çözümlerinin kümesi ya da yasaklı küme denir.

Teorem 2.2.6 O Landau sembolü olmak üzere $x \to 0$ için

$$\begin{aligned} &\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \\ &(1+x)^{-1} = 1 - x + O(x^2) \end{aligned} \tag{2.104}$$

dır.

BÖLÜM 3

Bu bölümde a,b,c,d,e,f parametreleri ve $i\in\{1,2,...,k+l\}$ için x_{-i},y_{-i},z_{-i}, başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere ve $EBOB(k,l)=1$ için

$$x_n=\frac{x_{n-k}y_{n-l}}{bx_{n-k}+ay_{n-k-l}},\quad y_n=\frac{y_{n-k}z_{n-l}}{dy_{n-k}+cz_{n-k-l}},\quad z_n=\frac{z_{n-k}x_{n-l}}{fz_{n-k}+ex_{n-k-l}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.1}$$

üç-boyutlu $(k+l)$. mertebeden fark denklem sistemi tanımlanarak kapalı formda çözülmüştür. Ayrıca elde edilen çözümler kullanılarak (3.1) sisteminin iyi tanımlı olmadığı noktaların kümesi elde edilmiştir. Daha sonra (3.1) sisteminin iyi tanımlı çözümlerinin *k=2, l=1* durumunda asimptotik davranışları da incelenmiştir.

Bu bölüm boyunca $EBOB(k,l)=1$ alınacaktır. Gerçekten, $EBOB(k,l)=q,\ q\in\mathbb{N}_2,\ q$ tamsayısı varsa, $k=qk_1$ ve $l=ql_1$ olacak şekilde $k_1,l_1\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $EBOB(k_1,l_1)=1$ ‘dir. Literatürde iyi bilinen kalanlı bölme teoreminden, sistem (3.1)

$$\begin{cases} x_{mq+r}=\dfrac{x_{q(m-k_1)+r}+y_{q(m-l_1)+r}}{bx_{q(m-k_1)+r}+ay_{q(m-k_1-l_1)+r}}, \\ y_{mq+r}=\dfrac{y_{q(m-k_1)+r}+z_{q(m-l_1)+r}}{dy_{q(m-k_1)+r}+cz_{q(m-k_1-l_1)+r}},\quad m\in\mathbb{N}_0, \\ z_{mq+r}=\dfrac{z_{q(m-k_1)+r}+x_{q(m-l_1)+r}}{fz_{q(m-k_1)+r}+ex_{q(m-k_1-l_1)+r}}, \end{cases} \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $r\in\{0,1,...,q-1\}$ ve $k_1,l_1\in\mathbb{N}$ ‘dir. Şimdi

$$x_m^{(r)}=x_{mq+r},\ y_m^{(r)}=y_{mq+r},\ z_m^{(r)}=z_{mq+r},\ m\in\mathbb{N}_0, \tag{3.3}$$

ve $r\in\{0,1,...,q-1\}$ olsun. O halde sistem (3.2) ‘den

$$x_m^{(r)}=\frac{x_{m-k_1}^{(r)}y_{m-l_1}^{(r)}}{bx_{m-k_1}^{(r)}+ay_{m-k_1-l_1}^{(r)}},\quad y_m^{(r)}=\frac{y_{m-k_1}^{(r)}z_{m-l_1}^{(r)}}{dy_{m-k_1}^{(r)}+cz_{m-k_1-l_1}^{(r)}},\quad z_m^{(r)}=\frac{z_{m-k_1}^{(r)}x_{m-l_1}^{(r)}}{fz_{m-k_1}^{(r)}+ex_{m-k_1-l_1}^{(r)}},\quad m\in\mathbb{N}_0, \tag{3.4}$$

sisteminin r bağımsız çözümlerinin $\left(x_m^{(r)}, y_m^{(r)}, z_m^{(r)}\right)_{m\geq-(k_1+l_1)}$ olduğu görülür. Bu da demektir ki k_1, l_1 yerine sırasıyla k, l alınır ve $\hat{x}_m = x_m^{(r)}, \hat{y}_m = y_m^{(r)}, \hat{z}_m = z_m^{(r)}$ değişken değiştirmesi yapılırsa, sistem (3.4), sistem (3.1) ‘e dönüşmüş olur.

3.1. $x_n = \frac{x_{n-k}y_{n-l}}{bx_{n-k}+ay_{n-k-l}}$, $y_n = \frac{y_{n-k}z_{n-l}}{dy_{n-k}+cz_{n-k-l}}$, $z_n = \frac{z_{n-k}x_{n-l}}{fz_{n-k}+ex_{n-k-l}}$ Fark Denklem Sisteminin Kapalı Formda Çözümleri

Varsayalım ki $k \leq l$ olsun. Eğer bazı $n_0 \geq -k$ için $x_{n_0} = 0$ ve $-k \leq n \leq n_0 - 1$ için $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $z_n \neq 0$ ise o zaman sistem (3.1)’ in üçüncü denkleminden $z_{n_0+l} = 0$ olup bu da z_{n_0+k+l} ' nin tanımsız olduğunu gösterir. Eğer bazı $-k > n_1 \geq -l$ için $x_{n_1} = 0$ ve $-l \leq n \leq n_1 - 1$ için $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $z_n \neq 0$ ise o zaman, bu sayılar tanımlı olduğu sürece, sistem (3.1)’ in üçüncü denkleminden $m \in \mathbb{N}$ için $z_{ml+n_1} = 0$ ve sistem (3.1)’ in birinci denklemden de $m \in \mathbb{N}_0$ için $x_{km+n_1} = 0$ elde edilir. Böylece z_{n_1+k+l} tanımsız ya da $k + l + n_1 \geq 0$ için $z_{n_1+k+l} = 0$ olur. Eğer $k + l + n_1 \geq 0$ için $z_{n_1+k+l} = 0$ ise, o zaman z_{2k+l+n_1} tanımsızdır.

Eğer bazı $n_2 \geq -k$ için $y_{n_2} = 0$ ve $-k \leq n \leq n_2 - 1$ için $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $z_n \neq 0$ ise, o zaman sistem (3.1)’ in birinci denkleminden $x_{n_2+l} = 0$ olup bu da x_{n_2+k+l} ' nin tanımsız olduğunu gösterir. Eğer bazı $-l > n_3 \geq -k$ için $y_{n_3} = 0$ ve $-l \leq n \leq n_3 - 1$ için $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $z_n \neq 0$ ise, o zaman bu sayılar tanımlı olduğu sürece, sistem (3.1)’ in birinci denkleminden $m \in \mathbb{N}$ için $x_{ml+n_3} = 0$ ve sistem (3.1)’ in ikinci denklemden de $m \in \mathbb{N}_0$ için $y_{km+n_3} = 0$ elde edilir. Böylece x_{n_3+k+l} tanımsız ya da $k + l + n_3 \geq 0$ için $x_{n_3+k+l} = 0$ olur. Eğer $k + l + n_3 \geq 0$ için $x_{n_3+k+l} = 0$ ise, o zaman x_{2k+l+n_3} tanımsızdır.

Eğer bazı $n_4 \geq -k$ için $z_{n_4} = 0$ ve $-k \leq n \leq n_4 - 1$ için $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $z_n \neq 0$ ise o zaman sistem (3.1)’ in ikinci denklemden $y_{n_4+l} = 0$ olup bu da y_{n_4+k+l} ' nin tanımsız olduğunu gösterir. Eğer bazı $-k > n_5 \geq -l$ için $z_{n_5} = 0$ ve $-l \leq n \leq n_5 - 1$ için $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $z_n \neq 0$ ise, o zaman bu sayılar tanımlı olduğu sürece, sistem (3.1)’ in ikinci denklemden $m \in \mathbb{N}$ için $y_{ml+n_5} = 0$ ve ve sistem (3.1)’ in üçüncü denkleminden de

$m \in \mathbb{N}_0$ için $z_{km+n_5} = 0$ elde edilir. Böylece y_{n_5+k+l} tanımsız ya da $k + l + n_5 \geq 0$ için $y_{n_5+k+l} = 0$ olur. Eğer $k + l + n_5 \geq 0$ için $y_{n_5+k+l} = 0$ ise, o zaman y_{2k+l+n_5} tanımsızdır. $l < k$ durumu da benzer şekilde elde edilir.

Şimdi varsayalım ki bazı $x_{n_6} \in \mathbb{N}_0$ için $x_{n_6} = 0$, $-k - l \leq i \leq n_6 - 1$ için x_i, y_i, z_i tanımlı ve x_{n_6}, $(x_n)_{n \geq -(k+l)}$ dizisinin sıfıra eşit olan en küçük elemanı olsun. O zaman sistem (3.1)' in birinci denkleminden $x_{n_6-k} = 0$ veya $y_{n_6-l} = 0$ olur. Eğer $-k \leq n_6 - k \leq -1$ veya $-l \leq n_6 - l \leq -1$ ise, o zaman $p = max\{k, l\}$ olmak üzere bir $j_0 \in \{1, 2, ..., p\}$ vardır öyle ki $x_{-j_0} = 0$ veya $y_{-j_0} = 0$ dır. Eğer $n_6 \geq p$ ise, o zaman sistem (3.1) 'deki denklemlerden $x_{n_6-2k} = 0$ veya $y_{n_6-k-l} = 0$ veya $z_{n_6-2l} = 0$ elde edilir. Eğer $-p \leq n_6 - 2k \leq -1$ veya $-p \leq n_6 - k - l \leq -1$ veya $-p \leq n_6 - 2l \leq -1$ ise, o zaman $p = max\{k, l\}$ olmak üzere bir $j_1 \in \{1, 2, ..., p\}$ vardır öyle ki $x_{-j_1} = 0$ veya $y_{-j_1} = 0$ veya $z_{-j_1} = 0$' dır. Bu şekilde devam edilirse, $p = max\{k, l\}$ olmak üzere bazı $j_s \in \{1, 2, ..., p\}$ vardır öyle ki $x_{-j_s} = 0$, $y_{-j_s} = 0$ veya $z_{-j_s} = 0$ bulunur. Böylece, sistem (3.1)' in iyi tanımlı bir $(x_n, y_n, z_n)_{n \geq -(k+l)}$ olmak üzere $n \geq -(k+l)$ için $x_n y_n z_n \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $i \in \{1, 2, \ldots, k+l\}$ için $x_{-i} y_{-i} z_{-i} \neq 0$ olmasıdır.

Böylece sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümlerini elde etmek için gerekli ve yeterli koşullar dikkate alındığında, sistem (3.1)' in birinci denklemi $\frac{1}{y_{n-l}}$, ikinci denklemi $\frac{1}{z_{n-l}}$, üçüncü denklemi de $\frac{1}{x_{n-l}}$ ile çarpılırsa, sistem (3.1)

$$\frac{x_n}{y_{n-l}} = \frac{x_{n-k}}{bx_{n-k} + ay_{n-k-l}}, \quad \frac{y_n}{z_{n-l}} = \frac{y_{n-k}}{dy_{n-k} + cz_{n-k-l}}, \quad \frac{z_n}{x_{n-l}} = \frac{z_{n-k}}{fz_{n-k} + ex_{n-k-l}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.5}$$

sistemine dönüşür ve çarpmaya göre tersi alınırsa

$$\frac{y_{n-l}}{x_n} = \frac{ay_{n-k-l}}{x_{n-k}} + b, \quad \frac{z_{n-l}}{y_n} = \frac{cz_{n-k-l}}{y_{n-k}} + d, \quad \frac{x_{n-l}}{z_n} = \frac{ex_{n-k-l}}{z_{n-k}} + f, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.6}$$

elde edilir. Daha sonra

$$u_n = \frac{y_{n-l}}{x_n}, \quad v_n = \frac{z_{n-l}}{y_n}, \quad w_n = \frac{x_{n-l}}{z_n}, \quad n \geq -k, \tag{3.7}$$

olacak şekilde değişken değişimi yapılırsa, sistem (3.5) aşağıdaki sisteme

$$u_n = au_{n-k} + b,\quad v_n = cv_{n-k} + d,\quad w_n = ew_{n-k} + f,\quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.8}$$

indirgenir. Öte yandan $j \in \{0,1,...,k-1\}$ olmak üzere $m \geq -1$ için

$$\begin{cases} u_m^{(j)} := u_{km+j}, \\ v_m^{(j)} := v_{km+j}, \\ w_m^{(j)} := w_{km+j}, \end{cases} \tag{3.9}$$

olsun. Buradan (3.8)' deki denklemler $j \in \{0,1,...,k-1\}$ için

$$u_m^{(j)} = au_{m-1}^{(j)} + b,\quad v_m^{(j)} = cv_{m-1}^{(j)} + d,\quad w_m^{(j)} = ew_{m-1}^{(j)} + f,\quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{3.10}$$

Şeklinde yazılabilir. Buradan şu sonuç elde edilir ki; $j \in \{0,1,...,k-1\}$ için $(u_m^{(j)}, v_m^{(j)}, w_m^{(j)})_{m\geq -1}$ dizileri, $j \in \{0,1,...,k-1\}$ için $\hat{u}_{j-k}$, $\hat{v}_{j-k}$ ve $\hat{w}_{j-k}$ başlangıç koşullarıyla birlikte

$$\hat{u}_m = a\hat{u}_{m-1} + b,\quad \hat{v}_m = c\hat{v}_{m-1} + d,\quad \hat{w}_m = e\hat{w}_{m-1} + f,\quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{3.11}$$

birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin *k*-bağımsız çözümleridir. $\forall j \in \{0,1,...,k-1\}$ sabitleri için (3.11) denklemlerinin çözümleri $m \geq -1$ için

$$\hat{u}_m = \begin{cases} \dfrac{b + a^{m+1}(\hat{u}_{-1}(1-a) - b)}{1-a}, & a \neq 1 \\ \hat{u}_{-1} + b(m+1), & a = 1 \end{cases}, \tag{3.12}$$

$$\hat{v}_m = \begin{cases} \dfrac{d + c^{m+1}(\hat{v}_{-1}(1-c) - d)}{1-c}, & c \neq 1 \\ \hat{v}_{-1} + d(m+1), & c = 1 \end{cases}, \tag{3.13}$$

$$\hat{w}_m = \begin{cases} \dfrac{f + e^{m+1}(\hat{w}_{-1}(1-e) - f)}{1-e}, & e \neq 1 \\ \hat{w}_{-1} + f(m+1), & e = 1 \end{cases}, \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.9) ve (3.12)-(3.14) çözümlerinden, $m \geq -1$ için,

$$u_{km+j} = \begin{cases} \dfrac{b + a^{m+1}(u_{-k+j}(1-a) - b)}{1-a}, & a \neq 1 \\ u_{-k+j} + b(m+1), & a = 1 \end{cases}, \tag{3.15}$$

$$v_{km+j} = \begin{cases} \dfrac{d + c^{m+1}(v_{-k+j}(1-c) - d)}{1-c}, & c \neq 1 \\ v_{-k+j} + d(m+1), & c = 1 \end{cases}, \tag{3.16}$$

$$w_{km+j}=\begin{cases}\dfrac{f+e^{m+1}(w_{-k+j}(1-e)-f)}{1-e}, & e\neq 1\\ w_{-k+j}+f(m+1), & e=1\end{cases}, \tag{3.17}$$

yazılabilir. (3.7)'den $n\geq 2l-k$ için

$$x_n=\frac{y_{n-l}}{u_n}=\frac{z_{n-2l}}{u_nv_{n-l}}=\frac{x_{n-3l}}{u_nv_{n-l}w_{n-2l}}, \tag{3.18}$$

$$y_n=\frac{z_{n-l}}{v_n}=\frac{x_{n-2l}}{v_nw_{n-l}}=\frac{y_{n-3l}}{v_nw_{n-l}u_{n-2l}}, \tag{3.19}$$

$$z_n=\frac{x_{n-l}}{w_n}=\frac{y_{n-2l}}{w_nu_{n-l}}=\frac{z_{n-3l}}{w_nu_{n-l}v_{n-2l}}, \tag{3.20}$$

ve sonuç olarak $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $i\in\{2l-k,2l-k+1,...,5l-k-1\}$ için

$$x_{3lm+i}=\frac{x_{3lm+i-3l}}{u_{3lm+i}v_{3lm+i-l}w_{3lm+i-2l}}=\cdots=\frac{x_{i-3l}}{\prod_{j=0}^{m}u_{3lj+i}v_{3lj+i-l}w_{3lj+i-2l}}, \tag{3.21}$$

$$y_{3lm+i}=\frac{y_{3lm+i-3l}}{v_{3lm+i}w_{3lm+i-l}u_{3lm+i-2l}}=\cdots=\frac{y_{i-3l}}{\prod_{j=0}^{m}v_{3lj+i}w_{3lj+i-l}u_{3lj+i-2l}}, \tag{3.22}$$

$$z_{3lm+i}=\frac{z_{3lm+i-3l}}{w_{3lm+i}u_{3lm+i-l}v_{3lm+i-2l}}=\cdots=\frac{z_{i-3l}}{\prod_{j=0}^{m}w_{3lj+i}u_{3lj+i-l}v_{3lj+i-2l}} \tag{3.23}$$

yazılır. Öte yandan negatif olmayan her $m_1\in\mathbb{N}_0$ ve $j\in\{0,1,...,k-1\}$ için km_1+j formunda yazılabileceğinden

$$x_{3lm+i}=x_{3l(km_1+j)+i}=\frac{x_{3lj+i-3l}}{\prod_{s=0}^{km_1}u_{3ls+3lj+i}v_{3ls+3lj+i-l}w_{3ls+3lj+i-2l}}, \tag{3.24}$$

$$y_{3lm+i}=y_{3l(km_1+j)+i}=\frac{y_{3lj+i-3l}}{\prod_{s=0}^{km_1}v_{3ls+3lj+i}w_{3ls+3lj+i-l}u_{3ls+3lj+i-2l}}, \tag{3.25}$$

$$z_{3lm+i}=z_{3l(km_1+j)+i}=\frac{z_{3lj+i-3l}}{\prod_{s=0}^{km_1}w_{3ls+3lj+i}u_{3ls+3lj+i-l}v_{3ls+3lj+i-2l}}, \tag{3.26}$$

elde edilir. Burada $m_1\in\mathbb{N}_0$, $j\in\{0,1,...,k-1\}$, $i\in\{2l-k,2l-k+1,\ldots,5l-k-1\}$ dır. (3.15)-(3.17) çözümleri (3.24)-(3.26)'da yerine yazılırsa sistem (3.1)' in kapalı formdaki çözümleri elde edilir. ■

Teorem 3.1. ***(Yasaklı Küme) Forbidden Set*** $a,c,e \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b,d,f \in \mathbb{R}$, $g_1(t)=at+b$, $g_2(t)=ct+d$, $g_3(t)=et+f$ ve $\vec{x}_{-(k+l,1)}=(x_{-k-l},x_{-k-l+1},...,x_{-1})$, $\vec{y}_{-(k+l,1)}=(y_{-k-l},y_{-k-l+1},...,y_{-1})$, $\vec{z}_{-(k+l,1)}=(z_{-k-l},z_{-k-l+1},...,z_{-1})$ ve $p=max\{k,l\}$ olsun. O zaman sistem (3.1) 'in iyi tanımlı olmayan noktaların kümesi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}=&\bigcup_{s=1}^{p}\{(\vec{x}_{-(k+l,1)},\vec{y}_{-(k+l,1)},\vec{z}_{-(k+l,1)})\in\mathbb{R}^{3(k+l)}:x_{-s}=0\text{ ya da }y_{-s}=0\text{ ya da }z_{-s}=0\}\bigcup\\&\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0}\bigcup_{j=0}^{k-1}\{(\vec{x}_{-(k+l,1)},\vec{y}_{-(k+l,1)},\vec{z}_{-(k+l,1)})\in\mathbb{R}^{3(k+l)}:\frac{y_{j-k-l}}{x_{j-k}}=g_1^{-(m+1)}\left(\frac{-b}{a}\right)\}\bigcup\\&\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0}\bigcup_{j=0}^{k-1}\{(\vec{x}_{-(k+l,1)},\vec{y}_{-(k+l,1)},\vec{z}_{-(k+l,1)})\in\mathbb{R}^{3(k+l)}:\frac{z_{j-k-l}}{y_{j-k}}=g_2^{-(m+1)}\left(\frac{-d}{c}\right)\}\bigcup\\&\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0}\bigcup_{j=0}^{k-1}\{(\vec{x}_{-(k+l,1)},\vec{y}_{-(k+l,1)},\vec{z}_{-(k+l,1)})\in\mathbb{R}^{3(k+l)}:\frac{x_{j-k-l}}{z_{j-k}}=g_3^{-(m+1)}\left(\frac{-f}{e}\right)\}\end{aligned}\tag{3.27}$$

şeklindedir.

İspat: Daha önceden

$$\bigcup_{s=1}^{p}\{(\vec{x}_{-(k+l,1)},\vec{y}_{-(k+l,1)},\vec{z}_{-(k+l,1)})\in\mathbb{R}^{3(k+l)}:x_{-s}=0\text{ ya da }y_{-s}=0\text{ ya da }z_{-s}=0\}\tag{3.28}$$

kümesinin, sistem (3.1) 'in başlangıç değerlerinin iyi tanımlı yapmayan noktaların kümesine ait olduğu elde edilmiş idi. Eğer $i\in\{1,2,...,p\}$ için $x_{-i}\neq 0$, $y_{-i}\neq 0$ ve $z_{-i}\neq 0$ ise o zaman sistem (3.1) 'in tanımsız olması için gerek ve yeter şart bazı $n\in\mathbb{N}_0$ için

$$bx_{n-k}+ay_{n-k-l}=0\text{ ya da }dy_{n-k}+cz_{n-k-l}=0\text{ ya da }fz_{n-k}+ex_{n-k-l}=0$$

olmasıdır. Bu ve (3.7)'deki değişkenlerin değişiminden, bazı $n\in\mathbb{N}_0$ için

$$u_{n-k}=-\frac{b}{a}\text{ ya da }v_{n-k}=-\frac{d}{c}\text{ ya da }w_{n-k}=-\frac{f}{e}$$

olur. Öte yandan bazı $m\geq -1$ ve $j\in\{0,1,...,k-1\}$ için

$$\begin{cases}u_{km+j}=g_1^{(m+1)}\left(u_{j-k}\right),\\v_{km+j}=g_2^{(m+1)}\left(v_{j-k}\right),\\w_{km+j}=g_3^{(m+1)}\left(w_{j-k}\right),\end{cases}\tag{3.29}$$

yazılabilir. Dahası (3.7) ve (3.29)'dan bazı $m\geq -1$ ve $j\in\{0,1,...,k-1\}$ için

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = u_{km+j} = g_1^{(m+1)}\left(\dfrac{y_{j-k-l}}{x_{j-k}}\right), \\ -\dfrac{d}{c} = v_{km+j} = g_2^{(m+1)}\left(\dfrac{z_{j-k-l}}{y_{j-k}}\right), \\ -\dfrac{f}{e} = w_{km+j} = g_3^{(m+1)}\left(\dfrac{x_{j-k-l}}{z_{j-k}}\right), \end{cases} \tag{3.30}$$

elde edilir ki buradan bazı $m \geq -1$ ve $j \in \{0,1,...,k-1\}$ için

$$\begin{cases} \dfrac{y_{j-k-l}}{x_{j-k}} = g_1^{-(m+1)}\left(\dfrac{-b}{a}\right), \\ \dfrac{z_{j-k-l}}{y_{j-k}} = g_2^{-(m+1)}\left(\dfrac{-d}{c}\right), \\ \dfrac{x_{j-k-l}}{z_{j-k}} = g_3^{-(m+1)}\left(\dfrac{-f}{e}\right), \end{cases} \tag{3.31}$$

bulunur. (3.31)’den, (3.27)’deki ikinci, üçüncü ve dördüncü birleşimin de sistem (3.1) ’in başlangıç değerlerinin iyi tanımlı yapmayan noktaların kümesine ait olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar. ■

3.2. *k=2* ve *l=1* Durumu

Bu kısımda $k=2$ ve $l=1$ durumunda sistem (3.1) ’in çözümlerinin asimptotik davranışı incelenecektir. Bunun için $k=2$ ve $l=1$ durumunda sistem (3.1)

$$x_n = \frac{x_{n-2}y_{n-1}}{bx_{n-2}+ay_{n-3}}, \quad y_n = \frac{y_{n-2}z_{n-1}}{dy_{n-2}+cz_{n-3}}, \quad z_n = \frac{z_{n-2}x_{n-1}}{fz_{n-2}+ex_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.32}$$

sistemine indirgenir.

