T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN GOURSAT PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ

Tezi Hazırlayan
Özge ÖĞÜÇBİLEK

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2011
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ danışmanlığında **Özge ÖĞÜÇBİLEK** tarafından hazırlanan **"Lineer ve Lineer Olmayan Goursat Problemlerinin Yaklaşık Çözümü İçin Taylor Matris Yöntemi"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

23/08/2011

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Selçuk KERVAN

Üye : Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

Üye : Yrd. Dr. İhsan Timuçin Dolapci

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 22/08/2011 tarih ve 2011/31 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

22/08/2011

Prof. Dr. Selçuk KERVAN

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez danışmanım olmayı kabul ederek, bu çalışmayı ortaya çıkarmamı sağlayan, her konuda bana yardımcı olan, karşılaştığım problemlerle yakından ilgilenen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ'ya aynı şekilde manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen her konuda yanımda olduğunu hissettiren Gazi Üniversitesi Öğretim Üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Gülay KORU YÜCEKAYA'ya bu vesileyle teşekkür ediyorum.

Bu çalışmayı hazırlama süresince, her zaman pozitif motivasyonlarıyla yanımda olduklarını hissettiren ve çalışma gücü sağlayan aileme teşekkürüm bile az gelecektir.

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN GOURSAT PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ

Özge ÖĞÜÇBİLEK
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2011
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ

ÖZET

Bu çalışmada Kısmi Diferansiyel Denklemlerin çözümü için Taylor Matris yöntemi kullanılmıştır. Yöntem denklemdeki fonksiyonların kesilmiş Taylor seri açılımlarını yazmaya ve bunların yerine matris gösterimlerinin denklemde yerlerine yazılmasına dayanır. Böylece denklem bilinmeyen Taylor katsayılarından oluşan bir lineer cebirsel sisteme karşılık gelen matris forma dönüştürülür. Çözüm kolaylıkla hesaplanabilen bileşenlerden oluşan seri açılımı şeklinde bulunmuş olur. Yöntem verilen koşullar altında lineer ve lineer olmayan Goursat kısmi diferansiyel denklemlerine uygulanmış ve sonuçlar önerilen yöntemin güvenilirliğini ve verimini kanıtlamıştır.

Anahtar Kelimeler: Taylor Polinomları, Taylor Matris Yöntemi, Diferansiyel Denklemler, Lineer Goursat Problemi, Lineer olmayan Goursat Problemi.

A TAYLOR MATRİX METHOD FOR APPROXİMATELY SOLUTİONS OF LINEAR AND NONLİNEAR GOURSAT PROBLEMS

Özge ÖĞÜÇBİLEK
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, August 2011
Thesis Supervisor: Assist.Prof.Dr. İhsanTimuçin DOLAPCİ

ABSTRACT

In this study, we use the process of Taylor matrix method for finding the solution of partial differential equations. The method is based on first taking the truncated Taylor series of the function in equations and substituting their matrix forms into the given equations. Thereby the equation reduces to a matrix equation, which corresponds to a system of linear algebraic equations with unknown Taylor coefficients. The solution is calculated in the form of a series with easily computable components. To illustrate the method, it is applied to certain linear and nonlinear differential equations under the given conditions and the results demonstrate reliability and efficiency of the proposed method.

Keywords: Taylor Polynomials, Taylor Matrix Method, Differential Equations, Linear Goursat Problem, Nonlinear Goursat Problem

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY i

TEŞEKKÜR ii

ÖZET iii

ABSTRACT iv

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR 1

1.1. GİRİŞ 1

1.2. Problemin tanımlanması 2

2. BÖLÜM

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAYLOR MATRİS METODU İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ 3

2.1. Bir Fonksiyonun Taylor Serisine Açılımı 3

2.2. Temel Matris Gösterimleri 4

2.2.1. Bir $f(t)$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi 4

2.2.2. $f^{(n)}(t)$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi 5

2.2.3. $y(t)$ Matrisinin A Taylor Katsayılar Matrisi Türünden İfadesi 6

2.2.4. $y^{(1)}(t)$ Türev Matrisinin A Matrisi Türünden İfadesi 6

2.2.5. $y^{(n)}(x)$ Türev Matrisinin A Matrisi Türünden İfadesi 6

.2.6. Diferansiyel Denklemlerin Matris Denklemine Dönüştürülmesi 7

3. BÖLÜM

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN GOURSAT PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ 10

3.1. Goursat Probleminin Matris Denklemine Dönüştürülmesi 10

3.2 Sınır Koşullarının Matris Denklemine Dönüştürülmesi 15

4. BÖLÜM

GOURSAT PROBLEMLERİNİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ 16

4.1. Lineer Goursat Problemleri İçin Çözüm Yöntemi 16

4.2. Lineer Olmayan Goursat Problemleri İçin Çözüm Yöntemi 18

5.BÖLÜM

UYGULAMALAR 20

6.BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER 91

KAYNAKLAR 92

ÖZGEÇMİŞ 95

1.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Giriş

Ricatti denkleminin[1], lineer diferansiyel denklemlerin [2] ve ikinci mertebeden lineer KTD lerin çözümü [3] için de verilen “Taylor Matris Yöntemi” değişken katsayılı bir lineer ve lineer olmayan Goursat probleminin verilen koşullara göre yaklaşık çözümlerini Taylor seri açılımı cinsinden bulmak için geliştirilmiştir. Yöntemin ilk aşamasında verilen denklem matris denklemine dönüştürülür; ardından da matris denklemlerinin yardımı ile bilinmeyeni sadece Taylor katsayılar matrisi olan yeni bir matris denklemi oluşturulur. Daha sonra koşulların matris formu Taylor katsayılarına bağlı olarak elde edilir ve iki sonuç birleştirilerek yeni bir denkleme ulaşılır. Buradan Taylor katsayıları kolayca bulunarak sonlu Taylor Seri Yaklaşımı elde edilir. Fonksiyonların seriye açılımları Maclaurin, Taylor ve Chebyshev serileri yardımıyla yapılabilmektedir.Leibnitz-Maclauren-Taylor seri yöntemleri [4-5] birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin herhangi bir x noktası civarında ve verilen başlangıç koşulluna göre Taylor Seri formunda çözümünü bulmak için kullanılmıştır;ancak karışık koşullar verildiğinde uygulamak mümkün değildir. Ayrıca 1989’ da Kanwal ve Liu, Fredholm integrallerinin çözümü için bir Taylor açılım yöntemi vermiştir[6]. 1992’de bu yöntemin genellemesi yapılmıştır[7]. Bu yöntem 1994’de Mehmet Sezer tarafından Volterra İntegral denklemlerine [8],Sezer ve Köroğlu tarafından Lineer olmayan Fredholm denklemlere [9] uygulanmıştır.

Diğer yandan bunların yardımıyla Taylor Matris adı verilen bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem Fredholm İntegral denklemlere [10] uygulanmıştır. Bu çalışmada ise Taylor matris yöntemi, lineer ve lineer olmayan Goursat denklemleri için geliştirilmiştir. Bu çalışmadaki matris tanımları diğer denklemler için kullanılandan farklıdır ve ilk kez lineer olmayan bir probleme uygulanmıştır. Çalışmanın ilk bölümünde, konunun anlaşılmasını sağlayan temel kavramlar ve konuyla ilgili daha önce yapılan çalışmalar verilmiştir. İlerleyen bölümlerde lineer ve lineer olmayan Goursat problemlerinin çözümleri için Taylor Matris Yöntemi sunulmuştur. Son bölümde ise bunlarla ilgili örnekler verilmiş ve sonuçlar tartışılmıştır.

1.2 Problemin tanımlanması

Bu çalışmada amaç, daha önce birçok denklem çözümü için kullanılmış olan Taylor Matris yönteminin genel olarak,

$$\begin{array}{lll} u_{xy} = f\left(x,t,u,u_x,u_y\right), & 0 \leq x \leq a, & 0 \leq t \leq b \\ u(x,0) = g(x), & u(0,y) = h(y), & g(0) = h(0) = u(0,0) \end{array} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan lineer ve lineer olmayan kısmi türevli denklem ve bu denklemin sınır koşullarından oluşan Goursat problemlerinin

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{u^{(n,m)}(c_0,c_1)}{n!\,xm!} (x-c_0)^n . (y-c_1)^m \,, a \leq c_0 \,, c_1 \leq b \tag{1.2}$$

N için sonlu Taylor seri formunda çözümleri için geliştirilmesi, uygulanması ve önemli özelliklerinin belirlenmesidir. Yöntem, denklemin bir matris denklemine dönüştürülmesine dayanır. Bu matris denklemi bilinmeyen Taylor katsayılarından oluşan bir cebirsel sisteme karşılık gelir. Böylece cebirsel sistemin çözümünden elde edilen Taylor katsayıları kullanılarak, verilen Goursat probleminin sonlu Taylor seri formunda çözümü bulunmuş olur.

Taylor matris yöntemi daha önce uygulanmasına rağmen burada kullanılan matris yapıları diğer yöntemlerden bir miktar farklıdır. Ayrıca burada ilk defa Taylor matris yöntemi lineer olmayan denklemlere de uygulanmıştır.

2. BÖLÜM

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAYLOR MATRİS METODU İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

2.1 Tek Değişkenli Bir Fonksiyonun Taylor Serisine Açılımı

Bir $y(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktası civarındaki Taylor serisine açılımı, a,b,c reel sayılar olmak üzere

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{(j)}(c)(x-c)^j}{j!} \;;\;\; a \leq x \leq b \,, a \leq c \leq b \tag{2.1}$$

(2.1) eşitliği şeklindedir. Eğer fonksiyonu $x = 0$ noktası civarında Maclaurin serisine açmak istersek

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{(j)}(0)x^j}{j!} \tag{2.2}$$

şeklinde olur. $y(x)$ fonksiyonun Taylor serisine açılımı, sonlu N sayısında kesilecek olursa, seri açılımı fonksiyona

$$y(x) \cong \sum_{j=0}^{N} \frac{y^{(j)}(c)(x-c)^j}{j!} \tag{2.3}$$

olarak yakınsar. Burada $y^{(j)}(c)(j = 0,1, \dots, N)$ bilinmeyen Taylor katsayılarıdır.

2.2 Temel Matris Gösterimleri

Burada, bazı fonksiyonların temel matris gösterimleri verilmiştir.

2.2.1 Bir $\boldsymbol{f(x)}$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktası civarında kesilmiş Taylor serisi formunda yazılışı

$$f(x) \cong \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j \tag{2.4}$$

(2.4) eşitliği şeklindedir. Bu $f(x)$ fonksiyonunun matrisini bulmak için

$$X = [1 \;\; (x-c_0)(x-c_1)^2 \;\ldots\; (x-c_N)^N]_{1\times(N+1)} \;,$$

$$A = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) \\ y^{(1)}(c) \\ \vdots \\ y^{(N)}(c) \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} ,$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \tag{2.5}$$

(2.5) matrislerini tanımlayalım. A matrisi$(N+1)\times 1$, $X(x)$ matrisi $1\times(N+1)$, M_0 matrisi $(N+1)\times(N+1)$ tipindeki matrislerdir. Böylece kesilmiş Taylor seri formunda yazılan $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = X(x)M_0A \tag{2.6}$$

matris formunda yazılabilir.

2.2.2 Bir $f^{(m)}(x)$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi

$f(x)$ fonksiyonunun türevlerinin de $f(x)$ fonksiyonuna benzer şekilde matrisleri yazılabilir.

Bu fonksiyonunun n.mertebeden türevinin sonlu Taylor seri açılımı

$$f^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(c)}{(j-n)!}(x-c)^{j-n} \tag{2.7}$$

(2.7) biçimindedir. Burada $f^{(j)}(c)$ bilinmeyen Taylor katsayılarıdır. Bunların meydana getirdiği sütun matrisine $A^{(n)}$ denirse, türev fonksiyonu

$$f^{(n)}(x) = X(x)A^{(n)} \tag{2.8}$$

şeklinde yazılır. Buradaki $A^{(n)}$ matrisi ile (2.5) denkleminde yer alan A matrisi arasında

$$A^{(n)} = M_n A \tag{2.9}$$

bağıntısı vardır. (2.9) eşitliğindeki M_n matrisi

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

olarak tanımlanır ve $(N+1)$ boyutlu bir kare matristir. (2.9) eşitliği yardımıyla (2.8) denklemi düzenlenirse $f(x)$ fonksiyonunun türevinin matrisi

$$f^{(n)}(x) = X(x)M_n A \tag{2.11}$$

(2.11) elde edlilir [1].

2.2.3 Bir $y(x)$ Matrisinin A matrisi Türünden İfadesi

Benzer şekilde

$$y(x)=\sum_{j=0}^{N}\frac{y^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^{j}\ ,\quad i=1,2,\dots,k \tag{2.12}$$

formundaki sonlu Taylor açılımı için (2.5) matrisleri kullanılarak

$$y(x)=\ X(x)M_0A\ \ ,\quad i=1,2,\dots,k \tag{2.13}$$

(2.13) eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki A matrisi

$$A=\left[y^{(0)}(c)y^{(1)}(c)y^{(2)}(c)\quad \dots\quad y^{(N)}(c)\right]^{t} \tag{2.14}$$

(2.14) denklemindekidir.

2.2.4 $y^{(1)}(x)$ Türev Matrisinin A Matrisi Türünden İfadesi

$y(x)$fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin matrisi

$$y^{(1)}(x)=X(x)M_1A \tag{2.15}$$

(2.15) biçiminde yazılır.

2.2.5 $y^{(n)}(x)$ Türev Matrisinin A Matrisi Türünden İfadesi

$y^{(n)}(x)$ türev fonksiyonunun sonlu Taylor seri açılımı

$$y^{(n)}(x)=\sum_{j=0}^{N}\frac{y^{(j)}(c)}{(j-n)!}(x-c)^{j-n}\ \ ,\ \ i=0,1,\dots k\ \ a\le t\le b \tag{2.16}$$

biçiminde yazılır. (2.16) denkleminin matrisi yazılmak istenirse

$$y^{(n)}(x)=\ X(x)M_nA \tag{2.17}$$

(2.17) matris denklemi elde edilir.

2.2.6. Diferansiyel Denklemlerin Matris Denklemine Dönüştürülmesi

Bir $y(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktası civarındaki Taylor serisine açılımı

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!} \; ; \;\; a \leq x \leq b\,, a \leq c \leq b \tag{2.18}$$

olarak verilmiştir. Fonksiyonun Taylor serisine açılımı sonlu N sayısı da kesilince ise

$$y(x) \cong \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!} \tag{2.19}$$

(2.19) eşitliğindeki gibi yakınsar. Buradaki $y^{(n)}(c)(n = 0,1,\dots,N)$ bilinmeyen Taylor katsayılarıdır. Öyleyse x in bir fonksiyonunun $y(x)$ ile çarpımının Taylor serisine açılımı

$$B(x).y(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} [B(x)y(x)]_{x=C}^{(n)} (x-c)^n \tag{2.20}$$

(2.20) eşitliği olacaktır.

Bu Leibnitz kuralına göre

$$[B(x)y(x)]_{x=C}^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B^{(n-m)}(c)(y)^{(m)}(c) \tag{2.21}$$

(2.21) şeklinde yazılacaktır. O halde (2.20) eşitliği

$$B(x)y(x) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{m} B^{(n-m)}(c)(y)^{(m)}(c)(x-c)^n \tag{2.22}$$

olacaktır ve bunun matrisi

$$B=\begin{bmatrix} \frac{B^{(0)}(c)}{0!\times 0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{B^{(1)}(c)}{1!\times 0!} & \frac{B^{(0)}(c)}{0!\times 1!} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{B^{(2)}(c)}{2!\times 0!} & \frac{B^{(1)}(c)}{1!\times 1!} & \frac{B^{(0)}(c)}{0!\times 2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{B^{(N)}(c)}{N!\times 0!} & \frac{B^{(N-1)}(c)}{(N-1)!\times 1!} & \frac{B^{(N-2)}(c)}{(N-2)!\times 2!} & \cdots & \frac{B^{(0)}(c)}{0!\times N!} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

olmak üzere

$$[B(x)y(x)] = XBY \tag{2.24}$$

olacaktır [1]. Benzer şekilde $A(x)y^{(1)}(x)$ in açılımı

$$A(x)y^{(1)}(x) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{m}A^{(n-m)}(c)(y)^{(m+1)}(c)(x-c)^{n} \tag{2.25}$$

olacaktır. (2.25) eşitliğinin matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{A^{(0)}(c)}{0!\times 1!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{A^{(1)}(c)}{1!\times 0!} & \frac{A^{(0)}(c)}{0!\times 1!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{A^{(N-1)}(c)}{(N-1)!\times 0!} & \frac{A^{(N-2)}(c)}{(N-2)!\times 0!} & \cdots & \frac{A^{(0)}(c)}{0!\times (N-1)!} \\ 0 & \frac{A^{(N)}(c)}{N!\times 0!} & \frac{A^{(N-1)}(c)}{(N-1)!\times 1!} & \cdots & \frac{A^{(1)}(c)}{1!\times (N-1)!} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

olmak üzere

$$\left[A(x)y^{(1)}(x)\right] = XAY \tag{2.27}$$

bulunur [1]. Benzer şekilde lineer olmayan kısım için

$$C(x)Y(x) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{m}C^{(n-m)}(c)Y^{(m)}(c)(x-c)^n$$

$$Y(x) = \big(y(x)\big)^2, \qquad Y^{(m)}(c) = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}y^{(m-i)}(c)y^{(i)}(c) \tag{2.28}$$

olacağından (2.28) eşitliklerinin matrisi

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) \\ y^{(1)}(c) \\ \vdots \\ y^{(N)}(c) \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{C^{(0)}(c)}{0!\times 0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{C^{(1)}(c)}{1!\times 0!} & \frac{C^{(0)}(c)}{0!\times 1!} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{C^{(2)}(c)}{2!\times 0!} & \frac{C^{(1)}(c)}{1!\times 1!} & \frac{C^{(0)}(c)}{0!\times 2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{C^{(N)}(c)}{N!\times 0!} & \frac{C^{(N-1)}(c)}{(N-1)!\times 1!} & \frac{C^{(N-2)}(c)}{(N-2)!\times 2!} & \cdots & \frac{C^{(0)}(c)}{0!\times N!} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$[C(x)y^2(x)] \equiv [C(x)Y(x) = XC\bar{Y}] \tag{2.29}$$

olarak bulunur [1].