(3.15)-(3.17), (3.24)-(3.26) denklemlerinde $k=2$ ve $l=1$ alınır ve daha sonra bu şartlar altında (3.15)-(3.17) denklemleri (3.24)-(3.26)’ da yerlerine yazılır ve ardından bazı hesaplamalar yapılırsa, $a \neq 1 \neq c$ ve $e \neq 1$ için sistem (3.32)’ nin çözümleri

$$\begin{aligned} x_{6m+2s+r} &= \frac{x_{2s+r-6}}{\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{b+a^{3j+s+r+1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3j+s}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3j+s+r}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)} \\ &\times \frac{1}{\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{b+a^{3j+s-1}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3j+s+r-1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3j+s-2}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$y_{6m+2s+r}=\frac{y_{2s+r-6}}{\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{d+c^{3j+s+r+1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3j+s}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3j+s+r}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)}$$
$$\times\frac{1}{\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{d+c^{3j+s-1}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3j+s+r-1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3j+s-2}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)}, \tag{3.34}$$

$$z_{6m+2s+r}=\frac{z_{2s+r-6}}{\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{f+e^{3j+s+r+1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3j+s}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3j+s+r}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)}$$
$$\times\frac{1}{\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{f+e^{3j+s-1}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3j+s+r-1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3j+s-2}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)}, \tag{3.35}$$

şeklinde elde edilir. Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$' dır. Öte yandan $a=c=e=1$ için, sistem (3.32)' nin çözümleri

$$x_{6m+2s+r}=\frac{x_{2s+r-6}}{\prod_{j=0}^{m}\left(u_{-2-r}+b(3j+s+r+1)\right)\left(v_{-1+r}+d(3j+s)\right)\left(w_{-2-r}+f(3j+s+r)\right)}$$
$$\times\frac{1}{\prod_{j=0}^{m}\left(u_{-1+r}+b(3j+s-1)\right)\left(v_{-2-r}+d(3j+s+r-1)\right)\left(w_{-1+r}+f(3j+s-2)\right)}, \tag{3.36}$$

$$y_{6m+2s+r}=\frac{y_{2s+r-6}}{\prod_{j=0}^{m}\left(v_{-2-r}+d(3j+s+r+1)\right)\left(w_{-1+r}+f(3j+s)\right)\left(u_{-2-r}+b(3j+s+r)\right)}$$
$$\times\frac{1}{\prod_{j=0}^{m}\left(v_{-1+r}+d(3j+s-1)\right)\left(w_{-2-r}+f(3j+s+r-1)\right)\left(u_{-1+r}+b(3j+s-2)\right)}, \tag{3.37}$$

$$z_{6m+2s+r}=\frac{z_{2s+r-6}}{\prod_{j=0}^{m}\left(w_{-2-r}+f(3j+s+r+1)\right)\left(u_{-1+r}+b(3j+s)\right)\left(v_{-2-r}+d(3j+s+r)\right)}$$
$$\times\frac{1}{\prod_{j=0}^{m}\left(w_{-1+r}+f(3j+s-1)\right)\left(u_{-2-r}+b(3j+s+r-1)\right)\left(v_{-1+r}+d(3j+s-2)\right)} \tag{3.38}$$

olur. Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ dır.

Teorem 3.2 $a\neq 1,\ c\neq 1,\ e\neq 1,\ abcdef\neq 0,\ (x_n,y_n,z_n)_{n\geq -3}$, sistem (3.32) 'nin iyi tanımlı bir çözümü, yani $i\in\{1,2,3\}$ için $x_{-i},y_{-i},z_{-i}\notin\mathcal{F}$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) Eğer $|a|>1$ ve $r\in\{-1,0\}$ için u_{-2-r} ve u_{-1+r} 'nin en az biri $\frac{b}{1-a}$ 'dan farklı ya da $|c|>1$ ve $r\in\{-1,0\}$ için v_{-2-r} ve v_{-1+r} 'nin en az biri $\frac{d}{1-c}$ 'den farklı ya da $|e|>1$ ve $r\in\{-1,0\}$ için w_{-2-r} ve w_{-1+r} 'nin en az biri $\frac{f}{1-e}$ 'den farklı ise, o zaman $m\to\infty$ iken $x_{6m+2s+r}\to 0$, $y_{6m+2s+r}\to 0$ ve $z_{6m+2s+r}\to 0$' dır.

b) Eğer $|a|<1,\ |c|<1,\ |e|<1$ ve $\left|\dfrac{bdf}{(1-a)(1-c)(1-e)}\right|<1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $|x_{6m+2s+r}|\to\infty$, $|y_{6m+2s+r}|\to\infty$ ve $|z_{6m+2s+r}|\to\infty$' dur.

c) Eğer $|a|<1$, $|c|<1$, $|e|<1$ ve $\left|\dfrac{bdf}{(1-a)(1-c)(1-e)}\right|>1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $x_{6m+2s+r}\to 0$, $y_{6m+2s+r}\to 0$ ve $z_{6m+2s+r}\to 0$' dır.

d) Eğer $|a|<1$, $|c|<1$, $|e|<1$ ve $\dfrac{bdf}{(1-a)(1-c)(1-e)}=1$ ise, o zaman $(x_{6m+2s+r})_{m\in\mathbb{N}_0}$, $(y_{6m+2s+r})_{m\in\mathbb{N}_0}$ ve $(z_{6m+2s+r})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizileri yakınsaktır.

e) Eğer $|a|<1$, $|c|<1$, $|e|<1$ ve $\dfrac{bdf}{(1-a)(1-c)(1-e)}=-1$ ise, o zaman $(x_{12m+6+2s+r})_{m\in\mathbb{N}_0}$, $(y_{12m+6+2s+r})_{m\in\mathbb{N}_0}$ ve $(z_{12m+6+2s+r})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizileri yakınsaktır.

Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$' dır.

İspat. $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ için

$$a_m^{s,r}=\left(\frac{b+a^{3m+s+r+1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s+r}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)$$
$$\times\left(\frac{b+a^{3m+s-1}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s+r-1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-2}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\tag{3.39}$$

$$b_m^{s,r}=\left(\frac{d+c^{3m+s+r+1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s+r}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)$$
$$\times\left(\frac{d+c^{3m+s-1}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s+r-1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-2}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\tag{3.40}$$

ve

$$c_m^{s,r}=\left(\frac{f+e^{3m+s+r+1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s+r}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)$$
$$\times\left(\frac{f+e^{3m+s-1}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s+r-1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-2}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\tag{3.41}$$

olsun.

a) Eğer $|a|>1$ ve $r\in\{-1,0\}$ için $u_{-2-r}\neq\dfrac{b}{1-a}\neq u_{-1+r}$ ya da $|c|>1$ ve $r\in\{-1,0\}$ için $v_{-2-r}\neq\dfrac{d}{1-c}\neq v_{-1+r}$ ya da $|e|>1$ ve $r\in\{-1,0\}$ için $w_{-2-r}\neq\dfrac{f}{1-e}\neq w_{-1+r}$ ise (3.33)-(3.35) çözümlerinden, $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ için

$$\lim_{m\to\infty}\left|a_m^{s,r}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|b_m^{s,r}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|c_m^{s,r}\right|=\infty\tag{3.42}$$

elde edilir ki buradan istenilen sonuç kolayca görülür.

b)-c) Eğer $\max\{|a|,|c|,|e|\}<1$ ise, $\forall m\in \mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ için

$$\lim_{m\to\infty} a_m^{s,r} = \lim_{m\to\infty} b_m^{s,r} = \lim_{m\to\infty} c_m^{s,r} = \left(\frac{bdf}{(1-a)(1-c)(1-e)}\right)^2 \tag{3.43}$$

elde edilir ki (3.33)-(3.35) ve (3.43)' den (b) ve (c) 'deki diğer koşulları kullanarak bu iki sonuç kolayca görülür.

d) Bazı hesaplamalardan sonra, yeterince büyük m değerleri için ve $\forall m\in \mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ için

$$\begin{aligned}
a_m^{s,r} &= \left(\frac{b+a^{3m+s+r+1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\\
&\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-1}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\\
&\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r-1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-2}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\\
&=1+\frac{(u_{-2-r}(1-a)-b)a^{r+1}+(u_{-1+r}(1-a)-b)a^{-1}}{b}a^{3m+s}\\
&+\frac{v_{-1+r}(1-c)-d+(v_{-2-r}(1-c)-d)c^{r-1}}{d}c^{3m+s}\\
&+\frac{(w_{-2-r}(1-e)-f)e^{r}+(w_{-1+r}(1-e)-f)e^{-2}}{f}e^{3m+s}+O((cea)^{3m}),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$
\begin{aligned}
b_m^{s,r} &= \left(\frac{d+c^{3m+s+r+1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right) \\
&\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-1}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right) \\
&\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r-1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-2}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right) \\
&=1+\frac{(v_{-2-r}(1-c)-d)c^{r+1}+(v_{-1+r}(1-c)-d)c^{-1}}{d}c^{3m+s} \\
&+\frac{w_{-1+r}(1-e)-f+(w_{-2-r}(1-e)-f)e^{r-1}}{f}e^{3m+s} \\
&+\frac{(u_{-2-r}(1-a)-b)a^{r}+(u_{-1+r}(1-a)-b)a^{-2}}{b}a^{3m+s}+O((cea)^{3m})
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
c_m^{s,r} &= \left(\frac{f+e^{3m+s+r+1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right) \\
&\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-1}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right) \\
&\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r-1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-2}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right) \\
&=1+\frac{(w_{-2-r}(1-e)-f)e^{r+1}+(w_{-1+r}(1-e)-f)e^{-1}}{f}e^{3m+s} \\
&+\frac{u_{-1+r}(1-a)-b+(u_{-2-r}(1-a)-b)a^{r-1}}{b}a^{3m+s} \\
&+\frac{(v_{-2-r}(1-c)-d)c^{r}+(v_{-1+r}(1-c)-d)c^{-2}}{d}c^{3m+s}+O((cea)^{3m}).
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

elde edilir. $\left(\prod_{j=0}^{m} a_m^{s,r}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\prod_{j=0}^{m} b_m^{s,r}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\prod_{j=0}^{m} c_m^{s,r}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin yakınsaklığını hesaba katarak ve (3.44)-(3.46) ‘yı (3.33)-(3.35) ’te kullanılırsa $x_{6m+2s+r}$, $y_{6m+2s+r}$ ve $z_{6m+2s+r}$ dizilerinin yakınsaklığı kolayca görülebilir.

e) $\dfrac{bdf}{(1-a)(1-c)(1-e)}=-1$ şartını kullanarak yeterince büyük *m* değerleri için ve $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ için

$$
\begin{aligned}
a_m^{s,r} &= -(1+\frac{(u_{-2-r}(1-a)-b)a^{r+1}+(u_{-1+r}(1-a)-b)a^{-1}}{b}a^{3m+s} \\
&+\frac{v_{-1+r}(1-c)-d+(v_{-2-r}(1-c)-d)c^{r-1}}{d}c^{3m+s} \\
&+\frac{(w_{-2-r}(1-e)-f)e^{r}+(w_{-1+r}(1-e)-f)e^{-2}}{f}e^{3m+s}+O((cea)^{3m})),
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

$$
\begin{aligned}
b_m^{s,r} &= -(1+\frac{(v_{-2-r}(1-c)-d)c^{r+1}+(v_{-1+r}(1-c)-d)c^{-1}}{d}c^{3m+s} \\
&+\frac{w_{-1+r}(1-e)-f+(w_{-2-r}(1-e)-f)e^{r-1}}{f}e^{3m+s} \\
&+\frac{(u_{-2-r}(1-a)-b)a^{r}+(u_{-1+r}(1-a)-b)a^{-2}}{b}a^{3m+s}+O((cea)^{3m})),
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
c_m^{s,r} &= -(1+\frac{(w_{-2-r}(1-e)-f)e^{r+1}+(w_{-1+r}(1-e)-f)e^{-1}}{f}e^{3m+s} \\
&+\frac{u_{-1+r}(1-a)-b+(u_{-2-r}(1-a)-b)a^{r-1}}{b}a^{3m+s} \\
&+\frac{(v_{-2-r}(1-c)-d)c^{r}+(v_{-1+r}(1-c)-d)c^{-2}}{d}c^{3m+s}+O((cea)^{3m}))
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

elde edilir. Öte yandan $i\in\{0,1\}$ için $\left(\prod_{j=0}^{2m-i} a_m^{s,r}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\prod_{j=0}^{2m-i} b_m^{s,r}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\prod_{j=0}^{2m-i} c_m^{s,r}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin yakınsaklığı dikkate alınırsa, (3.47)-(3.49)‘u (3.33)-(3.35)’te kullanılırsa $x_{12m+2s+r}$, $x_{12m+6+2s+r}$, $y_{12m+2s+r}, y_{12m+6+2s+r}$, $z_{12m+2s+r}$ ve $z_{12m+6+2s+r}$ dizilerinin yakınsaklığı kolayca görülür. ■

Şimdi aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$K_1=\left(\frac{b}{1-a}\right)^4 v_{-1+r}v_{-2-r}(d-v_{-1+r})(d-v_{-2-r})w_{-1+r}w_{-2-r}(f-w_{-1+r})(f-w_{-2-r}),$$

$$K_2=\left(\frac{d}{1-c}\right)^4 u_{-1+r}u_{-2-r}(b-u_{-1+r})(b-u_{-2-r})w_{-1+r}w_{-2-r}(f-w_{-1+r})(f-w_{-2-r}),$$

$$K_3=\left(\frac{f}{1-e}\right)^4 u_{-1+r}u_{-2-r}(b-u_{-1+r})(b-u_{-2-r})v_{-1+r}v_{-2-r}(d-v_{-1+r})(d-v_{-2-r}),$$

$$K_4=u_{-1+r}u_{-2-r}(b-u_{-1+r})(b-u_{-2-r})v_{-1+r}v_{-2-r}(d-v_{-1+r})(d-v_{-2-r})w_{-1+r}w_{-2-r}(f-w_{-1+r})(f-w_{-2-r}).$$

Teorem 3.3. $|a|<1$, $c=-1$ ve $e=-1$ve $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -3}$ sistem (3.32) 'nin iyi tanımlı bir çözümü olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) Eğer $|K_1|>1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $x_{6m+2s+r}\to 0$, $y_{6m+2s+r}\to 0$ ve $z_{6m+2s+r}\to 0$ 'dır.

b) Eğer $|K_1|<1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $|x_{6m+2s+r}|\to\infty$, $|y_{6m+2s+r}|\to\infty$ ve $|z_{6m+2s+r}|\to\infty$ 'dur.

c) Eğer $K_1=1$ ise, o zaman $x_{12m+2s+r}$, $x_{12m-6+2s+r}$, $y_{12m+2s+r}$, $y_{12m-6+2s+r}$, $z_{12m+2s+r}$ ve $z_{12m-6+2s+r}$ dizileri yakınsaktır.

d) Eğer $K_1=-1$ ise, o zaman, $j\in\{-1,0,1,2\}$ için, $x_{24m+6j+2s+r}$, $y_{24m+6j+2s+r}$ ve $z_{24m+6j+2s+r}$ dizileri yakınsaktır.

Burada $s\in\{2,3,4\}$, $r\in\{-1,0\}$ ve $j\in\{-1,0,1,2\}$ ' dır.

İspat. $|a|<1$, $c=-1$ ve $e=-1$ olsun.

a)-b): Bu durumlarda, $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ için

$$\begin{aligned}
a_m^{s,r,1} &= \left(\frac{b+a^{3m+s+r+1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+(-1)^{3m+s}(2v_{-1+r}-d)}{2}\right)\\
&\times\left(\frac{f+(-1)^{3m+s+r}(2w_{-2-r}-f)}{2}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-1}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\\
&\times\left(\frac{d+(-1)^{3m+s+r-1}(2v_{-2-r}-d)}{2}\right)\left(\frac{f+(-1)^{3m+s-2}(2w_{-1+r}-f)}{2}\right),
\end{aligned}\tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
b_m^{s,r,1} &= \left(\frac{d+(-1)^{3m+s+r+1}(2v_{-2-r}-d)}{2}\right)\left(\frac{f+(-1)^{3m+s}(2w_{-1+r}-f)}{2}\right)\\
&\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+(-1)^{3m+s-1}(2v_{-1+r}-d)}{2}\right)\\
&\times\left(\frac{f+(-1)^{3m+s+r-1}(2w_{-2-r}-f)}{2}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-2}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)
\end{aligned}\tag{3.51}$$

ve

$$c_m^{s,r,1}=\left(\frac{f+(-1)^{3m+s+r+1}(2w_{-2-r}-f)}{2}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)$$
$$\times\left(\frac{d+(-1)^{3m+s+r}(2v_{-2-r}-d)}{2}\right)\left(\frac{f+(-1)^{3m+s-1}(2w_{-1+r}-f)}{2}\right) \tag{3.52}$$
$$\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r-1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+(-1)^{3m+s-2}(2v_{-1+r}-d)}{2}\right),$$

notasyonları tanımlansın. Buradan $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ için

$$a_{2m}^{s,r,1}a_{2m+1}^{s,r,1}=b_{2m}^{s,r,1}b_{2m+1}^{s,r,1}=c_{2m}^{s,r,1}c_{2m+1}^{s,r,1}=K_1+O(a^{3m}) \tag{3.53}$$

elde edilir ki (3.33)-(3.35)'ten istenilen sonuçlar kolayca görülür.

c) Bu durumda (3.53) ve $K_1=1$ şartından, $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ için

$$\prod_{p=0}^{2m-1}a_p^{s,r,1}=\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right) \tag{3.54}$$

$$\prod_{p=0}^{2m-1}b_p^{s,r,1}=\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right) \tag{3.55}$$

$$\prod_{p=0}^{2m-1}c_p^{s,r,1}=\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right) \tag{3.56}$$

ve

$$\prod_{p=0}^{2m}a_p^{s,r,1}=\begin{cases}\dfrac{b^2v_{-1+r}(d-v_{-2-r})w_{-1+r}w_{-2-r}}{(1-a)^2}\left(1+O\left(a^{3m}\right)\right)\displaystyle\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\,\text{çift ve}\,r\,\text{çift},\\ \dfrac{b^2v_{-1+r}v_{-2-r}w_{-1+r}(f-w_{-2-r})}{(1-a)^2}\left(1+O\left(a^{3m}\right)\right)\displaystyle\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\,\text{çift ve}\,r\,\text{tek},\\ \dfrac{b^2(d-v_{-1+r})(d-v_{-2-r})(f-w_{-1+r}w_{-2-r})}{(1-a)^2}\left(1+O\left(a^{3m}\right)\right)\displaystyle\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\,\text{tek ve}\,r\,\text{tek},\\ \dfrac{b^2(d-v_{-1+r})v_{-2-r}(f-w_{-1+r})(f-w_{-2-r})}{(1-a)^2}\left(1+O\left(a^{3m}\right)\right)\displaystyle\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\,\text{tek ve}\,r\,\text{çift},\end{cases} \tag{3.57}$$

$$\prod_{p=0}^{2m}b_p^{s,r,1}=\begin{cases}\dfrac{b^2(d-v_{-1+r})(d-v_{-2-r})w_{-1+r}(f-w_{-2-r})}{(1-a)^2}\left(1+O\left(a^{3m}\right)\right)\displaystyle\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\,\text{çift ve}\,r\,\text{çift},\\ \dfrac{b^2(d-v_{-1+r})v_{-2-r}w_{-1+r}w_{-2-r}}{(1-a)^2}\left(1+o\left(a^{3m}\right)\right)\displaystyle\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\,\text{çift ve}\,r\,\text{tek},\\ \dfrac{b^2v_{-1+r}(d-v_{-2-r})(f-w_{-1+r})(f-w_{-2-r})}{(1-a)^2}\left(1+o\left(a^{3m}\right)\right)\displaystyle\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\,\text{tek ve}\,r\,\text{tek},\\ \dfrac{b^2v_{-1+r}v_{-2-r}(f-w_{-1+r})w_{-2-r}}{(1-a)^2}\left(1+o\left(a^{3m}\right)\right)\displaystyle\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\,\text{tek ve}\,r\,\text{çift},\end{cases} \tag{3.58}$$

ve

$$\prod_{p=0}^{2m} c_p^{s,r,1} = \begin{cases} \dfrac{b^2 v_{-1+r} v_{-2-r}(f-w_{-1+r})(f-w_{-2-r})}{(1-a)^2}\left(1+O\left(a^{3m}\right)\right)\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\, çift\, ve\, r\, çift, \\ \dfrac{b^2 v_{-1+r}(d-v_{-2-r})(f-w_{-1+r})w_{-2-r}}{(1-a)^2}\left(1+O\left(a^{3m}\right)\right)\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\, çift\, ve\, r\, tek, \\ \dfrac{b^2 (d-v_{-1+r})v_{-2-r} w_{-1+r}(f-w_{-2-r})}{(1-a)^2}\left(1+O\left(a^{3m}\right)\right)\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\, tek\, ve\, r\, tek, \\ \dfrac{b^2 (d-v_{-1+r})(d-v_{-2-r})w_{-1+r} w_{-2-r}}{(1-a)^2}\left(1+O\left(a^{3m}\right)\right)\prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right), & s\, tek\, ve\, r\, çift, \end{cases} \tag{3.59}$$

yazılabilir. Buradan $\left(\prod_{p=0}^{2m-1} a_p^{s,r,1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$, $\left(\prod_{p=0}^{2m} a_p^{s,r,1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$, $\left(\prod_{p=0}^{2m-1} b_p^{s,r,1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$, $\left(\prod_{p=0}^{2m} b_p^{s,r,1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ve $\left(\prod_{p=0}^{2m-1} c_p^{s,r,1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$, $\left(\prod_{p=0}^{2m} c_p^{s,r,1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ dizileri yakınsak ve böylece (3.33)-(3.35)'den $x_{12m+2s+r}$, $x_{12m-6+2s+r}$, $y_{12m+2s+r}$, $y_{12m-6+2s+r}$, $z_{12m+2s+r}$ ve $z_{12m-6+2s+r}$ dizilerinin yakınsaklığı kolayca görülür.

d) Bu durumda (3.54)-(3.56) ve $K_1=-1$ şartından

$$\prod_{p=0}^{2m-1} a_p^{s,r,1} = (-1)^m \prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right) \tag{3.60}$$

$$\prod_{p=0}^{2m-1} b_p^{s,r,1} = (-1)^m \prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right) \tag{3.61}$$

$$\prod_{p=0}^{2m-1} c_p^{s,r,1} = (-1)^m \prod_{p=0}^{m-1}\left(1+O\left(a^{3p}\right)\right) \tag{3.62}$$

yazılabilir. Bunlar ve (3.57)-(3.59) denklemlerinden $j\in\{-1,0,1,2\}$ için $\left(\prod_{p=0}^{4m+j} a_p^{s,r,1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\prod_{p=0}^{4m+j} b_p^{s,r,1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\prod_{p=0}^{4m+j} c_p^{s,r,1}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizileri yakınsak olup (3.33)-(3.35) 'ten $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$, $r\in\{-1,0\}$ ve $j\in\{-1,0,1,2\}$ için, $(x_{24m+6j+2s+r})_{m\in\mathbb{N}_0}$, $(y_{24m+6j+2s+r})_{m\in\mathbb{N}_0}$ ve $(z_{24m+6j+2s+r})_{m\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin de yakınsak olduğu kolayca görülür. ■

Teorem 3.4. $|c|<1$, $a=-1$ ve $e=-1$ ve $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -3}$ sistem (3.32) 'nin iyi tanımlı bir çözümü olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) Eğer $|K_2|>1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $x_{6m+2s+r}\to 0$, $y_{6m+2s+r}\to 0$ ve $z_{6m+2s+r}\to 0$ 'dır.

b) Eğer $|K_2|<1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $|x_{6m+2s+r}|\to\infty$, $|y_{6m+2s+r}|\to\infty$ ve $|z_{6m+2s+r}|\to\infty$ 'dur.

c) Eğer $K_2=1$ ise, o zaman $x_{12m+2s+r}$, $x_{12m-6+2s+r}$, $y_{12m+2s+r}$, $y_{12m-6+2s+r}$, $z_{12m+2s+r}$ ve $z_{12m-6+2s+r}$ dizileri yakınsaktır.

d) Eğer $K_2=-1$ ise, o zaman, $j\in\{-1,0,1,2\}$ için $x_{24m+6j+2s+r}$, $y_{24m+6j+2s+r}$ ve $z_{24m+6j+2s+r}$ dizileri yakınsaktır.

Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ ' dır.

İspat. Teoremin ispatı, aşağıda tanımlanan notasyonları kullanarak Teorem 3.3'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

$$\begin{aligned} a_m^{s,r,2} &= \left(\frac{b+(-1)^{3m+s+r+1}(2u_{-2-r}-b)}{2}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right) \\ &\times\left(\frac{f+(-1)^{3m+s+r}(2w_{-2-r}-f)}{2}\right)\left(\frac{b+(-1)^{3m+s-1}(2u_{-1+r}-b)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r-1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+(-1)^{3m+s-2}(2w_{-1+r}-f)}{2}\right), \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned} b_m^{s,r,2} &= \left(\frac{d+c^{3m+s+r+1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+(-1)^{3m+s}(2w_{-1+r}-f)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{b+(-1)^{3m+s+r}(2u_{-2-r}-b)}{2}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-1}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right) \\ &\times\left(\frac{f+(-1)^{3m+s+r-1}(2w_{-2-r}-f)}{2}\right)\left(\frac{b+(-1)^{3m+s-2}(2u_{-1+r}-b)}{2}\right), \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned} c_m^{s,r,2} &= \left(\frac{f+(-1)^{3m+s+r+1}(2w_{-2-r}-f)}{2}\right)\left(\frac{b+(-1)^{3m+s}(2u_{-1+r}-b)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+(-1)^{3m+s-1}(2w_{-1+r}-f)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{b+(-1)^{3m+s+r-1}(2u_{-2-r}-b)}{2}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-2}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right) \end{aligned} \tag{3.65}$$

Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ ' dır. ■

Teorem 3.5. $|e|<1$, $a=-1$ ve $c=-1$ ve $(x_n,y_n,z_n)_{n\geq-3}$ sistem (3.32) 'nin iyi tanımlı bir çözümü olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) Eğer $|K_3|>1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $x_{6m+2s+r}\to 0$, $y_{6m+2s+r}\to 0$ ve $z_{6m+2s+r}\to 0$ ‘dır.

b) Eğer $|K_3|<1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $|x_{6m+2s+r}|\to\infty$, $|y_{6m+2s+r}|\to\infty$ ve $|z_{6m+2s+r}|\to\infty$ ‘dur.

c) Eğer $K_3=1$ ise, o zaman $x_{12m+2s+r}$, $x_{12m-6+2s+r}$, $y_{12m+2s+r}$, $y_{12m-6+2s+r}$, $z_{12m+2s+r}$ ve $z_{12m-6+2s+r}$ dizileri yakınsaktır.

d) Eğer $K_3=-1$ ise, o zaman, $j\in\{-1,0,1,2\}$ için, $x_{24m+6j+2s+r}$, $y_{24m+6j+2s+r}$ ve $z_{24m+6j+2s+r}$ dizileri yakınsaktır.

Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ ’ dır.

İspat. Teoremin ispatı, aşağıda tanımlanan notasyonları kullanarak Teorem 3.3’ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

$$a_m^{s,r,3}=\left(\frac{b+(-1)^{3m+s+r+1}(2u_{-2-r}-b)}{2}\right)\left(\frac{d+(-1)^{3m+s}(2v_{-1+r}-d)}{2}\right)$$
$$\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+(-1)^{3m+s-1}(2u_{-1+r}-b)}{2}\right) \tag{3.66}$$
$$\times\left(\frac{d+(-1)^{3m+s+r-1}(2v_{-2-r}-d)}{2}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-2}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right),$$

$$b_m^{s,r,3}=\left(\frac{d+(-1)^{3m+s+r+1}(2v_{-2-r}-d)}{2}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)$$
$$\times\left(\frac{b+(-1)^{3m+s+r}(2u_{-2-r}-b)}{2}\right)\left(\frac{d+(-1)^{3m+s-1}(2v_{-1+r}-d)}{2}\right) \tag{3.67}$$
$$\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r-1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+(-1)^{3m+s-2}(2u_{-1+r}-b)}{2}\right)$$

ve

$$c_m^{s,r,3}=\left(\frac{f+e^{3m+s+r+1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+(-1)^{3m+s}(2u_{-1+r}-b)}{2}\right)$$
$$\times\left(\frac{d+(-1)^{3m+s+r}(2v_{-2-r}-d)}{2}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-1}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right) \tag{3.68}$$
$$\times\left(\frac{b+(-1)^{3m+s+r-1}(2u_{-2-r}-b)}{2}\right)\left(\frac{d+(-1)^{3m+s-2}(2v_{-1+r}-d)}{2}\right)$$

Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ ’ dır. ■

Teorem 3.6. $a=c=e=-1$ ve $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -3}$ sistem (3.32) 'nin iyi tanımlı bir çözümü olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) Eğer $|K_4|>1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $x_{6m+2s+r}\to 0$, $y_{6m+2s+r}\to 0$ ve $z_{6m+2s+r}\to 0$ 'dır.

b) Eğer $|K_4|<1$ ise, o zaman $m\to\infty$ iken $|x_{6m+2s+r}|\to\infty$, $|y_{6m+2s+r}|\to\infty$ ve $|z_{6m+2s+r}|\to\infty$ 'dur.

c) Eğer $K_4=1$ ise, o zaman $x_{12m+2s+r}$, $y_{12m+2s+r}$ ve $z_{12m+2s+r}$ on iki periyotludur.

d) Eğer $K_4=-1$ ise, o zaman, $x_{24m+6j+2s+r}$, $y_{24m+6j+2s+r}$ ve $z_{24m+6j+2s+r}$ yirmi dört periyotludur.

Burada $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ ' dır.

İspat. (a)-(d): Bu durumlarda $\forall m\in\mathbb{N}_0$, $s\in\{2,3,4\}$ ve $r\in\{-1,0\}$ için

$$\begin{aligned} a_m^{s,r,4} &= \left(\frac{b+(-1)^{3m+s+r+1}(2u_{-2-r}-b)}{2}\right)\left(\frac{d+(-1)^{3m+s}(2v_{-1+r}-d)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{f+(-1)^{3m+s+r}(2w_{-2-r}-f)}{2}\right)\left(\frac{b+(-1)^{3m+s-1}(2u_{-1+r}-b)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{d+(-1)^{3m+s+r-1}(2v_{-2-r}-d)}{2}\right)\left(\frac{f+(-1)^{3m+s-2}(2w_{-1+r}-f)}{2}\right), \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned} b_m^{s,r,4} &= \left(\frac{d+(-1)^{3m+s+r+1}(2v_{-2-r}-d)}{2}\right)\left(\frac{f+(-1)^{3m+s}(2w_{-1+r}-f)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{b+(-1)^{3m+s+r}(2u_{-2-r}-b)}{2}\right)\left(\frac{d+(-1)^{3m+s-1}(2v_{-1+r}-d)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{f+(-1)^{3m+s+r-1}(2w_{-2-r}-f)}{2}\right)\left(\frac{b+(-1)^{3m+s-2}(2u_{-1+r}-b)}{2}\right), \end{aligned} \tag{3.70}$$

ve

$$\begin{aligned} c_m^{s,r,4} &= \left(\frac{f+(-1)^{3m+s+r+1}(2w_{-2-r}-f)}{2}\right)\left(\frac{b+(-1)^{3m+s}(2u_{-1+r}-b)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{d+(-1)^{3m+s+r}(2v_{-2-r}-d)}{2}\right)\left(\frac{f+(-1)^{3m+s-1}(2w_{-1+r}-f)}{2}\right) \\ &\times\left(\frac{b+(-1)^{3m+s+r-1}(2u_{-2-r}-b)}{2}\right)\left(\frac{d+(-1)^{3m+s-2}(2v_{-1+r}-d)}{2}\right), \end{aligned} \tag{3.71}$$

notasyonları tanımlansın. (3.69)-(3.71) 'den,

$$a_{2m}^{s,r,4}a_{2m+1}^{s,r,4}=b_{2m}^{s,r,4}b_{2m+1}^{s,r,4}=c_{2m}^{s,r,4}c_{2m+1}^{s,r,4}=K_4 \tag{3.72}$$

elde edilir ki teoremin öncüllerinin hipotezlerinden istenilen sonuçlar kolayca görülür. ■

Teorem 3.7. $abcdef\neq 0$, a, c ve e‘ den en az biri 1'e eşit, $(x_n,y_n,z_n)_{n\geq -3}$, sistem (3.32) ' nin iyi tanımlı çözümleri ve $i\in\{1,2,3\}$ için $x_{-i},y_{-i},z_{-i}\notin\mathcal{F}$ olsun. O zaman $n\to\infty$ iken $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ ve $z_n\to 0$ ‘dır.

İspat. $a=1$, $c\neq 1$ ve $e\neq 1$ için

$$\begin{aligned}a_m^{s,r,5}&=\left(u_{-2-r}+b\left(3m+s+r+1\right)\right)\left(\frac{d+c^{3m+s}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\\&\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(u_{-1+r}+b\left(3m+s-1\right)\right)\\&\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r-1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-2}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right),\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}b_m^{s,r,5}&=\left(\frac{d+c^{3m+s+r+1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\\&\times\left(u_{-2-r}+b\left(3m+s+r\right)\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-1}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\\&\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r-1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(u_{-2-r}+b\left(3m+s-2\right)\right)\end{aligned} \tag{3.74}$$

ve

$$\begin{aligned}c_m^{s,r,5}&=\left(\frac{f+e^{3m+s+r+1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(u_{-1+r}+b\left(3m+s\right)\right)\\&\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-1}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right),\\&\times\left(u_{-2-r}+b\left(3m+s+r-1\right)\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-2}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\end{aligned} \tag{3.75}$$

$a\neq 1$, $c=1$ ve $e\neq 1$ için

$$\begin{aligned}a_m^{s,r,6}&=\left(\frac{b+a^{3m+s+r+1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(v_{-1+r}+d(3m+s)\right)\\&\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-1}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\\&\times\left(v_{-2-r}+d(3m+s+r-1)\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-2}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right),\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$b_m^{s,r,6} = \left(v_{-2-r} + d(3m+s+r+1)\right)\left(\frac{f+e^{3m+s}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right)$$
$$\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(v_{-1+r} + d(3m+s-1)\right) \tag{3.77}$$
$$\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r-1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-2}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)$$

ve

$$c_m^{s,r,6} = \left(\frac{f+e^{3m+s+r+1}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(\frac{b+a^{3m+s}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)$$
$$\times\left(v_{-2-r} + d(3m+s+r)\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-1}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right) \quad , \tag{3.78}$$
$$\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r-1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(v_{-1+r} + d(3m+s-2)\right)$$

$a \neq 1,\ c \neq 1$ ve $e = 1$ için

$$a_m^{s,r,7} = \left(\frac{b+a^{3m+s+r+1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)$$
$$\times\left(w_{-2-r} + f(3m+s+r)\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-1}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right) \tag{3.79}$$
$$\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r-1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(w_{-1+r} + f(3m+s-2)\right),$$

$$b_m^{s,r,7} = \left(\frac{d+c^{3m+s+r+1}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(w_{-1+r} + f(3m+s)\right)$$
$$\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-1}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right) \tag{3.80}$$
$$\times\left(w_{-2-r} + f(3m+s+r-1)\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-2}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)$$

ve

$$c_m^{s,r,7} = \left(w_{-2-r} + f(3m+s+r+1)\right)\left(\frac{b+a^{3m+s}(u_{-1+r}(1-a)-b)}{1-a}\right)$$
$$\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r}(v_{-2-r}(1-c)-d)}{1-c}\right)\left(w_{-1+r} + f(3m+s-1)\right) \quad , \tag{3.81}$$
$$\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r-1}(u_{-2-r}(1-a)-b)}{1-a}\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-2}(v_{-1+r}(1-c)-d)}{1-c}\right)$$

$a=1,\ c=1$ ve $e\neq 1$ için

$$a_m^{s,r,8}=\left(u_{-2-r}+b(3m+s+r+1)\right)\left(v_{-1+r}+d(3m+s)\right)$$
$$\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r}(w_{-2-r}(1-e)-f)}{1-e}\right)\left(u_{-1+r}+b(3m+s-1)\right) \tag{3.82}$$
$$\times\left(v_{-2-r}+d(3m+s+r-1)\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-2}(w_{-1+r}(1-e)-f)}{1-e}\right),$$

$$b_m^{s,r,8}=\left(v_{-2-r}+d\left(3m+s+r+1\right)\right)\left(\frac{f+e^{3m+s}\left(w_{-1+r}\left(1-e\right)-f\right)}{1-e}\right)$$
$$\times\left(u_{-2-r}+b\left(3m+s+r\right)\right)\left(v_{-1+r}+d\left(3m+s-1\right)\right) \tag{3.83}$$
$$\times\left(\frac{f+e^{3m+s+r-1}\left(w_{-2-r}\left(1-e\right)-f\right)}{1-e}\right)\left(u_{-2+r}+b\left(3m+s-2\right)\right),$$

ve

$$c_m^{s,r,8}=\left(\frac{f+e^{3m+s+r+1}\left(w_{-2-r}\left(1-e\right)-f\right)}{1-e}\right)\left(u_{-1+r}+b\left(3m+s\right)\right)$$
$$\times\left(v_{-2-r}+d\left(3m+s+r\right)\right)\left(\frac{f+e^{3m+s-1}\left(w_{-1+r}\left(1-e\right)-f\right)}{1-e}\right) \tag{3.84}$$
$$\times\left(u_{-2-r}+b\left(3m+s+r-1\right)\right)\left(v_{-1+r}+d\left(3m+s-2\right)\right)$$

$a=1,\ c\neq 1$ ve $e=1$ için

$$a_m^{s,r,9}=\left(u_{-2-r}+b\left(3m+s+r+1\right)\right)\left(\frac{d+c^{3m+s}\left(v_{-1+r}\left(1-c\right)-d\right)}{1-c}\right)$$
$$\times\left(w_{-2-r}+f\left(3m+s+r\right)\right)\left(u_{-1+r}+b\left(3m+s-1\right)\right) \tag{3.85}$$
$$\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r-1}\left(v_{-2-r}\left(1-c\right)-d\right)}{1-c}\right)\left(w_{-1+r}+f\left(3m+s-2\right)\right),$$

$$b_m^{s,r,9}=\left(\frac{d+c^{3m+s+r+1}\left(v_{-2-r}\left(1-c\right)-d\right)}{1-c}\right)\left(w_{-1+r}+f\left(3m+s\right)\right)$$
$$\times\left(u_{-2-r}+b\left(3m+s+r\right)\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-1}\left(v_{-1+r}\left(1-c\right)-d\right)}{1-c}\right) \tag{3.86}$$
$$\times\left(w_{-2-r}+f\left(3m+s+r-1\right)\right)\left(u_{-1+r}+b\left(3m+s-2\right)\right),$$

ve

$$c_m^{s,r,9} = \left(w_{-2-r} + f\left(3m+s+r+1\right)\right)\left(u_{-1+r} + b\left(3m+s\right)\right)$$
$$\times\left(\frac{d+c^{3m+s+r}\left(v_{-2-r}\left(1-c\right)-d\right)}{1-c}\right)\left(w_{-1+r} + f\left(3m+s-1\right)\right) \quad , \tag{3.87}$$
$$\times\left(u_{-2-r} + b\left(3m+s+r-1\right)\right)\left(\frac{d+c^{3m+s-2}\left(v_{-1+r}\left(1-c\right)-d\right)}{1-c}\right)$$

$a \neq 1,\ c=1$ ve $e=1$ için

$$a_m^{s,r,10} = \left(\frac{b+a^{3m+s+r+1}\left(u_{-2-r}\left(1-a\right)-b\right)}{1-a}\right)\left(v_{-1+r} + d\left(3m+s\right)\right)$$
$$\times\left(w_{-2-r} + f\left(3m+s+r\right)\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-1}\left(u_{-1+r}\left(1-a\right)-b\right)}{1-a}\right) \tag{3.88}$$
$$\times\left(v_{-2-r} + d\left(3m+s+r-1\right)\right)\left(w_{-1+r} + f\left(3m+s-2\right)\right),$$

$$b_m^{s,r,10} = \left(v_{-2-r} + d\left(3m+s+r+1\right)\right)\left(w_{-1+r} + f\left(3m+s\right)\right)$$
$$\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r}\left(u_{-2-r}\left(1-a\right)-b\right)}{1-a}\right)\left(v_{-1+r} + d\left(3m+s-1\right)\right) \tag{3.89}$$
$$\times\left(w_{-2-r} + f\left(3m+s+r-1\right)\right)\left(\frac{b+a^{3m+s-2}\left(u_{-1+r}\left(1-a\right)-b\right)}{1-a}\right)$$

ve

$$c_m^{s,r,10} = \left(w_{-2-r} + f\left(3m+s+r+1\right)\right)\left(\frac{b+a^{3m+s}\left(u_{-1+r}\left(1-a\right)-b\right)}{1-a}\right)$$
$$\times\left(v_{-2-r} + d\left(3m+s+r\right)\right)\left(w_{-1+r} + f\left(3m+s-1\right)\right) \quad , \tag{3.90}$$
$$\times\left(\frac{b+a^{3m+s+r-1}\left(u_{-2-r}\left(1-a\right)-b\right)}{1-a}\right)\left(v_{-1+r} + d\left(3m+s-2\right)\right)$$

$a=1,\ c=1$ ve $e=1$ için

$$a_m^{s,r,11} = \left(u_{-2-r} + b\left(3m+s+r+1\right)\right)\left(v_{-1+r} + d\left(3m+s\right)\right)$$
$$\times\left(w_{-2-r} + f\left(3m+s+r\right)\right)\left(u_{-1+r} + b\left(3m+s-1\right)\right) \tag{3.91}$$
$$\times\left(v_{-2-r} + d\left(3m+s+r-1\right)\right)\left(w_{-1+r} + f\left(3m+s-2\right)\right),$$

$$b_m^{s,r,11} = \left(v_{-2-r} + d\left(3m+s+r+1\right)\right)\left(w_{-1+r} + f\left(3m+s\right)\right)$$
$$\times\left(u_{-2-r} + b\left(3m+s+r\right)\right)\left(v_{-1+r} + d\left(3m+s-1\right)\right) \tag{3.92}$$
$$\times\left(w_{-2-r} + f\left(3m+s+r-1\right)\right)\left(u_{-1+r} + b\left(3m+s-2\right)\right),$$

ve

$$
\begin{aligned}
c_m^{s,r,11} = &\left(w_{-2-r} + f\left(3m+s+r+1\right)\right)\left(u_{-1+r} + b\left(3m+s\right)\right) \\
&\times\left(v_{-2-r} + d\left(3m+s+r\right)\right)\left(w_{-1+r} + f\left(3m+s-1\right)\right) \\
&\times\left(u_{-2-r} + b\left(3m+s+r-1\right)\right)\left(v_{-1+r} + d\left(3m+s-2\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.93}
$$

notasyonları tanımlansın. Burada $\forall m \in \mathbb{N}_0$, $s \in \{2,3,4\}$ ve $r \in \{-1,0\}$‘ dır.

$$
\lim_{m\to\infty}\left|a_m^{s,r,p}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|b_m^{s,r,p}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|c_m^{s,r,p}\right| = \infty, \quad p \in \{5,6,\ldots,11\}, \tag{3.94}
$$

olduğundan (3.73)-(3.93) ’ten teoremin ispatı kolayca görülür. ■

BÖLÜM 4

4.1. $x_{n+1}=y_n^{\alpha}z_{n-1}^{\beta},\ y_{n+1}=z_n^{\gamma}t_{n-1}^{\delta},\ z_{n+1}=t_n^{\varepsilon}x_{n-1}^{\mu},\ t_{n+1}=x_n^{\xi}y_{n-1}^{\rho}$ Fark Denklem Sisteminin Çözümü

Bu bölümde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu, \xi$ ve ρ parametreleri tamsayı ve $i\in\{0,1\}$ için $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, t_{-i} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$x_{n+1}=y_n^{\alpha}z_{n-1}^{\beta},\ y_{n+1}=z_n^{\gamma}t_{n-1}^{\delta},\ z_{n+1}=t_n^{\varepsilon}x_{n-1}^{\mu},\ t_{n+1}=x_n^{\xi}y_{n-1}^{\rho},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{4.1}$$

sisteminin kapalı formda çözülebilirliği gösterilip, $\beta=0,\ \delta=0,\ \mu=0,\ \rho=0$ ve $\beta\delta\mu\rho\neq 0$ durumlarına göre sistem (4.1) ’in genel çözümü elde edilecektir.

Teorem 4.1. $\{(x_n, y_n, z_n, t_n)\}_{n\geq -1}$ sistem (4.1) ‘in iyi tanımlı çözümü ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu$ $, \xi$ ve ρ parametreleri tamsayı olsun. Eğer $i\in\{0,1\}$ için $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, t_{-i} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ise o zaman sistem (4.1) kapalı formda çözülebilirdir.