3. BÖLÜM

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN GOURSAT PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ

Bu bölümde Goursat problemlerinin N ile kesilmiş sonlu Taylor seri çözümlerini elde edebilmek için Taylor Matris yöntemi sunulacaktır. Amaç;Goursat problemlerindeki ve sınır koşullarındaki fonksiyonların Taylor serisine açılımını matris olarak yazıp, bu problemleri matris denklemine dönüştürmektir. Daha sonra, matris denklemlerindeki Taylor katsayılarını bulup, Goursat probleminin verilen sınır koşullarına göre yaklaşık çözümünü bulmaktır.

3.1 Goursat Probleminin Matris Denklemine Dönüştürülmesi

Bu çalışmada Goursat problemleri

$$u_{xy} + u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u^n = K(x,y) \tag{3.1}$$

genel şekli ve,

$$u(x,0) = g(x)\,, \qquad u(0,y) = h(y)\,, \qquad g(0) = h(0) = u(0,0) \tag{3.2}$$

sınır koşulları ile ele alınacaktır. Bu denklemdeki her bir terimin $(x,y) = (c_0, c_1)$ noktası civarındaki sonlu Taylor serisine açılımı yazılacaktır. Ardından bunlar matris denklemine dönüştürülecektir. Burada $u(x,y)$ için x ve y bağımsız değişkenler, u bağımlı değişkendir.

(3.1) denklemindeki $u(x,y)$ fonksiyonunun $(x,y) = (c_0, c_1)$ noktası civarındaki Taylor seri açılımı

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^{(n,m)}(c_0,c_1)}{n! \times m!}(x-c_0)^n (y-c_1)^m \;, a \le c_0\,, \;\; c_1 \le b \tag{3.3}$$

dir. Bu $u(x,y)$ fonksiyonun Taylor serisine açılımı sonlu N sayıda kesilince

$$u(x,y) \cong \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{u^{(n,m)}(c_0,c_1)}{n! \times m!} (x-c_0)^n (y-c_1)^n \tag{3.4}$$

olarak yakınsayacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}(c_0, c_1)(n, m = 0,1, \dots, N)$ bilinmeyen Taylor katsayılarıdır. Bu açılımı matrise dönüştürürsek

$$[u(x,y)] = XMUM^tY \tag{3.5}$$

olarak yazılabilir. (3.5) matris denklemindeki X,M,U ve Y matrisleri sırasıyla

$$X = [1 \ \ (x-c_0)(x-c_1)^2 \ \dots \ (x-c_N)^N]_{1\times(N+1)} \tag{3.6}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} , \tag{3.7}$$

$$U = \begin{bmatrix} u^{(0,0)} & u^{(0,1)} & u^{(0,2)} & \cdots & u^{(0,N)} \\ u^{(1,0)} & u^{(1,1)} & u^{(1,2)} & \cdots & u^{(1,N)} \\ u^{(2,0)} & u^{(2,1)} & u^{(2,2)} & \cdots & u^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^{(N,0)} & u^{(N,1)} & u^{(N,2)} & \cdots & u^{(N,N)} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} , \tag{3.8}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ (y-c_1) \\ (y-c_1)^2 \\ \vdots \\ (y-c_1)^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} \tag{3.9}$$

(3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9) şeklindedir. Ayrıca M^t matrisi M matrisi ile aynı olmaktadır. $u(x,y)$fonksiyonunun x e ve y ye göre birinci mertebeden türevlerinin Taylor seri açılımlarını yazarsak

$$\left[u^{(1,1)}(x,y)\right] = XM_1UM_1^tY \tag{3.10}$$

$$\left[u^{(1,0)}(x,y)\right] = XM_1UM^t \tag{3.11}$$

$$\left[u^{(0,1)}(x,y)\right] = XMUM_1^tY \tag{3.12}$$

(3.10),(3.11) ve (3.12) şeklinde olacaktır. Burada X ve U matrisleri (3.5) için tanımlandığı gibi olup M_1 matrisi

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(N-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

(3.13) matrisidir.

Benzer şekilde $A(x,y)u_x(x,y)$ ve $B(x,y)u_y(x,y)$ fonksiyonlarının matris formunu yazmak için öncelikle sonlu Taylor seri açılımları yazılmalıdır.

$A(x,y) = A_1(x).A_2(y)$ ve $B(x,y) = B_1(x).B_2(y)$olmak üzere $x = c_0, y = c_1$ noktasındaki Taylor seri açılımı

$$A(x,y)u_x(x,y) = \sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{N}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\left\{\frac{1}{(r+1)!\times s!}\binom{r+1}{i}\binom{s}{j}\frac{\partial^{i+j}[A_1(x).A_2(y)]}{\partial x^i\partial y^j}.\frac{\partial^{r+s-i-j+1}u(x,y)}{\partial x^{r-i+1}\partial y^{s-j}}(x-c_0)^r(y-c_1)^s\right\} \tag{3.14}$$

$$B(x,y)u_y(x,y) = \sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{N}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\left\{\frac{1}{r!\times(s+1)!}\binom{r}{i}\binom{s+1}{j}\frac{\partial^{i+j}[B_1(x).B_2(y)]}{\partial x^i\partial y^j}.\frac{\partial^{r+s-i-j+1}u(x,y)}{\partial x^{r-i}\partial y^{s-j+1}}(x-c_0)^r(y-c_1)^s\right\} \tag{3.15}$$

biçimindedir. Matris formları yazılımları ise

$$[A(x,y)u_x(x,y)] = X.A_1.U.A_2^tY \tag{3.16}$$

$$\left[B(x,y)u_y(x,y)\right] = X.B_1.U.B_2^tY \tag{3.17}$$

(3.16),(3.17) biçiminde olacaktır. Burada

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a_1^{(0)}(c_0)}{0!\times 0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{a_1^{(1)}(c_0)}{1!\times 0!} & \dfrac{a_1^{(0)}(c_0)}{0!\times 1!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dfrac{a_1^{(N-1)}(c_0)}{(N-1)!\times 0!} & \dfrac{a_1^{(N-2)}(c_0)}{(N-2)!\times 1!} & \cdots & \dfrac{a_1^{(0)}(c_0)}{0!\times (N-1)!} \\ 0 & \dfrac{a_1^{(N)}(c_0)}{N!\times 0!} & \dfrac{a_1^{(N-1)}(c_0)}{(N-1)!\times 1!} & \cdots & \dfrac{a_1^{(1)}(c_0)}{1!\times (N-1)!} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{a_2^{(0)}(c_1)}{0!\times 0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{a_2^{(1)}(c_1)}{1!\times 0!} & \dfrac{a_2^{(0)}(c_1)}{0!\times 1!} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{a_2^{(2)}(c_1)}{2!\times 0!} & \dfrac{a_2^{(1)}(c_1)}{1!\times 1!} & \dfrac{a_2^{(0)}(c_1)}{0!\times 2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{a_2^{(N)}(c_1)}{N!\times 0!} & \dfrac{a_2^{(N-1)}(c_1)}{(N-1)!\times 1!} & \dfrac{a_2^{(N-2)}(c_1)}{(N-2)!\times 2!} & \cdots & \dfrac{a_2^{(0)}(c_1)}{0!\times N!} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1^{(0)}(c_0)}{0!\times 0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{b_1^{(1)}(c_0)}{1!\times 0!} & \dfrac{b_1^{(0)}(c_0)}{0!\times 1!} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{b_1^{(2)}(c_0)}{2!\times 0!} & \dfrac{b_1^{(1)}(c_0)}{1!\times 1!} & \dfrac{a_2^{(0)}(c_0)}{0!\times 2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{b_1^{(N)}(c_0)}{N!\times 0!} & \dfrac{b_1^{(N-1)}(c_0)}{(N-1)!\times 1!} & \dfrac{b_1^{(N-2)}(c_0)}{(N-2)!\times 2!} & \cdots & \dfrac{b_1^{(0)}(c_0)}{0!\times N!} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$B_2=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{b_2^{(0)}(c_1)}{0!\times 0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{b_2^{(1)}(c_1)}{1!\times 0!} & \dfrac{b_2^{(0)}(c_1)}{0!\times 1!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dfrac{b_2^{(N-1)}(c_1)}{(N-1)!\times 0!} & \dfrac{b_2^{(N-2)}(c_1)}{(N-2)!\times 1!} & \cdots & \dfrac{b_2^{(0)}(c_1)}{0!\times (N-1)!} \\ 0 & \dfrac{b_2^{(N)}(c_1)}{N!\times 0!} & \dfrac{b_2^{(N-1)}(c_1)}{(N-1)!\times 1!} & \cdots & \dfrac{b_2^{(1)}(c_1)}{1!\times (N-1)!} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

olarak tanımlanmıştır. Benzer şekilde $k(x,y)$ ve $u^{(n)}(x,y)$ fonksiyonlarının matrisi

$$[k(x,y)] = X\ M\ K\ M^t Y \tag{3.22}$$

$$[u^n(x,y)] \equiv [U(x,y)] = X\ \ M\ \bar{U} M^t Y \tag{3.23}$$

biçiminde yazılacaktır. Burada

$$K=\begin{bmatrix} k^{(0,0)}(c_0,c_1) & k^{(0,1)}(c_0,c_1) & k^{(0,2)}(c_0,c_1) & \cdots & k^{(0,N)}(c_0,c_1) \\ k^{(1,0)}(c_0,c_1) & k^{(1,1)}(c_0,c_1) & k^{(1,2)}(c_0,c_1) & \cdots & k^{(1,N)}(c_0,c_1) \\ k^{(2,0)}(c_0,c_1) & k^{(2,1)}(c_0,c_1) & k^{(2,2)}(c_0,c_1) & \cdots & k^{(2,N)}(c_0,c_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k^{(N,0)}(c_0,c_1) & k^{(N,1)}(c_0,c_1) & k^{(N,2)}(c_0,c_1) & \cdots & k^{(N,N)}(c_0,c_1) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

$$\bar{U}=\begin{bmatrix} u^n(0,0) & u^n(0,1) & u^n(0,2) & \cdots & u^n(0,N) \\ u^n(1,0) & u^n(1,1) & u^n(1,2) & \cdots & u^n(1,N) \\ u^n(2,0) & u^n(2,1) & u^n(2,2) & \cdots & u^n(2,N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^n(N,0) & u^n(N,1) & u^n(N,2) & \cdots & u^n(N,N) \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

biçiminde tanımlanacaktır. Buradaki K matrisinin elemanları (3.1) denkleminde $K(x,y)$ olarak verilen fonksiyon için x e ve y ye göre türevlerinin alınıp x in yerine c_0 ın, y nin yerine ise c_1 in yazılmasıyla elde edilecektir. $\bar{U}$ matrisindeki elemanlar ise lineer olmayan kısımdaki u^n in x e ve y ye göre türevlerinin alınmasıyla elde edilecektir. Bu matris dönüşümleri (3.1) denkleminde yerine yazılıp gerekli sadeleştirme yapılırsa (3.1) denkleminin matris şekli

$$M_1 U M_1^t + M U M^t + A_1 U A_2^t + B_1 U B_2^t + M\bar{U}M^t = MKM^t \tag{3.26}$$

(3.26) olacaktır.

3.2 Sınır Koşullarının Matris Denklemine Dönüştürülmesi

Bölüm 3.1 de Goursat problemlerinin genel şekli ve

$$u(x,0) = g(x), \tag{3.27}$$

$$u(0,y) = h(y), \tag{3.28}$$

$$g(0) = h(0) = u(0,0) \tag{3.29}$$

sınır koşulları verilmiştir. Bu bölümde ise bu sınır koşullarının matris formu verilecektir. Buradaki $g(x)$ fonksiyonu x in bir fonksiyonu, $h(y)\, y$ nin bir fonksiyonudur. $u(x,y)$ fonksiyonunun matrisi (3.5) denkleminde verilmiştir. Bundan yola çıkarak koşulların matrisleri verilecektir. O halde $u(x,0)$ koşulunun matrisi

$$u(x,0) = X.M.U.M^t.Y_{(0)}^{(0)} \tag{3.30}$$

(3.30) biçiminde yazılır. Buradaki $Y_{(0)}^{(0)}$

$$Y_{(0)}^{(0)} = [1 \;\; c_1 c_1{}^2 \dots \, c_1{}^N] \tag{3.31}$$

(3.31) biçiminde tanımlanacaktır. Benzer şekilde

$$u(0,y) = X_{(0)}^{(0)}.M.U.M^t.Y \tag{3.32}$$

(3.32) olur. Buradaki $X_{(0)}^{(0)}$

$$X_{(0)}^{(0)} = [1 \;\; c_0 c_0{}^2 \dots \, c_0{}^N] \tag{3.33}$$

dir. 3. koşulun matris hali

$$u(0,0) = X_{(0)}^{(0)}.M.U.M^t.Y_{(0)}^{(0)} \tag{3.34}$$

biçiminde yazılır. Buradaki $X_{(0)}^{(0)}$ ve $Y_{(0)}^{(0)} sırasıyla$ (3.33) ve (3.31) de verildiği gibidir.

4. BÖLÜM

GOURSAT PROBLEMLERİNİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

4.1. Lineer Goursat Problemleri İçin Çözüm Yöntemi

Lineer Goursat probleminin genel gösterimi (3.1) denkleminde n=0 alınırsa

$$u_{xy} + u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y) = K(x,y) \tag{4.1}$$

(4.1) biçiminde olacaktır. (4.1) denkleminde u_{xy} , u_x ve u_y, $u(x,y)$ fonksiyonunun türev fonksiyonlarıdır. $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$ ise x ve y ye bağlı fonksiyonlardır. Bu denklemin matris formda yazımı bölüm 3 te (3.5), (3.10), (3.11), (3.12) ve (3.22) de verilen matrislerin (4.1) eşitliğinde yerlerine yazılmasıyla

$$M_1UM_1{}^t + MUM^t + A_1UA_1{}^t + B_1UB_1{}^t = MKM^t \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.2) matris denkleminde eşitliğin sol tarafında $(\boldsymbol{N}+\mathbf{1})\times(\boldsymbol{N}+\mathbf{1})$ tipinde bir matris elde edilir. Bu matris

$$W = \begin{bmatrix} W_{0,0} & W_{0,1} & W_{0,2} & \cdots & W_{0,N} \\ W_{1,0} & W_{1,1} & W_{1,2} & \cdots & W_{1,N} \\ W_{2,0} & W_{2,1} & W_{2,2} & \cdots & W_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N,0} & W_{N,1} & W_{N,2} & \cdots & W_{N,N} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Şeklinde gösterilebilir. Burada $W_{i,j}$ ler için i ler satır sırasını i ler sütun sırasını belirtmektedir. $W_{i,j}$ ler $u(x,y)$ fonksiyonunun x e ve y ye göre türevlerini içermektedir. Şimdi bu W matrisinin katsayılar matrisi yazılacaktır. Elde edeceğimiz yeni matrisi W olarak tanımlayalım. W katsayılar matrisini yazmak için $W_{i,j}$ ler ilk satır ve ilk sütundan başlanarak, en son satır ve en son sütun alınmamak şartıyla satır olarak yazılacaklardır. Son satır ve sütunun alınmama sebebi (4.1) denkleminde $u(x,y)$ fonksiyonunun en yüksek mertebeli türevi u_{xy} olduğundan W matrisi yazılırken x e göre türevden dolayı son satır, y ye göre türevden dolayı da son sütun iptal edilecektir. Dolayısıyla elde edilen bu matris $N^2 \times (N+1)^2$ tipinde olacaktır. Bu matrisi $\widetilde{W}$ olarak tanımlayalım. Benzer şekilde (4.2) matris denkleminde eşitliğin sağ tarafında da $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir matris elde edilir. Bu matris

$$G = \begin{bmatrix} G_{0,0} & G_{0,1} & G_{0,2} & \cdots & G_{0,N} \\ G_{1,0} & G_{1,1} & G_{1,2} & \cdots & G_{1,N} \\ G_{2,0} & G_{2,1} & G_{2,2} & \cdots & G_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N,0} & G_{N,1} & G_{N,2} & \dots & G_{N,N} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

şeklinde gösterilebilir. (4.4) matrisin tüm elemanları son satır ve son sütun alınmamak şartıyla satır olarak yazılır. Sonuç olarak $N^2 \times 1$ tipinde bir matris elde edilir. Bu matrisi $\tilde{G}$ olarak tanımlarsak

$$\widetilde{G} = \begin{bmatrix} G_{0,0} & G_{0,1} & \cdots & G_{0,N-1} & G_{1,0} & G_{1,1} & \cdots & G_{1,N-1} & \cdots & G_{N,0} & G_{N,1} & \cdots & G_{N-1,N-1} \end{bmatrix}^t \tag{4.5}$$

biçiminde olacaktır. Koşulların matris gösterimleri ise Bölüm 3.2 deki (3.30), (3.32) ve (3.34) eşitliklerinde belirtildiği gibi yazılacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta $u(x,0)$, $u(0,y)$ ve $u(0,0)$ koşulları için $(x,y) = (0,0)$ alındığında koşulların aynı olacağıdır. Dolayısıyla bu yöntemde farklı olarak, koşulların aynı olan değeri yalnızca bir defa kullanılacaktır. Koşul matrisleri yazılırken $u(0,0)$ koşulu her zaman diğer koşulların ilk terimini içereceğinden kullanılmayacaktır. Aynı şekilde $u(x,0)$ ve $u(0,y)$ koşullarının kullanımı sırasında matris gösterimlerinin ilk terimleri bir kez alınacağından 1. Koşul $N+1$ satır, 2. Koşul N tane satırdan oluşacaktır. Verilen koşullardaki eşitliğin sol tarafındaki elemanlar Bölüm 3 te belirtilen kurala göre yazılıp W katsayılar matrisinin en alt satırından $2N+1$ satır eklenerek yazılacaktır Benzer şekilde verilen koşullarda eşitliğin sağ tarafında bulunan $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının N için sonlu Taylor seri açılımları yazılıp bunların katsayılar matrisi $\boldsymbol{G}$ matrisinin son satırından sonra $N+1$ satır eklenerek yazılır. O halde sınır koşullarının

W^* ve G^* matrislerine eklenmesiyle elde edilen yeni artırılmış matrisler sırasıyla W^* ve G^* olarak tanımlanırsa bu matrisler $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ tipinde matrisler olacaktır. Şimdi son olarak $u(x,y)$ fonksiyonunun matris gösteriminde son satır ve son sütun alınmamak şartıyla tüm elemanları satır olarak yazılırsa

$$\widetilde{U} = \begin{bmatrix} U_{0,0} & U_{0,1} & \cdots & U_{0,N-1} & U_{1,0} & U_{1,1} & \cdots & U_{1,N-1} & \cdots & U_{N,0} & U_{N,1} & \cdots & U_{N-1,N-1} \end{bmatrix}^t \tag{4.6}$$

olmak üzere $(N+1)^2 \times 1$ tipinde bir matristir. Elde edilen bu yeni matrisler sonucunda yeni matris denklemi

$$W^*.U^* = G^* \tag{4.7}$$

biçiminde olacaktır. Böylece bu matris denkleminden elde edilen sistemin çözülmesiyle $u(x,y)$ fonksiyonunun Taylor seri açılımındaki katsayıları elde edilir. Bu katsayıların Bölüm 1 deki (1.2) eşitliğinde yerine yazılmasıyla çözüm bulunmuş olur.