İspat

$$\alpha_1=\alpha,\quad \beta_1=\beta,\quad \gamma_1=\gamma,\quad \delta_1=\delta,\quad \varepsilon_1=\varepsilon,\quad \mu_1=\mu,\quad \xi_1=\xi,\quad \rho_1=\rho \tag{4.2}$$

olsun. (4.2) ‘deki eşitliklerden ve sistem (4.1) ’de n yerine $n-1$ alınırsa $n\in\mathbb{N}$ için sistem (4.1)

$$\begin{cases} x_{n+1}=y_n^{\alpha_1}z_{n-1}^{\beta_1}=z_{n-1}^{\gamma\alpha_1+\beta_1}t_{n-2}^{\delta\alpha_1}=z_{n-1}^{\alpha_2}t_{n-2}^{\beta_2},\\ y_{n+1}=z_n^{\gamma_1}t_{n-1}^{\delta_1}=t_{n-1}^{\varepsilon\gamma_1+\delta_1}x_{n-2}^{\mu\gamma_1}=t_{n-1}^{\gamma_2}x_{n-2}^{\delta_2},\\ z_{n+1}=t_n^{\varepsilon_1}x_{n-1}^{\mu_1}=x_{n-1}^{\xi\varepsilon_1+\mu_1}y_{n-2}^{\rho\varepsilon_1}=x_{n-1}^{\varepsilon_2}y_{n-2}^{\mu_2},\\ t_{n+1}=x_n^{\xi_1}y_{n-1}^{\rho_1}=y_{n-1}^{\alpha\xi_1+\rho_1}z_{n-2}^{\beta\xi_1}=y_{n-1}^{\xi_2}z_{n-2}^{\rho_2}, \end{cases} \tag{4.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} &\alpha_2:=\gamma\alpha_1+\beta_1,\ \beta_2:=\delta\alpha_1,\ \varepsilon_2:=\xi\varepsilon_1+\mu_1,\ \mu_2:=\rho\varepsilon_1,\\ &\gamma_2:=\varepsilon\gamma_1+\delta_1,\ \delta_2:=\mu\gamma_1,\ \xi_2:=\alpha\xi_1+\rho_1,\ \rho_2:=\beta\xi_1, \end{aligned} \tag{4.4}$$

dır. Şimdi (4.4) ’teki eşitlikler ve sistem (4.1) ’deki denklemlerden $n\in\mathbb{N}_2$ için sistem (4.1)

$$\begin{cases} x_{n+1}=z_{n-1}^{\alpha_2}t_{n-2}^{\beta_2}=t_{n-2}^{\varepsilon\alpha_2+\beta_2}x_{n-3}^{\mu\alpha_2}=t_{n-2}^{\alpha_3}x_{n-3}^{\beta_3},\\ y_{n+1}=t_{n-1}^{\gamma_2}x_{n-2}^{\delta_2}=x_{n-2}^{\xi\gamma_2+\delta_2}y_{n-3}^{\rho\gamma_2}=x_{n-2}^{\gamma_3}y_{n-3}^{\delta_3},\\ z_{n+1}=x_{n-1}^{\varepsilon_2}y_{n-2}^{\mu_2}=y_{n-2}^{\alpha\varepsilon_2+\mu_2}z_{n-3}^{\beta\varepsilon_2}=y_{n-2}^{\varepsilon_3}z_{n-3}^{\mu_3},\\ t_{n+1}=y_{n-1}^{\xi_2}z_{n-2}^{\rho_2}=z_{n-2}^{\gamma\xi_2+\rho_2}t_{n-3}^{\delta\xi_2}=z_{n-2}^{\xi_3}t_{n-3}^{\rho_3}, \end{cases} \tag{4.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} &\alpha_3 := \varepsilon\alpha_2 + \beta_2,\ \beta_3 := \mu\alpha_2,\ \varepsilon_3 := \alpha\varepsilon_2 + \mu_2,\ \mu_3 := \beta\varepsilon_2, \\ &\gamma_3 := \xi\gamma_2 + \delta_2,\ \delta_3 := \rho\gamma_2,\ \xi_3 := \gamma\xi_2 + \rho_2,\ \rho_3 := \delta\xi_2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

dır. Yine (4.6) ’daki eşitlikler ve sistem (4.1) ’deki denklemlerden, $n \in \mathbb{N}_3$ için sistem (4.1)

$$\begin{cases} x_{n+1} = t_{n-2}^{\alpha_3} x_{n-3}^{\beta_3} = x_{n-3}^{\xi\alpha_3+\beta_3} y_{n-4}^{\rho\alpha_3} = x_{n-3}^{\alpha_4} y_{n-4}^{\beta_4}, \\ y_{n+1} = x_{n-2}^{\gamma_3} y_{n-3}^{\delta_3} = y_{n-3}^{\alpha\gamma_3+\delta_3} z_{n-4}^{\beta\gamma_3} = y_{n-3}^{\gamma_4} z_{n-4}^{\delta_4}, \\ z_{n+1} = y_{n-2}^{\varepsilon_3} z_{n-3}^{\mu_3} = z_{n-3}^{\gamma\varepsilon_3+\mu_3} t_{n-4}^{\delta\varepsilon_3} = z_{n-3}^{\varepsilon_4} t_{n-4}^{\mu_4}, \\ t_{n+1} = z_{n-2}^{\xi_3} t_{n-3}^{\rho_3} = t_{n-3}^{\varepsilon\xi_3+\rho_3} x_{n-4}^{\mu\xi_3} = t_{n-3}^{\xi_4} x_{n-4}^{\rho_4}, \end{cases} \tag{4.7}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} &\alpha_4 := \xi\alpha_3 + \beta_3,\ \beta_4 := \rho\alpha_3,\ \varepsilon_4 := \gamma\varepsilon_3 + \mu_3,\ \mu_4 := \delta\varepsilon_3, \\ &\gamma_4 := \alpha\gamma_3 + \delta_3,\ \delta_4 := \beta\gamma_3,\ \xi_4 := \varepsilon\xi_3 + \rho_3,\ \rho_4 := \mu\xi_3, \end{aligned} \tag{4.8}$$

dır. Benzer şekilde (4.8) ’deki eşitlikler ve sistem (4.1) ’deki denklemlerden, $n \in \mathbb{N}_4$ için sistem (4.1)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_{n-3}^{\alpha_4} y_{n-4}^{\beta_4} = y_{n-4}^{\alpha\alpha_4+\beta_4} z_{n-5}^{\beta\alpha_4} = y_{n-4}^{\alpha_5} z_{n-5}^{\beta_5}, \\ y_{n+1} = y_{n-3}^{\gamma_4} z_{n-4}^{\delta_4} = z_{n-4}^{\gamma\gamma_4+\delta_4} t_{n-5}^{\delta\gamma_4} = z_{n-4}^{\gamma_5} t_{n-5}^{\delta_5}, \\ z_{n+1} = z_{n-3}^{\varepsilon_4} t_{n-4}^{\mu_4} = t_{n-4}^{\varepsilon\varepsilon_4+\mu_4} x_{n-5}^{\mu\varepsilon_4} = t_{n-4}^{\varepsilon_5} x_{n-5}^{\mu_5}, \\ t_{n+1} = t_{n-3}^{\xi_4} x_{n-4}^{\rho_4} = x_{n-4}^{\xi\xi_4+\rho_4} y_{n-5}^{\rho\xi_4} = x_{n-4}^{\xi_5} y_{n-5}^{\rho_5}, \end{cases} \tag{4.9}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} &\alpha_5 := \alpha\alpha_4 + \beta_4,\ \beta_5 := \beta\alpha_4,\ \varepsilon_5 := \varepsilon\varepsilon_4 + \mu_4,\ \mu_5 := \mu\varepsilon_4, \\ &\gamma_5 := \gamma\gamma_4 + \delta_4,\ \delta_5 := \delta\gamma_4,\ \xi_5 := \xi\xi_4 + \rho_4,\ \rho_5 := \rho\xi_4, \end{aligned} \tag{4.10}$$

dır. Şimdi kabul edelim ki

$$x_{n+1} = z_{n-4k+3}^{\alpha_{4k-2}} t_{n-4k+2}^{\beta_{4k-2}},\ y_{n+1} = t_{n-4k+3}^{\gamma_{4k-2}} x_{n-4k+2}^{\delta_{4k-2}},\ z_{n+1} = x_{n-4k+3}^{\varepsilon_{4k-2}} y_{n-4k+2}^{\mu_{4k-2}},\ t_{n+1} = y_{n-4k+3}^{\xi_{4k-2}} z_{n-4k+2}^{\rho_{4k-2}}, \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} \alpha_{4k-2} := \gamma\alpha_{4k-3} + \beta_{4k-3},\ \beta_{4k-2} := \delta\alpha_{4k-3},\ \gamma_{4k-2} := \varepsilon\gamma_{4k-3} + \delta_{4k-3},\ \delta_{4k-2} := \mu\gamma_{4k-3}, \\ \varepsilon_{4k-2} := \xi\varepsilon_{4k-3} + \mu_{4k-3},\ \mu_{4k-2} := \rho\varepsilon_{4k-3},\ \xi_{4k-2} := \alpha\xi_{4k-3} + \rho_{4k-3},\ \rho_{4k-2} := \beta\xi_{4k-3}, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$x_{n+1} = t_{n-4k+2}^{\alpha_{4k-1}} x_{n-4k+1}^{\beta_{4k-1}},\ y_{n+1} = x_{n-4k+2}^{\gamma_{4k-1}} y_{n-4k+1}^{\delta_{4k-1}},\ z_{n+1} = y_{n-4k+2}^{\varepsilon_{4k-1}} z_{n-4k+1}^{\mu_{4k-1}},\ t_{n+1} = z_{n-4k+2}^{\xi_{4k-1}} t_{n-4k+1}^{\rho_{4k-1}}, \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} \alpha_{4k-1} := \varepsilon\alpha_{4k-2} + \beta_{4k-2},\ \beta_{4k-1} := \mu\alpha_{4k-2},\ \gamma_{4k-1} := \xi\gamma_{4k-2} + \delta_{4k-2},\ \delta_{4k-1} := \rho\gamma_{4k-2}, \\ \varepsilon_{4k-1} := \alpha\varepsilon_{4k-2} + \mu_{4k-2},\ \mu_{4k-1} := \beta\varepsilon_{4k-2},\ \xi_{4k-1} := \gamma\xi_{4k-2} + \rho_{4k-2},\ \rho_{4k-1} := \delta\xi_{4k-2}, \end{cases} \tag{4.14}$$

$$x_{n+1} = x_{n-4k+1}^{\alpha_{4k}} y_{n-4k}^{\beta_{4k}},\ y_{n+1} = y_{n-4k+1}^{\gamma_{4k}} z_{n-4k}^{\delta_{4k}},\ z_{n+1} = z_{n-4k+1}^{\varepsilon_{4k}} t_{n-4k}^{\mu_{4k}},\ t_{n+1} = t_{n-4k+1}^{\xi_{4k}} x_{n-4k}^{\rho_{4k}}, \tag{4.15}$$

$$\begin{cases} \alpha_{4k} := \xi\alpha_{4k-1} + \beta_{4k-1},\ \beta_{4k} := \rho\alpha_{4k-1},\ \gamma_{4k} := \alpha\gamma_{4k-1} + \delta_{4k-1},\ \delta_{4k} := \beta\gamma_{4k-1}, \\ \varepsilon_{4k} := \gamma\varepsilon_{4k-1} + \mu_{4k-1},\ \mu_{4k} := \delta\varepsilon_{4k-1},\ \xi_{4k} := \varepsilon\xi_{4k-1} + \rho_{4k-1},\ \rho_{4k} := \mu\xi_{4k-1}, \end{cases} \tag{4.16}$$

ve

$$x_{n+1}=y_{n-4k}^{\alpha_{4k+1}}z_{n-4k-1}^{\beta_{4k+1}},\ y_{n+1}=z_{n-4k}^{\gamma_{4k+1}}t_{n-4k-1}^{\delta_{4k+1}},\ z_{n+1}=t_{n-4k}^{\varepsilon_{4k+1}}x_{n-4k-1}^{\mu_{4k+1}},\ t_{n+1}=x_{n-4k}^{\xi_{4k+1}}y_{n-4k-1}^{\rho_{4k+1}}, \tag{4.17}$$

$$\begin{cases}\alpha_{4k+1}:=\alpha\alpha_{4k}+\beta_{4k},\ \beta_{4k+1}:=\beta\alpha_{4k},\ \gamma_{4k+1}:=\gamma\gamma_{4k}+\delta_{4k},\ \delta_{4k+1}:=\delta\gamma_{4k},\\ \varepsilon_{4k+1}:=\varepsilon\varepsilon_{4k}+\mu_{4k},\ \mu_{4k+1}:=\mu\varepsilon_{4k},\ \xi_{4k+1}:=\xi\xi_{4k}+\rho_{4k},\ \rho_{4k+1}:=\rho\xi_{4k},\end{cases} \tag{4.18}$$

olsun. Burada bazı $k\in\mathbb{N}$ için öyle ki $n\geq 4k$ dır.

(4.17) ve sistem (4.1) ‘den, $k\in\mathbb{N}$ ve $n\geq 4k+1$ için

$$\begin{cases}x_{n+1}=y_{n-4k}^{\alpha_{4k+1}}z_{n-4k-1}^{\beta_{4k+1}}=z_{n-4k-1}^{\gamma\alpha_{4k+1}+\beta_{4k+1}}t_{n-4k-2}^{\delta\alpha_{4k+1}}=z_{n-4k-1}^{\alpha_{4k+2}}t_{n-4k-2}^{\beta_{4k+2}},\\ y_{n+1}=z_{n-4k}^{\gamma_{4k+1}}t_{n-4k-1}^{\delta_{4k+1}}=t_{n-4k-1}^{\varepsilon\gamma_{4k+1}+\delta_{4k+1}}x_{n-4k-2}^{\mu\gamma_{4k+1}}=t_{n-4k-1}^{\gamma_{4k+2}}x_{n-4k-2}^{\delta_{4k+2}},\\ z_{n+1}=t_{n-4k}^{\varepsilon_{4k+1}}x_{n-4k-1}^{\mu_{4k+1}}=x_{n-4k-1}^{\xi\varepsilon_{4k+1}+\mu_{4k+1}}y_{n-4k-2}^{\rho\varepsilon_{4k+1}}=x_{n-4k-1}^{\varepsilon_{4k+2}}y_{n-4k-2}^{\mu_{4k+2}},\\ t_{n+1}=x_{n-4k}^{\xi_{4k+1}}y_{n-4k-1}^{\rho_{4k+1}}=y_{n-4k-1}^{\alpha\xi_{4k+1}+\rho_{4k+1}}z_{n-4k-2}^{\beta\xi_{4k+1}}=y_{n-4k-1}^{\xi_{4k+2}}z_{n-4k-2}^{\rho_{4k+2}},\end{cases} \tag{4.19}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases}\alpha_{4k+2}:=\gamma\alpha_{4k+1}+\beta_{4k+1},\ \beta_{4k+2}:=\delta\alpha_{4k+1},\ \gamma_{4k+2}:=\varepsilon\gamma_{4k+1}+\delta_{4k+1},\ \delta_{4k+2}:=\mu\gamma_{4k+1},\\ \varepsilon_{4k+2}:=\xi\varepsilon_{4k+1}+\mu_{4k+1},\ \mu_{4k+2}:=\rho\varepsilon_{4k+1},\ \xi_{4k+2}:=\alpha\xi_{4k+1}+\rho_{4k+1},\ \rho_{4k+2}:=\beta\xi_{4k+1},\end{cases} \tag{4.20}$$

dır. (4.19) ve sistem (4.1) ’den, $k\in\mathbb{N}$ ve $n\geq 4k+2$ için

$$\begin{cases}x_{n+1}=z_{n-4k-1}^{\alpha_{4k+2}}t_{n-4k-2}^{\beta_{4k+2}}=t_{n-4k-2}^{\varepsilon\alpha_{4k+2}+\beta_{4k+2}}x_{n-4k-3}^{\mu\alpha_{4k+2}}=t_{n-4k-2}^{\alpha_{4k+3}}x_{n-4k-3}^{\beta_{4k+3}},\\ y_{n+1}=t_{n-4k-1}^{\gamma_{4k+2}}x_{n-4k-2}^{\delta_{4k+2}}=x_{n-4k-2}^{\xi\gamma_{4k+2}+\delta_{4k+2}}y_{n-4k-3}^{\rho\gamma_{4k+2}}=x_{n-4k-2}^{\gamma_{4k+3}}y_{n-4k-3}^{\delta_{4k+3}},\\ z_{n+1}=x_{n-4k-1}^{\varepsilon_{4k+2}}y_{n-4k-2}^{\mu_{4k+2}}=y_{n-4k-2}^{\alpha\varepsilon_{4k+2}+\mu_{4k+2}}z_{n-4k-3}^{\beta\varepsilon_{4k+2}}=y_{n-4k-2}^{\varepsilon_{4k+3}}z_{n-4k-3}^{\mu_{4k+3}},\\ t_{n+1}=y_{n-4k-1}^{\xi_{4k+2}}z_{n-4k-2}^{\rho_{4k+2}}=z_{n-4k-2}^{\gamma\xi_{4k+2}+\rho_{4k+2}}t_{n-4k-3}^{\delta\xi_{4k+2}}=z_{n-4k-2}^{\xi_{4k+3}}t_{n-4k-3}^{\rho_{4k+3}},\end{cases} \tag{4.21}$$

olur. Burada

$$\begin{cases}\alpha_{4k+3}:=\varepsilon\alpha_{4k+2}+\beta_{4k+2},\ \beta_{4k+3}:=\mu\alpha_{4k+2},\ \gamma_{4k+3}:=\xi\gamma_{4k+2}+\delta_{4k+2},\ \delta_{4k+3}:=\rho\gamma_{4k+2},\\ \varepsilon_{4k+3}:=\alpha\varepsilon_{4k+2}+\mu_{4k+2},\ \mu_{4k+3}:=\beta\varepsilon_{4k+2},\ \xi_{4k+3}:=\gamma\xi_{4k+2}+\rho_{4k+2},\ \rho_{4k+3}:=\delta\xi_{4k+2},\end{cases} \tag{4.22}$$

dır. Benzer şekilde, (4.21) ve sistem (4.1) ’den, $n\in\mathbb{N}$ ve $n\geq 4k+3$ için

$$\begin{cases}x_{n+1}=t_{n-4k-2}^{\alpha_{4k+3}}x_{n-4k-3}^{\beta_{4k+3}}=x_{n-4k-3}^{\xi\alpha_{4k+3}+\beta_{4k+3}}y_{n-4k-4}^{\rho\alpha_{4k+3}}=x_{n-4k-3}^{\alpha_{4k+4}}y_{n-4k-4}^{\beta_{4k+4}},\\ y_{n+1}=x_{n-4k-2}^{\gamma_{4k+3}}y_{n-4k-3}^{\delta_{4k+3}}=y_{n-4k-3}^{\alpha\gamma_{4k+3}+\delta_{4k+3}}z_{n-4k-4}^{\beta\gamma_{4k+3}}=y_{n-4k-3}^{\gamma_{4k+4}}z_{n-4k-4}^{\delta_{4k+4}},\\ z_{n+1}=y_{n-4k-2}^{\varepsilon_{4k+3}}z_{n-4k-3}^{\mu_{4k+3}}=z_{n-4k-3}^{\gamma\varepsilon_{4k+3}+\mu_{4k+3}}t_{n-4k-4}^{\delta\varepsilon_{4k+3}}=z_{n-4k-3}^{\varepsilon_{4k+4}}t_{n-4k-4}^{\mu_{4k+4}},\\ t_{n+1}=z_{n-4k-2}^{\xi_{4k+3}}t_{n-4k-3}^{\rho_{4k+3}}=t_{n-4k-3}^{\varepsilon\xi_{4k+3}+\rho_{4k+3}}x_{n-4k-4}^{\mu\xi_{4k+3}}=t_{n-4k-3}^{\xi_{4k+4}}x_{n-4k-4}^{\rho_{4k+4}},\end{cases} \tag{4.23}$$

bulunur. Burada

$$\begin{cases}\alpha_{4k+4}:=\xi\alpha_{4k+3}+\beta_{4k+3},\ \beta_{4k+4}:=\rho\alpha_{4k+3},\ \gamma_{4k+4}:=\alpha\gamma_{4k+3}+\delta_{4k+3},\ \delta_{4k+4}:=\beta\gamma_{4k+3},\\ \varepsilon_{4k+4}:=\gamma\varepsilon_{4k+3}+\mu_{4k+3},\ \mu_{4k+4}:=\delta\varepsilon_{4k+3},\ \xi_{4k+4}:=\varepsilon\xi_{4k+3}+\rho_{4k+3},\ \rho_{4k+4}:=\mu\xi_{4k+3},\end{cases} \tag{4.24}$$

dır. Yine benzer şekilde, (4.23) ve sistem (4.1) ’den, $k\in\mathbb{N}$ ve $n\geq 4k+4$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_{n-4k-3}^{\alpha_{4k+4}} y_{n-4k-4}^{\beta_{4k+4}} = y_{n-4k-4}^{\alpha\alpha_{4k+4}+\beta_{4k+4}} z_{n-4k-5}^{\beta\alpha_{4k+4}} = y_{n-4k-4}^{\alpha_{4k+5}} z_{n-4k-5}^{\beta_{4k+5}}, \\ y_{n+1} = y_{n-4k-3}^{\gamma_{4k+4}} z_{n-4k-4}^{\delta_{4k+4}} = z_{n-4k-4}^{\gamma\gamma_{4k+4}+\delta_{4k+4}} t_{n-4k-5}^{\delta\gamma_{4k+4}} = z_{n-4k-4}^{\gamma_{4k+5}} t_{n-4k-5}^{\delta_{4k+5}}, \\ z_{n+1} = z_{n-4k-3}^{\varepsilon_{4k+4}} t_{n-4k-4}^{\mu_{4k+4}} = t_{n-4k-4}^{\varepsilon\varepsilon_{4k+4}+\mu_{4k+4}} x_{n-4k-5}^{\mu\varepsilon_{4k+4}} = t_{n-4k-4}^{\varepsilon_{4k+5}} x_{n-4k-5}^{\mu_{4k+5}}, \\ t_{n+1} = t_{n-4k-3}^{\xi_{4k+4}} x_{n-4k-4}^{\rho_{4k+4}} = x_{n-4k-4}^{\xi\xi_{4k+4}+\rho_{4k+4}} y_{n-4k-5}^{\rho\xi_{4k+4}} = x_{n-4k-4}^{\xi_{4k+5}} y_{n-4k-5}^{\rho_{4k+5}}, \end{cases} \tag{4.25}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{cases} \alpha_{4k+5} := \alpha\alpha_{4k+4} + \beta_{4k+4},\ \beta_{4k+5} := \beta\alpha_{4k+4},\ \gamma_{4k+5} := \gamma\gamma_{4k+4} + \delta_{4k+4},\ \delta_{4k+5} := \delta\gamma_{4k+4}, \\ \varepsilon_{4k+5} := \varepsilon\varepsilon_{4k+4} + \mu_{4k+4},\ \mu_{4k+5} := \mu\varepsilon_{4k+4},\ \xi_{4k+5} := \xi\xi_{4k+4} + \rho_{4k+4},\ \rho_{4k+5} := \rho\xi_{4k+4}, \end{cases} \tag{4.26}$$

dır. Böylece tümevarım yönteminden $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{array}{llll} \alpha_{4k} := \xi\alpha_{4k-1} + \beta_{4k-1}, & \alpha_{4k+1} := \alpha\alpha_{4k} + \beta_{4k}, & \alpha_{4k+2} := \gamma\alpha_{4k+1} + \beta_{4k+1}, & \alpha_{4k+3} := \varepsilon\alpha_{4k+2} + \beta_{4k+2}, \\ \beta_{4k} := \rho\alpha_{4k-1}, & \beta_{4k+1} := \beta\alpha_{4k}, & \beta_{4k+2} := \delta\alpha_{4k+1}, & \beta_{4k+3} := \mu\alpha_{4k+2}, \\ \gamma_{4k} := \alpha\gamma_{4k-1} + \delta_{4k-1}, & \gamma_{4k+1} := \gamma\gamma_{4k} + \delta_{4k}, & \gamma_{4k+2} := \varepsilon\gamma_{4k+1} + \delta_{4k+1}, & \gamma_{4k+3} := \xi\gamma_{4k+2} + \delta_{4k+2}, \\ \delta_{4k} := \beta\gamma_{4k-1}, & \delta_{4k+1} := \delta\gamma_{4k}, & \delta_{4k+2} := \mu\gamma_{4k+1}, & \delta_{4k+3} := \rho\gamma_{4k+2}, \\ \varepsilon_{4k} := \gamma\varepsilon_{4k-1} + \mu_{4k-1}, & \varepsilon_{4k+1} := \varepsilon\varepsilon_{4k} + \mu_{4k}, & \varepsilon_{4k+2} := \xi\varepsilon_{4k+1} + \mu_{4k+1}, & \varepsilon_{4k+3} := \alpha\varepsilon_{4k+2} + \mu_{4k+2}, \\ \mu_{4k} := \delta\varepsilon_{4k-1}, & \mu_{4k+1} := \mu\varepsilon_{4k}, & \mu_{4k+2} := \rho\varepsilon_{4k+1}, & \mu_{4k+3} := \beta\varepsilon_{4k+2}, \\ \xi_{4k} := \varepsilon\xi_{4k-1} + \rho_{4k-1}, & \xi_{4k+1} := \xi\xi_{4k} + \rho_{4k}, & \xi_{4k+2} := \alpha\xi_{4k+1} + \rho_{4k+1}, & \xi_{4k+3} := \gamma\xi_{4k+2} + \rho_{4k+2}, \\ \rho_{4k} := \mu\xi_{4k-1}, & \rho_{4k+1} := \rho\xi_{4k}, & \rho_{4k+2} := \beta\xi_{4k+1}, & \rho_{4k+3} := \delta\xi_{4k+2} \end{array} \tag{4.27}$$

rekürans bağıntılarını sağladığı sonucuna varılır. (4.19), (4.21), (4.23) ve (4.25) ’ten $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_{4n+1} = y_0^{\alpha_{4n+1}} z_{-1}^{\beta_{4n+1}}, \quad x_{4n+2} = z_0^{\alpha_{4n+2}} t_{-1}^{\beta_{4n+2}}, \quad x_{4n+3} = t_0^{\alpha_{4n+3}} x_{-1}^{\beta_{4n+3}}, \quad x_{4n+4} = x_0^{\alpha_{4n+4}} y_{-1}^{\beta_{4n+4}}, \tag{4.28}$$

$$y_{4n+1} = z_0^{\gamma_{4n+1}} t_{-1}^{\delta_{4n+1}}, \quad y_{4n+2} = t_0^{\gamma_{4n+2}} x_{-1}^{\delta_{4n+2}}, \quad y_{4n+3} = x_0^{\gamma_{4n+3}} y_{-1}^{\delta_{4n+3}}, \quad y_{4n+4} = y_0^{\gamma_{4n+4}} z_{-1}^{\delta_{4n+4}}, \tag{4.29}$$

$$z_{4n+1} = t_0^{\varepsilon_{4n+1}} x_{-1}^{\mu_{4n+1}}, \quad z_{4n+2} = x_0^{\varepsilon_{4n+2}} y_{-1}^{\mu_{4n+2}}, \quad z_{4n+3} = y_0^{\varepsilon_{4n+3}} z_{-1}^{\mu_{4n+3}}, \quad z_{4n+4} = z_0^{\varepsilon_{4n+4}} t_{-1}^{\mu_{4n+4}}, \tag{4.30}$$

$$t_{4n+1} = x_0^{\xi_{4n+1}} y_{-1}^{\rho_{4n+1}}, \quad t_{4n+2} = y_0^{\xi_{4n+2}} z_{-1}^{\rho_{4n+2}}, \quad t_{4n+3} = z_0^{\xi_{4n+3}} t_{-1}^{\rho_{4n+3}}, \quad t_{4n+4} = t_0^{\xi_{4n+4}} x_{-1}^{\rho_{4n+4}} \tag{4.31}$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.27) ’deki birinci denklemde k yerine $k+1$ alınırsa

$$\alpha_{4k+4} = \xi\alpha_{4k+3} + \mu\alpha_{4k+2} \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.32) ve $\alpha_{4k+3} = \varepsilon\alpha_{4k+2} + \delta\alpha_{4k+1}$ rekürans bağıntısı ile bazı hesaplamalardan sonra

$$\alpha_{4k+4} - (\gamma\varepsilon\xi + \gamma\mu + \delta\xi)\alpha_{4k+1} - (\beta\varepsilon\xi)\alpha_{4k} = 0,\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{4.33}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\alpha_{4k+8} &= \left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)\alpha_{4k+4} \\
&\quad + \left(\gamma^2\varepsilon^2\xi\rho + 2\gamma\delta\varepsilon\xi\rho + \gamma^2\varepsilon\mu\rho + \delta^2\xi\rho\right)\alpha_{4k+1} \\
&\quad + \left(\beta\gamma\varepsilon^2\xi\rho + \beta\gamma\varepsilon\mu\rho + \beta\delta\varepsilon\xi\rho\right)\alpha_{4k}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

rekürans bağıntıları elde edilir. Burada, $\beta_{4k+1} = \beta\alpha_{4k}$ olup $k=0$ için $\beta \neq 0$ ise $\alpha_0 = 1$ dir. (4.33), (4.34) ’te kullanılırsa, $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizisi ve $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$
\alpha_{4k+8} - \left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)\alpha_{4k+4} + \beta\delta\mu\rho\alpha_{4k} = 0, \tag{4.35}
$$

rekürans bağıntısını sağladığı görülür. Şimdi

$$
\Im\left(u_n\right) = u_{n+2} - \left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)u_{n+1} + \beta\delta\mu\rho u_n \tag{4.36}
$$

operatörü tanımlansın, öyle ki, bu operatör $i \in \{0,1,2,3\}$ için $\left(\alpha_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin sıfırlayanıdır. Gerçekten; (4.36) ’da n yerine $4k$ alınırsa $\left(\alpha_{4k}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizisi (4.36) ’daki operatör için sıfırlayandır. Dahası bu durumu kullanarak ve (4.33) ’ten $\left(\alpha_{4k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizisi de (4.36) ’daki operatör için sıfırlayandır. Benzer şekilde bu durumları ve $\alpha_{4k+2} = \gamma\alpha_{4k+1} + \beta\alpha_{4k}$ bağıntısını kullanarak, $\left(\alpha_{4k+2}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizisi de (4.36)’ daki operatör için sıfırlayandır. Yine benzer şekilde bu durumları ve $\alpha_{4k+3} = \varepsilon\alpha_{4k+2} + \delta\alpha_{4k+1}$ bağıntısını kullanarak $\left(\alpha_{4k+3}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizisi de (4.36) ’daki operatör için sıfırlayandır. Diğer taraftan, (4.27) ’den $i \in \{0,1,2,3\}$ için $\left(\beta_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizileri de (4.36) ’daki operatör için sıfırlayandır. Hatta yukarıdaki açıklamalar ve (4.27) ’deki bağıntılardan $i \in \{0,1,2,3\}$ için $\left(\gamma_{4k+1+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\delta_{4k+1+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\varepsilon_{4k+2+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\mu_{4k+2+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\xi_{4k+3+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\rho_{4k+3+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin de (4.36) ’daki operatör için sıfırlayan olduğu kolayca görülür.

Durum $\beta = 0$. Bu durumda $i \in \{0,1,2,3\}$ için $\left(\alpha_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\gamma_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\varepsilon_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\xi_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin $\beta = 0$ şartı altında

$$
u_{n+1} = \left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)u_n, \; n \in \mathbb{N}, \tag{4.37}
$$

bağıntısını sağladığı açıkça görülür. $\beta = 0$ şartıyla birlikte $i \in \{0,1,2,3\}$ için $\left(\alpha_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\gamma_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\varepsilon_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\xi_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin ilk terimleri

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1=\alpha, & \alpha_2=\gamma\alpha, & \alpha_3=\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\delta, & \alpha_4=\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\alpha\gamma\mu,\\
\gamma_1=\gamma, & \gamma_2=\gamma\varepsilon+\delta, & \gamma_3=\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu, & \gamma_4=\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\alpha\gamma\mu+\gamma\varepsilon\rho+\delta\rho,\\
\varepsilon_1=\varepsilon, & \varepsilon_2=\varepsilon\xi+\mu, & \varepsilon_3=\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho, & \varepsilon_4=\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\gamma\varepsilon\rho,\\
\xi_1=\xi, & \xi_2=\alpha\xi+\rho, & \xi_3=\alpha\gamma\xi+\gamma\rho, & \xi_4=\alpha\gamma\varepsilon\xi+\gamma\varepsilon\rho+\alpha\delta\xi+\delta\rho,
\end{array}
\tag{4.38}
$$

olmak üzere, (4.37) ’den $k\in\mathbb{N}_0$ için

$$
\begin{cases}
\alpha_{4k+1}=\alpha\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\alpha_{4k+2}=\alpha\gamma\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\alpha_{4k+3}=\alpha\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\alpha_{4k+4}=\alpha\left(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,
\end{cases}
\tag{4.39}
$$

$$
\begin{cases}
\gamma_{4k+1}=\gamma\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\gamma_{4k+2}=\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\gamma_{4k+3}=\left(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\gamma_{4k+4}=\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k+1},
\end{cases}
\tag{4.40}
$$

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{4k+1}=\varepsilon\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\varepsilon_{4k+2}=\left(\varepsilon\xi+\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\varepsilon_{4k+3}=\left(\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\varepsilon_{4k+4}=\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\gamma\varepsilon\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,
\end{cases}
\tag{4.41}
$$

ve

$$
\begin{cases}
\xi_{4k+1}=\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\xi_{4k+2}=\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\xi_{4k+3}=\gamma\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\xi_{4k+4}=\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,
\end{cases}
\tag{4.42}
$$

dır. $\beta=0$ şartıyla birlikte (4.27) ‘de $i\in\{0,1,2,3\}$ için $\left(\beta_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\delta_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\mu_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\rho_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ‘nin rekürans bağıntıları ve (4.39)-(4.42)’ deki çözümlerden, $k\in\mathbb{N}_0$ için

$$
\begin{cases}
\beta_{4k+1}=0,\\
\beta_{4k+2}=\alpha\delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\beta_{4k+3}=\alpha\gamma\mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,\\
\beta_{4k+4}=\alpha\rho\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^k,
\end{cases}
\tag{4.43}
$$

$$\begin{cases} \delta_{4k+1} = \delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^k, \\ \delta_{4k+2} = \gamma\mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^k, \\ \delta_{4k+3} = \rho\left(\gamma\varepsilon + \delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^k, \\ \delta_{4k+4} = 0, \end{cases} \tag{4.44}$$

$$\begin{cases} \mu_{4k+1} = \mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k-1}, \\ \mu_{4k+2} = \varepsilon\rho\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^k, \\ \mu_{4k+3} = 0, \\ \mu_{4k+4} = \delta\left(\alpha\varepsilon\xi + \alpha\mu + \varepsilon\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^k \end{cases} \tag{4.45}$$

ve

$$\begin{cases} \rho_{4k+1} = \rho\left(\gamma\varepsilon + \delta\right)\left(\alpha\xi + \rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^k, \\ \rho_{4k+2} = 0, \\ \rho_{4k+3} = \delta\left(\alpha\xi + \rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^k, \\ \rho_{4k+4} = \gamma\mu\left(\alpha\xi + \rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^k, \end{cases} \tag{4.46}$$

elde edilir. Bu durumda $\beta = 0$ iken (4.28)-(4.31) ‘de (4.39)-(4.46) kullanılırsa, sistem (4.1) ‘in iyi tanımlı çözümleri $n \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{cases} x_{4n+1} = y_0^{\alpha\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n}, \\ x_{4n+2} = z_0^{\alpha\gamma\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} t_{-1}^{\alpha\delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n}, \\ x_{4n+3} = t_0^{\alpha\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} x_{-1}^{\alpha\gamma\mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n}, \\ x_{4n+4} = x_0^{\alpha\left(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} y_{-1}^{\alpha\rho\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n}, \end{cases} \tag{4.47}$$

$$\begin{cases} y_{4n+1} = z_0^{\gamma\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} t_{-1}^{\delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n}, \\ y_{4n+2} = t_0^{\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} x_{-1}^{\gamma\mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n}, \\ y_{4n+3} = x_0^{\left(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} y_{-1}^{\rho\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n}, \\ y_{4n+4} = y_0^{\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n+1}}, \end{cases} \tag{4.48}$$

$$\begin{cases} z_{4n+1} = t_0^{\varepsilon\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} x_{-1}^{\mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\gamma\varepsilon\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n-1}}, \\ z_{4n+2} = x_0^{\left(\varepsilon\xi+\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} y_{-1}^{\varepsilon\rho\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n}, \\ z_{4n+3} = y_0^{\left(\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n}, \\ z_{4n+4} = z_0^{\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\gamma\varepsilon\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} t_{-1}^{\delta\left(\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^n} \end{cases} \tag{4.49}$$

ve

$$\begin{cases} t_{4n+1} = x_0^{\xi(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho)^n} y_{-1}^{\rho(\gamma\varepsilon+\delta)(\alpha\xi+\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\ t_{4n+2} = y_0^{(\alpha\xi+\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\ t_{4n+3} = z_0^{\gamma(\alpha\xi+\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho)^n} t_{-1}^{\delta(\alpha\xi+\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\ t_{4n+4} = t_0^{(\gamma\varepsilon+\delta)(\alpha\xi+\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho)^n} x_{-1}^{\gamma\mu(\alpha\xi+\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho)^n}. \end{cases} \tag{4.50}$$

Durum $\delta = 0$. Bu durumda $i \in \{0,1,2,3\}$ için $(\alpha_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\gamma_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\varepsilon_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $(\xi_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin $\delta = 0$ şartı altında

$$u_{n+1} = (\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)u_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.51}$$

bağıntısını sağladığı açıkça görülür. $\delta = 0$ şartıyla birlikte $i \in \{0,1,2,3\}$ için $(\alpha_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\gamma_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\varepsilon_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $(\xi_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin ilk terimleri

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = \alpha, & \alpha_2 = \gamma\alpha + \beta, & \alpha_3 = \alpha\gamma\varepsilon + \beta\varepsilon, & \alpha_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \beta\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\mu, \\ \gamma_1 = \gamma, & \gamma_2 = \gamma\varepsilon, & \gamma_3 = \gamma\varepsilon\xi + \gamma\mu, & \gamma_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \gamma\varepsilon\rho, \\ \varepsilon_1 = \varepsilon, & \varepsilon_2 = \varepsilon\xi + \mu, & \varepsilon_3 = \alpha\varepsilon\xi + \alpha\mu + \varepsilon\rho, & \varepsilon_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \gamma\varepsilon\rho + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu, \\ \xi_1 = \xi, & \xi_2 = \alpha\xi + \rho, & \xi_3 = \alpha\gamma\xi + \gamma\rho + \beta\xi, & \xi_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \gamma\varepsilon\rho + \beta\varepsilon\xi, \end{array} \tag{4.52}$$

olmak üzere, (4.51) ’den $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} \alpha_{4k+1} = \alpha(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \\ \alpha_{4k+2} = (\alpha\gamma + \beta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \\ \alpha_{4k+3} = \varepsilon(\alpha\gamma + \beta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \\ \alpha_{4k+4} = (\alpha\gamma\varepsilon\xi + \beta\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \end{cases} \tag{4.53}$$

$$\begin{cases} \gamma_{4k+1} = \gamma(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \\ \gamma_{4k+2} = \gamma\varepsilon(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \\ \gamma_{4k+3} = (\gamma\varepsilon\xi + \gamma\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \\ \gamma_{4k+4} = (\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \gamma\varepsilon\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \end{cases} \tag{4.54}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{4k+1} = \varepsilon(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \\ \varepsilon_{4k+2} = (\varepsilon\xi + \mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \\ \varepsilon_{4k+3} = (\alpha\varepsilon\xi + \alpha\mu + \varepsilon\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^k, \\ \varepsilon_{4k+4} = (\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho)^{k+1}, \end{cases} \tag{4.55}$$

ve

$$\begin{cases} \xi_{4k+1} = \xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \xi_{4k+2} = \left(\alpha\xi + \rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \xi_{4k+3} = \left(\alpha\gamma\xi + \gamma\rho + \beta\xi\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \xi_{4k+4} = \varepsilon\left(\alpha\gamma\xi + \gamma\rho + \beta\xi\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \end{cases} \tag{4.56}$$

bulunur. $\delta = 0$ şartıyla birlikte (4.27) ‘de $i \in \{0,1,2,3\}$ için $\left(\beta_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\delta_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\mu_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\rho_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ‘nin rekürans bağıntıları ve (4.53)-(4.56) ’daki çözümlerden, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} \beta_{4k+1} = \beta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k-1}, \\ \beta_{4k+2} = 0, \\ \beta_{4k+3} = \mu\left(\alpha\gamma + \beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \beta_{4k+4} = \varepsilon\rho\left(\alpha\gamma + \beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \end{cases} \tag{4.57}$$

$$\begin{cases} \delta_{4k+1} = 0, \\ \delta_{4k+2} = \gamma\mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \delta_{4k+3} = \gamma\varepsilon\rho\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \delta_{4k+4} = \beta\left(\gamma\varepsilon\xi + \gamma\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \end{cases} \tag{4.58}$$

$$\begin{cases} \mu_{4k+1} = \mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \mu_{4k+2} = \varepsilon\rho\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \mu_{4k+3} = \beta\left(\varepsilon\xi + \mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \mu_{4k+4} = 0 \end{cases} \tag{4.59}$$

ve

$$\begin{cases} \rho_{4k+1} = \varepsilon\rho\left(\alpha\gamma\xi + \gamma\rho + \beta\xi\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \rho_{4k+2} = \beta\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \rho_{4k+3} = 0, \\ \rho_{4k+4} = \mu\left(\alpha\gamma\xi + \gamma\rho + \beta\xi\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \gamma\varepsilon\rho\right)^{k} \end{cases} \tag{4.60}$$

elde edilir. Bu durumda $\delta = 0$ iken (4.28)-(4.31) ‘de (4.53)-(4.60) kullanılırsa, sistem (4.1) ‘in iyi tanımlı çözümleri $n \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{cases}
x_{4n+1} = y_0^{\alpha(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} z_{-1}^{\beta(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^{n-1}}, \\
x_{4n+2} = z_0^{(\alpha\gamma+\beta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\
x_{4n+3} = t_0^{\varepsilon(\alpha\gamma+\beta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} x_{-1}^{\mu(\alpha\gamma+\beta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\
x_{4n+4} = x_0^{(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\beta\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} y_{-1}^{\varepsilon\rho(\alpha\gamma+\beta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n},
\end{cases} \tag{4.61}
$$

$$
\begin{cases}
y_{4n+1} = z_0^{\gamma(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\
y_{4n+2} = t_0^{\gamma\varepsilon(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} x_{-1}^{\gamma\mu(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\
y_{4n+3} = x_0^{(\gamma\varepsilon\xi+\gamma\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} y_{-1}^{\gamma\varepsilon\rho(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\
y_{4n+4} = y_0^{(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\gamma\varepsilon\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} z_{-1}^{\beta(\gamma\varepsilon\xi+\gamma\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n},
\end{cases} \tag{4.62}
$$

$$
\begin{cases}
z_{4n+1} = t_0^{\varepsilon(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} x_{-1}^{\mu(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\
z_{4n+2} = x_0^{(\varepsilon\xi+\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} y_{-1}^{\varepsilon\rho(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\
z_{4n+3} = y_0^{(\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} z_{-1}^{\beta(\varepsilon\xi+\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\
z_{4n+4} = z_0^{(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^{n+1}},
\end{cases} \tag{4.63}
$$

ve

$$
\begin{cases}
t_{4n+1} = x_0^{\xi(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} y_{-1}^{\varepsilon\rho(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} \\
t_{4n+2} = y_0^{(\alpha\xi+\rho)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} z_{-1}^{\beta\xi(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} \\
t_{4n+3} = z_0^{(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}, \\
t_{4n+4} = t_0^{\varepsilon(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n} x_{-1}^{\mu(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\gamma\varepsilon\rho)^n}.
\end{cases} \tag{4.64}
$$

Durum $\mu = 0$. Bu durumda $i \in \{0,1,2,3\}$ için $(\alpha_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\gamma_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\varepsilon_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $(\xi_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin $\mu = 0$ şartı altında

$$
u_{n+1} = (\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho)u_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.65}
$$

bağıntısını sağladığı açıkça görülür. $\mu = 0$ şartıyla birlikte $i \in \{0,1,2,3\}$ için $(\alpha_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\gamma_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\varepsilon_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $(\xi_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin ilk terimleri

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1 = \alpha, & \alpha_2 = \gamma\alpha + \beta, & \alpha_3 = \alpha\gamma\varepsilon + \beta\varepsilon + \alpha\delta, & \alpha_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \beta\varepsilon\xi + \alpha\delta\xi, \\
\gamma_1 = \gamma, & \gamma_2 = \gamma\varepsilon + \delta, & \gamma_3 = \gamma\varepsilon\xi + \delta\xi, & \gamma_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\delta\xi + \gamma\varepsilon\rho + \delta\rho, \\
\varepsilon_1 = \varepsilon, & \varepsilon_2 = \varepsilon\xi, & \varepsilon_3 = \alpha\varepsilon\xi + \varepsilon\rho, & \varepsilon_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \gamma\varepsilon\rho + \beta\varepsilon\xi, \\
\xi_1 = \xi, & \xi_2 = \alpha\xi + \rho, & \xi_3 = \alpha\gamma\xi + \gamma\rho + \beta\xi, & \xi_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \gamma\varepsilon\rho + \beta\varepsilon\xi + \alpha\delta\xi + \delta\rho,
\end{array} \tag{4.66}
$$

olmak üzere ve (4.65) ‘ten $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases}\alpha_{4k+1}=\alpha\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \alpha_{4k+2}=\left(\alpha\gamma+\beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \alpha_{4k+3}=\left(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \alpha_{4k+4}=\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k},\end{cases} \tag{4.67}$$

$$\begin{cases}\gamma_{4k+1}=\gamma\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \gamma_{4k+2}=\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \gamma_{4k+3}=\xi\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \gamma_{4k+4}=\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\delta+\gamma\varepsilon\rho+\delta\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k},\end{cases} \tag{4.68}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_{4k+1}=\varepsilon\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \varepsilon_{4k+2}=\varepsilon\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \varepsilon_{4k+3}=\varepsilon\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \varepsilon_{4k+4}=\varepsilon\left(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k},\end{cases} \tag{4.69}$$

ve

$$\begin{cases}\xi_{4k+1}=\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \xi_{4k+2}=\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \xi_{4k+3}=\left(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \xi_{4k+4}=\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k+1},\end{cases} \tag{4.70}$$

bulunur. $\mu=0$ şartıyla birlikte (4.27) ‘de $i\in\{0,1,2,3\}$ için $\left(\beta_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\delta_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\mu_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\rho_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ‘nin rekürans bağıntıları ve (4.67)-(4.70) ’teki çözümlerden, $k\in\mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases}\beta_{4k+1}=\beta\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k-1}, \\ \beta_{4k+2}=\alpha\delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \beta_{4k+3}=0, \\ \beta_{4k+4}=\rho\left(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k},\end{cases} \tag{4.71}$$

$$\begin{cases}\delta_{4k+1}=\delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \delta_{4k+2}=0, \\ \delta_{4k+3}=\rho\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \delta_{4k+4}=\beta\xi\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k},\end{cases} \tag{4.72}$$

$$\begin{cases} \mu_{4k+1} = 0, \\ \mu_{4k+2} = \varepsilon\rho\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \mu_{4k+3} = \beta\varepsilon\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \mu_{4k+4} = \delta\varepsilon\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k} \end{cases} \tag{4.73}$$

ve

$$\begin{cases} \rho_{4k+1} = \rho\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \rho_{4k+2} = \beta\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \rho_{4k+3} = \delta\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{k}, \\ \rho_{4k+4} = 0 \end{cases} \tag{4.74}$$

yazılabilir. Bu durumda $\mu = 0$ iken (4.28)-(4.31) ‘de (4.67)-(4.74) kullanılırsa, sistem (4.1) ‘in iyi tanımlı çözümleri $n \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{cases} x_{4n+1} = y_0^{\alpha\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} z_{-1}^{\beta\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n-1}}, \\ x_{4n+2} = z_0^{\left(\alpha\gamma+\beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} t_{-1}^{\alpha\delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \\ x_{4n+3} = t_0^{\left(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \\ x_{4n+4} = x_0^{\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} y_{-1}^{\rho\left(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \end{cases} \tag{4.75}$$

$$\begin{cases} y_{4n+1} = z_0^{\gamma\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} t_{-1}^{\delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \\ y_{4n+2} = t_0^{\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \\ y_{4n+3} = x_0^{\xi\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} y_{-1}^{\rho\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \\ y_{4n+4} = y_0^{\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\delta+\gamma\varepsilon\rho+\delta\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} z_{-1}^{\beta\xi\left(\gamma\varepsilon+\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \end{cases} \tag{4.76}$$

$$\begin{cases} z_{4n+1} = t_0^{\varepsilon\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \\ z_{4n+2} = x_0^{\varepsilon\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} y_{-1}^{\varepsilon\rho\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \\ z_{4n+3} = y_0^{\varepsilon\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} z_{-1}^{\beta\varepsilon\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \\ z_{4n+4} = z_0^{\varepsilon\left(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} t_{-1}^{\delta\varepsilon\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \end{cases} \tag{4.77}$$

ve

$$\begin{cases} t_{4n+1} = x_0^{\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} y_{-1}^{\rho\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} \\ t_{4n+2} = y_0^{\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} z_{-1}^{\beta\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} \\ t_{4n+3} = z_0^{\left(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}} t_{-1}^{\delta\left(\alpha\xi+\rho\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n}}, \\ t_{4n+4} = t_0^{\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^{n+1}}. \end{cases} \tag{4.78}$$