4.2 Lineer Olmayan Goursat Problemleri İçin Çözüm Yöntemi

Lineer olmayan Goursat denkleminin genel gösterimi

$$u_{xy} + u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u^n = K(x,y) \tag{4.8}$$

biçimindedir. Bu denklemin matris formda yazımı bölüm 3 te verilmiştir. (4.8) denkleminde lineer olan kısma L, lineer olmayan kısma N dersek

$$LU + NU = MKM^t \tag{4.9}$$

biçiminde yazılır. Burada

$$M_1 U M_1{}^t + M U M^t + A_1 U A_2{}^t + B_1 U B_2{}^t = LU \tag{4.10}$$

Ve

$$M\bar{U}M^t = NU \tag{4.11}$$

dur. Lineer olmayan kısmın matris gösterimi yazıldıktan sonra arttırılmış matris hali lineer olan kısım ile birlikte

$$[L;N;MKM^t]=\begin{bmatrix} L_{0,0} & L_{0,1} & \cdots & L_{0,N}; & N_{0,0} & N_{0,1} & \cdots & N_{0,N}; & K_{0,0} & K_{0,1} & \cdots & K_{0,N} \\ L_{1,0} & L_{1,1} & \cdots & L_{1,N}; & N_{1,0} & N_{1,1} & \cdots & N_{1,N}; & K_{1,0} & K_{1,1} & \cdots & K_{1,N} \\ L_{2,0} & L_{2,1} & \cdots & L_{2,N}; & N_{2,0} & N_{2,1} & \cdots & N_{2,N}; & K_{2,0} & K_{2,1} & \cdots & K_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N,0} & L_{N,1} & \cdots & L_{N,N}; & N_{N,0} & N_{N,1} & \cdots & N_{N,N}; & K_{N,0} & K_{N,1} & \cdots & K_{N,N} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

biçiminde yazılacaktır. Burada lineer kısmın matris gösterimi Bölüm 4.1 de verilmiştir. Lineer olmayan kısmın matris gösterimi de benzer şekilde gerekli olan matris gösterimlerinin yerine yazılmasıyla kolaylıkla bulunacaktır. (4.11) matrisinin arttırılmış matris biçiminde yazımı lineer kısmın çözüm yönteminde verildiği gibidir. Lineer olmayan kısmın genelleştirilmiş matrisi yazılırken lineer kısım için düzenlenen matrise benzer şekilde düzenlenir. Lineer olmayan kısmın da genelleştirilmiş matrise eklenmesi ile lineer olmayan Goursat probleminin genelleştirilmiş matris formu elde edilmiş olur. Goursat problemlerinin genel yazımı ve sınır koşulları (3.2) de verildiği gibi olduğundan lineer olmayan kısım için sınır şartı yoktur. Dolayısıyla lineer olmayan kısım için genelleştirilmiş matrisin son $(2N+1)$ satırına sıfır yazılır. Elde edilen sistem çözüldüğünde $u(x,y)$ fonksiyonunun Taylor seri açılımındaki katsayılar elde edilir. Bu katsayıların (3.3) de yerine yazılmasıyla çözüm bulunmuş olur.

5. BÖLÜM

UYGULAMALAR

Bu bölümde lineer ve lineer olmayan Goursat problemlerinin verilen koşullarda çözümleri bulunmuştur. Çözümlerde Taylor matris yöntemi kullanılmış, çözümler tam çözümlerle veya diğer çözüm yöntemleriyle karşılaştırılmıştır.

Örnek 1: İlk olarak, lineer homojen

$$u_{xt} = u \tag{5.1}$$

(5.1) denklemi ile

$$u(x,0) = e^{x}, u(0,t) = e^{t}, u(0,0) = 1 \tag{5.2}$$

(5.2) sınır koşulları göz önüne alınacaktır. Bu problemin $u(x,t)$ çözümüne $(x,t) = (0,0)$ noktası civarında

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^{n}.t^{m} \ , \qquad a \leq 0\ , \ \ 0 \leq b \tag{5.3}$$

$N = 3$ için sonlu Taylor serisi ile yaklaşılacaktır. Bölüm 3 te tanımlanan (3.7),(3.8), (3.13) ve (3.24) matrisler N=3 için

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

$$M_1^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & u_{0,3} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,0} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

(5.7),(5.6),(5.4) ve (5.8) olacaktır. Bölüm 4 te verilen (4.2) matris denklemi (5.1) denklemi için düzenlenirse matris

$$M_1 U M_1{}^t - MUM^t = MKM^t \tag{5.9}$$

Matris denklemi elde edilir. Yukarıda (5.4),(5.5),(5.6),(5.7) ve (5.8) olarak tanımlanan matrisler (5.9) denkleminde yerine yazılıp çözüm yapılırsa

$$\begin{bmatrix} -u_{0,0}+u_{1,1} & -u_{0,1}+u_{1,2} & -\dfrac{u_{0,2}}{2}+\dfrac{u_{1,3}}{2} & -\dfrac{u_{0,3}}{6} \\ -u_{1,0}+u_{2,1} & -u_{1,1}+u_{2,2} & -\dfrac{u_{1,2}}{2}+\dfrac{u_{2,3}}{2} & -\dfrac{u_{1,3}}{6} \\ -\dfrac{u_{2,0}}{2}+\dfrac{u_{3,1}}{2} & -\dfrac{u_{2,1}}{2}+\dfrac{u_{3,2}}{2} & -\dfrac{u_{2,2}}{4}+\dfrac{u_{3,3}}{4} & -\dfrac{u_{2,3}}{12} \\ -\dfrac{u_{3,0}}{6} & -\dfrac{u_{3,1}}{6} & -\dfrac{u_{3,2}}{12} & -\dfrac{u_{3,3}}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

(5.10) matris denklemi elde edilir. Şimdi (5.10) denkleminde eşitliğin sol tarafının katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}_{9\times 16} \tag{5.11}$$

(5.11) biçiminde olacaktır. (5.9) denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki MKM^t matrisinin ise arttırılmış matris biçimi Bölüm 4.1 de anlatıldığı gibi alınacaktır. Dolayısıyla son satır ve son sütun elemanları hariç olmak üzere satır matrisi olarak yazılırsa arttırılmış matrisi elde edilmiş olur. Şimdi koşulların matris gösterimini yazalım. Verilen (5.1) denklemi için koşullar (5.2) de

$$u(x,0) = e^x \tag{5.12}$$

$$u(0,t) = e^t \tag{5.13}$$

$$u(0,0) = 1 \tag{5.14}$$

(5.12),(5.13) ve (5.14) eşitlikleri ile verildiğinden (5.12) ve (5.13) koşullarında eşitliklerin sağ tarafının $N = 3$ için sonlu Taylor seri açılımı yapılırsa

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \tag{5.15}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \tag{5.16}$$

(5.15) ve (5.16) şeklinde yazılacaktır. Koşullar için eşitliğin sol tarafı ise (3.30), (3.32) ve (3.34) de belirtildiği gibi yazılırsa koşulların matrisi sırasıyla

$$XMUM^tY^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^tY = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^tY^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

(5.17),(5.18) ve (5.19) olacaktır. İlk koşulun tüm elemanları, 2. Koşulun ise ilk elemanı hariç diğer 3 elemanı elde edilecek olan arttırılmış matrisin son satırından sonra 7 satır eklenerek yazılacaktır. Sonuç olarak (5.1) denkleminin (5.2) sınır koşullarına göre arttırılmış matrisi.

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{16\times 16}
$$

$$\begin{bmatrix} u_{0,0} \\ u_{0,1} \\ u_{0,2} \\ u_{0,3} \\ u_{1,0} \\ u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,0} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,0} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{bmatrix}_{16\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}_{16\times 1} \tag{5.20}$$

şeklinde elde edilir. Bu matris denkleminin çözülmesi ile

$$-u_{0,0} + u_{1,1} = 0$$

$$-u_{0,1} + u_{1,2} = 0$$

$$-\frac{u_{0,2}}{2} + \frac{u_{1,3}}{2} = 0$$

$$-u_{1,0} + u_{2,1} = 0$$

$$-u_{1,1} + u_{2,2} = 0$$

$$-\frac{u_{1,2}}{2} + \frac{u_{2,3}}{2} = 0$$

$$-\frac{u_{2,0}}{2} + \frac{u_{3,1}}{2} = 0$$

$$-\frac{u_{2,1}}{2} + \frac{u_{3,2}}{2} = 0$$

$$-\frac{u_{2,2}}{4} + \frac{u_{3,3}}{4} = 0$$

$$u_{0,0} = 1 \tag{5.21}$$

$$u_{1,0} = 1$$

$$\frac{u_{2,0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{3,0}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$u_{0,1} = 1$$

$$\frac{u_{0,2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{0,3}}{6} = \frac{1}{6}$$

(5.21) denklem sistemi elde edilir. (5.21) denklem sisteminin çözülmesi ile

$$u_{0,0} = 1, \qquad u_{0,1} = 1, \qquad u_{0,2} = 1, \qquad u_{0,3} = 1,$$

$$u_{1,0}=1, \quad u_{1,1}=1, \quad u_{1,2}=1, \quad u_{1,3}=1,$$
$$u_{2,0}=1, \quad u_{2,1}=1, \quad u_{2,2}=1, \quad u_{2,3}=1, \tag{5.22}$$
$$u_{3,0}=1, \quad u_{3,1}=1, \quad u_{3,2}=1, \quad u_{3,3}=1$$

(5.22) katsayıları elde edilir. Çözüm olarak $u(x,t)$ nin $N=3$ için $(x,t)=(0,0)$ noktası civarındaki çözümü

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}\frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n!\times m!}x^n.t^m\ , \qquad a\leq 0\ ,\ \ 0\leq b \tag{5.23}$$

(5.23) olacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}$ ler u nun n ve m e göre türevleridir. Çözüm olarak, elde ettiğimiz katsayıları (5.23) seri açılımında yerine yazarsak

$$u(x,t)=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+x+xt+\frac{xt^2}{2}+\frac{xt^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2t}{2}+\frac{x^2t^2}{4}+\frac{x^2t^3}{12}$$
$$+\frac{x^3}{6}+\frac{x^3t}{6}+\frac{x^3t^2}{12}+\frac{x^3t^3}{36}$$

olacaktır. Bu açılıme^{x+t} fonksiyonunun $N=3$ ile kesilmiş Taylor seri açılımına denktir. Dolayısıyla çözüm e^{x+t} olarak bulunur. Bu sonuç, [4] de verilen sonuç ile aynıdır.

Aynı örnekte $N=4$ için çözüm yapılmak istenirse;

$$M_1=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

$$M_1^{\,t}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\ \frac{1}{0!}&0&0&0&0\\ 0&\frac{1}{1!}&0&0&0\\ 0&0&\frac{1}{2!}&0&0\\ 0&0&0&\frac{1}{3!}&0\end{bmatrix}\tag{5.26}$$

$$U=\begin{bmatrix}u_{0,0}&u_{0,1}&u_{0,2}&u_{0,3}&u_{0,4}\\ u_{1,0}&u_{1,1}&u_{1,2}&u_{1,3}&u_{1,4}\\ u_{2,0}&u_{2,1}&u_{2,2}&u_{2,3}&u_{2,4}\\ u_{3,0}&u_{3,1}&u_{3,2}&u_{3,3}&u_{3,4}\\ u_{4,0}&u_{4,1}&u_{4,2}&u_{4,3}&u_{4,4}\end{bmatrix}\tag{5.27}$$

$$M=\begin{bmatrix}\frac{1}{0!}&0&0&0&0\\ 0&\frac{1}{1!}&0&0&0\\ 0&0&\frac{1}{2!}&0&0\\ 0&0&0&\frac{1}{3!}&0\\ 0&0&0&0&\frac{1}{4!}\end{bmatrix}\tag{5.28}$$

$$K=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{5.29}$$

olmak üzere, (5.25), (5.26), (5.27), (5.28) ve (5.29) matrisleri (5.1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -u_{0,0}+u_{1,1} & -u_{0,1}+u_{1,2} & -\frac{u_{0,2}}{2}+\frac{u_{1,3}}{2} & -\frac{u_{0,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{6} & u_{0,0} \\ -u_{1,0}+u_{2,1} & -u_{1,1}+u_{2,2} & -\frac{u_{1,2}}{2}+\frac{u_{2,3}}{2} & -\frac{u_{1,3}}{6}+\frac{u_{2,4}}{6} & u_{1,0} \\ -\frac{u_{2,0}}{2}+\frac{u_{3,1}}{2} & -\frac{u_{2,1}}{2}+\frac{u_{3,2}}{2} & -\frac{u_{2,2}}{4}+\frac{u_{3,3}}{4} & -\frac{u_{2,3}}{12}+\frac{u_{3,4}}{12} & \frac{u_{2,0}}{2} \\ -\frac{u_{3,0}}{6}+\frac{u_{4,1}}{6} & -\frac{u_{3,1}}{6}+\frac{u_{4,2}}{6} & -\frac{u_{3,2}}{6}+\frac{u_{4,3}}{6} & -\frac{u_{3,3}}{36}+\frac{u_{4,4}}{36} & \frac{u_{3,0}}{6} \\ -u_{0,1} & \frac{u_{0,2}}{2} & \frac{u_{0,3}}{6} & \frac{u_{0,4}}{24} & \frac{u_{4,0}}{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

matris denklemi elde edilir. Şimdi (5.30) eşitliğinde sol tarafındaki matris Bölüm 4 te verilen katsayılar matrisi şeklinde yazılırsa

$$\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36}
\end{bmatrix}_{16\times 25} \tag{5.31}$$

(5.31) biçiminde olacaktır. Eşitliğin sağ tarafındaki MKM^t matrisinin ise arttırılmış biçimi Bölüm 4.1 de anlatıldığı gibi alınacaktır. Dolayısıyla son satır ve son sütun elemanları hariç olmak üzere satır matrisi olarak yazılırsa arttırılmış matrisi elde edilmiş olur. Şimdi koşulların matris gösterimini yazalım. Verilen (5.1) denklemi için koşullar (5.2) de

$$u(x,0) = e^x \tag{5.32}$$

$$u(0,t) = e^t \tag{5.33}$$

$$u(0,0) = 1 \tag{5.34}$$

(5.32), (5.33) ve (5.34) eşitlikleri ile verildiğinden (5.32) ve (5.33) koşullarında eşitliklerin sağ tarafının $N = 3$ için sonlu Taylor seri açılımı yapılırsa

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \tag{5.35}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} \tag{5.36}$$

(5.3), (5.36) olacaktır. Koşullar için eşitliğin sol tarafı (3.30), (3.32) ve (3.34) de belirtildiği gibi yazılırsa koşulların matrisi sırasıyla

$$XMUM^{t}Y^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^{t}Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^{t}Y^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

(5.37), (5.38) ve (5.39) olacaktır. İlk koşulun tüm elemanları, 2. koşulun ise ilk elemanı hariç diğer 4 elemanı elde edilecek olan arttırılmış matris denkleminin son satırından sonra 9 satır eklenerek yazılacaktır. Sonuç olarak (5.1) denkleminin (5.2) sınır koşullarına göre arttırılmış matrisi

$$\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{25\times 25}$$

$$\begin{bmatrix} u_{(0,0)} \\ u_{(0,1)} \\ u_{(0,2)} \\ u_{(0,3)} \\ u_{(0,4)} \\ u_{(1,0)} \\ u_{(1,1)} \\ u_{(1,2)} \\ u_{(1,3)} \\ u_{(1,4)} \\ u_{(2,0)} \\ u_{(2,1)} \\ u_{(2,2)} \\ u_{(2,3)} \\ u_{(2,4)} \\ u_{(3,0)} \\ u_{(3,1)} \\ u_{(3,2)} \\ u_{(3,3)} \\ u_{(3,4)} \\ u_{(4,0)} \\ u_{(4,1)} \\ u_{(4,2)} \\ u_{(4,3)} \\ u_{(4,4)} \end{bmatrix}_{25\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} \end{bmatrix}_{25\times 1} \tag{5.40}$$

(5.40) şeklinde elde edilir. (5.40) matris denkleminin çözülmesi ile

$$-u_{0,0}+u_{1,1}=0$$

$$-u_{0,1}+u_{1,2}=0$$

$$-\frac{u_{0,2}}{2}+\frac{u_{1,3}}{2}=0$$

$$-\frac{u_{0,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{2}=0$$

$$-u_{1,0}+u_{2,1}=0$$

$$-u_{1,1}+u_{2,2}=0$$

$$-\frac{u_{1,2}}{2}+\frac{u_{2,3}}{2}=0$$

$$-\frac{u_{1,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{6}=0$$

$$-\frac{u_{2,0}}{2}+\frac{u_{3,1}}{2}=0$$

$$-\frac{u_{2,1}}{2}+\frac{u_{3,2}}{2}=0$$

$$-\frac{u_{2,2}}{4}+\frac{u_{3,3}}{4}=0 \tag{5.41}$$

$$-\frac{u_{2,3}}{12}+\frac{u_{3,4}}{12}=0$$

$$-\frac{u_{3,0}}{6}+\frac{u_{4,1}}{6}=0$$

$$-\frac{u_{3,1}}{6}+\frac{u_{4,2}}{6}=0$$

$$-\frac{u_{3,2}}{12}+\frac{u_{4,3}}{12}=0$$

$$-\frac{u_{3,3}}{36}+\frac{u_{4,4}}{36}=0$$

$$u_{0,0}=1$$

$$u_{1,0} = 1$$

$$\frac{u_{2,0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{3,0}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{4,0}}{24} = \frac{1}{24}$$

$$u_{2,0} = 1$$

$$\frac{u_{0,2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{0,3}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{0,4}}{24} = \frac{1}{24}$$

(5.41)denklem sistemi elde edilir. (5.41) denklem sisteminin çözülmesi ile

$$\begin{array}{lllll} u_{0,0} = 1, & u_{0,1} = 1, & u_{0,2} = 1, & u_{0,3} = 1, & u_{0,4} = 1, \\ u_{1,0} = 1, & u_{1,1} = 1, & u_{1,2} = 1, & u_{1,3} = 1, & u_{1,4} = 1, \\ u_{2,0} = 1, & u_{2,1} = 1, & u_{2,2} = 1, & u_{2,3} = 1, & u_{2,4} = 1, \\ u_{3,0} = 1, & u_{3,1} = 1, & u_{3,2} = 1, & u_{3,3} = 1, & u_{3,4} = 1, \\ u_{4,0} = 1, & u_{4,1} = 1, & u_{4,2} = 1, & u_{4,3} = 1, & u_{4,4} = 1, \end{array} \tag{5.42}$$

katsayıları elde edilir. Çözüm olaraku(x,t) nin $N = 4$ için $(x,t) = (0,0)$ noktası civarındaki çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{4} \sum_{m=0}^{4} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n . t^m \;, \qquad a \leq 0\,, \;\; 0 \leq b \tag{5.43}$$

(5.43) denklemi şeklinde olacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}$ ler u nun n ve m e göre türevleridir. Çözüm olarak, elde ettiğimiz katsayıları (5.43) denkleminde yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + t\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) \\
+ t^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48}\right) \\
+ t^3\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{144}\right) \\
+ t^4\left(\frac{1}{24} + \frac{x}{24} + \frac{x^2}{48} + \frac{x^3}{144} + \frac{x^4}{576}\right)
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

elde edilir. Bu açılım $N = 4$ için e^{x+t} nin Taylor seri açılımıdır. Dolayısıyla çözüm e^{x+t} bulunmuş olur. Bu sonuçta aynıdır.

Örnek 2: Şimdi lineer homojen

$$u_{xt} + 2u = 0 \tag{5.45}$$

(5.45) denklemi ile

$$u(x,0) = e^x\,, \qquad u(0,t) = e^{-2t}, \qquad u(0,0) = 1 \tag{5.46}$$

(5.46) koşullarını göz önüne alalım. Bu problemin $u(x,t)$ çözümüne $(x,t) = (0,0)$ noktası civarında

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{4}\sum_{m=0}^{4} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n t^m\,, \qquad a \le 0, \qquad 0 \le b \tag{5.47}$$

$N = 4$ için sonlu Taylor serisi ile yaklaşalım. Bölüm 3 te tanımlanan (3.7),(3.8), (3.13) ve (3.24) matrislerini N=4 için yazarsak

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

$$M_1{}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & u_{0,3} & u_{0,4} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ u_{3,0} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} \\ u_{4,0} & u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

(5.51), (5.50), (5.48) ve (5.52) olacaktır. Bölüm 4 te verilen (4.2) matris denklemi (5.45) denklemi için düzenlenirse matris denklemi

$$M_1 U M_1{}^t + 2MUM^t = 0 \tag{5.53}$$

olacaktır. Yukarıda $N = 4$ için tanımlanan (5.48), (5.49), (5.50), (5.51) ve (5.52) matrisleri (5.53) denkleminde yerine yazılıp çözüm yapılırsa

$$\begin{bmatrix} 2u_{0,0}+u_{1,1} & 2u_{0,1}+u_{1,2} & u_{0,2}+\frac{u_{1,3}}{2} & \frac{u_{0,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{6} & \frac{u_{0,4}}{12} \\ 2u_{1,0}+u_{2,1} & 2u_{1,1}+u_{2,2} & u_{1,2}+\frac{u_{2,3}}{2} & \frac{u_{1,3}}{3}+\frac{u_{2,4}}{6} & \frac{u_{1,4}}{12} \\ u_{2,0}+\frac{u_{3,1}}{2} & u_{2,1}+\frac{u_{3,2}}{2} & \frac{u_{2,2}}{2}+\frac{u_{3,3}}{4} & \frac{u_{2,3}}{6}+\frac{u_{3,4}}{12} & \frac{u_{2,4}}{24} \\ \frac{u_{3,0}}{3}+\frac{u_{4,1}}{6} & \frac{u_{3,1}}{3}+\frac{u_{4,2}}{6} & \frac{u_{3,2}}{6}+\frac{u_{4,3}}{12} & \frac{u_{3,3}}{18}+\frac{u_{4,4}}{36} & \frac{u_{3,4}}{72} \\ \frac{u_{4,0}}{12} & \frac{u_{4,1}}{12} & \frac{u_{4,2}}{24} & \frac{u_{4,3}}{72} & \frac{u_{4,4}}{288} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

(5.54) matris denklemi elde edilir. (5.54) denkleminde eşitliğin sol tarafının katsayılar matrisi Bölüm 4 te verilen arttırılmış katsayılar matrisi şeklinde yazılırsa

$$\begin{bmatrix}
2&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&\frac{1}{6}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&\frac{1}{6}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&\frac{1}{4}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{6}&0&0&0&0&0&\frac{1}{12}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&\frac{1}{6}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&\frac{1}{6}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{6}&0&0&0&0&0&\frac{1}{12}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{18}&0&0&0&0&0&\frac{1}{36}
\end{bmatrix}_{16\times 25}$$

(5.55)

(5.55) biçiminde olacaktır. (5.53) denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki MKM^t matrisinin ise arttırılmış biçimi Bölüm 4.1 de anlatıldığı gibi alınacaktır. Dolayısıyla son satır ve son sütun elemanları hariç olmak üzere satır matrisi olarak yazılırsa arttırılmış matrisi elde edilmiş olur. Şimdi koşulların matris gösterimini yazalım. Verilen (5.45) denklemi için koşullar (5.46) da

$$u(x,0) = e^x \tag{5.56}$$

$$u(0,t) = e^{-2t} \tag{5.57}$$

$$u(0,0) = 1 \tag{5.58}$$

(5.56), (5.57) ve (5.58) eşitlikleri ile verildiğinden, (5.12) ve (5.13) koşullarında eşitliğin sağ tarafının $N = 4$ için sonlu Taylor seri açılımı yazılırsa

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \tag{5.59}$$

$$e^{-2t} = 1 - 2t + 2t^2 - \frac{4t^3}{3} + \frac{2t^4}{3} \tag{5.60}$$

(5.59) ve (5.60) şeklinde olacaktır. Koşullar için eşitliğin sol tarafı ise (3.30), (3.32) ve (3.34) eşitliklerinde belirtildiği gibi yazılırsa koşulların matrisleri sırasıyla

$$XMUM^tY^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^tY^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^tY = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(5.62)

(5.63)

(5.61), (5.62) ve (5.63) olacaktır. Ilk koşulun tüm elemanları, 2. koşulun ise ilk elemanı hariç diğer 4 elemanı elde edilecek olan arttırılmış matrisin son satırından sonra 9 satır eklenerek yazılacaktır. Sonuç olarak (5.45) denkleminin (5.46) sınır koşullarına göre arttırılmış matrisi

$$\begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{25\times 25}$$

$$\begin{bmatrix} u_{(0,0)} \\ u_{(0,1)} \\ u_{(0,2)} \\ u_{(0,3)} \\ u_{(0,4)} \\ u_{(1,0)} \\ u_{(1,1)} \\ u_{(1,2)} \\ u_{(1,3)} \\ u_{(1,4)} \\ u_{(2,0)} \\ u_{(2,1)} \\ u_{(2,2)} \\ u_{(2,3)} \\ u_{(2,4)} \\ u_{(3,0)} \\ u_{(3,1)} \\ u_{(3,2)} \\ u_{(3,3)} \\ u_{(3,4)} \\ u_{(4,0)} \\ u_{(4,1)} \\ u_{(4,2)} \\ u_{(4,3)} \\ u_{(4,4)} \end{bmatrix}_{25\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} \\ 2 \\ 2 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}_{25\times 1}$$

şeklinde elde edilir. Bu matris denkleminin çözülmesi ile

$$2u_{0,0} + u_{1,1} = 0$$

$$2u_{0,1} + u_{1,2} = 0$$

$$u_{0,2} + \frac{u_{1,3}}{2} = 0$$

$$\frac{u_{0,3}}{3} + \frac{u_{1,4}}{6} = 0$$

$$2u_{1,0} + u_{2,1} = 0$$

$$2u_{1,1} + u_{2,2} = 0$$

$$u_{1,2} + \frac{u_{2,3}}{2} = 0$$

$$\frac{u_{1,3}}{3} + \frac{u_{1,4}}{6} = 0$$

$$u_{2,0} + \frac{u_{3,1}}{2} = 0$$

$$u_{2,1} + \frac{u_{3,2}}{2} = 0$$

$$\frac{u_{2,2}}{2} + \frac{u_{3,3}}{4} = 0 \tag{5.65}$$

$$\frac{u_{2,3}}{6} + \frac{u_{3,4}}{12} = 0$$

$$\frac{u_{3,0}}{3} + \frac{u_{4,1}}{6} = 0$$

$$\frac{u_{3,1}}{3} + \frac{u_{4,2}}{6} = 0$$

$$\frac{u_{3,2}}{6} + \frac{u_{4,3}}{12} = 0$$

$$\frac{u_{3,3}}{18} + \frac{u_{4,4}}{12} = 0$$

$$u_{0,0} = 1$$

$$u_{1,0} = 1$$

$$\frac{u_{2,0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{3,0}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{4,0}}{24} = \frac{1}{24}$$

$$u_{0,1} = -2$$

$$\frac{u_{0,2}}{2} = 2$$

$$\frac{u_{0,3}}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{u_{0,4}}{24} = \frac{2}{3}$$

(5.65) denklem sistemi elde edilir. (5.65) denklem sisteminin çözülmesi ile

$$\begin{array}{lllll} u_{0,0} = 1, & u_{0,1} = -2, & u_{0,2} = 4, & u_{0,3} = -8, & u_{0,4} = 16, \\ u_{1,0} = 1, & u_{1,1} = -2, & u_{1,2} = 4, & u_{1,3} = -8, & u_{1,4} = 16, \\ u_{2,0} = 1, & u_{2,1} = -2, & u_{2,2} = 4, & u_{2,3} = -8, & u_{2,4} = 16, \\ u_{3,0} = 1, & u_{3,1} = -2, & u_{3,2} = 4, & u_{3,3} = -8, & u_{3,4} = 16, \\ u_{4,0} = 1, & u_{4,1} = -2, & u_{4,2} = 4, & u_{4,3} = -8, & u_{4,4} = 16 \end{array} \tag{5.66}$$

(5.66) katsayıları elde edilir. $u(x,t)$ nin $N = 4$ için $(x,t) = (0,0)$ noktası civarındaki çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{4} \sum_{m=0}^{4} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n . t^m \ , \qquad a \leq 0\ , \ \ 0 \leq b \tag{5.67}$$

(5.67) olacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}$ ler u nun n ve m ye göre türevleridir. Çözüm olarak, elde ettiğimiz katsayıları (5.67) seri açılımında yerine yazarsak

$$u(x,t) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + t\left(-2 - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}\right) + t^2\left(2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + t^3\left(-\frac{4}{3} - \frac{4x}{3} - \frac{2x^2}{3} - \frac{2x^3}{9} - \frac{x^4}{18}\right) + t^4\left(\frac{2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{36}\right) \tag{5.68}$$

(5.68) denklemi elde edilir. Bu açılım e^{x-2t} fonksiyonunun $N = 4$ ile kesilmiş sonlu Taylor seri açılımına denktir. Dolayısıyla çözüm e^{x-2t} olarak bulunur. Bu sonuç [4] de verilen sonuç ile aynıdır.

Aynı örneğin $N = 6$ için çözümü bulunmak istenirse

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.69}$$

$$M_1^{\,t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5!} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.70}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & u_{0,3} & u_{0,4} & u_{0,5} & u_{0,6} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} & u_{1,5} & u_{1,6} \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} & u_{2,5} & u_{2,6} \\ u_{3,0} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} & u_{3,5} & u_{3,6} \\ u_{4,0} & u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} & u_{4,5} & u_{4,6} \\ u_{5,0} & u_{5,1} & u_{5,2} & u_{5,3} & u_{5,4} & u_{5,5} & u_{5,6} \\ u_{6,0} & u_{6,1} & u_{6,2} & u_{6,3} & u_{6,4} & u_{6,5} & u_{6,6} \end{bmatrix} \tag{5.71}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6!} \end{bmatrix} \tag{5.72}$$

$$K=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\tag{5.73}$$

olmak üzere,bu matrisler (5.53) denklemindee yerlerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix}
2u_{0,0}+u_{1,1} & 2u_{0,1}+u_{1,2} & u_{0,2}+\frac{u_{1,0}}{2} & \frac{u_{0,3}}{3}+\frac{u_{1,4}}{6} & \frac{u_{0,4}}{12}+\frac{u_{1,5}}{24} & \frac{u_{0,5}}{60}+\frac{u_{1,6}}{120} & u_{0,0}\\
2u_{1,0}+u_{2,1} & 2u_{1,1}+u_{2,2} & u_{1,2}+\frac{u_{2,3}}{2} & \frac{u_{1,3}}{3}+\frac{u_{2,4}}{6} & \frac{u_{1,4}}{12}+\frac{u_{2,5}}{24} & \frac{u_{1,5}}{60}+\frac{u_{2,6}}{120} & u_{1,0}\\
u_{2,0}+\frac{u_{3,1}}{2} & u_{2,1}+\frac{u_{3,2}}{2} & \frac{u_{2,2}}{2}+\frac{u_{3,3}}{4} & \frac{u_{2,3}}{6}+\frac{u_{3,4}}{12} & \frac{u_{2,4}}{24}+\frac{u_{3,5}}{48} & \frac{u_{2,5}}{120}+\frac{u_{3,6}}{240} & \frac{u_{2,0}}{2}\\
\frac{u_{3,0}}{3}+\frac{u_{4,1}}{6} & \frac{u_{3,1}}{3}+\frac{u_{4,2}}{6} & \frac{u_{3,2}}{6}+\frac{u_{4,3}}{12} & \frac{u_{3,3}}{18}+\frac{u_{4,4}}{36} & \frac{u_{3,4}}{72}+\frac{u_{4,5}}{144} & \frac{u_{3,5}}{360}+\frac{u_{4,6}}{720} & \frac{u_{3,0}}{6}\\
\frac{u_{4,0}}{12}+\frac{u_{5,1}}{24} & \frac{u_{4,1}}{12}+\frac{u_{5,2}}{24} & \frac{u_{4,2}}{24}+\frac{u_{5,3}}{48} & \frac{u_{4,3}}{72}+\frac{u_{5,4}}{144} & \frac{u_{4,4}}{288}+\frac{u_{5,5}}{576} & \frac{u_{4,5}}{1440}+\frac{u_{5,6}}{2880} & \frac{u_{4,0}}{24}\\
\frac{u_{5,0}}{60}+\frac{u_{6,1}}{120} & \frac{u_{5,1}}{60}+\frac{u_{6,2}}{120} & \frac{u_{5,2}}{120}+\frac{u_{6,3}}{240} & \frac{u_{5,3}}{360}+\frac{u_{6,4}}{720} & \frac{u_{5,4}}{1440}+\frac{u_{6,5}}{2880} & \frac{u_{5,5}}{7200}+\frac{u_{6,6}}{14400} & \frac{u_{5,0}}{120}\\
u_{0,1} & \frac{u_{0,2}}{2} & \frac{u_{0,3}}{6} & \frac{u_{0,4}}{24} & \frac{u_{0,5}}{120} & \frac{u_{0,6}}{720} & \frac{u_{6,0}}{720}
\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Şimdi (5.30) da eşitliğin sol tarafındaki matris Bölüm 4 te verilen arttırılmış katsayılar matrisi şeklinde mathematica programı yardımıyla 36×49 tipinde bir matris olarak hesaplanır. Şimdi koşulların matris gösterimini yazalım. Verilen (5.45) denklemi için koşullar (5.46) de

$$XMUM^{t}Y^{(0)}{}_{(0)}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720}\end{bmatrix} \tag{5.75}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^{t}Y=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{15} & \frac{4}{45}\end{bmatrix} \tag{5.76}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^{t}Y^{(0)}{}_{(0)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5.77}$$