Durum $\rho = 0$. Bu durumda $i \in \{0,1,2,3\}$ için $(\alpha_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\gamma_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\varepsilon_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $(\xi_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin $\rho = 0$ şartı altında

$$u_{n+1} = \left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)u_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.79}$$

bağıntısını sağladığı açıkça görülür. $\rho = 0$ şartıyla birlikte $i \in \{0,1,2,3\}$ için $(\alpha_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\gamma_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(\varepsilon_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $(\xi_{4k+i})_{k\in\mathbb{N}_0}$ dizilerinin ilk terimleri

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 = \alpha, & \alpha_2 = \gamma\alpha + \beta, & \alpha_3 = \alpha\gamma\varepsilon + \beta\varepsilon + \alpha\delta, & \alpha_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \beta\varepsilon\xi + \alpha\delta\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\mu, \\
\gamma_1 = \gamma, & \gamma_2 = \gamma\varepsilon + \delta, & \gamma_3 = \gamma\varepsilon\xi + \delta\xi + \gamma\mu, & \gamma_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\delta\xi + \alpha\gamma\mu, \\
\varepsilon_1 = \varepsilon, & \varepsilon_2 = \varepsilon\xi, & \varepsilon_3 = \alpha\varepsilon\xi + \alpha\mu, & \varepsilon_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu, \\
\xi_1 = \xi, & \xi_2 = \alpha\xi, & \xi_3 = \alpha\gamma\xi + \beta\xi, & \xi_4 = \alpha\gamma\varepsilon\xi + \beta\varepsilon\xi + \alpha\delta\xi,
\end{array} \tag{4.80}$$

olmak üzere ve (4.79) ‘dan $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases}
\alpha_{4k+1} = \alpha\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\alpha_{4k+2} = \left(\alpha\gamma + \beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\alpha_{4k+3} = \left(\alpha\gamma\varepsilon + \beta\varepsilon + \alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\alpha_{4k+4} = \left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^{k+1},
\end{cases} \tag{4.81}$$

$$\begin{cases}
\gamma_{4k+1} = \gamma\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\gamma_{4k+2} = \left(\gamma\varepsilon + \delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\gamma_{4k+3} = \left(\gamma\varepsilon\xi + \delta\xi + \gamma\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\gamma_{4k+4} = \alpha\left(\gamma\varepsilon\xi + \delta\xi + \gamma\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k,
\end{cases} \tag{4.82}$$

$$\begin{cases}
\varepsilon_{4k+1} = \varepsilon\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\varepsilon_{4k+2} = \left(\varepsilon\xi + \mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\varepsilon_{4k+3} = \alpha\left(\varepsilon\xi + \mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\varepsilon_{4k+4} = \left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k,
\end{cases} \tag{4.83}$$

ve

$$\begin{cases}
\xi_{4k+1} = \xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\xi_{4k+2} = \alpha\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\xi_{4k+3} = \xi\left(\alpha\gamma + \beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\
\xi_{4k+4} = \xi\left(\alpha\gamma\varepsilon + \beta\varepsilon + \alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k
\end{cases} \tag{4.84}$$

bulunur. $\rho = 0$ şartıyla birlikte (4.27) ‘de $i \in \{0,1,2,3\}$ için $\left(\beta_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\delta_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\mu_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ve $\left(\rho_{4k+i}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ‘nin rekürans bağıntıları ve (4.81)-(4.84) çözümlerinden, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} \beta_{4k+1} = \beta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\ \beta_{4k+2} = \alpha\delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\ \beta_{4k+3} = \mu\left(\alpha\gamma + \beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\ \beta_{4k+4} = 0, \end{cases} \tag{4.85}$$

$$\begin{cases} \delta_{4k+1} = \alpha\delta\left(\gamma\varepsilon\xi + \delta\xi + \gamma\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^{k-1}, \\ \delta_{4k+2} = \gamma\mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\ \delta_{4k+3} = 0, \\ \delta_{4k+4} = \beta\left(\gamma\varepsilon\xi + \delta\xi + \gamma\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \end{cases} \tag{4.86}$$

$$\begin{cases} \mu_{4k+1} = \mu\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^{k-1}, \\ \mu_{4k+2} = 0, \\ \mu_{4k+3} = \beta\left(\varepsilon\xi + \mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\ \mu_{4k+4} = \alpha\delta\left(\varepsilon\xi + \mu\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k \end{cases} \tag{4.87}$$

ve

$$\begin{cases} \rho_{4k+1} = 0, \\ \rho_{4k+2} = \beta\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\ \rho_{4k+3} = \alpha\delta\xi\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k, \\ \rho_{4k+4} = \mu\xi\left(\alpha\gamma + \beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)^k \end{cases} \tag{4.88}$$

yazılabilir. Bu durumda $\rho = 0$ iken (4.28)-(4.31) ‘de (4.81)-(4.88) kullanılırsa, sistem (4.1) ‘in iyi tanımlı çözümleri $n \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{cases} x_{4n+1} = y_0^{\alpha\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu\right)^n} z_{-1}^{\beta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu\right)^n}, \\ x_{4n+2} = z_0^{\left(\alpha\gamma+\beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu\right)^n} t_{-1}^{\alpha\delta\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu\right)^n}, \\ x_{4n+3} = t_0^{\left(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu\right)^n} x_{-1}^{\mu\left(\alpha\gamma+\beta\right)\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu\right)^n}, \\ x_{4n+4} = x_0^{\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu\right)^{n+1}}, \end{cases} \tag{4.89}$$

$$\begin{cases} y_{4n+1} = z_0^{\gamma(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n} t_{-1}^{\alpha\delta(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^{n-1}}, \\ y_{4n+2} = t_0^{(\gamma\varepsilon+\delta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n} x_{-1}^{\gamma\mu(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}, \\ y_{4n+3} = x_0^{(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}, \\ y_{4n+4} = y_0^{\alpha(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n} z_{-1}^{\beta(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}, \end{cases} \tag{4.90}$$

$$\begin{cases} z_{4n+1} = t_0^{\varepsilon(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n} x_{-1}^{\mu(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^{n-1}}, \\ z_{4n+2} = x_0^{(\varepsilon\xi+\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}, \\ z_{4n+3} = y_0^{\alpha(\varepsilon\xi+\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n} z_{-1}^{\beta(\varepsilon\xi+\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}, \\ z_{4n+4} = z_0^{(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n} t_{-1}^{\alpha\delta(\varepsilon\xi+\mu)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}, \end{cases} \tag{4.91}$$

ve

$$\begin{cases} t_{4n+1} = x_0^{\xi(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}, \\ t_{4n+2} = y_0^{\alpha\xi(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n} z_{-1}^{\beta\xi(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}, \\ t_{4n+3} = z_0^{\xi(\alpha\gamma+\beta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n} t_{-1}^{\alpha\delta\xi(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}, \\ t_{4n+4} = t_0^{\xi(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n} x_{-1}^{\mu\xi(\alpha\gamma+\beta)(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)^n}. \end{cases} \tag{4.92}$$

Durum $\beta\delta\mu\rho \neq 0$.

$$u_{n+2} - (\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho)u_{n+1} + \beta\delta\mu\rho u_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.93}$$

denklemi, ikinci mertebeden lineer fark denklemidir ve karakteristik polinomu,

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho)\lambda + \beta\delta\mu\rho \tag{4.94}$$

şeklindedir. Eğer $(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho)^2 \neq 4\beta\delta\mu\rho$ ise c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere denklem (4.93) ‘ün çözümü

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.95}$$

şeklindedir. Burada λ_1 ve λ_2 karakteristik polinomun kökleridir. Eğer $(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho)^2 = 4\beta\delta\mu\rho$ ise c_3 ve c_4 sabit olmak üzere denklem (4.93) ‘ün çözümü ise

$$u_n = (c_3 n + c_4)\lambda_1^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.96}$$

olduğu kolayca görülebilir. Öte yandan $i \in \{1,2,3,4\}$ için α_i, β_i, γ_i, δ_i, ε_i, μ_i, ξ_i ve ρ_i ‘nin

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1=\alpha, \quad \alpha_2=\gamma\alpha+\beta, \quad \alpha_3=\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta, \quad \alpha_4=\alpha\gamma\varepsilon\xi+\beta\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\alpha\gamma\mu+\beta\mu,\\
&\gamma_1=\gamma, \quad \gamma_2=\gamma\varepsilon+\delta, \quad \gamma_3=\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu, \quad \gamma_4=\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\alpha\gamma\mu+\gamma\varepsilon\rho+\delta\rho,\\
&\varepsilon_1=\varepsilon, \quad \varepsilon_2=\varepsilon\xi+\mu, \quad \varepsilon_3=\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho, \quad \varepsilon_4=\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\gamma\varepsilon\rho+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu,\\
&\xi_1=\xi, \quad \xi_2=\alpha\xi+\rho, \quad \xi_3=\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi, \quad \xi_4=\alpha\gamma\varepsilon\xi+\gamma\varepsilon\rho+\beta\varepsilon\xi+\alpha\delta\xi+\delta\rho,
\end{aligned} \tag{4.97}
$$

değerleri göz önüne alınır ve sonrasında bazı hesaplamalarla $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$
\begin{cases}
\alpha_{4k+1}=\dfrac{(\alpha\lambda_1+\beta\varepsilon\rho)\lambda_1^k-(\alpha\lambda_2+\beta\varepsilon\rho)\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2},\\
\alpha_{4k+2}=\dfrac{((\alpha\gamma+\beta)\lambda_1-\beta\delta\rho)\lambda_1^k-((\alpha\gamma+\beta)\lambda_2-\beta\delta\rho)\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2},\\
\alpha_{4k+3}=(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta)\dfrac{\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2},\\
\alpha_{4k+4}=\dfrac{(\lambda_1-\delta\rho-\gamma\varepsilon\rho)\lambda_1^{k+1}-(\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho-\lambda_2)\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2},
\end{cases} \tag{4.98}
$$

$$
\begin{cases}
\beta_{4k+1}=\beta\dfrac{(\lambda_1-\delta\rho-\gamma\varepsilon\rho)\lambda_1^k-(\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho-\lambda_2)\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2},\\
\beta_{4k+2}=\delta\dfrac{(\alpha\lambda_1+\beta\varepsilon\rho)\lambda_1^k-(\alpha\lambda_2+\beta\varepsilon\rho)\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2},\\
\beta_{4k+3}=\mu\dfrac{((\alpha\gamma+\beta)\lambda_1-\beta\delta\rho)\lambda_1^k-((\alpha\gamma+\beta)\lambda_2-\beta\delta\rho)\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2},\\
\beta_{4k+4}=\rho(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta)\dfrac{\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2},
\end{cases} \tag{4.99}
$$

$$
\begin{cases}
\gamma_{4k+1}=\dfrac{(\gamma\lambda_1+\beta\delta\xi)\lambda_1^k-(\gamma\lambda_2+\beta\delta\xi)\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2},\\
\gamma_{4k+2}=\dfrac{((\gamma\varepsilon+\delta)\lambda_1-\beta\delta\mu)\lambda_1^k-((\gamma\varepsilon+\delta)\lambda_2-\beta\delta\mu)\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2},\\
\gamma_{4k+3}=(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)\dfrac{\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2},\\
\gamma_{4k+4}=\dfrac{(\lambda_1-\beta\mu-\beta\varepsilon\xi)\lambda_1^{k+1}-(\beta\mu+\beta\varepsilon\xi-\lambda_2)\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2},
\end{cases} \tag{4.100}
$$

$$\begin{cases} \delta_{4k+1} = \delta \dfrac{\left(\lambda_1 - \beta\mu - \beta\varepsilon\xi\right)\lambda_1^k - \left(\beta\mu + \beta\varepsilon\xi - \lambda_2\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \delta_{4k+2} = \mu \dfrac{\left(\gamma\lambda_1 + \beta\delta\xi\right)\lambda_1^k - \left(\gamma\lambda_2 + \beta\delta\xi\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \delta_{4k+3} = \rho \dfrac{\left(\left(\gamma\varepsilon + \delta\right)\lambda_1 - \beta\delta\mu\right)\lambda_1^k - \left(\left(\gamma\varepsilon + \delta\right)\lambda_2 - \beta\delta\mu\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \delta_{4k+4} = \beta\left(\gamma\varepsilon\xi + \delta\xi + \gamma\mu\right)\dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{cases} \tag{4.101}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{4k+1} = \dfrac{\left(\varepsilon\lambda_1 + \alpha\delta\mu\right)\lambda_1^k - \left(\varepsilon\lambda_2 + \alpha\delta\mu\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \varepsilon_{4k+2} = \dfrac{\left(\left(\varepsilon\xi + \mu\right)\lambda_1 - \delta\mu\rho\right)\lambda_1^k - \left(\left(\varepsilon\xi + \mu\right)\lambda_2 - \delta\mu\rho\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \varepsilon_{4k+3} = \left(\alpha\varepsilon\xi + \alpha\mu + \varepsilon\rho\right)\dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \varepsilon_{4k+4} = \dfrac{\left(\lambda_1 - \delta\rho - \alpha\delta\xi\right)\lambda_1^{k+1} - \left(\delta\rho + \alpha\delta\xi - \lambda_2\right)\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{cases} \tag{4.102}$$

$$\begin{cases} \mu_{4k+1} = \mu \dfrac{\left(\lambda_1 - \delta\rho - \alpha\delta\xi\right)\lambda_1^k - \left(\delta\rho + \alpha\delta\xi - \lambda_2\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \mu_{4k+2} = \rho \dfrac{\left(\varepsilon\lambda_1 + \alpha\delta\mu\right)\lambda_1^k - \left(\varepsilon\lambda_2 + \alpha\delta\mu\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \mu_{4k+3} = \beta \dfrac{\left(\left(\varepsilon\xi + \mu\right)\lambda_1 - \delta\mu\rho\right)\lambda_1^k - \left(\left(\varepsilon\xi + \mu\right)\lambda_2 - \delta\mu\rho\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \mu_{4k+4} = \delta\left(\alpha\varepsilon\xi + \alpha\mu + \varepsilon\rho\right)\dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{cases} \tag{4.103}$$

$$\begin{cases} \xi_{4k+1} = \dfrac{\left(\xi\lambda_1 + \gamma\mu\rho\right)\lambda_1^k - \left(\xi\lambda_2 + \gamma\mu\rho\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \xi_{4k+2} = \dfrac{\left(\left(\alpha\xi + \rho\right)\lambda_1 - \beta\mu\rho\right)\lambda_1^k - \left(\left(\alpha\xi + \rho\right)\lambda_2 - \beta\mu\rho\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \xi_{4k+3} = \left(\alpha\gamma\xi + \gamma\rho + \beta\xi\right)\dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \xi_{4k+4} = \dfrac{\left(\lambda_1 - \beta\mu - \alpha\gamma\mu\right)\lambda_1^{k+1} - \left(\beta\mu + \alpha\gamma\mu - \lambda_2\right)\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{cases} \tag{4.104}$$

ve

$$
\begin{cases}
\rho_{4k+1} = \rho \dfrac{\left(\lambda_1 - \beta\mu - \alpha\gamma\mu\right)\lambda_1^k - \left(\beta\mu + \alpha\gamma\mu - \lambda_2\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\
\rho_{4k+2} = \beta \dfrac{\left(\xi\lambda_1 + \gamma\mu\rho\right)\lambda_1^k - \left(\xi\lambda_2 + \gamma\mu\rho\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\
\rho_{4k+3} = \delta \dfrac{\left(\left(\alpha\xi + \rho\right)\lambda_1 - \beta\mu\rho\right)\lambda_1^k - \left(\left(\alpha\xi + \rho\right)\lambda_2 - \beta\mu\rho\right)\lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\
\rho_{4k+4} = \mu\left(\alpha\gamma\xi + \gamma\rho + \beta\xi\right)\dfrac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},
\end{cases}
\tag{4.105}
$$

elde edilir. (4.98)-(4.105) ‘i (4.28)-(4.31) ‘de yerlerine yazılırsa, $\beta\delta\mu\rho \neq 0$ ve $\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho\right)^2 \neq 4\beta\delta\mu\rho$ için sistem (4.1) ‘in çözümleri $n \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{cases}
x_{4n+1} = y_0^{\frac{(\alpha\lambda_1+\beta\varepsilon\rho)\lambda_1^n-(\alpha\lambda_2+\beta\varepsilon\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} z_{-1}^{\beta\frac{(\lambda_1-\delta\rho-\gamma\varepsilon\rho)\lambda_1^n-(\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho-\lambda_2)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\
x_{4n+2} = z_0^{\frac{((\alpha\gamma+\beta)\lambda_1-\beta\delta\rho)\lambda_1^n-((\alpha\gamma+\beta)\lambda_2-\beta\delta\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} t_{-1}^{\delta\frac{(\alpha\lambda_1+\beta\varepsilon\rho)\lambda_1^n-(\alpha\lambda_2+\beta\varepsilon\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\
x_{4n+3} = t_0^{(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta)\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} x_{-1}^{\mu\frac{((\alpha\gamma+\beta)\lambda_1-\beta\delta\rho)\lambda_1^n-((\alpha\gamma+\beta)\lambda_2-\beta\delta\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\
x_{4n+4} = x_0^{\frac{(\lambda_1-\delta\rho-\gamma\varepsilon\rho)\lambda_1^{n+1}-(\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho-\lambda_2)\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} y_{-1}^{\rho(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta)\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}},
\end{cases}
\tag{4.106}
$$

$$
\begin{cases}
y_{4n+1} = z_0^{\frac{(\gamma\lambda_1+\beta\delta\xi)\lambda_1^n-(\gamma\lambda_2+\beta\delta\xi)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} t_{-1}^{\delta\frac{(\lambda_1-\beta\mu-\beta\varepsilon\xi)\lambda_1^n-(\beta\mu+\beta\varepsilon\xi-\lambda_2)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\
y_{4n+2} = t_0^{\frac{((\gamma\varepsilon+\delta)\lambda_1-\beta\delta\mu)\lambda_1^n-((\gamma\varepsilon+\delta)\lambda_2-\beta\delta\mu)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} x_{-1}^{\mu\frac{(\gamma\lambda_1+\beta\delta\xi)\lambda_1^n-(\gamma\lambda_2+\beta\delta\xi)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\
y_{4n+3} = x_0^{(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} y_{-1}^{\rho\frac{((\gamma\varepsilon+\delta)\lambda_1-\beta\delta\mu)\lambda_1^n-((\gamma\varepsilon+\delta)\lambda_2-\beta\delta\mu)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\
y_{4n+4} = y_0^{\frac{(\lambda_1-\beta\mu-\beta\varepsilon\xi)\lambda_1^{n+1}-(\beta\mu+\beta\varepsilon\xi-\lambda_2)\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} z_{-1}^{\beta(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}},
\end{cases}
\tag{4.107}
$$

$$
\begin{cases}
z_{4n+1} = t_0^{\frac{(\varepsilon\lambda_1+\alpha\delta\mu)\lambda_1^n-(\varepsilon\lambda_2+\alpha\delta\mu)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} x_{-1}^{\mu\frac{(\lambda_1-\delta\rho-\alpha\delta\xi)\lambda_1^n-(\delta\rho+\alpha\delta\xi-\lambda_2)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\
z_{4n+2} = x_0^{\frac{((\varepsilon\xi+\mu)\lambda_1-\delta\mu\rho)\lambda_1^n-((\varepsilon\xi+\mu)\lambda_2-\delta\mu\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} y_{-1}^{\rho\frac{(\varepsilon\lambda_1+\alpha\delta\mu)\lambda_1^n-(\varepsilon\lambda_2+\alpha\delta\mu)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\
z_{4n+3} = y_0^{(\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho)\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} z_{-1}^{\beta\frac{((\varepsilon\xi+\mu)\lambda_1-\delta\mu\rho)\lambda_1^n-((\varepsilon\xi+\mu)\lambda_2-\delta\mu\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\
z_{4n+4} = z_0^{\frac{(\lambda_1-\delta\rho-\alpha\delta\xi)\lambda_1^{n+1}-(\delta\rho+\alpha\delta\xi-\lambda_2)\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} t_{-1}^{\delta(\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho)\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}},
\end{cases}
\tag{4.108}
$$

ve

$$\begin{cases} t_{4n+1} = x_0^{\frac{(\xi\lambda_1+\gamma\mu\rho)\lambda_1^n-(\xi\lambda_2+\gamma\mu\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} y_{-1}^{\rho\frac{(\lambda_1-\beta\mu-\alpha\gamma\mu)\lambda_1^n-(\beta\mu+\alpha\gamma\mu-\lambda_2)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\ t_{4n+2} = y_0^{\frac{((\alpha\xi+\rho)\lambda_1-\beta\mu\rho)\lambda_1^n-((\alpha\xi+\rho)\lambda_2-\beta\mu\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} z_{-1}^{\beta\frac{(\xi\lambda_1+\gamma\mu\rho)\lambda_1^n-(\xi\lambda_2+\gamma\mu\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\ t_{4n+3} = z_0^{(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi)\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} t_{-1}^{\delta\frac{((\alpha\xi+\rho)\lambda_1-\beta\mu\rho)\lambda_1^n-((\alpha\xi+\rho)\lambda_2-\beta\mu\rho)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}, \\ t_{4n+4} = t_0^{\frac{(\lambda_1-\beta\mu-\alpha\gamma\mu)\lambda_1^{n+1}-(\beta\mu+\alpha\gamma\mu-\lambda_2)\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} x_{-1}^{\mu(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi)\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}. \end{cases} \tag{4.109}$$