(5.75), (5.76), (5.77) biçiminde olacaktır. Koşul matrislerinin, mathematica programı yardımıyla hesaplanan arttırılmış matrisin son 13 satırına eklenmesiyle oluşan yeni matris sisteminin çözülmesiyle

$$\begin{aligned}
&2u_{0,0}+u_{1,1}=0\\
&2u_{0,1}+u_{1,2}=0\\
&u_{0,2}+\frac{u_{1,3}}{2}=0\\
&\frac{u_{0,3}}{3}+\frac{u_{1,4}}{6}=0\\
&\frac{u_{0,4}}{12}+\frac{u_{1,5}}{24}=0\\
&\frac{u_{0,5}}{60}+\frac{u_{1,6}}{120}=0\\
&u_{0,0}=1 \qquad\qquad (5.78)\\
&2u_{1,0}+u_{2,1}=0\\
&2u_{1,1}+u_{2,2}=0\\
&u_{1,2}+\frac{u_{2,3}}{2}=0\\
&\frac{u_{1,3}}{3}+\frac{u_{2,4}}{6}=0\\
&\frac{u_{1,4}}{12}+\frac{u_{2,5}}{24}=0
\end{aligned}$$

$$\frac{u_{1,5}}{60}+\frac{u_{2,6}}{120}=0$$

$$u_{1,0}=1$$

$$u_{2,0}+\frac{u_{3,1}}{2}=0$$

$$u_{2,1}+\frac{u_{3,2}}{2}=0$$

$$\frac{u_{2,2}}{2}+\frac{u_{3,3}}{4}=0$$

$$\frac{u_{2,3}}{6}+\frac{u_{3,4}}{12}=0$$

$$\frac{u_{2,4}}{24}+\frac{u_{3,5}}{48}=0$$

$$\frac{u_{2,5}}{120}+\frac{u_{3,6}}{240}=0$$

$$\frac{u_{2,0}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{3,0}}{3}+\frac{u_{4,1}}{6}=0$$

$$\frac{u_{3,1}}{3}+\frac{u_{4,2}}{6}=0$$

$$\frac{u_{3,2}}{6}+\frac{u_{4,3}}{12}=0$$

$$\frac{u_{3,3}}{18}+\frac{u_{4,4}}{36}=0$$

$$\frac{u_{3,4}}{72}+\frac{u_{4,5}}{144}=0$$

$$\frac{u_{3,5}}{360}+\frac{u_{4,6}}{720}=0$$

$$\frac{u_{3,0}}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{4,0}}{12}+\frac{u_{5,1}}{24}=0$$

$$\frac{u_{4,1}}{12}+\frac{u_{5,2}}{24}=0$$

$$\frac{u_{4,2}}{24}+\frac{u_{5,3}}{48}=0$$

$$\frac{u_{4,3}}{72}+\frac{u_{5,4}}{1144}=0$$

$$\frac{u_{4,4}}{288}+\frac{u_{5,5}}{576}=0$$

$$\frac{u_{4,5}}{1440}+\frac{u_{5,6}}{2880}=0$$

$$\frac{u_{4,0}}{24}=\frac{1}{24}$$

$$\frac{u_{5,0}}{60}+\frac{u_{6,1}}{120}=0$$

$$\frac{u_{5,1}}{60}+\frac{u_{6,2}}{120}=0$$

$$\frac{u_{5,2}}{120}+\frac{u_{6,3}}{240}=0$$

$$\frac{u_{5,3}}{360}+\frac{u_{6,4}}{720}=0$$

$$\frac{u_{5,4}}{1440}+\frac{u_{6,5}}{2880}=0$$

$$\frac{u_{5,5}}{7200}+\frac{u_{6,6}}{14400}=0$$

$$\frac{u_{5,0}}{120}=\frac{1}{120}$$

$$u_{0,1}=-2$$

$$\frac{u_{0,2}}{2}=2$$

$$\frac{u_{0,3}}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{u_{0,4}}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{u_{0,5}}{120} = -\frac{4}{15}$$

$$\frac{u_{0,6}}{720} = \frac{4}{45}$$

$$\frac{u_{6,0}}{720} = \frac{1}{720}$$

(5.78) denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesi ile

$$u_{0,0} = 1,\ u_{0,1} = -2,\ u_{0,2} = 4, u_{0,3} = -8, u_{0,4} = 16, u_{0,5} = -32, u_{0,6} = 64,$$

$$u_{1,0} = 1,\ u_{1,1} = -2, u_{1,2} = 4, u_{1,3} = -8, u_{1,4} = 16, u_{1,5} = -32, u_{1,6} = 64,$$

$$u_{2,0} = 1, u_{2,1} = -2, u_{2,2} = 4, u_{2,3} = -8, u_{2,4} = 16\ , u_{2,5} = -32, u_{2,6} = 64,$$

$$u_{3,0} = 1, u_{3,1} = -2, u_{3,2} = 4, u_{3,3} = -8, u_{3,4} = 16, u_{3,5} = -32, u_{3,6} = 64, \qquad (5.79)$$

$$u_{4,0} = 1,\ u_{4,1} = -2, u_{4,2} = 4,\ u_{4,3} = -8, u_{4,4} = 16, u_{4,5} = -32, u_{4,6} = 64,$$

$$u_{5,0} = 1,\ u_{5,1} = -2, u_{5,2} = 4,\ u_{5,3} = -8, u_{5,4} = 16, u_{5,5} = -32, u_{5,6} = 64,$$

$$u_{6,0} = 1,\ u_{6,1} = -2, u_{6,2} = 4,\ u_{6,3} = -8, u_{6,4} = 16, u_{6,5} = -32, u_{6,6} = 64,$$

(5.79) katsayıları elde edilir. $u(x,t)$ nin $N = 6$ için $(x,t) = (0,0)$ noktası civarındaki çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{6} \sum_{m=0}^{6} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n . t^m\ , \qquad a \leq 0\ ,\ \ 0 \leq b \qquad (5.80)$$

(5.80) denklemi olacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}$ ler u nun n ve m ye göre türevleridir. Çözüm olarak, elde ettiğimiz katsayıları (5.80) seri açılımında yerine yazarsak

$$u(x,t) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$$
$$+ t\left(-2 - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^6}{360}\right)$$
$$+ t^2\left(2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360}\right)$$
$$+ t^3\left(-\frac{4}{3} - \frac{4x}{3} - \frac{2x^2}{3} - \frac{2x^3}{9} - \frac{x^4}{18} - \frac{x^5}{90} - \frac{x^6}{540}\right)$$
$$+ t^4\left(\frac{2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^5}{180} + \frac{x^6}{1080}\right)$$
$$+ t^5\left(-\frac{4}{15} - \frac{4x}{15} - \frac{2x^2}{15} - \frac{2x^3}{45} - \frac{x^4}{90} - \frac{x^5}{450} - \frac{x^6}{2700}\right)$$
$$+ t^6\left(\frac{4}{45} + \frac{4x}{45} + \frac{2x^2}{45} + \frac{2x^3}{135} + \frac{x^4}{270} + \frac{x^5}{1350} + \frac{x^6}{8100}\right) \qquad (5.81)$$

(5.81) denklemi elde edilir. Bu açılım e^{x-2t} fonksiyonunun $N = 6$ ile kesilmiş sonlu Taylor seri açılımına denktir. Dolayısıyla çözüm e^{x-2t} olarak bulunur. Bu sonuç [4] de verilen sonuç ile aynıdır.

Örnek 3: Şimdi lineer, homojen olmayan

$$u_{xt} - u = -t \qquad (5.82)$$

(5.82) denklemi ile

$$u(x,0) = e^x\,, \qquad u(0,t) = t + e^t, \qquad u(0,0) = 1 \qquad (5.83)$$

(5.83) sınır koşulları göz önüne alınacaktır. $u(x,t)$fonksiyon çözümüne $(x,t) = (0,0)$ noktası civarında

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n . t^m\ , \qquad a \le 0\,,\ \ 0 \le b \qquad (5.84)$$

$N = 3$ için sonlu Taylor serisi ile yaklaşılacaktır. Bölüm 3 te tanımlanan (3.7),(3.8), (3.13) ve (3.24) matrisleri N=3 için sırasıyla

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.85}$$

$$M_1^{\,t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.86}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{(0,0)} & u_{(0,1)} & u_{(0,2)} & u_{(0,3)} \\ u_{(1,0)} & u_{(1,1)} & u_{(1,2)} & u_{(1,3)} \\ u_{(2,0)} & u_{(2,1)} & u_{(2,2)} & u_{(2,3)} \\ u_{(3,0)} & u_{(3,1)} & u_{(3,2)} & u_{(3,3)} \end{bmatrix} \tag{5.87}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \end{bmatrix} \tag{5.88}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.89}$$

(3.88), (3.87), (3.85) ve (3.89) matrisleri olacaktır. Bölüm 4 te verilen (4.2) matris denklemi (5.82) denklemi için düzenlenirse matris formu

$$M_1 U M_1{}^t - M U M^t = M K M^t \tag{5.90}$$

(5.90) denklemi olacaktır. Yukarıda $N = 3$ için tanımlanan matrisler (5.90) denkleminde yerine yazılıp çözüm yapılırsa

$$\begin{bmatrix} -u_{0,0}+u_{1,1} & -u_{0,1}+u_{1,2} & -\dfrac{u_{0,2}}{2}+\dfrac{u_{1,3}}{2} & -\dfrac{u_{0,3}}{6} \\ -u_{1,0}+u_{2,1} & -u_{1,1}+u_{2,2} & -\dfrac{u_{1,2}}{2}+\dfrac{u_{2,3}}{2} & -\dfrac{u_{1,3}}{6} \\ -\dfrac{u_{2,0}}{2}+\dfrac{u_{3,1}}{2} & -\dfrac{u_{2,1}}{2}+\dfrac{u_{3,2}}{2} & -\dfrac{u_{2,2}}{4}+\dfrac{u_{3,3}}{4} & -\dfrac{u_{2,3}}{12} \\ -\dfrac{u_{3,0}}{6} & -\dfrac{u_{3,1}}{6} & -\dfrac{u_{3,2}}{12} & -\dfrac{u_{3,3}}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.91}$$

(5.91) matris denklemi elde edilir. (5.91) dekleminde eşitliğin sol tarafının katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{9\times 16} \tag{5.92}$$

(5.92) biçiminde olacaktır. (5.90) denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki MKM^t matrisinin ise arttırılmış biçimi Bölüm 4.1 de anlatıldığı gibi alınacaktır. Dolayısıyla son satır ve son sütun elemanları hariç olmak üzere satır matrisi olarak yazılırsa arttırılmış matrisi elde edilmiş olur. Şimdi koşulların matris gösterimini yazalım. Verilen (5.82) denklemi için koşullar (5.83)

$$u(x,0) = e^x \tag{5.93}$$

$$u(0,t) = t + e^t \tag{5.94}$$

$$u(0,0) = 1 \tag{5.95}$$

(5.93), (5.94) ve (5.95) eşitlikleri ile verildiğinden, (5.93) ve (5.94) koşullarında eşitliklerin sağ tarafının $N = 3$ için sonlu Taylor seri açılımı yazılırsa

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \tag{5.96}$$

$$t + e^t = 1 + 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \tag{5.97}$$

(5.96) ve (5.97) eşitlikleri şeklinde olacaktır. Koşullar için eşitliğin sol tarafı ise (3.30), (3.32) ve (3.34) eşitliklerinde belirtildiği gibi yazılırsa koşulların matrisleri sırasıyla

$$XMUM^{t}Y^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{5.98}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^{t}Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{5.99}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^{t}Y^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.100}$$

(5.98), (5.99) ve (5.100) olacaktır. İlk koşulun tüm elemanları, 2. koşulun ise ilk elemanı hariç diğer 4 elemanı elde edilecek olan arttırılmış matris denkleminin son satırından sonra 7 satır eklenerek yazılacaktır. Sonuç olarak (5.82) denkleminin (5.83) sınır koşullarına göre arttırılmış matrisi

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{16\times 16}
\begin{bmatrix}
u_{0,0} \\ u_{0,1} \\ u_{0,2} \\ u_{0,3} \\ u_{1,0} \\ u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,0} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,0} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3}
\end{bmatrix}_{16\times 1}
$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}_{16\times 1} \tag{5.101}$$

şeklinde elde edilir. Bu matris denkleminin çözülmesi ile

$$-u_{0,0} + u_{1,1} = 0$$

$$-u_{0,1} + u_{1,2} = -1$$

$$\frac{u_{0,2}}{2} + \frac{u_{1,3}}{2} = 0$$

$$-u_{1,0} + u_{2,1} = 0$$

$$-u_{1,1} + u_{2,2} = 0$$

$$-\frac{u_{1,2}}{2} + \frac{u_{2,3}}{2} = 0$$

$$-\frac{u_{2,0}}{2} + \frac{u_{3,1}}{2} = 0$$

$$-\frac{u_{2,1}}{2} + \frac{u_{3,2}}{2} = 0$$

$$-\frac{u_{2,2}}{4} + \frac{u_{3,3}}{4} = 0 \qquad (5.102)$$

$$u_{0,0} = 1$$

$$u_{1,0} = 1$$

$$\frac{u_{2,0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{3,0}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$u_{0,1} = 2$$

$$\frac{u_{0,2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{0,3}}{6} = \frac{1}{6}$$

(5.102) denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesi ile

$$u_{0,0}=1,\quad u_{0,1}=2,\quad u_{0,2}=1,\quad u_{0,3}=1,$$
$$u_{1,0}=1,\quad u_{1,1}=1,\quad u_{1,2}=1,\quad u_{1,3}=1, \tag{5.103}$$
$$u_{2,0}=1,\quad u_{2,1}=1,\quad u_{2,2}=1,\quad u_{2,3}=1,$$
$$u_{3,0}=1,\quad u_{3,1}=1,\quad u_{3,2}=1,\quad u_{3,3}=1$$

(5.103) katsayıları elde edilir. $u(x,y)$nin$N=3$ için $(x,y)=(0,0)$ noktası civarındaki çözümü

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}\frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n!\times m!}x^n.t^m\ ,\qquad a\leq 0\ ,\ \ 0\leq b \tag{5.104}$$

(5.104) eşitliği olacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}$ ler u nun n ve m ye göre türevleridir. Çözüm olarak, elde ettiğimiz katsayıları (5.104) seri açılımında yerine yazarsak

$$u(x,y)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+t\left(2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+t^2\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)$$
$$+t^3\left(\frac{1}{6}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{36}\right) \tag{5.105}$$

(5.105) denklemi elde edilir. Bu açılım $t+e^{x+t}$ fonksiyonunun $N=3$ ile kesilmiş sonlu Taylor seri açılımına denktir. Dolayısıyla çözüm $t+e^{x+t}$ olarak bulunur. Bu sonuç [4] de verilen sonuç ile aynıdır.

Aynı örnekte $N=4$ için çözüm yapılmak istenirse

$$M_1=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5.106}$$

$$M_1^{\ t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.107}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & u_{0,3} & u_{0,4} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ u_{3,0} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} \\ u_{4,0} & u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{bmatrix} \tag{5.108}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} \end{bmatrix} \tag{5.109}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.110}$$

(5.106), (5.107), (5.108), (5.109) ve (5.110) olmak üzere,bu matrisler (5.90) da yerlerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -u_{0,0}+u_{1,1} & -u_{0,1}+u_{1,2} & -\frac{u_{0,2}}{2}+\frac{u_{1,3}}{2} & -\frac{u_{0,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{6} & u_{0,0} \\ -u_{1,0}+u_{2,1} & -u_{1,1}+u_{2,2} & -\frac{u_{1,2}}{2}+\frac{u_{2,3}}{2} & -\frac{u_{1,3}}{6}+\frac{u_{2,4}}{6} & u_{1,0} \\ -\frac{u_{2,0}}{2}+\frac{u_{3,1}}{2} & -\frac{u_{2,1}}{2}+\frac{u_{3,2}}{2} & -\frac{u_{2,2}}{4}+\frac{u_{3,3}}{4} & -\frac{u_{2,3}}{12}+\frac{u_{3,4}}{12} & \frac{u_{2,0}}{2} \\ -\frac{u_{3,0}}{6}+\frac{u_{4,1}}{6} & -\frac{u_{3,1}}{6}+\frac{u_{4,2}}{6} & -\frac{u_{3,2}}{6}+\frac{u_{4,3}}{6} & -\frac{u_{3,3}}{36}+\frac{u_{4,4}}{36} & \frac{u_{3,0}}{6} \\ -u_{0,1} & -\frac{u_{0,2}}{2} & \frac{u_{0,3}}{6} & \frac{u_{0,4}}{24} & \frac{u_{4,0}}{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.111}$$

matris denklemi elde edilir. (5.111) denkleminde eşitliğin sol tarafının katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36}
\end{bmatrix}_{16\times 25} \tag{5.112}$$

(5.112) biçiminde olacaktır. (5.110) denkleminde sağ tarafındaki MKM^t matrisinin ise arttırılmış biçimi Bölüm 4.1 de anlatıldığı gibi alınacaktır. Dolayısıyla son satır ve son sütun elemanları hariç olmak üzere satır matrisi olarak yazılırsa arttırılmış matrisi elde edilmiş olur. Şimdi koşulların matris gösterimini yazalım. Verilen (5.82) denklemi için koşullar (5.83) de

$$u(x,0) = e^x \tag{5.113}$$

$$u(0,t) = t + e^t \tag{5.114}$$

$$u(0,0) = 1 \tag{5.115}$$

(5.113), (5.114) ve (5.115) eşitlikleri ile verildiğinden, koşullar için önce eşitliğin sağ tarafının $N = 3$ için sonlu Taylor seri açılımı yapılırsa

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \tag{5.116}$$

$$t + e^t = 1 + 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} \tag{5.117}$$

(5.116) ve (5.117) şeklinde olacaktır. Koşullar için eşitliğin sol tarafı (3.30),(3.32) ve (3.34) eşitliklerinde belirtildiği gibi yazılırsa

$$XMUM^tY^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{5.118}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^tY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{5.119}$$

$$X^{(0)}_{(0)}MUM^tY^{(0)}_{(0)} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{5.120}$$

(5.118), (5.119), ve (5.120) olacaktır. İlk koşulun tüm elemanları, 2. koşulun ise ilk elemanı hariç diğer 4 elemanı elde edilecek olan arttırılmış matris denkleminin son satırından sonra 9 satır eklenerek yazılacaktır. Sonuç olarak (5.82) denkleminin (5.83) sınır koşullarına göre arttırılmış matrisi

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{25\times 25}
$$

$$\begin{bmatrix} u_{(0,0)} \\ u_{(0,1)} \\ u_{(0,2)} \\ u_{(0,3)} \\ u_{(0,4)} \\ u_{(1,0)} \\ u_{(1,1)} \\ u_{(1,2)} \\ u_{(1,3)} \\ u_{(1,4)} \\ u_{(2,0)} \\ u_{(2,1)} \\ u_{(2,2)} \\ u_{(2,3)} \\ u_{(2,4)} \\ u_{(3,0)} \\ u_{(3,1)} \\ u_{(3,2)} \\ u_{(3,3)} \\ u_{(3,4)} \\ u_{(4,0)} \\ u_{(4,1)} \\ u_{(4,2)} \\ u_{(4,3)} \\ u_{(4,4)} \end{bmatrix}_{25\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} \end{bmatrix}_{25\times 1} \tag{5.121}$$

şeklinde elde edilir. Bu matris denkleminin çözülmesi ile

$$
\begin{aligned}
&-u_{0,0}+u_{1,1}=0\\
&-u_{0,1}+u_{1,2}=-1\\
&-\frac{u_{0,2}}{2}+\frac{u_{1,3}}{2}=0\\
&-\frac{u_{0,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{2}=0\\
&-u_{1,0}+u_{2,1}=0\\
&-u_{1,1}+u_{2,2}=0\\
&-\frac{u_{1,2}}{2}+\frac{u_{2,3}}{2}=0\\
&-\frac{u_{1,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{6}=0\\
&-\frac{u_{2,0}}{2}+\frac{u_{3,1}}{2}=0\\
&-\frac{u_{2,1}}{2}+\frac{u_{3,2}}{2}=0\\
&-\frac{u_{2,2}}{4}+\frac{u_{3,3}}{4}=0\\
&-\frac{u_{2,3}}{12}+\frac{u_{3,4}}{12}=0\\
&-\frac{u_{3,0}}{6}+\frac{u_{4,1}}{6}=0\\
&-\frac{u_{3,1}}{6}+\frac{u_{4,2}}{6}=0\\
&-\frac{u_{3,2}}{12}+\frac{u_{4,3}}{12}=0\\
&-\frac{u_{3,3}}{36}+\frac{u_{4,4}}{36}=0
\end{aligned}
\tag{5.122}
$$

$$u_{0,0} = 1$$

$$u_{1,0} = 1$$

$$\frac{u_{2,0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{3,0}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{4,0}}{24} = \frac{1}{24}$$

$$u_{0,1} = 2$$

$$\frac{u_{0,2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{0,3}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{0,4}}{24} = \frac{1}{24}$$

(5.122) denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesi ile

$$\begin{array}{lllll} u_{0,0} = 1, & u_{0,1} = 2, & u_{0,2} = 1, & u_{0,3} = 1, & u_{0,4} = 1, \\ u_{1,0} = 1, & u_{1,1} = 1, & u_{1,2} = 1, & u_{1,3} = 1, & u_{1,4} = 1, \\ u_{2,0} = 1, & u_{2,1} = 1, & u_{2,2} = 1, & u_{2,3} = 1, & u_{2,4} = 1, \\ u_{3,0} = 1, & u_{3,1} = 1, & u_{3,2} = 1, & u_{3,3} = 1, & u_{3,4} = 1, \\ u_{4,0} = 1, & u_{4,1} = 1, & u_{4,2} = 1, & u_{4,3} = 1, & u_{4,4} = 1 \end{array} \tag{5.123}$$

(5.123) katsayıları elde edilir. $u(x,t)$ nin $N = 4$ için $(x,t) = (0,0)$ noktası civarındaki çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{4} \sum_{m=0}^{4} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n . t^m \;, a \leq 0 \;,\; 0 \leq b \tag{5.124}$$

(5.124) denklemi olacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}$ ler u nun n ve m ye göre türevleridir. Çözüm olarak, elde ettiğimiz katsayıları (5.124) seri açılımında yerine yazarsak

$$u(x,y) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + t\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)$$
$$+ t^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48}\right) + t^3\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{144}\right)$$
$$+ t^4\left(\frac{1}{24} + \frac{x}{24} + \frac{x^2}{48} + \frac{x^3}{144} + \frac{x^4}{576}\right) \qquad (5.125)$$

(5.125) denklemi elde edilir. Bu açılım $t + e^{x+t}$ fonksiyonunun $N = 4$ ile kesilmiş sonlu Taylor seri açılımına denktir. Dolayısıyla çözüm $t + e^{x+t}$ olarak bulunur. Bu sonuç [4] de verilen sonuç ile aynıdır.

Örnek 4: lineer homojen olmayan

$$u_{xt} = u + 4xt - x^2t^2 \qquad (5.126)$$

(5.126) denklemi ile

$$u(x,0) = e^x, \qquad u(0,t) = e^t, \qquad u(0,0) = 1 \qquad (5.127)$$

(5.127) sınır koşulları göz önüne alınacaktır. Bu problemin $u(x,t)$ çözümüne $(x,t) = (0,0)$ noktası civarında

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{4}\sum_{m=0}^{4} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n . t^m, \qquad a \leq 0, \ 0 \leq b$$

$N = 4$ içinsonlu Taylor serisi ile yaklaşalım. Bölüm 3 te tanımlanan (3.7), (3.8), (3.13) ve (3.24) matrislerini N=4 için

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.128)$$

$$M_1^{\,t}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.129}$$

$$U=\begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & u_{0,3} & u_{0,4} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ u_{3,0} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} \\ u_{4,0} & u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{bmatrix} \tag{5.130}$$

$$M=\begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} \end{bmatrix} \tag{5.131}$$

$$K=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.132}$$

(5.131), (5.130), (5.128) ve (5.132) matrisleri olacaktır. Bölüm 4 te (4.2) matris denklemi (5.126) denklemi için düzenlenirse

$$M_1UM_1{}^t - MUM^t = MKM^t \tag{5.133}$$

(5.133) matris denklemi elde edilir. Yukarıda $N=4$ için tanımlanan (5.128), (5.129), (5.130), (5.131), (5.132) matrisleri (5.133) denkleminde yerine yazılıp çözüm yapılırsa

$$\begin{bmatrix} -u_{0,0}+u_{1,1} & -u_{0,1}+u_{1,2} & -\frac{u_{0,2}}{2}+\frac{u_{1,3}}{2} & -\frac{u_{0,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{6} & u_{0,0} \\ -u_{1,0}+u_{2,1} & -u_{1,1}+u_{2,2} & -\frac{u_{1,2}}{2}+\frac{u_{2,3}}{2} & -\frac{u_{1,3}}{6}+\frac{u_{2,4}}{6} & u_{1,0} \\ -\frac{u_{2,0}}{2}+\frac{u_{3,1}}{2} & -\frac{u_{2,1}}{2}+\frac{u_{3,2}}{2} & -\frac{u_{2,2}}{4}+\frac{u_{3,3}}{4} & -\frac{u_{2,3}}{12}+\frac{u_{3,4}}{12} & \frac{u_{2,0}}{2} \\ -\frac{u_{3,0}}{6}+\frac{u_{4,1}}{6} & -\frac{u_{3,1}}{6}+\frac{u_{4,2}}{6} & -\frac{u_{3,2}}{6}+\frac{u_{4,3}}{6} & -\frac{u_{3,3}}{36}+\frac{u_{4,4}}{36} & \frac{u_{3,0}}{6} \\ -u_{0,1} & -\frac{u_{0,2}}{2} & \frac{u_{0,3}}{6} & \frac{u_{0,4}}{24} & \frac{u_{4,0}}{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.134}$$

matris denklemi elde edilir. (5.134) denkleminde eşitliğin sol tarafının katsayılar matrisi

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36}
\end{bmatrix}_{16\times 25}
\tag{5.135}
$$

(5.135) biçiminde olacaktır. (5.133) denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki MKM^t matrisinin ise arttırılmış biçimi Bölüm 4.1 de anlatıldığı gibi alınacaktır. Dolayısıyla son satır ve son sütun elemanları hariç olmak üzere satır matrisi olarak yazılırsa arttırılmış matrisi elde edilmiş olur. Şimdi koşulların matris gösterimini yazalım. Verilen (5.126) denklemi için koşullar (5.127) de

$$u(x,0) = e^x \tag{5.136}$$

$$u(0,t) = e^t \tag{5.137}$$

$$u(0,0) = 1 \tag{5.138}$$

(5.136), (5.137) ve (5.138) eşitlikleriyle verildiğinden (5.136) ve (5.137) koşullarında eşitliklerin sağ tarafının $N = 4$ için sonlu Taylor seri açılımı yazılırsa

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \tag{5.139}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \tag{5.140}$$

(5.139) ve (5.140) şeklinde olacaktır. Koşullar için eşitliğin sol tarafı ise (3.30), (3.32) ve (3.34) eşitliklerinde belirtildiği gibi yazılırsa koşulların matrisleri sırasıyla

$$XMUM^tY^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{5.141}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^tY = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{5.142}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^tY^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.143}$$

(5.141), (5.142) ve (5.143) olarak yazılır. İlk koşulun tüm elemanları, 2. Koşulun ise ilk elemanı hariç diğer 4 elemanı elde edilecek olan arttırılmış matris denkleminin son satırından sonra 7 satır eklenerek yazılacaktır. Sonuç olarak (5.126) denkleminin (5.127) sınır koşullarına göre arttırılmış matris gösterimi

$$\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{25\times 25}$$

$$\begin{bmatrix} u_{(0,0)} \\ u_{(0,1)} \\ u_{(0,2)} \\ u_{(0,3)} \\ u_{(0,4)} \\ u_{(1,0)} \\ u_{(1,1)} \\ u_{(1,2)} \\ u_{(1,3)} \\ u_{(1,4)} \\ u_{(2,0)} \\ u_{(2,1)} \\ u_{(2,2)} \\ u_{(2,3)} \\ u_{(2,4)} \\ u_{(3,0)} \\ u_{(3,1)} \\ u_{(3,2)} \\ u_{(3,3)} \\ u_{(3,4)} \\ u_{(4,0)} \\ u_{(4,1)} \\ u_{(4,2)} \\ u_{(4,3)} \\ u_{(4,4)} \end{bmatrix}_{25\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} \end{bmatrix}_{25\times 1} \tag{5.144}$$

şeklinde elde edilir. Bu matris denkleminin çözülmesi ile

$$-u_{0,0}+u_{1,1}=0$$

$$-u_{0,1}+u_{1,2}=0$$

$$-\frac{u_{0,2}}{2}+\frac{u_{1,3}}{2}=0$$

$$-\frac{u_{0,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{6}=0$$

$$-u_{1,0}+u_{2,1}=0$$

$$-u_{1,1}+u_{2,2}=4$$

$$-\frac{u_{1,2}}{2}+\frac{u_{2,3}}{2}=0$$

$$-\frac{u_{1,3}}{6}+\frac{u_{1,4}}{6}=0$$

$$-\frac{u_{2,0}}{2}+\frac{u_{3,1}}{2}=0$$

$$-\frac{u_{2,1}}{2}+\frac{u_{3,2}}{2}=0 \qquad (5.145)$$

$$-\frac{u_{2,2}}{4}+\frac{u_{3,3}}{4}=-1$$

$$-\frac{u_{2,3}}{12}+\frac{u_{3,4}}{12}=0$$

$$-\frac{u_{3,0}}{6}+\frac{u_{4,1}}{6}=0$$

$$-\frac{u_{3,1}}{6}+\frac{u_{4,2}}{6}=0$$

$$-\frac{u_{3,2}}{12}+\frac{u_{4,3}}{12}=0$$

$$-\frac{u_{3,3}}{36}+\frac{u_{4,4}}{36}=0$$

$$u_{0,0} = 1$$

$$u_{1,0} = 1$$

$$\frac{u_{2,0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{3,0}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{4,0}}{24} = \frac{1}{24}$$

$$u_{0,1} = 2$$

$$\frac{u_{0,2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{0,3}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{0,4}}{24} = \frac{1}{24}$$

(5.145) denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesi ile

$$\begin{array}{lllll} u_{0,0} = 1, & u_{0,1} = 2, & u_{0,2} = 1, & u_{0,3} = 1, & u_{0,4} = 1, \\ u_{1,0} = 1, & u_{1,1} = 1, & u_{1,2} = 1, & u_{1,3} = 1, & u_{1,4} = 1, \\ u_{2,0} = 1, & u_{2,1} = 1, & u_{2,2} = 1, & u_{2,3} = 1, & u_{2,4} = 1, \\ u_{3,0} = 1, & u_{3,1} = 1, & u_{3,2} = 1, & u_{3,3} = 1, & u_{3,4} = 1, \\ u_{4,0} = 1, & u_{4,1} = 1, & u_{4,2} = 1, & u_{4,3} = 1, & u_{4,4} =1 \end{array} \qquad (5.146)$$

(5.146) katsayıları elde edilir. $u(x,t)$ nin $N = 4$ için $(x,t) = (0,0)$ noktası civarındaki çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{4} \sum_{m=0}^{4} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n . t^m \ , \qquad a \leq 0 \ , \ \ 0 \leq b \qquad (5.147)$$

(5.147) eşitliğinde olacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}$ ler u nun n ve m ye göre türevleridir. Çözüm olarak, elde ettiğimiz katsayıları (5.147) seri açılımında yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u(x,t) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + t\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) \\ + t^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48}\right) + t^3\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{144}\right) \\ + t^4\left(\frac{1}{24} + \frac{x}{24} + \frac{x^2}{48} + \frac{x^3}{144} + \frac{x^4}{576}\right) \end{aligned} \qquad (5.148)$$

(5.148) denklemi elde edilir. Bu açılım $x^2t^2 + e^{x+t}$ fonksiyonunu $N = 4$n ile kesilmiş sonlu Taylor seri açılımına denktir. Dolayısıyla çözüm$x^2t^2 + e^{x+t}$ olarak bulunur. Bu sonuç [4] de verilen sonuç ile aynıdır.