Eğer $\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^2 = 4\beta\delta\mu\rho$ ise $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho}{2}$ olur ki o zaman

$$\begin{cases} \alpha_{4k+1} = \left(\left(\alpha+\frac{\varepsilon\lambda_1}{\delta\mu}\right)k+\alpha\right)\lambda_1^k, \\ \alpha_{4k+2} = \left(\left(\alpha\gamma+\beta-\frac{\lambda_1}{\mu}\right)k+\alpha\gamma+\beta\right)\lambda_1^k, \\ \alpha_{4k+3} = (\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta)(k+1)\lambda_1^k, \\ \alpha_{4k+4} = \left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\beta\mu}-\frac{\gamma\varepsilon\lambda_1}{\beta\delta\mu}\right)(k+1)+1\right)\lambda_1^{k+1}, \end{cases} \tag{4.110}$$

$$\begin{cases} \beta_{4k+1} = \beta\left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\beta\mu}-\frac{\gamma\varepsilon\lambda_1}{\beta\delta\mu}\right)k+1\right)\lambda_1^k, \\ \beta_{4k+2} = \delta\left(\left(\alpha+\frac{\varepsilon\lambda_1}{\delta\mu}\right)k+\alpha\right)\lambda_1^k, \\ \beta_{4k+3} = \left((\alpha\gamma\mu+\beta\mu-\lambda_1)k+\alpha\gamma\mu+\beta\mu\right)\lambda_1^k, \\ \beta_{4k+4} = \rho(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta)(k+1)\lambda_1^k, \end{cases} \tag{4.111}$$

$$\begin{cases} \gamma_{4k+1} = \left(\left(\gamma+\frac{\xi\lambda_1}{\mu\rho}\right)k+\gamma\right)\lambda_1^k, \\ \gamma_{4k+2} = \left(\left(\gamma\varepsilon+\delta-\frac{\lambda_1}{\rho}\right)k+\gamma\varepsilon+\delta\right)\lambda_1^k, \\ \gamma_{4k+3} = (\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)(k+1)\lambda_1^k, \\ \gamma_{4k+4} = \left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\delta\rho}-\frac{\varepsilon\xi\lambda_1}{\delta\mu\rho}\right)(k+1)+1\right)\lambda_1^{k+1}, \end{cases} \tag{4.112}$$

$$\begin{cases} \delta_{4k+1} = \delta\left(\left(1 - \frac{\lambda_1}{\delta\rho} - \frac{\varepsilon\xi\lambda_1}{\delta\mu\rho}\right)k + 1\right)\lambda_1^k, \\ \delta_{4k+2} = \mu\left(\left(\gamma + \frac{\xi\lambda_1}{\mu\rho}\right)k + \gamma\right)\lambda_1^k, \\ \delta_{4k+3} = \left(\left(\gamma\varepsilon\rho + \delta\rho - \lambda_1\right)k + \gamma\varepsilon\rho + \delta\rho\right)\lambda_1^k, \\ \delta_{4k+4} = \beta\left(\gamma\varepsilon\xi + \delta\xi + \gamma\mu\right)\left(k+1\right)\lambda_1^k, \end{cases} \tag{4.113}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{4k+1} = \left(\left(\varepsilon + \frac{\alpha\lambda_1}{\beta\rho}\right)k + \varepsilon\right)\lambda_1^k, \\ \varepsilon_{4k+2} = \left(\left(\varepsilon\xi + \mu - \frac{\lambda_1}{\beta}\right)k + \varepsilon\xi + \mu\right)\lambda_1^k, \\ \varepsilon_{4k+3} = \left(\alpha\varepsilon\xi + \alpha\mu + \varepsilon\rho\right)\left(k+1\right)\lambda_1^k, \\ \varepsilon_{4k+4} = \left(\left(1 - \frac{\lambda_1}{\beta\mu} - \frac{\alpha\xi\lambda_1}{\beta\mu\rho}\right)\left(k+1\right) + 1\right)\lambda_1^{k+1}, \end{cases} \tag{4.114}$$

$$\begin{cases} \mu_{4k+1} = \mu\left(\left(1 - \frac{\lambda_1}{\beta\mu} - \frac{\alpha\xi\lambda_1}{\beta\mu\rho}\right)k + 1\right)\lambda_1^k, \\ \mu_{4k+2} = \rho\left(\left(\varepsilon + \frac{\alpha\lambda_1}{\beta\rho}\right)k + \varepsilon\right)\lambda_1^k, \\ \mu_{4k+3} = \left(\left(\beta\varepsilon\xi + \beta\mu - \lambda_1\right)k + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu\right)\lambda_1^k, \\ \mu_{4k+4} = \delta\left(\alpha\varepsilon\xi + \alpha\mu + \varepsilon\rho\right)\left(k+1\right)\lambda_1^k, \end{cases} \tag{4.115}$$

$$\begin{cases} \xi_{4k+1} = \left(\left(\xi + \frac{\gamma\lambda_1}{\beta\delta}\right)k + \xi\right)\lambda_1^k, \\ \xi_{4k+2} = \left(\left(\alpha\xi + \rho - \frac{\lambda_1}{\delta}\right)k + \alpha\xi + \rho\right)\lambda_1^k, \\ \xi_{4k+3} = \left(\alpha\gamma\xi + \gamma\rho + \beta\xi\right)\left(k+1\right)\lambda_1^k, \\ \xi_{4k+4} = \left(\left(1 - \frac{\lambda_1}{\delta\rho} - \frac{\alpha\gamma\lambda_1}{\beta\delta\rho}\right)\left(k+1\right) + 1\right)\lambda_1^{k+1}, \end{cases} \tag{4.116}$$

ve

$$\begin{cases} \rho_{4k+1} = \rho\left(\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\delta\rho}-\dfrac{\alpha\gamma\lambda_1}{\beta\delta\rho}\right)k+1\right)\lambda_1^k, \\ \rho_{4k+2} = \beta\left(\left(\xi+\dfrac{\gamma\lambda_1}{\beta\delta}\right)k+\xi\right)\lambda_1^k, \\ \rho_{4k+3} = \left(\left(\alpha\delta\xi+\delta\rho-\lambda_1\right)k+\alpha\delta\xi+\delta\rho\right)\lambda_1^k, \\ \rho_{4k+4} = \mu\left(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi\right)\left(k+1\right)\lambda_1^k, \end{cases} \tag{4.117}$$

olup benzer şekilde (4.110)-(4.117) ‘yi (4.28)-(4.31) ‘de yerlerine yazılırsa $\beta\delta\mu\rho \neq 0$ ve $\left(\alpha\gamma\varepsilon\xi+\alpha\gamma\mu+\alpha\delta\xi+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu+\delta\rho+\gamma\varepsilon\rho\right)^2 = 4\beta\delta\mu\rho$ için sistem (4.1) ‘in çözümleri $n \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{cases} x_{4n+1} = y_0^{\left(\left(\alpha+\frac{\varepsilon\lambda_1}{\delta\mu}\right)n+\alpha\right)\lambda_1^n} z_{-1}^{\beta\left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\beta\mu}-\frac{\gamma\varepsilon\lambda_1}{\beta\delta\mu}\right)n+1\right)\lambda_1^n}, \\ x_{4n+2} = z_0^{\left(\left(\alpha\gamma+\beta-\frac{\lambda_1}{\mu}\right)n+\alpha\gamma+\beta\right)\lambda_1^n} t_{-1}^{\delta\left(\left(\alpha+\frac{\varepsilon\lambda_1}{\delta\mu}\right)n+\alpha\right)\lambda_1^n}, \\ x_{4n+3} = t_0^{(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta)(n+1)\lambda_1^n} x_{-1}^{((\alpha\gamma\mu+\beta\mu-\lambda_1)n+\alpha\gamma\mu+\beta\mu)\lambda_1^n}, \\ x_{4n+4} = x_0^{\left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\beta\mu}-\frac{\gamma\varepsilon\lambda_1}{\beta\delta\mu}\right)(n+1)+1\right)\lambda_1^{n+1}} y_{-1}^{\rho(\alpha\gamma\varepsilon+\beta\varepsilon+\alpha\delta)(n+1)\lambda_1^n}, \end{cases} \tag{4.118}$$

$$\begin{cases} y_{4n+1} = z_0^{\left(\left(\gamma+\frac{\xi\lambda_1}{\mu\rho}\right)n+\gamma\right)\lambda_1^n} t_{-1}^{\delta\left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\delta\rho}-\frac{\varepsilon\xi\lambda_1}{\delta\mu\rho}\right)n+1\right)\lambda_1^n}, \\ y_{4n+2} = t_0^{\left(\left(\gamma\varepsilon+\delta-\frac{\lambda_1}{\rho}\right)n+\gamma\varepsilon+\delta\right)\lambda_1^n} x_{-1}^{\mu\left(\left(\gamma+\frac{\xi\lambda_1}{\mu\rho}\right)n+\gamma\right)\lambda_1^n}, \\ y_{4n+3} = x_0^{(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)(n+1)\lambda_1^n} y_{-1}^{((\gamma\varepsilon\rho+\delta\rho-\lambda_1)n+\gamma\varepsilon\rho+\delta\rho)\lambda_1^n}, \\ y_{4n+4} = y_0^{\left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\delta\rho}-\frac{\varepsilon\xi\lambda_1}{\delta\mu\rho}\right)(n+1)+1\right)\lambda_1^{n+1}} z_{-1}^{\beta(\gamma\varepsilon\xi+\delta\xi+\gamma\mu)(n+1)\lambda_1^n}, \end{cases}$$

(4.119)

$$\begin{cases} z_{4n+1} = t_0^{\left(\left(\varepsilon+\frac{\alpha\lambda_1}{\beta\rho}\right)n+\varepsilon\right)\lambda_1^n} x_{-1}^{\mu\left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\beta\mu}-\frac{\alpha\xi\lambda_1}{\beta\mu\rho}\right)n+1\right)\lambda_1^n}, \\ z_{4n+2} = x_0^{\left(\left(\varepsilon\xi+\mu-\frac{\lambda_1}{\beta}\right)n+\varepsilon\xi+\mu\right)\lambda_1^n} y_{-1}^{\rho\left(\left(\varepsilon+\frac{\alpha\lambda_1}{\beta\rho}\right)n+\varepsilon\right)\lambda_1^n}, \\ z_{4n+3} = y_0^{(\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho)(n+1)\lambda_1^n} z_{-1}^{((\beta\varepsilon\xi+\beta\mu-\lambda_1)n+\beta\varepsilon\xi+\beta\mu)\lambda_1^n}, \\ z_{4n+4} = z_0^{\left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\beta\mu}-\frac{\alpha\xi\lambda_1}{\beta\mu\rho}\right)(n+1)+1\right)\lambda_1^{n+1}} t_{-1}^{\delta(\alpha\varepsilon\xi+\alpha\mu+\varepsilon\rho)(n+1)\lambda_1^n}, \end{cases} \tag{4.120}$$

ve

$$\begin{cases} t_{4n+1} = x_0^{\left(\left(\xi+\frac{\gamma\lambda_1}{\beta\delta}\right)n+\xi\right)\lambda_1^n} y_{-1}^{\rho\left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\delta\rho}-\frac{\alpha\gamma\lambda_1}{\beta\delta\rho}\right)n+1\right)\lambda_1^n}, \\ t_{4n+2} = y_0^{\left(\left(\alpha\xi+\rho-\frac{\lambda_1}{\delta}\right)n+\alpha\xi+\rho\right)\lambda_1^n} z_{-1}^{\beta\left(\left(\xi+\frac{\gamma\lambda_1}{\beta\delta}\right)n+\xi\right)\lambda_1^n}, \\ t_{4n+3} = z_0^{(\alpha\gamma\xi+\gamma\rho+\beta\xi)(n+1)\lambda_1^n} t_{-1}^{((\alpha\delta\xi+\delta\rho-\lambda_1)n+\alpha\delta\xi+\delta\rho)\lambda_1^n}, \\ t_{4n+4} = t_0^{\left(\left(1-\frac{\lambda_1}{\delta\rho}-\frac{\alpha\gamma\lambda_1}{\beta\delta\rho}\right)(n+1)+1\right)\lambda_1^{n+1}} x_{-1}^{\mu(\alpha\delta\xi+\gamma\rho+\beta\xi)(n+1)\lambda_1^n}. \end{cases} \quad (4.121)$$

Böylece ispat tamamlanmış olur ■.

Sonuç 4.1. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu, \xi$ ve ρ parametreleri tamsayı ve $i \in \{0,1\}$ için $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, t_{-i} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ başlangıç koşulları olmak üzere $\{(x_n, y_n, z_n, t_n)\}_{n\geq -1}$, sistem (4.1) 'in iyi tanımlı bir çözümü olsun. O zaman aşağıdaki durumlar sağlanır.

i) Eğer $\beta = 0$ ise o zaman sistem (4.1) 'in genel çözümü (4.47)-(4.50) 'dir.

ii) Eğer $\delta = 0$ ise o zaman sistem (4.1) 'in genel çözümü (4.61)-(4.64) 'tür.

iii) Eğer $\mu = 0$ ise o zaman sistem (4.1) 'in genel çözümü (4.75)-(4.78) 'dir.

iv) Eğer $\rho = 0$ ise o zaman sistem (4.1) 'in genel çözümü (4.89)-(4.92) 'dir.

v) Eğer $\beta\delta\mu\rho \neq 0$ ve $(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho)^2 \neq 4\beta\delta\mu\rho$ ise o zaman sistem (4.1) 'in genel çözümü (4.106)-(4.109) 'dur.

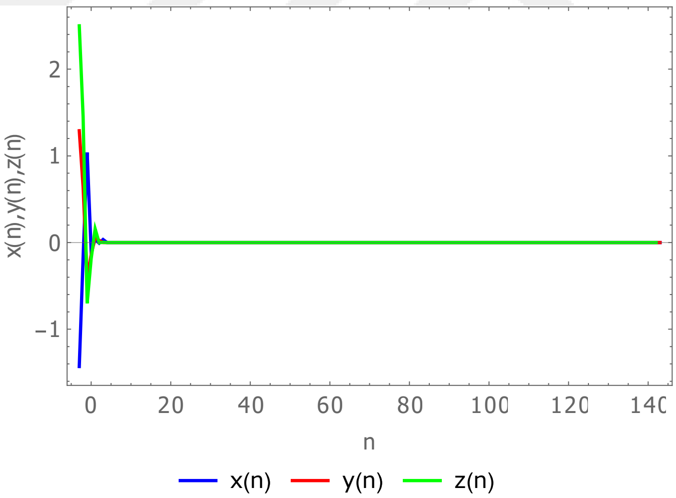
vi) Eğer $\beta\delta\mu\rho \neq 0$ ve $(\alpha\gamma\varepsilon\xi + \alpha\gamma\mu + \alpha\delta\xi + \beta\varepsilon\xi + \beta\mu + \delta\rho + \gamma\varepsilon\rho)^2 = 4\beta\delta\mu\rho$ ise o zaman sistem (4.1) 'in genel çözümü (4.118)-(4.121) 'dir.

BÖLÜM 5

5.1. Nümerik Örnekler

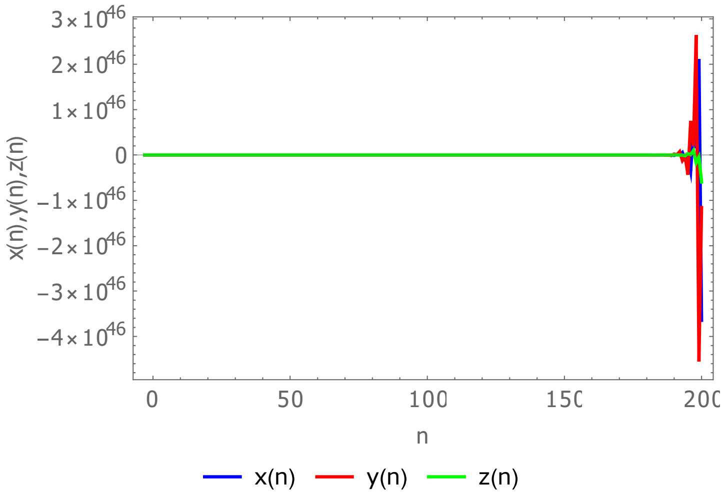
Bu bölümde, üçüncü bölümde çalışılan fark denklemi için nümerik uygulamalar verilmiştir.

Örnek 5.1: Aşağıda, Teorem 3.2.'nin a öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=-1.03$, $b=-3.7$, $c=1.077$, $d=0.7$, $e=4$, $f=-1.6$ parametreleri için $x_{-3}=-1.43$, $x_{-2}=-0.17$, $x_{-1}=1.04$, $y_{-3}=1.29$, $y_{-2}=0.64$, $y_{-1}=-0.407$, $z_{-3}=2.5$, $z_{-2}=1.453$, $z_{-1}=-0.7$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



Şekil 5.1: Teorem 3.2'nin a öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.2: Aşağıda, Teorem 3.2.'nin b öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=-0.2$, $b=1.5$, $c=0.65$, $d=0.013$, $e=-0.07$, $f=-3.8$ parametreleri için $x_{-3}=-1.43$, $x_{-2}=-0.17$, $x_{-1}=1.04$, $y_{-3}=1.29$, $y_{-2}=0.64$, $y_{-1}=-0.407$, $z_{-3}=2.5$, $z_{-2}=1.453$, $z_{-1}=-0.7$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.

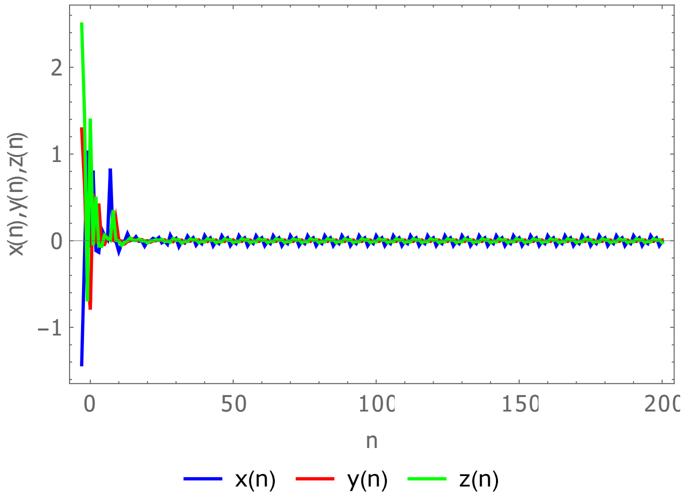


Şekil 5.2: Teorem 3.2' nin b öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.3: Aşağıda, Teorem 3.2.'nin d öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=-0.25$, $b=1.25$, $c=-0.3$, $d=1.3$, $e=0.07$, $f=0.93$ parametreleri için $x_{-3}=-1.43$, $x_{-2}=-0.17$, $x_{-1}=1.04$, $y_{-3}=1.29$, $y_{-2}=0.64$, $y_{-1}=-0.407$, $z_{-3}=2.5$, $z_{-2}=1.453$, $z_{-1}=-0.7$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.

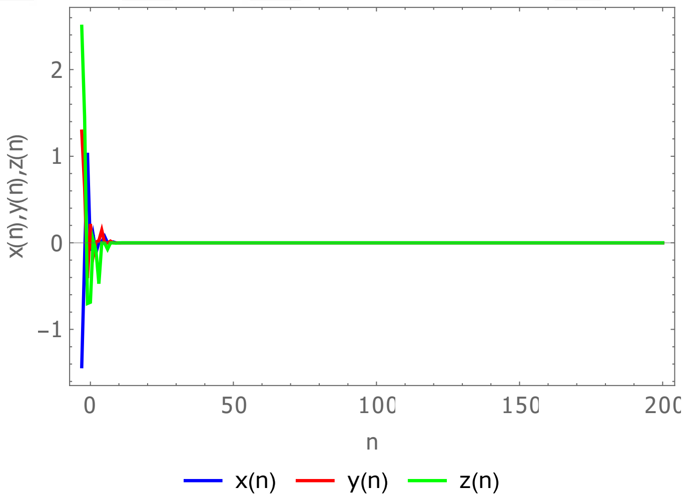
Şekil 5.3: Teorem 3.2.' nin d öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.4: Aşağıda, Teorem 3.2.'nin e öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=-0.78$, $b=-0.5$, $c=-0.23$, $d=1.78$, $e=0.5$, $f=1.23$ parametreleri için $x_{-3}=-1.43$, $x_{-2}=-0.17$, $x_{-1}=1.04$, $y_{-3}=1.29$, $y_{-2}=0.64$, $y_{-1}=-0.407$, $z_{-3}=2.5$, $z_{-2}=1.453$, $z_{-1}=-0.7$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



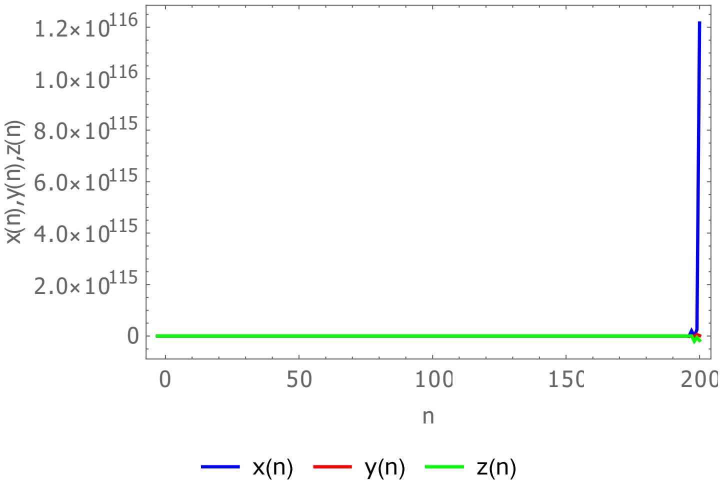
Şekil 5.4: Teorem 3.2.' nin e öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.5: Aşağıda, Teorem 3.3.'ün a öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=-0.25$, $b=2.5$, $c=-1$, $d=0.7$, $e=-1$, $f=-2.5$ parametreleri için $x_{-3}=-1.43$, $x_{-2}=-0.17$, $x_{-1}=1.04$, $y_{-3}=1.29$, $y_{-2}=0.64$, $y_{-1}=-0.407$, $z_{-3}=2.5$, $z_{-2}=1.453$, $z_{-1}=-0.7$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



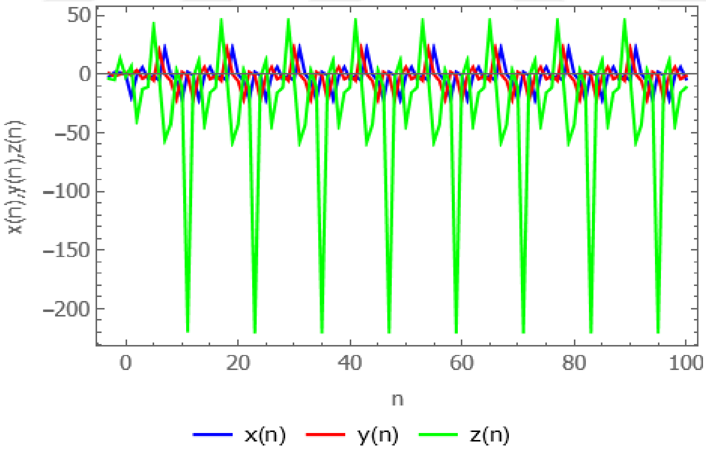
Şekil 5.5: Teorem 3.3' ün a öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.6: Aşağıda, Teorem 3.3.'ün b öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=0.25$, $b=0.0035$, $c=-1$, $d=0.15$, $e=-1$, $f=-2.5$ parametreleri için $x_{-3}=-1.43$, $x_{-2}=-0.17$, $x_{-1}=1.04$, $y_{-3}=1.29$, $y_{-2}=0.64$, $y_{-1}=-0.407$, $z_{-3}=2.5$, $z_{-2}=1.453$, $z_{-1}=-0.7$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



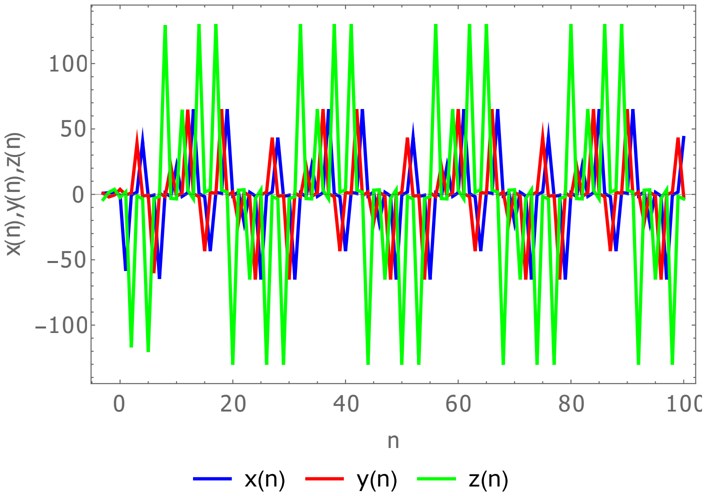
Şekil 5.6: Teorem 3.3' ün b öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.7: Aşağıda, Teorem 3.3.'ün c öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a = 0.4$, $b = 0.6$, $c = -1$, $d = 12$, $e = -1$, $f = 0$ parametreleri için $x_{-3} = -2.6$, $x_{-2} = 1.3$, $x_{-1} = 1.2$, $y_{-3} = 0.7$, $y_{-2} = -2$, $y_{-1} = -0.52$, $z_{-3} = -4$, $z_{-2} = -5.2$, $z_{-1} = 13$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