Örnek 5: Lineer olmayan

$$u_{xt} = -u^3 + x^3 + 3x^2t + 3xt^2 + t^3 \qquad (5.149)$$

(5.149) denklemi ile

$$u(x,0) = x\,, \qquad u(0,t) = t, \qquad u(0,0) = 0 \qquad (5.150)$$

(5.150) sınır koşulları göz önüne alınacaktır. Bu problemin çözümü bulunurken Bölüm 4.2 de verilen bilgiler kullanılacaktır. Lineer kısım ve lineer olmayan kısım ayrı ayrı incelenecektir. Gereken matrisler bulunup denklemde yerine yazılıp oluşan matris denklemi çözülecektir. $u(x,t)$çözümüne $(x,t) = (0,0)$ noktası civarında

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n . t^m\,, \qquad a \leq 0\,,\ \ 0 \leq b \qquad (5.151)$$

$N = 3$ için sonlu Taylor serisi ile yaklaşılacaktır. Bölüm 3 te tanımlanan (3.13), (3.8), (3.7), (3.24) ve (3.25) matrislerini $N = 3$ için

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.152}$$

$$M_1^{\,t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.153}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{(0,0)} & u_{(0,1)} & u_{(0,2)} & u_{(0,3)} \\ u_{(1,0)} & u_{(1,1)} & u_{(1,2)} & u_{(1,3)} \\ u_{(2,0)} & u_{(2,1)} & u_{(2,2)} & u_{(2,3)} \\ u_{(3,0)} & u_{(3,1)} & u_{(3,2)} & u_{(3,3)} \end{bmatrix} \tag{5.154}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \end{bmatrix} \tag{5.155}$$

$$\overline{U} = \begin{bmatrix} u^3{}_{(0,0)} & u^3{}_{(0,1)} & u^3{}_{(0,2)} & u^3{}_{(0,3)} \\ u^3{}_{(1,0)} & u^3{}_{(1,1)} & u^3{}_{(1,2)} & u^3{}_{(1,3)} \\ u^3{}_{(2,0)} & u^3{}_{(2,1)} & u^3{}_{(2,2)} & u^3{}_{(2,3)} \\ u^3{}_{(3,0)} & u^3{}_{(3,1)} & u^3{}_{(3,2)} & u^3{}_{(3,3)} \end{bmatrix} \tag{5.156}$$

(5.153), (5.154), (5.155), ve (5.156) şeklinde olur. (5.149) denkleminde

K(x,y)=$x^3 + 3x^2t + 3xt^2 + t^3$

dir. O halde K matrisi

$$K=\begin{bmatrix}0&0&0&6\\0&0&6&0\\0&6&0&0\\6&0&0&0\end{bmatrix} \tag{5.157}$$

(5.157) olur. Şimdi buna göre (5.149) denklemi düzenlenirse bu denklemin matris şekli

$$M_1UM_1{}^t+M\bar{U}M^t=MKM^t \tag{5.158}$$

(5.158) denklemi olacaktır. (5.158) matris denkleminde lineer olan ve lineer olmayan kısımların matris yazımları ayrı ayrı gösterilecektir. İlk olarak denklemin lineer kısmı olan $M_1UM_1{}^t$ matrisinin $N=3$ için gösterimi

$$\begin{bmatrix}u_{1,1}&u_{1,2}&\dfrac{u_{1,3}}{2}&0\\u_{2,1}&u_{2,2}&\dfrac{u_{2,3}}{2}&0\\\dfrac{u_{3,1}}{2}&\dfrac{u_{3,2}}{2}&\dfrac{u_{3,3}}{4}&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{5.159}$$

(5.159) matrisi olacaktır. Lineer olmayan kısmın matris denklemini açık olarak yazmak için $\bar{U}$ matrisi $N=3$ için

$$\bar{U}=\begin{bmatrix}u^3{}_{(0,0)}&u^3{}_{(0,1)}&u^3{}_{(0,2)}&u^3{}_{(0,3)}\\u^3{}_{(1,0)}&u^3{}_{(1,1)}&u^3{}_{(1,2)}&u^3{}_{(1,3)}\\u^3{}_{(2,0)}&u^3{}_{(2,1)}&u^3{}_{(2,2)}&u^3{}_{(2,3)}\\u^3{}_{(3,0)}&u^3{}_{(3,1)}&u^3{}_{(3,2)}&u^3{}_{(3,3)}\end{bmatrix} \tag{5.160}$$

(5.160) şeklinde olacaktır. (5.160) matrisinin elemanlarını yani u^3 ün x e ve y ye göre türevlerini daha açık olarak belirtelim. Bu elemanlar

$$\begin{aligned}u^3{}_{(0,0)}&=u^3\\u^3{}_{(0,1)}&=3u^2{}_{0,0}u_{0,1}\\u^3{}_{(0,2)}&=\left(6u_{0,0}u^2{}_{0,1}+3u^2{}_{0,0}u_{0,2}\right)\\u^3{}_{(0,3)}&=\left(6u^3{}_{0,1}+18u_{0,0}u_{0,1}u_{0,2}+3u^2{}_{0,0}u_{0,3}\right)\end{aligned} \tag{5.161}$$

$$u^3{}_{(1,0)} = 3u^2{}_{0,0}u_{1,0}$$

$$u^3{}_{(1,1)} = 6u_{0,0}u_{0,1}u_{1,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{1,1}$$

$$u^3{}_{(1,2)} = \left(6u^2{}_{0,1}u_{1,0} + 6u_{0,0}u_{0,2}u_{1,0} + 12u_{0,0}u_{0,1}u_{1,1} + 3u^2{}_{0,0}u_{1,2}\right)$$

$$u^3{}_{(1,3)} = \left(18u_{0,1}u_{0,2}u_{1,0} + 6u_{0,0}u_{0,3}u_{1,0} + 18u^2{}_{0,1}u_{1,1} + 18u_{0,0}u_{0,2}u_{1,1} \right.$$
$$\left. + 18u_{0,0}u_{0,1}u_{1,2} + 3u^2{}_{0,0}u_{1,3}\right)$$

$$u^3{}_{(2,0)} = \left(6u_{0,0}u^2{}_{1,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{2,0}\right)$$

$$u^3{}_{(2,1)} = \left(6u_{0,1}u^2{}_{1,0} + 12u_{0,0}u_{1,0}u_{1,1} + 6u_{0,0}u_{0,1}u_{2,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{2,1}\right)$$

$$u^3{}_{(2,2)} = \left(6u_{0,2}u^2{}_{1,0} + 24u_{0,1}u_{1,0}u_{1,1} + 12u_{0,0}u^2{}_{1,1} + 12u_{0,0}u_{1,0}u_{1,2} \right.$$
$$\left. + 6u^2{}_{0,1}u_{2,0} + 6u_{0,0}u_{0,2}u_{2,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{2,2}\right)$$

$$u^3{}_{(2,3)} = \left(6u_{0,3}u^2{}_{1,0} + 36u_{0,2}u_{1,0}u_{1,1} + 36u_{0,1}u^2{}_{1,1} + 36u_{0,1}u_{1,0}u_{1,2} \right.$$
$$+ 36u_{0,0}u_{1,1}u_{1,2} + 12u_{0,0}u_{1,0}u_{1,3} + 18u_{0,1}u_{0,2}u_{2,0}$$
$$+ 6u_{0,0}u_{0,3}u_{2,0} + 18u^2{}_{0,1}u_{2,1} + 18u_{0,0}u_{0,2}u_{2,1} + 18u_{0,0}u_{0,1}u_{2,2}$$
$$\left. + 3u^2{}_{0,0}u_{2,3}\right)$$

$$u^3{}_{(3,0)} = \left(6u^3{}_{1,0} + 18u_{0,0}u_{1,0}u_{2,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{3,0}\right)$$

$$u^3{}_{(3,1)} = \left(18u^2{}_{1,0}u_{1,1} + 18u_{0,1}u_{1,0}u_{2,0} + 18u_{0,0}u_{1,0}u_{2,0} + 18u_{0,0}u_{1,0}u_{2,1} \right.$$
$$\left. + 6u_{0,0}u_{0,1}u_{3,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{3,1}\right)$$

$$u^3{}_{(3,2)} = \left(36u_{1,0}u^2{}_{1,1} + 18u^2{}_{1,0}u_{1,2} + 18u_{0,2}u_{1,0}u_{2,0} + 36u_{0,1}u_{1,1}u_{2,0} \right.$$
$$+ 18u_{0,0}u_{1,2}u_{2,0} + 36u_{0,1}u_{1,0}u_{2,1} + 36u_{0,0}u_{1,1}u_{2,1}$$
$$+ 18u_{0,0}u_{1,0}u_{2,2} + 6u^2{}_{0,1}u_{3,0} + 6u_{0,0}u_{0,2}u_{3,0} + 12u_{0,0}u_{0,1}u_{3,1}$$
$$\left. + 3u^2{}_{0,0}u_{3,2}\right)$$

$$u^3{}_{(3,3)} = \big(36u^3{}_{1,1} + 108u_{1,0}u_{1,1}u_{1,2} + 18u^2{}_{1,0}u_{1,3} + 18u_{0,3}u_{1,0}u_{2,0}$$
$$+ 54u_{0,2}u_{1,1}u_{2,0} + 54u_{0,1}u_{1,2}u_{2,0} + 18u_{0,0}u_{1,3}u_{2,0}$$
$$+ 54u_{0,2}u_{1,0}u_{2,1} + 108u_{0,1}u_{1,1}u_{2,1} + 54u_{0,0}u_{1,2}u_{2,1}$$
$$+ 54u_{0,1}u_{1,0}u_{2,2} + 54u_{0,0}u_{1,1}u_{2,2} + 18u_{0,0}u_{1,0}u_{2,3}$$
$$+ 18u_{0,1}u_{0,2}u_{0,3} + 6u_{0,0}u_{0,0}u_{3,0} + 18u^2{}_{0,1}u_{3,1} + 18u_{0,0}u_{0,2}u_{3,1}$$
$$+ 18u_{0,0}u_{0,1}u_{3,2} + 3u^2{}_{0,0}u_{3,3}\big)$$

(5.161) eşitliklerinde olduğu gibidir. Bu elemanlar $\overline{U}$ matrisinde yerlerine yazılırsa denklemin lineer olmayan kısmının matris formu olan $M\overline{U}M^t$ matrisi bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki *K(x,t)* matrisinin ise arttırılmış matris biçimi Bölüm 4.1 de anlatıldığı gibi alınacaktır. Dolayısıyla son satır ve son sütun elemanları hariç olmak üzere satır matrisi olarak yazılırsa arttırılmış matrisi elde edilmiş olur. Şimdi koşulların matris gösterimini yazalım. Verilen (5.149) denklemi için koşullar (5.150) de

$$u(x,0) = x \tag{5.162}$$

$$u(0,t) = t \tag{5.163}$$

$$u(0,0) = 0 \tag{5.164}$$

(5.162), (5.163) ve (5.164) eşitlikleri olarak verildiğinden koşullar için eşitliğin sol tarafı (3.30), (3.32) ve (3.34) eşitliklerinde belirtildiği gibi yazılırsa koşulların matrisleri

$$XMUM^tY_{(0)}^{(0)} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,] \tag{5.165}$$

$$X_{(0)}^{(0)}MUM^tY = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{5.166}$$

$$X_{(0)}^{(0)}MUM^tY_{(0)}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{5.167}$$

(5.165), (5.166) ve (5.167) olarak yazılır. Lineer kısmın arttırılmış matris denklemi için ilk koşulun tüm elemanları, 2. Koşulun ise ilk elemanı hariç diğer 3 elemanı son satırından sonra 7 satır eklenerek yazılacaktır. Lineer olmayan kısım için koşul olmadığından bu kısmın matris formunun son satırından sonra 7 tane sıfır elemanı yazılacaktır. (5.158) matris denkleminde lineer olan ve lineer olmayan kısımlar için yukarıda belirtilen işlemler yapılıp matris denkleminde yerine yazılırsa

$$u^3{}_{0,0} + u_{1,1} = 0$$

$$3u^2{}_{0,0}u_{1,1} + u_{1,2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(6u_{0,0}u^2{}_{0,1} + 3u^2{}_{0,0}u_{0,2}\right) + \frac{u_{1,3}}{2} = 0 \tag{5.168}$$

$$u_{0,0} = 0$$

$$3u^2{}_{0,0}u_{1,0} + u_{2,1} = 0$$

$$6u_{0,0}u_{0,1}u_{1,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{1,1} + u_{2,2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(6u^2{}_{0,1}u_{1,0} + 6u_{0,0}u_{0,2}u_{1,0} + 12u_{0,0}u_{0,1}u_{1,1} + 3u^2{}_{0,0}u_{1,2}\right) + \frac{u_{2,3}}{2} = 3$$

$$u_{1,0} = 1$$

$$\frac{1}{2}\left(6u_{0,0}u^2{}_{1,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{2,0}\right) + \frac{u_{3,1}}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(6u_{0,1}u^2{}_{1,0} + 12u_{0,0}u_{1,0}u_{1,1} + 6u_{0,0}u_{0,1}u_{2,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{2,1}\right) + \frac{u_{3,2}}{2} = 3$$

$$\frac{1}{4}\left(6u_{0,2}u^2{}_{1,0} + 24u_{0,1}u_{1,0}u_{1,1} + 12u_{0,0}u^2{}_{1,1} + 12u_{0,0}u_{1,0}u_{1,2} + 6u^2{}_{0,1}u_{2,0}\right.$$
$$\left. + 6u_{0,0}u_{0,2}u_{2,0} + 3u^2{}_{0,0}u_{2,2}\right) + \frac{u_{3,3}}{4} = 0$$

$$\frac{u_{2,0}}{2} = 0$$

$$u_{0,1} = 1$$

$$\frac{u_{0,2}}{2} = 0$$

$$\frac{u_{0,3}}{6} = 0$$

$$\frac{u_{3,0}}{6} = 0$$

(5.168) denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse

$$u_{0,0}=0, \quad u_{0,1}=1, \quad u_{0,2}=0, \quad u_{0,3}=0, \quad u_{0,4}=0,$$
$$u_{1,0}=1, \quad u_{1,1}=0, \quad u_{1,2}=0, \quad u_{1,3}=0, \quad u_{1,4}=0, \qquad (5.169)$$
$$u_{2,0}=0, \quad u_{2,1}=0, \quad u_{2,2}=0, \quad u_{2,3}=0, \quad u_{2,4}=0,$$
$$u_{3,0}=0, \quad u_{3,1}=0, \quad u_{3,2}=0, \quad u_{3,3}=0, \quad u_{3,4}=0$$

(5.169) katsayıları elde edilir. $u(x,t)$nin $N=3$ için $(x,t)=(0,0)$ noktası civarındaki çözümü

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}\frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n!\times m!}x^n.t^m\,, \qquad a\leq 0\,,\ \ 0\leq b \qquad (5.170)$$

(5.170) olacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}$ ler u nun n ve m ye göre türevleridir. Çözüm olarak,elde ettiğimiz katsayıları (5.170) seri açılımında yerine yazarsak $u(x,t)=x+t$ elde edilir. Bu sonuç [4] de verilen sonuç ile aynıdır.

Örnek 6: Lineer olmayan

$$u_{xt}=-u^2+\ e^{2x}+e^{2t}+2e^{x+t} \qquad (5.171)$$

(5.171) denklemi ile

$$u(x,0)=1+\ e^{x}, \qquad u(0,t)=1+\ e^{t}, \qquad u(0,0)=2 \qquad (5.172)$$

(5.172) sınır koşulları göz önüne alınacaktır. Lineer kısım ve lineer olmayan kısım ayrı ayrı incelenecektir. Gereken matrisler bulunup (5.171) denkleminde yerine yazılıp oluşan matris denklemi çözülecektir. $u(x,t)$çözümüne $(x,t)=(0,0)$ noktası civarında

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{4}\sum_{m=0}^{4}\frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n!\times m!}x^n.t^m\,, \qquad a\leq 0\,,\ \ 0\leq b \qquad (5.173)$$

$N=4$ için sonlu Taylor serisi ile yaklaşılacaktır. Bölüm 3 te tanımlanan (3.13),(3.8), (3.7),(3.24) ve (3.25) matrislerini *N=4* için yazarsak

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.174}$$

$$M_1^{\,t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.175}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & u_{0,3} & u_{0,4} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ u_{3,0} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} \\ u_{4,0} & u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{bmatrix} \tag{5.176}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} \end{bmatrix} \tag{5.177}$$

$$\overline{U} = \begin{bmatrix} u^2{}_{(0,0)} & u^2{}_{(0,1)} & u^2{}_{0,2} & u^2{}_{(0,3)} & u^2{}_{(0,4)} \\ u^2{}_{(1,0)} & u^2{}_{(1,1)} & u^2{}_{(1,2)} & u^2{}_{(1,3)} & u^2{}_{(1,4)} \\ u^2{}_{(2,0)} & u^2{}_{(2,1)} & u^2{}_{(2,2)} & u^2{}_{(2,3)} & u^2{}_{(2,4)} \\ u^2{}_{(3,0)} & u^2{}_{(3,1)} & u^2{}_{(3,2)} & u^2{}_{(3,3)} & u^2{}_{(3,4)} \\ u^2{}_{(4,0)} & u^2{}_{(4,1)} & u^2{}_{(4,2)} & u^2{}_{(4,3)} & u^2{}_{(4,4)} \end{bmatrix} \tag{5.178}$$

(5.174), (5.176), (5.177) ve (5.178)olur. (5.171) denkleminde

$K(x,y)=e^{2x}+e^{2t}+2e^{x+t}$

dir. O halde K matrisi

$$K=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 10 & 18 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 10 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 18 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.179}$$

(5.179) şeklinde olur. Şimdi buna göre (5.171) denklemi düzenlenirse bu denklemin matris şekli

$$M_1 U {M_1}^t + M\bar{U}M^t = MKM^t \tag{5.180}$$

(5.180) denklemi olacaktır. (5.180) matris denkleminde lineer olan ve lineer olmayan kısımların matrisleri ayrı ayrı gösterilecektir. İlk olarak (5.180) matris denkleminin lineer kısmı olan $M_1 U {M_1}^t$ matrisinin $N=4$ için gösterimi

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \frac{u_{1,3}}{2} & \frac{u_{1,4}}{6} & 0 \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \frac{u_{2,3}}{2} & \frac{u_{2,4}}{6} & 0 \\ \frac{u_{3,1}}{2} & \frac{u_{3,2}}{2} & \frac{u_{3,3}}{4} & \frac{u_{3,4}}{12} & 0 \\ \frac{u_{4,1}}{6} & \frac{u_{4,2}}{6} & \frac{u_{4,3}}{12} & \frac{u_{4,4}}{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.181}$$

(5.181) matrisi olacaktır. Lineer olmayan kısmın matris denklemini açık olarak yazmak için $\bar{U}$ matrisi $N=4$ için

$$\overline{U}=\begin{bmatrix} u^2{}_{(0,0)} & u^2{}_{(0,1)} & u^2{}_{0,2} & u^2{}_{(0,3)} & u^2{}_{(0,4)} \\ u^2{}_{(1,0)} & u^2{}_{(1,1)} & u^2{}_{(1,2)} & u^2{}_{(1,3)} & u^2{}_{(1,4)} \\ u^2{}_{(2,0)} & u^2{}_{(2,1)} & u^2{}_{(2,2)} & u^2{}_{(2,3)} & u^2{}_{(2,4)} \\ u^2{}_{(3,0)} & u^2{}_{(3,1)} & u^2{}_{(3,2)} & u^2{}_{(3,3)} & u^2{}_{(3,4)} \\ u^2{}_{(4,0)} & u^2{}_{(4,1)} & u^2{}_{(4,2)} & u^2{}_{(4,3)} & u^2{}_{(4,4)} \end{bmatrix} \tag{5.182}$$

(5.182) şeklinde olacaktır. (5.182) matrisinin elemanlarını yani u^2 ün x e ve y ye göre türevlerini daha açık olarak belirtelim. Bu elemanlar

$$u^2{}_{(0,0)} = u^2$$

$$u^2{}_{(0,1)} = 2u_{0,0}u_{0,1}$$

$$u^2{}_{(0,2)} = \left(2u^2{}_{0,1} + 2u_{0,0}u_{0,2}\right)$$

$$u^2{}_{(0,3)} = \left(6u_{0,1}u_{0,2} + 2u_{0,0}u_{0,3}\right)$$

$$u^2{}_{(1,0)} = 2u_{0,0}u_{1,0}$$

$$u^2{}_{(1,1)} = 2u_{0,1}u_{1,0} + 2u_{0,0}u_{1,1}$$

$$u^2{}_{(1,2)} = \left(2u_{0,2}u_{1,0} + 4u_{0,1}u_{1,1} + 2u_{0,0}u_{1,2}\right) \tag{5.183}$$

$$u^2{}_{(1,3)} = \left(2u_{0,3}u_{1,0} + 6u_{0,2}u_{1,1} + 6u_{0,1}u_{1,2} + 2u_{0,0}u_{1,3}\right)$$

$$u^2{}_{(2,0)} = \left(2u^2{}_{1,0} + 2u_{0,0}u_{2,0}\right)$$

$$u^2{}_{(2,1)} = \left(4u_{1,0}u_{1,1} + 2u_{0,1}u_{2,0} + 2u_{0,0}u_{2,1}\right)$$

$$u^2{}_{(2,2)} = \left(4u^2{}_{1,1} + 4u_{1,0}u_{1,2} + 2u_{0,2}u_{2,0} + 4u_{0,1}u_{2,1} + 2u_{0,0}u_{2,2}\right)$$

$$u^2{}_{(2,3)} = (12u_{1,1}u_{1,2} + 4u_{1,0}u_{1,3} + 2u_{0,3}u_{2,0} + 6u_{0,2}u_{2,1} + 6u_{0,1}u_{2,2} \\ + 2u_{0,0}u_{2,3})$$

$$u^2{}_{(3,1)} = \left(6u_{1,1}u_{2,0} + 6u_{1,0}u_{2,1} + 2u_{0,1}u_{3,0} + 2u_{0,0}u_{3,1}\right)$$

$$u^2{}_{(3,2)} = (6u_{1,2}u_{2,0} + 12u_{1,1}u_{2,1} + 6u_{1,0}u_{2,2} + 2u_{0,2}u_{3,0} + 4u_{0,1}u_{3,1} \\ + 2u_{0,0}u_{3,2})$$

$$u^3{}_{(3,3)} = \big(6u_{1,3}u_{2,0} + 18u_{1,2}u_{2,1} + 18u_{1,1}u_{2,2} + 6u_{1,0}u_{2,3} + 2u_{0,3}u_{3,0} + 6u_{0,2}u_{3,1} + 6u_{0,1}u_{3,2} + 2u_{0,0}u_{3,3}\big)$$

$$u^2{}_{(4,0)} = \big(6u^2{}_{2,0} + 8u_{1,0}u_{3,0} + 2u_{0,0}u_{4,0}\big)$$

$$u^2{}_{(4,1)} = \big(12u_{2,0}u_{2,1} + 8u_{1,1}u_{3,0} + 8u_{1,0}u_{3,1} + 2u_{0,1}u_{4,0} + 2u_{0,0}u_{4,1}\big)$$

$$u^2{}_{(4,2)} = \big(12u^2{}_{2,1} + 12u_{2,0}u_{2,2} + 8u_{1,2}u_{3,0} + 16u_{1,1}u_{3,1} + 8u_{1,0}u_{3,2} + 2u_{0,2}u_{4,0} + 4u_{0,1}u_{4,1} + 2u_{0,0}u_{4,2}\big)$$

$$u^2{}_{(4,3)} = \big(36u_{2,1}u_{2,2} + 12u_{2,0}u_{2,3} + 8u_{1,3}u_{3,0} + 24u_{1,2}u_{3,1} + 24u_{1,1}u_{3,2} + 8u_{1,0}u_{3,3} + 2u_{0,3}u_{4,0} + 6u_{0,2}u_{4,1} + 6u_{0,1}u_{4,2}\big) + 2u_{0,0}u_{4,3}$$

$$u^2{}_{(4,4)} = \big(36u^2{}_{2,2} + 48u_{2,1}u_{2,3} + 12u_{2,0}u_{2,4} + 8u_{1,4}u_{3,0} + 32u_{1,3}u_{3,1} + 48u_{1,2}u_{3,2} + 32u_{1,1}u_{3,3} + 8u_{1,0}u_{3,4} + 2u_{0,4}u_{4,0} + 8u_{0,3}u_{4,1} + 12u_{0,2}u_{4,2} + 8u_{0,1}u_{4,3} + 2u_{0,0}u_{4,4}\big)$$

biçimindedir. Bu elemanlar $\overline{U}$ matrisinde yerlerine yazılır ve (5.171) denkleminin lineer olmayan kısmının matris formu olan $M\overline{U}M^t$ matrisi bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki *K(x,y)* matrisinin ise arttırılmış matris biçimi Bölüm 4.1 de anlatıldığı gibi alınacaktır. Dolayısıyla son satır ve son sütun elemanları hariç olmak üzere satır matrisi olarak yazılırsa arttırılmış matrisi elde edilmiş olur. Şimdi koşulların matris gösterimini yazalım. Verilen (5.171) denklemi için koşullar (5.172) de

$$u(x,0) = 1 + e^x \tag{5.184}$$

$$u(0,t) = 1 + e^t \tag{5.185}$$

$$u(0,0) = 2 \tag{5.186}$$

(5.184), (5.185), ve (5.186) olarak verildiğinden bu koşullar için önce eşitliğin sağ tarafının $N = 3$ için sonlu Taylor seri açılımı yazılırsa

$$1 + e^x = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \tag{5.187}$$

$$1 + e^t = 2 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} \tag{5.188}$$

(5.187) ve (5.188) eşitlikleri şeklinde olacaktır. Koşullar için eşitliğin sol tarafı ise (3.30), (3.32) ve (3.34) denklemlerinde belirtildiği gibi yazılırsa koşulların matrisleri sırasıyla

$$XMUM^{t}Y^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{5.189}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^{t}Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{5.190}$$

$$X^{(0)}{}_{(0)}MUM^{t}Y^{(0)}{}_{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.191}$$

(5.189), (5.190) ve (5.191) olarak yazılır. Lineer kısmın arttırılmış matris denklemi için ilk koşulun tüm elemanları, 2. koşulun ise ilk elemanı hariç diğer 4 elemanı son satırından sonra 9 satır eklenerek yazılacaktır. Lineer olmayan kısım için koşul olmadığından bu kısmın matris formunun son satırından sonra 9 tane sıfır elemanı yazılacaktır. (5.180) matris denkleminde lineer olan ve lineer olmayan kısımlar için yukarıda belirtilen işlemler yapılıp yerine yazılırsa

$$u^2{}_{(0,0)} + u_{(1,1)} = 4$$

$$2u_{0,0}u_{0,1} + u_{1,2} = 4$$

$$\frac{1}{2}\left(2u^2{}_{0,1} + 2u_{0,0}u_{0,2}\right) + \frac{u_{1,3}}{2} = 3$$

$$\frac{1}{6}\left(6u_{0,1}u_{0,2} + 2u_{0,0}u_{0,3}\right) + \frac{u_{1,4}}{6} = \frac{5}{3} \tag{5.192}$$

$$u_{0,0} = 2$$

$$2u_{0,0}u_{1,0} + u_{2,1} = 4$$

$$2u_{0,1}u_{1,0} + 2u_{0,0}u_{1,1} + u_{2,2} = 2$$

$$\frac{1}{2}\left(2u_{0,2}u_{1,0} + 4u_{0,1}u_{1,1} + 2u_{0,0}u_{1,2}\right) + \frac{u_{2,3}}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2}\left(2u_{0,3}u_{1,0} + 6u_{0,2}u_{1,1} + 6u_{0,1}u_{1,2} + 2u_{0,0}u_{1,3}\right) + \frac{u_{2,4}}{6} = \frac{1}{3}$$

$$u_{1,0} = 1$$

$$\frac{1}{2}\left(2u^2{}_{1,0} + 2u_{0,0}u_{2,0}\right) + \frac{u_{3,1}}{2} = 3$$

$$\frac{1}{2}\left(4u_{1,0}u_{1,1} + 2u_{0,1}u_{2,0} + 2u_{0,0}u_{2,1}\right) + \frac{u_{3,2}}{2} = 1$$

$$\frac{1}{4}\left(4u^2{}_{1,1} + 4u_{1,0}u_{1,2} + 2u_{0,2}u_{2,0} + 4u_{0,1}u_{2,1} + 2u_{0,0}u_{2,2}\right) + \frac{u_{3,3}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{12}\left(12u_{1,1}u_{1,2} + 4u_{1,0}u_{1,3} + 2u_{0,3}u_{2,0} + 6u_{0,2}u_{2,1} + 6u_{0,1}u_{2,2} + 2u_{0,0}u_{2,3}\right) + \frac{u_{3,4}}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{2,0}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6}\left(6u_{1,0}u_{2,0} + 2u_{0,0}u_{3,0}\right) + \frac{u_{4,1}}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{6}\left(6u_{1,1}u_{2,0} + 6u_{1,0}u_{2,1} + 2u_{0,1}u_{3,0} + 2u_{0,0}u_{3,1}\right) + \frac{u_{4,2}}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{12}\left(6u_{1,2}u_{2,0} + 12u_{1,1}u_{2,1} + 6u_{1,0}u_{2,2} + 2u_{0,2}u_{3,0} + 4u_{0,1}u_{3,1} + 2u_{0,0}u_{3,2}\right) + \frac{u_{4,3}}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{12}(6u_{1,3}u_{2,0} + 18u_{1,2}u_{2,1} + 18u_{1,1}u_{2,2} + 6u_{1,0}u_{2,3} + 2u_{0,3}u_{3,0} + 6u_{0,2}u_{3,1} + 6u_{0,1}u_{3,2} + 2u_{0,0}u_{3,3}) + \frac{u_{4,4}}{36} = \frac{1}{18}$$

$$u_{0,1} = 1$$

$$\frac{u_{0,2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{0,3}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{u_{0,4}}{24} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{u_{4,0}}{24} = \frac{1}{24}$$

(5.192) denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse

$$\begin{array}{lllll} u_{0,0} = 2, & u_{0,1} = 1, & u_{0,2} = 1, & u_{0,3} = 1, & u_{0,4} = 1, \\ u_{1,0} = 1, & u_{1,1} = 0, & u_{1,2} = 0, & u_{1,3} = 0, & u_{1,4} = 0, \\ u_{2,0} = 1, & u_{2,1} = 0, & u_{2,2} = 0, & u_{2,3} = 0, & u_{2,4} = 0, \\ u_{3,0} = 1, & u_{3,1} = 0, & u_{3,2} = 0, & u_{3,3} = 0, & u_{3,4} = 0, \\ u_{4,0} = 1, & u_{4,1} = 0, & u_{4,2} = 0, & u_{4,3} = 0, & u_{4,4} = 0 \end{array} \qquad (5.193)$$

(5.193) katsayıları elde edilir. $u(x,t)$nin $N = 4$ için $(x,t) = (0,0)$ noktası civarındaki çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{4} \sum_{m=0}^{4} \frac{u^{(n,m)}(0,0)}{n! \times m!} x^n . t^m \; , \qquad a \leq 0\, , \;\; 0 \leq b \qquad (5.194)$$

(5.194) denklemi olacaktır. Buradaki $u^{(n,m)}$ ler u nun n ve m ye göre türevleridir. Çözüm olarak, elde ettiğimiz katsayıları (5.194) seri açılımında yerine yazarsak

$$u(x,t) = 2 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \qquad (5.195)$$

(5.195) denklemi elde edilir. Bu açılım $e^x + e^t$ fonksiyonunun $N = 4$ için sonlu Taylor seri açılımına denktir. Dolayısıyla çözüm $e^x + e^t$ olarak bulunur. Bu sonuç [4] de verilen sonuç ile aynıdır.

6. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Taylor matris yöntemi, daha önce birçok araştırmacı tarafından çeşitli türden diferansiyel ve integral denklemlere uygulanmıştır. Bu yöntem ışığında diferansiyel ve integral denklemlerin yaklaşık çözümlerinin, işlem karmaşalıklarına yol açmadan bilgisayar programları yardımıyla kolaylıkla hesaplanabildiği kanıtlanmıştır.

Bu çalışmada da Taylor matris yöntemi biraz değiştirilerek linner ve lineer olmayan Goursat problemlerine uygulanmıştır ve bu problemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar diğer sonuçlarla karşılaştırılmış ve sonuçların aynı olduğu görülmüştür.

Bu da Taylor matris yönteminin lineer ve lineer olmayan Gousat problemlerinin yaklaşık çözümü için doğru ve kullanışlı bir yöntem olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR

1. Gülsu, M., Sezer, M.On the Solution of Ricatti Equation bye the Taylor Matrix Method, Applied Mathematics and Computation, 176, 414-421, 2006.
2. Keşan, C., Taylor Polynomial Solutions of Linear Differential Equations, Applied Mathematics and Computation, 142, 155-165, 2003.
3. Keşan, C., Taylor Polinomial Solutions of Second Order Linear Partial Differential Equations, Applied Mathematics and Computation, 152, 29-41, 2004.
4. Wazwaz, A., The varitional interation Method for A Reliable Treatment of The Linear and The Non-Linear Goursat Problem, Applied Mathematics and Computation, 193, 455-462,
5. Stephenson, G., Mathematical Methods For Science Students, Longman Group Limited, London, 1975.
6. Ross, S.L., Differention Equations, John Wiley and Sons Inc., Newyork, 318, 1974.
7. Kanwal, R.P., Liu, K.C., A Taylor Expansion Approach for Solving İntegral Equations, Int. T. Math. Educ. Sci. Technology, 3, 1989.
8. Sezer, M., The solutions of Certain Classes of Fredholm Integral Equations by means of Taylor Series, Uludağ Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi, Vol 8,2, 17-42.
9. Köroğlu, H., Chebyshev Series Solution of integro Differential Equations, Doktora Tezi, D.E. Üniversitesi, fen Bilimleri Enstitüsü, 1995.
10. Sezer, M., Doğan, S., A Taylor Polinomial Approximation for Solving Linear Fredholm Integral Equations, D.E. Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, eğitim Bilimleri Dergisi, Yıl 2, Sayı 2, 39-49,1993.
11. Gülsu, M., Sezer, M., The Approximate Solution of High-Order Linear Difference Equation with Vairable Coefficients in Terms of Taylor Polinomials, Applied Mathematics and Computation, 168, 76-88, 2005.
12. Sezer, M., Gülsu, M., A new Polynomial Approach for Solving Difference and Fredholm Integro-Difference Equations with mixed Argument, Applied Mathematics and Computation, 171, 332-344, 2005.

13. Sezer, M., Gülsu, M., Polinomial Solutions of the Most General Linear Fredholm Integro Differential-Difference Equation by Means of Taylor Matrix Method, Int. J. Complex Variables, 50, 367-382, 2005.

14. Gülsu, M., Sezer, M., A Method for the Approximate Solution of the High-Order Linear Difference Equation in Terms of Taylor Polynomials, Int. J. Comput. Math., 82, 629-642, 2005.

15. Gülsu, M., Sezer, M., Güney, Z., Approximate Solution of General High-Order Linear Non-Homogenous Difference Equations by Means of Taylor Collocation Method, Applied Mathematics and Computation, 173, 683-693, 2006.

16. Gülsu, M., Sezer, M., A Taylor Polynomial Approach for Solivng Differential-Difference Equations, J. Comput. And Appl. Math., 186, 346-364, 2006.

17. Gülsu, M., Sezer, M., Tanay, B., A Matrix Method for Solving High-Order Linear Difference Equations with Mixed Argument using Hibrid Legendre and Taylor Polynomials, Journal of the Franklin Institute, 343, 647-659, 2006.

18. Yalçınbaş, S., Sezer, M., A Taylor Collocation Method fort he Approximate Solutions of General Linear Fredholm-Volterra Integro-Difference

19. He, J.H., approximate Solution of Nonlinear Differential Equations with Conuolution Product Nonlinearities, Comput. Math. Appl. Mech. Eng., 167, 69-73, 1998.

20. He, J.H., Some Asymptotic Methods of Strongly Nonlinear equations, Int. J. Mod. Phys. B., 20, 1141-1199, 2006.

21. Zhou, J.K., Differential Transformation and Its Application for electrical Circuits, Huarjung University pres, Wuhan, China, 1986.

22. Sezer, M., Tanay, B., Gülsu, M., A Polynomial Approach for Solving High-Order Linear Complex Differential Equations with Variable Coefficients in Disc, Erciyes Üniversitesi FenBilimleri Enstitüsü Dergisi, 25, 374-389, 2009.

23. Akyüz, A., Sezer, M., Chebyshev Polynomial Solutions of Systems of High-Order Linear Differential Equations with Variable Coefficients, Applied Mathematics and Computation, 144,237-247, 2003.

24. Akyüz Daşcıoğlu, A., chebyshev Polynomial Solutions of Systems of Linear Integral Equations, Applied Mathematics and Computation, 151, 221-232, 2004.

25. Dolapci, I.T., Linear Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü için Chebyshev-Sıralama Yöntemi, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya, 1996.

26. Dolapci, I.T., Yaklaşık Simetri Teorileri ve newtonyen Olmayan Bir Akışkan Problemine Uygulanması, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Özge ÖĞÜÇBİLEK 1985 yılında Mersin'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Mersin'de tamamladı. 2000 yılında Yusuf Kakavan Anadolu Lisesini kazandı. 2005 yılında kazandığı Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2009yılında mezun oldu. Aynı yıl Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı.

Telefon : 0 541 383 20 20
e-posta : ozgeogucbilek@gmail.com