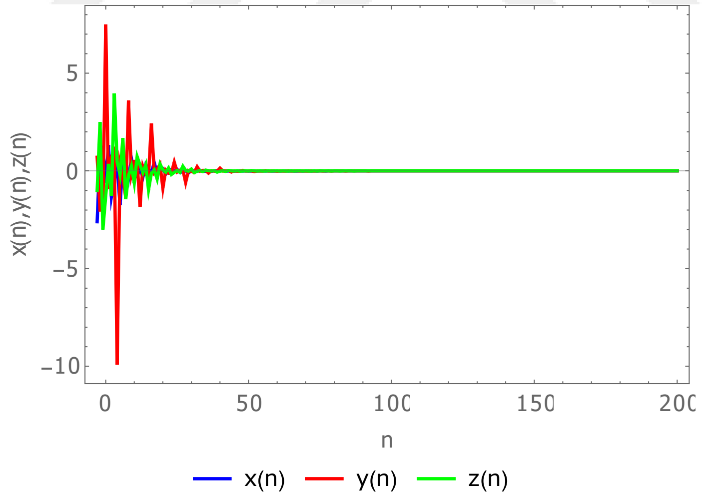
Şekil 5.7: Teorem 3.3.' ün c öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.8: Aşağıda, Teorem 3.3.'ün d öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a = 0.4$, $b = 0.6$, $c = -1$, $d = 3$, $e = -1$, $f = 0$ parametreleri için $x_{-3} = 0.78$, $x_{-2} = 1.3$, $x_{-1} = 1.2$, $y_{-3} = 0.7$, $y_{-2} = -2$, $y_{-1} = -0.52$, $z_{-3} = -4$, $z_{-2} = 1.56$, $z_{-1} = 3.9$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



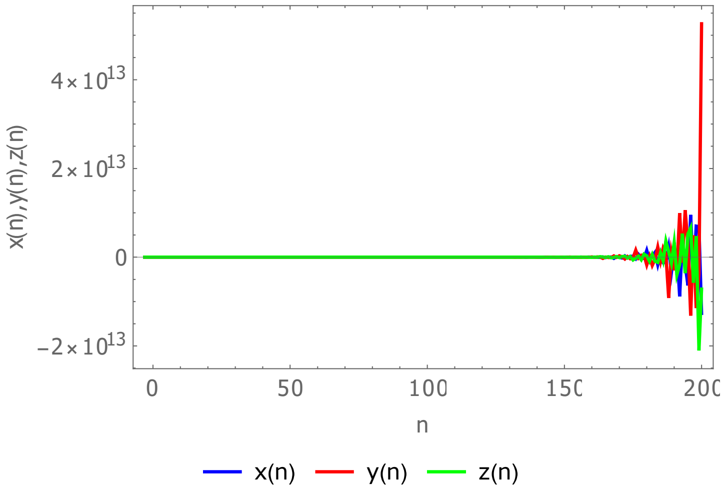
Şekil 5.8: Teorem 3.3.’ ün d öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.9: Aşağıda, Teorem 3.6.’nın a öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=-1$, $b=4$, $c=-1$, $d=0.1$, $e=-1$, $f=-2$ parametreleri için $x_{-3}=-2.6$, $x_{-2}=1$, $x_{-1}=1.2$, $y_{-3}=0.7$, $y_{-2}=-2$, $y_{-1}=-2$, $z_{-3}=-1$, $z_{-2}=2.5$, $z_{-1}=-3$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



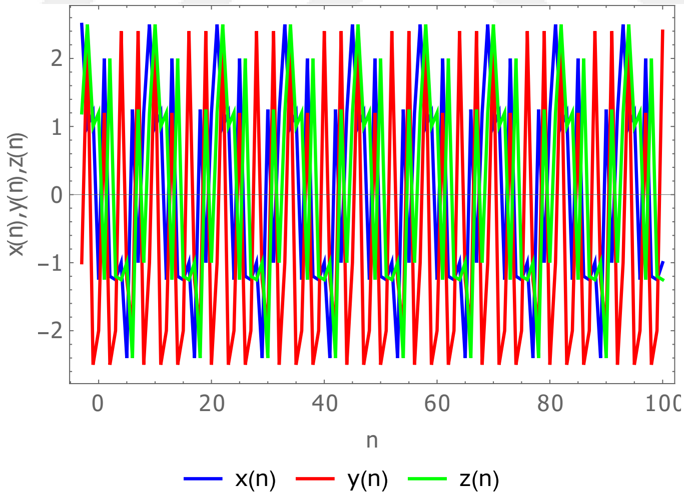
Şekil 5.9: Teorem 3.6’ nın a öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.10: Aşağıda, Teorem 3.6.’nın b öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=-1$, $b=1$, $c=-1$, $d=0.1$, $e=-1$, $f=-2$ parametreleri için $x_{-3}=-2.6$, $x_{-2}=1$, $x_{-1}=1.2$, $y_{-3}=0.7$, $y_{-2}=-2$, $y_{-1}=-2$, $z_{-3}=-1$, $z_{-2}=2.5$, $z_{-1}=-3$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



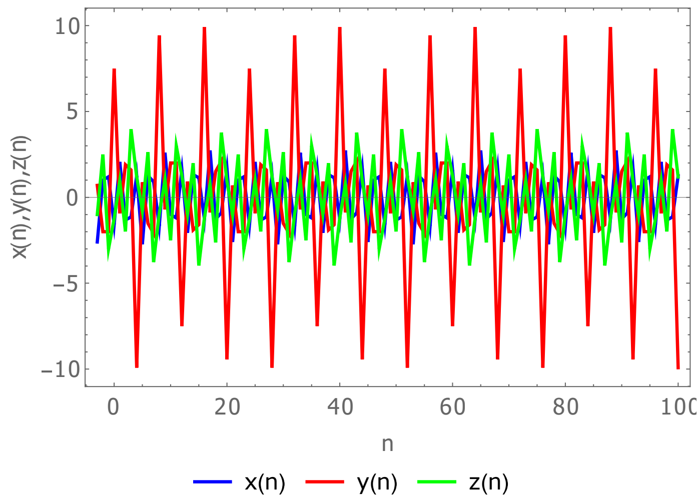
Şekil 5.10: Teorem 3.6’ nın b öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.11: Aşağıda, Teorem 3.6.’nın c öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=-1$, $b=1$, $c=-1$, $d=0$, $e=-1$, $f=2$ parametreleri için $x_{-3}=2.5$, $x_{-2}=1$, $x_{-1}=1.2$, $y_{-3}=-1$, $y_{-2}=2.4$, $y_{-1}=-2.5$, $z_{-3}=1.2$, $z_{-2}=2.5$, $z_{-1}=1$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



Şekil 5.11: Teorem 3.6’ nın c öncülünün bir uygulaması

Örnek 5.12: Aşağıda, Teorem 3.6.’nın d öncülünün bir uygulaması olarak (3.32) denkleminin $a=-1$, $b=1.961877$, $c=-1$, $d=0.1$, $e=-1$, $f=-2$ parametreleri için $x_{-3}=-2.6$, $x_{-2}=1$, $x_{-1}=1.2$, $y_{-3}=0.7$, $y_{-2}=-2$, $y_{-1}=-2$, $z_{-3}=-1$, $z_{-2}=2.5$, $z_{-1}=-3$ başlangıç koşularına karşılık gelen çözümünün grafiği verilmiştir.



Şekil 5.12: Teorem 3.6’ nın d öncülünün bir uygulaması

BÖLÜM 6

6.1. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada;

a,b,c,d,e,f parametreleri ve $i\in\{1,2,...,k+l\}$ için x_{-i},y_{-i},z_{-i} başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_n=\frac{x_{n-k}y_{n-l}}{bx_{n-k}+ay_{n-k-l}},\quad y_n=\frac{y_{n-k}z_{n-l}}{dy_{n-k}+cz_{n-k-l}},\quad z_n=\frac{z_{n-k}x_{n-l}}{fz_{n-k}+ex_{n-k-l}},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

üç boyutlu $(k+l)$. mertebeden fark denklem sisteminin iyi tanımlı çözümleri kapalı formda elde edilmiştir. $k=2,l=1$ için elde edilen çözümlerin asimptotik davranışı da incelenmiştir.

Ayrıca $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\mu,\xi$ ve ρ parametreleri tamsayı ve $i\in\{0,1\}$ için $x_{-i},y_{-i},z_{-i},t_{-i}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$x_{n+1}=y_n^{\alpha}z_{n-1}^{\beta},\ y_{n+1}=z_n^{\gamma}t_{n-1}^{\delta},\ z_{n+1}=t_n^{\varepsilon}x_{n-1}^{\mu},\ t_{n+1}=x_n^{\xi}y_{n-1}^{\rho},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

sisteminin kapalı formda çözülebilirliği gösterilmiş, $\beta=0,\ \delta=0,\ \mu=0,\ \rho=0$ ve $\beta\delta\mu\rho\neq 0$ durumlarına göre sistemin genel çözümü elde edilmiştir.

Son olarak, 3. bölümde elde edilen teorik bilgileri desteklemek için nümerik örnekler ve grafikler verilmiştir.

Hem sistem (3.1) hem de sistem (4.1) $p\in\mathbb{N}^+$ için p-boyutlu sisteme genişletelerek elde edilen sistemlerin kapalı formda çözümleri elde edilebilir.

KAYNAKÇA

1. Akrour, Y., Touafek, N., Halim, Y., “On a system of difference equations of second order solved in a closed from”, *Miskolc Mathematical Notes*, 20(2), 701-717, 2019.
2. Akrour, Y., Touafek, N., Halim, Y., “On a system of difference equations of third order solved in closed form”, *Journal of Innovative Applied Mathematics and Computational Sciences*, 1(1), 1-15, 2021.
3. Akrour, Y., Kara, M., Touafek, N., Yazlik, Y., “Solutions formulas for some general systems of difference equations”, *Miskolc Mathematical Notes*, 22(2), 529-555, 2021.
4. Akrour, Y., Mesmouli, M. B., Tollu, D. T., Touafek, N., “On the solutions of a system of max-type difference equations”, *Tbilisi Mathematical Journal*, 14(4), 159-187, 2021.
5. Akrour, Y., Kara, M., Touafek, N., Yazlik, Y., “On a three dimensional higher order system of difference equations”, *Dynam. Continuous, Discr. Impul. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms*, 29, 77-108, 2022.
6. Almatrafi, M., Elsayed, E. M., Alzahrani, F., “Qualitative behavior of two rational difference equations”, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 1(2), 194-204, 2018.
7. Din, Q., Qureshi, M. N., Khan, A. Q., “Dynamics of a fourth-order system of rational difference equations”, *Advances in Difference Equations*, 2012, 1-15, 2012.
8. Din, Q., “Qualitative behavior of an anti-competitive system of third-order rational difference equations”, *Computational Ecology and Software*, 4(2), 104, 2014.
9. Din, Q., “On a system of rational difference equation”, *Demonstratio Mathematica*, 47(2), 324-335, 2014.
10. Elabbasy, E. M., El-Metwally, H. A., Elsayed, E. M., “Global behavior of the solutions of some difference equations” *Advances in Difference Equations*, Vol.(2011), 1-16, 2011.

11. El-Dessoky, M. M., Elsayed, E. M., "On the solutions and periodic nature of some systems of rational difference equations", *J. Comput. Anal. Appl*, 18(2), 206-218, 2015.
12. El-Dessoky, M. M., Elsayed, E. M., Elabbasy, E. M., Asiri, A., "Expressions of the solutions of some systems of difference equations", *J. Comput. Anal. Appl*, 27(7), 1161-1172, 2019.
13. El-Metwally, H., "Solutions form for some rational systems of difference equations", *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol(2013), Article ID 903593, 1-10, 2013.
14. Elsayed, E. M., "On the solutions of a rational system of difference equations", *Fasciculi Mathematici*, 45, 25-36, 2010.
15. Elsayed, E. M., "On the solutions and periodic nature of some systems of difference equations", *International Journal of Biomathematics*, 7 (06), 1-26, 2014.
16. Elsayed, E. M., Ibrahim, T. F., "Periodicity and solutions for some systems of nonlinear rational difference equations", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44(6), 1361-1390, 2015.
17. Elsayed, E. M., Ahmed, A. M., "Dynamics of a three-dimensional systems of rational difference equations", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(5), 1026-1038, 2016.
18. Elsayed, E. M., Alotaibi, A., Almaylabi, H. A., "On a solutions of fourth order rational systems of difference equations" *Journal of Computational Analysis and Applications*, 22(7), 1298-1308, 2017.
19. Haddad, N., Touafek, N., Rabago, J. F. T., "Well-defined solutions of a system of difference equations" *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 56, 439-458, 2018.
20. Halim, Y., Khelifa, A., Berkal, M., "Representation of solutions of a two-dimensional system of difference equations", *Miskolc Mathematical Notes*, 21(1), 203-218, 2020.
21. Halim, Y., Berkal, M., Khelifa, A., "On a three-dimensional solvable system of difference equations", *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1263-1288, 2020.

22. Halim, Y., Khelifa, A., Berkal, M., Bouchair, A., “On a solvable system of p difference equations of higher order”, *Periodica Mathematica Hungarica*, 85(1), 109-127, 2022.
23. Hamioud, H., Touafek, N., Dekkar, I., Yazlik, Y., “On a three dimensional nonautonomous system of difference equations”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 68(6), 3901-3936, 2022.
24. Ibrahim, T. F., “Closed form expression of tractable semi-max-type two-dimensional system of difference equations with variable coefficients”, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24(4), 538-544, 2016.
25. Ibrahim, T. F., “Behavior of two and three-dimensional systems of difference equations in modelling competitive populations”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, 24(6), 395-418, 2017
26. Khaliq, A., Elsayed, E. M., “Qualitative study of a higher order rational difference equation”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 47(5), 1128-1143, 2018.
27. Khelifa, A., Halim, Y., Bouchair, A., Berkal, M., “On a system of three difference equations of higher order solved in terms of Lucas and Fibonacci numbers”, *Mathematica Slovaca*, 70(3), 641-656, 2020.
28. Kara, M., Yazlik, Y., “On the System of Difference Equations $x_n = \frac{x_{n-2}y_{n-3}}{y_{n-1}\left(a_n + b_n x_{n-2} y_{n-3}\right)}$, $y_n = \frac{y_{n-2}x_{n-3}}{x_{n-1}\left(\alpha_n + \beta_n y_{n-2} x_{n-3}\right)}$ ”, *Journal of Mathematical Extension*, 14, 41-59, 2019.
29. Kara, M., Yazlik, Y., “Solvability of a system of nonlinear difference equations of higher order”, *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1533-1565, 2019.
30. Kara, M., Tollu, D. T., Yazlik, Y., “Global behavior of two-dimensional difference equations system with two period coefficients”, *Tbilisi Mathematical Journal*, 13(4), 49-64, 2020.
31. Kara, M., Yazlık, Y., “On a solvable three-dimensional system of difference equations”, *Filomat*, 34(4), 1167-1186, 2020.
32. Kara, M., Yazlık, Y., “On a solvable system of non-linear difference equations with variable coefficients”, *Journal of Science and Arts*, 1(54), 145-162, 2021.

33. Kara, M., Yazlık, Y., Touafek, N., Akrour, Y., "On a three-dimensional system of difference equations with variable coefficients", *Journal of Applied Mathematics and Informatics,* 39(3-4), 381-403, 2021.
34. Kara, M., Yazlik, Y., "Solvability of a nonlinear three-dimensional system of difference equations with constant coefficients" *Mathematica Slovaca,* 71(5), 1133-1148, 2021.
35. Kara, M., Yazlik, Y., "On a solvable system of difference equations via some number sequences", *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13(2), 2611-2637, 2022.
36. Kara, M., Yazlik, Y., "On a solvable system of rational difference equations of higher order", *Turkish Journal of Mathematics*, 46(2), 587-611, 2022.
37. Kara, M., Yazlık, Y., "On the solutions of three-dimensional system of difference equations via recursive relations of order two and applications", *Journal of Applied Analysis and Computation*, 12(2), 736-753, 2022.
38. Karatas, C., Yalcinkaya, I., "On the Solutions of the Difference Equation", *Thai Journal of Mathematics*, 9(1), 121-126, 2012.
39. Khan, A. Q., Qureshi, M. N., "Behavior of an exponential system of difference equations", *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 607281, 1-9, 2014.
40. Khan, A. Q., Qureshi, M. N., Din, Q., Asymptotic behavior of an anti-competitive system of rational difference equations. *Life Science Journal*, 11(7s), 16-20, 2014.
41. Khan, A. Q., Qureshi, M. N., "Qualitative behavior of two systems of higher-order difference equations", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(11), 3058-3074, 2016.
42. Khelifa, A., Halim, Y., "General solutions to systems of difference equations and some of their representations", *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 65, 439-453, 2021.
43. Kara, M., Touafek, N., Yazlik, Y., "Well-defined solutions of a three-dimensional system of difference equations", *Gazi University Journal of Science*, 33(3), 767-778, 2020.

44. Kara, M., “Solvability of a Three-Dimensional System of Nonlinear Difference Equations”, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 10(1), 1-15, 2022.
45. Kara, M., Yazlik, Y., “Solutions formulas for three-dimensional difference equations system with constant coefficients”, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 14(1), 107-116, 2022.
46. Kara, M., Aktaş, Ö., “On solutions of three-dimensional system of difference equations with constant coefficients”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 72(2), 462-481, 2023.
47. Okumuş, İ., Soykan, Y., “Dynamical behavior of a system of three-dimensional nonlinear difference equations”, *Advances in Difference Equations*, Vol(2018), 1-15, 2018.
48. Qureshi, M. N., Khan, A. Q., Din, Q., “Global behavior of third order system of rational difference equations” *Int. J. Eng. Res. Technol*, 2(5), 2182-2191, 2013.
49. Qureshi, M. N., Khan, A. Q., Din, Q., “Some systems of second-order rational difference equations”, *Life Science Journal*, 11(6s), 43-50, 2014.
50. Sanbo, A., Elsayed, E. M., “Analytical study of a system of difference Equation”, *Asian Research Journal of Mathematics*, 14(1), 1-18, 2019.
51. Stević, S., “First-order product-type systems of difference equations solvable in closed form”, *Electron. J. Differ. Equ*, Vol(2015), 1-11, 2015.
52. Stević, S., “Product-type system of difference equations of second-order solvable in closed form”, *Electron. J. Qual.*, 56, 1-16, 2015.
53. Stević, S., Iričanin, B., Šmarda, Z., “On a product-type system of difference equations of second order solvable in closed form”, *Journal of Inequalities and Applications*, 2015, 1-15, 2015.
54. Stević, S., Iričanin, B., Šmarda, Z., “Two-dimensional product-type system of difference equations solvable in closed form” *Advances in Difference Equations*, 2016(1), 1-20, 2016.
55. Stević, S., “Solvability of a class of product-type systems of difference equations”, *Advances in Difference Equations*, Vol(2016) (1), 1-12, 2016.

56. Stević, S., Rankovic, D., “On a practically solvable product-type system of difference equations of second order”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, Vol(2016) (56), 1-23, 2016.
57. Stević, S., Alghamdi, M. A., Shahzad, N., Maturi, D. A., “On a class of solvable difference equations”, *In Abstract and Applied Analysis, Hindawi*, (Vol. 2013), Article ID 157943, 1-7, 2013.
58. Stević, S., “Product-type system of difference equations with a complex structure of solutions”, *Advances in Difference Equations*, Vol(2017), 1-23, 2017.
59. Stević, S., “Solution to the solvability problem for a class of product-type systems of difference equations”, *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 1-24, 2017.
60. Stević, S., “Solvable product-type system of difference equations with two dependent variables”, *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 245, 2017.
61. Stevic, S., “Two-dimensional product-type systems of difference equations of delay-type (2, 2, 1, 2)”, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol(2017), 153, 1-21, 2017.
62. Stević, S., Iričanin, B., Šmarda, Z., “On a solvable class of product-type systems of difference equations”, *Filomat*, 31(19), 6113-6129, 2017.
63. Stević, S., Iricanin, B., Šmarda, Z. “Product-type system of difference equations with multiplicative coefficients solvable in closed form”, *Journal of Computational Analysis and Applications*, Vol(24), 6, 93-106, 2018.
64. Stević, S., “A four-dimensional solvable system of difference equations in the complex domain”, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 112, 1265-1280, 2018.
65. Stević, S., “Solvability of a product-type system of difference equations with six parameters”, *Advances in Nonlinear Analysis*, 8(1), 29-51, 2016.
66. Stević, S., Tollu, D., “Solvability and semi-cycle analysis of a class of nonlinear systems of difference equations”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(10), 3579-3615, 2019.
67. Stević, S., Tollu, D. T., “Solvability of eight classes of nonlinear systems of difference equations”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(12), 4065-4112, 2019.

68. Stević, S., Diblík, J., Iričanin, B., Šmarda, Z., "On a solvable system of rational difference equations", *Journal of Difference Equations and Applications,* 20(5-6), 811-825, 2014.
69. Şahinkaya, A., Yalçınkaya, İ., Tollu, D. T., "A solvable system of nonlinear difference equations", *Ikonion Journal of Mathematics,* 2(1), 10-20, 2020.
70. Taşkara, N., Büyük, H., "On the solutions of three-dimensional difference equation systems via pell numbers", *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (34), 433-440, 2022.
71. Tollu, D. T., Yazlik, Y., Taskara, N., "On fourteen solvable systems of difference equations", *Applied Mathematics and Computation*, 233, 310-319, 2014.
72. Tollu, D. T., Yazlik, Y., Taskara, N., "Global behavior of solutions for a difference equation of third order", *DCDIS Series B: Applications & Algorithms*, 24, 299-307, 2017.
73. Tollu, D. T., Yazlik, Y., Taşkara, N., "On a solvable nonlinear difference equation of higher order", *Turkish Journal of Mathematics,* 42(4), 1765-1778, 2018.
74. Tollu, D. T., Yalçınkaya, İ., "Global behavior of a three-dimensional system of difference equations of order three", *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 1-16, 2019.
75. Tollu, D. T., "Periodic solutions of a system of nonlinear difference equations with periodic coefficients", *Journal of Mathematics,* Vol(2020), 1-7, 2020.
76. Touafek, N., Elsayed, E. M., "On a second order rational systems of difference equations", *Hokkaido Mathematical Journal*, 44(1), 29-45, 2015.
77. Touafek, N., Elsayed, E. M., "On a third order rational systems of difference equations", *An Stiint Univ Al I Cuza Iasi Mat*., DOI: 10.2478/aicu-2014-0004, 1-14, 2015.
78. Yazlik, Y., Tollu, D. T., Taşkara, N., "On the solutions of a max-type difference equation system", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 17(38), 4388-4410, 2015.
79. Yazlık, Y., Tollu, D.T., Taşkara, N., "On the solutions of a three-dimensional system of difference equations", *Kuwait Journal of Science*, 43(1), 95-111, 2016.

80. Yazlık, Y., Kara, M., “On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coefficients”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 1675-1693, 2019.
81. Yazlık, Y., Kara, M., “Beşinci mertebeden fark denklem sisteminin çözülebilirliği üzerine”, *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 7(1), 29-45, 2019.
82. Bereketoğlu, H., Kutay, V., “Fark Denklemleri”, *Gazi Kitabevi*, Ankara, 2012.
83. Stevic, S., “Domains of undefinable solutions of some equations and systems of difference equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 219 (24), 11206-11213, 2013.
84. Elaydi, S., “An introduction to difference equations”, *Springer Science & Business Media*, New York, 2005.
85. Stevic, S., Iricanin, B., Kosmala, W., “Representations of general solutions to some classes of nonlinear difference equations”, *Advances in Difference Equations*, 2019(1), 1-21, 2019.
86. Stević, S., “Solvability of a general class of two-dimensional hyperbolic-cotangent-type systems of difference equations”, *Advances in Difference Equations*, 2019, 1-34, 2019.